



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**YÜKSEK MERTEBEDEN RASYONEL FARK  
DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**Memiş GÜLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mayıs - 2018  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Memiş GÜLER tarafından hazırlanan “YÜKSEK MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 14/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Ozan ÖZKAN

.....

#### Danışman

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARALI  
Enstitü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Memiş GÜLER  
14/05/2018

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## YÜKSEK MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Memiş GÜLER

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2018, 37 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA  
Dr. Ozan ÖZKAN  
Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; rasyonel fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; başlangıç şartları ile  $A, B$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar;  $C, D$  parametreleri pozitif reel sayılar ve  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $q_i$  parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{A + By_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemi tanımlanmış, bu denklemin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı, sınırlılığı parametrelere ve başlangıç şartlarına bağlı olarak incelenmiş ve teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fark denklemi, Denge noktası, Global asimptotik kararlılık, Sınırlılık

## ABSTRACT

## MS THESIS

### A STUDY ON THE HIGHER-ORDER RATIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

Memiş GÜLER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2018, 37 Pages

Jury

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Dr. Ozan ÖZKAN

Dr. Nihat AKGÜNEŞ

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems related to difference equations were given.

In the second section, informations about some of the studies regarding the rational difference equations studied before were given.

In the third section, we defined the difference equation

$$y_{n+1} = \frac{A + By_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}}, n \in \mathbb{N}_0$$

where the initial conditions and the parameters  $A, B$  are nonnegative real numbers, the parameters  $C, D$  are positive real numbers and  $q_i$  for  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  are fixed positive integer. Also, the convergence and the boundedness of the positive solutions of this equation was investigated depending on the parameters and the initial conditions, and some numerical examples regarding the theoretical results were given.

In the fourth section, some conclusions and suggestions were given.

**Keywords:** Difference equation, Equilibrium point, Global asymptotic stability, Boundedness

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarında yardımını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, Dr. Farida BELHANNACHE'ye, teknik desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU'ya ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Memiş GÜLER  
KONYA-2018

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
1.GİRİŞ .....	1
1.1. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	9
3. $y_{n+1} = \frac{A + B y_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}}$ FARK DENKLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ .....	16
3.1. $\alpha > 0$ Durumu .....	17
3.2. $\alpha = 0$ Durumu .....	24
3.3. Nümerik Örnekler .....	27
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
KAYNAKLAR .....	34

## 1.GİRİŞ

Bu çalışma, uygulamalı matematiğin önemli konularından biri olan fark denklemleri üzerine yapılmıştır. Son yıllarda pek çok matematikçinin ilgisini çeken fark denklemleri geniş bir uygulama alanına ve zengin bir literatüre sahiptir. Bu denklemler; mühendislik, genetik, ekonomi, fizik ve biyoloji gibi pek çok alanda karşımıza çıkar. Fark denklemleri alanında yapılan çalışmalar öncelikle uygulamalı matematiğin ve dolaylı olarak bilim ve teknolojinin gelişimine katkı sağlar.

Çalışmamızın birinci bölümünde; fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

İkinci bölümünde; rasyonel fark denklemlerinin pozitif çözümleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bir literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde; literatürdeki denklemler göz önünde bulundurularak rasyonel bir fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı ve sınırlılığı incelenmiştir. Ayrıca, çalışılan fark denklemi için nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde yapılan çalışmanın sonuçları ve konuya dair bazı öneriler verilmiştir.

### 1.1. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 1.1.1.** Bir  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $\Delta$  fark operatörü (ileri fark) veya  $x$  in birinci mertebeden (basamaktan) farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanır; burada  $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$  doğal sayılar kümesi ve  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesidir.

Buna göre  $x$  in ikinci mertebeden farkı ( $\Delta^2 x$ )

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \quad (1.1.2)$$

ve böyle devam ederek  $x$  in  $k$ . mertebeden farkı ( $\Delta^k x$ )

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \quad (1.1.3)$$

şeklinde hesaplanır; burada  $k \geq j$  olmak üzere,

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \quad (1.1.4)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.1.**  $\Delta$  fark operatörü lineerdir; yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \quad (1.1.5)$$

dir; burada  $a$  ve  $b$  sabitlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Örnek 1.1.1.**  $\Delta(7n^2 - 5n + 1) = 7\Delta n^2 - 5\Delta n + \Delta 1 = 14n + 2$  (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.2.**  $E$  öteleme (kaydırma) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1) \quad (1.1.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$E^k x(n) = x(n+k) \quad (1.1.7)$$

dır. Ayrıca,  $a$  ve  $b$  sabitleri için

$$E(ax(n) + by(n)) = aEx(n) + bEy(n) \quad (1.1.8)$$

dir; yani  $E$  operatörü lineerlik özelliğine sahiptir.

$\Delta$  ve  $E$  operatörleri arasında

$$\Delta = E - I \quad (1.1.9)$$

ilişkisi vardır; burada  $I$  özdeşlik operatörüdür; yani  $Ix(n) = x(n)$ .

Buradan

$$\Delta E = E \Delta \quad (1.1.10)$$

değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden,  $k$ . mertebeden fark ve öteleme operatörleri, sırasıyla,

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} \quad (1.1.11)$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Delta^{k-j} \quad (1.1.12)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.2.**

(a) Her  $k, l \in \mathbb{Z}^+$  için  $\Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{k+l}$  ve  $E^k E^l = E^l E^k = E^{k+l}$ ;

(b)  $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$ ;

(c)  $\Delta \left( \frac{x(n)}{y(n)} \right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.3.**  $n \in \mathbb{N}_0$  bağımsız değişken ve  $x$  bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (1.1.13)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.

$E = \Delta + I$  operatörü göz önüne alınırsa, (1.1.13) fark denklemi

$$G(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^k x(n)) = 0 \quad (1.1.14)$$

formunda yazılabilir.

(1.1.13) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.1.15)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^{k-1} x(n)) \quad (1.1.16)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.1.17)$$

formunda ise, normal fark denklemi adını alır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Örnek 1.1.2.** Bir  $S$  cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$\Delta x(n) + 3x(n) = 0, \quad (1.1.18)$$

$$\Delta^2 x(n) + 2\Delta x(n) + x(n) = 0, \quad (1.1.19)$$

$$\Delta^2 x(n) - nx(n) = 2n + 7, \quad (1.1.20)$$

$$x(n)\Delta^3 x(n) = \frac{1}{2}, \quad (1.1.21)$$

$$(\Delta x(n))^2 + x^2(n) = -1 \quad (1.1.22)$$

fark denklemlerini göz önüne alalım; burada  $S$ , bir  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  sayısından başlayan ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir kümesidir. Bu denklemlerin hepsinde bağımsız değişken  $n$  ve bilinmeyen fonksiyon  $x$  tir. (1.1.22) hariç diğerleri normal formda yazılabilen denklemlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Fark denklem literatüründe  $x(n)$  yerine sık sık  $x_n$  sembolü kullanılabilir. Buna göre  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$  olup yukardaki denklemlerin eşdeğerleri sırasıyla

$$x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad (1.1.23)$$

$$x_{n+2} = 0, \quad (1.1.24)$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + (1-n)x_n = 2n + 7, \quad (1.1.25)$$

$$x_n x_{n+3} - 3x_n x_{n+2} + 3x_n x_{n+1} - x_n^2 = \frac{1}{2}, \quad (1.1.26)$$

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + x_n^2 = -1 \quad (1.1.27)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.4.** Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin (indislerinin) farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.5.**  $\mathbb{N}_0$  üzerinde tanımlı bir  $x(n)$  fonksiyonu her  $n \in \mathbb{N}_0$  için (1.1.13) denklemini sağlıyorsa, o zaman  $x(n)$  fonksiyonuna  $\mathbb{N}_0$  üzerinde (1.1.13) denkleminin bir çözümü denir.  $k$ . mertebeden bir fark denkleminin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (1.1.28)$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (1.1.29)$$

şeklinde  $k$  tane  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  keyfi sabit içeren çözüme genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.3.**  $I$  reel sayıların bir aralığı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.30)$$

fark denkleminin bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.6.** Eğer  $\bar{x}$  için (1.1.30) denkleminde  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$  ise  $\bar{x}$  noktasına (1.1.30) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.7.** Eğer her  $n > 0$  için  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J$  iken  $x_n \in J$  olacak şekilde bir  $J \subseteq I$  alt aralığı varsa, bu  $J$  aralığına (1.1.30) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.8.**  $\bar{x}$ , (1.1.30) denkleminin denge noktası olmak üzere:

- (i) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$  iken her  $n \geq -k$  için  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası kararlıdır denir.
- (ii) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- (iii) Eğer her  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise  $\bar{x}$  denge noktasına çekim noktası denir.
- (iv) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve çekim noktası ise  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- (v) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.
- (vi) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$  ve bazı  $N \geq -k$  sayıları için  $|x_N - \bar{x}| \geq r$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.9.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ , (1.1.30) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $n \geq -k$  için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $p$  periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif  $p$  tam sayısına da asal periyod denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.10.** Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü er geç  $p$  periyotludur denir ve  $p$  bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.11.**  $I$  reel sayıların bir aralığı,  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $i = 0, 1, \dots, k$  olmak üzere

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (1.1.31)$$

ifadesi  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  fonksiyonunun  $x_i$  lere göre kısmi türevlerinin  $\bar{x}$  denge

noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.32)$$

denkleminin (1.1.30) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemini denir.

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k q_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.1.33)$$

polinom denkleminin ise (1.1.30) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktasındaki karakteristik denklemini denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

#### **Teorem 1.1.4. (Lineer Kararlılık Teoremi)**

- (i) Eğer (1.1.33) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- (ii) Eğer (1.1.33) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.12.**  $\bar{x}$ , (1.1.30) denkleminin denge noktası olsun.  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından büyük veya eşit,  $x_{l-1} < \bar{x}$  ve  $x_{m+1} < \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde,  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından küçük,  $x_{l-1} \geq \bar{x}$  ve  $x_{m+1} \geq \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.13.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir. (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.14.**  $\{x_n - \bar{x}\}$  dizisi salınımlı ise  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümüne  $\bar{x}$  denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.15.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde her  $n$  için  $P \leq x_n \leq Q$  olacak şekilde  $P$  ve  $Q$  pozitif sayıları varsa  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Teorem 1.1.5. (Clark Teoremi)** (1.1.32) fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için yeter şart  $\sum_{i=0}^k |q_i| < 1$  olmasıdır.

**Teorem 1.1.6. (Rouche Teoremi)**  $f$  ve  $g$  fonksiyonları basit kapalı bir  $C$  eğrisinin üzerinde ve içinde analitik ve  $C$  üzerinde  $|g(z)| < |f(z)|$  ise  $f$  ve  $f + g$  fonksiyonları  $C$  içinde aynı sayıda sifıra sahiptir (Elaydi, 1995).



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, rasyonel fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir:

El-Owaidy ve El-Afifi (2000);  $a_n$  ve  $b_n$  periyodik diziler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n x_n}{x_{n-1}} \quad (2.1)$$

denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Gibbons ve ark. (2000); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n} \quad (2.2)$$

lineer olmayan fark denklemini incelemişlerdir.

Amleh ve ark. (2001); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}} \quad (2.3)$$

denklemini incelemişlerdir.

Yan ve Li (2003);  $\alpha \geq 0$  ve  $\beta, \gamma > 0$  olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}} \quad (2.4)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişler ve pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

El-Owaidy ve ark. (2003);  $\alpha, \beta, \gamma$  negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n} \quad (2.5)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Chatterjee ve ark. (2003); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}} \quad (2.6)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını, çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Zeng ve ark. (2004); pozitif parametreler ve sürekli bir  $g(x)$  fonksiyonu için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})} \quad (2.7)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

El-Owaidy ve ark. (2004); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n} \quad (2.8)$$

denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

El-Owaidy ve ark. (2004); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n} \quad (2.9)$$

denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

El-Owaidy ve ark. (2005); negatif olmayan parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p} \quad (2.10)$$

denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelemiştir.

Aloqeili (2006); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{a + x_{n-k} x_n} \quad (2.11)$$

denkleminin çözümlerini ve denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Camouzis ve ark. (2007); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}} \quad (2.12)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Chen ve Li (2009); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^p} \quad (2.13)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Battaloğlu ve ark. (2010); negatif olmayan parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-(k+1)}^p} \quad (2.14)$$

denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Hamza ve ark. (2011); negatif olmayan başlangıç şartları ve pozitif parametreler için

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{A + Bx_{n-1}^k} \quad (2.15)$$

denkleminin denge noktasının global davranışını incelemiştir.

Abo-Zeid (2014);  $A, B$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar,  $C, D$  parametreleri pozitif reel sayılar;  $l \leq k$  olmak üzere  $l$  ve  $k$  parametreleri negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D \prod_{i=l}^k x_{n-2i}} \quad (2.16)$$

denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışını ve periyodikliğini incelenmiştir.

Huang ve Knopf (2014); negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Bx_n + C}{\alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma} \quad (2.17)$$

formundaki denklemlerin çözümlerinin yakınsaklığı için gerekli ve yeterli şartları incelemiştir.

El-Metwally ve ark. (2015); başlangıç şartları ve parametreler pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k a_{2i} x_{n-2i}}{\beta + \sum_{i=0}^k b_{2i+1} x_{n-2i-1}} \quad (2.18)$$

denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Elsayed ve ark. (2015); başlangıç şartları keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-4}}{x_{n-3} (\pm 1 \pm x_n x_{n-4})} \quad (2.19)$$

denkleminin çözümlerini ve çözümlerin davranışını incelemiştir.

Elsayed ve El-Metwally (2015); pozitif parametreler ve pozitif başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{bx_{n-1}^2 + cx_{n-2}x_{n-3}}{dx_{n-1}^2 + ex_{n-2}x_{n-3}} \quad (2.20)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini, yakınsaklığını ve sınırsız çözümlerini incelemiştir.

Elsayed ve Ibrahim (2015); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} x_{n-4}}{x_{n-1} x_{n-3} (\pm 1 \pm x_n x_{n-2} x_{n-4})} \quad (2.21)$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Elabbasy ve ark. (2016); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için  $k$  ve  $l$  pozitif tam sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{ax_{n-k}^\gamma}{bx_{n-\ell}^\gamma + cx_n^\gamma} \quad (2.22)$$

denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

El-Metwally ve Elsayed (2016); başlangıç şartları keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-4}}{x_{n-2}(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-4})} \quad (2.23)$$

denklemlerinin çözümlerini incelemiştir.

Khaliq ve Elsayed (2016); başlangıç şartları ve parametreler pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha x_{n-2} + \frac{\beta x_{n-2}^2}{\gamma x_{n-2} + \delta x_{n-5}} \quad (2.24)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve davranışını incelemiştir.

El-Dessoky (2015); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için  $t = \max\{l, k, s\}$  olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha x_{n-l} + bx_{n-k} + \frac{cx_{n-s}}{dx_{n-s} - e} \quad (2.25)$$

denkleminin pozitif çözümlerini, global asimptotik kararlılığını ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Khaliq ve Elsayed (2016); başlangıç şartları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-5}}{x_{n-3}(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-5})} \quad (2.26)$$

denklemlerinin çözümlerini incelemiştir.

Belhannache ve ark. (2016); başlangıç şartları ile  $B$  parametresi negatif olmayan reel sayılar,  $A, C, D$  parametreleri pozitif reel sayılar,  $p$  ve  $q$  parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n^p x_{n-2}^q} \quad (2.27)$$

denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelenmiştir.

Belhannache ve ark. (2016); başlangıç şartları ile  $A, B$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar,  $C, D$  parametreleri pozitif reel sayılar,  $l \leq k$  olmak üzere  $k$  ve  $l$  parametreleri negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D \prod_{i=l}^k x_{n-2i}^{m_i}} \quad (2.28)$$

denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelenmiştir.

Elsayed ve Khaliq (2017); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için,  $r$  negatif olmayan reel sayılar ve  $r = \max\{l, k, s, t\}$  olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha x_{n-l} + \frac{bx_{n-k} + cx_{n-s}}{d + ex_{n-t}} \quad (2.29)$$

denkleminin çözümlerini, global asimptotik kararlılığını ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Gümüş ve ark. (2017); negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta + \gamma x_{n-1}^p x_{n-2}^q} \quad (2.30)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve davranışını incelemiştir.

Gümüş ve Soykan (2017); negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-(k+1)}}{\beta + \gamma x_{n-k}^p x_{n-(k+2)}^q} \quad (2.31)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve davranışını incelemiştir.

Ibrahim ve El-Moneam (2017); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için  $p > q > r \geq 0$  olmak üzere

$$S_{n+1} = S_{n-p} \left( \alpha + \frac{bS_{n-q}}{cS_{n-q} + dS_{n-r}} \right) \quad (2.32)$$

denkleminin sınırlılığını, global asimptotik kararlılığını ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Tollu ve ark. (2017); negatif olmayan parametre ve başlangıç şartları için,  $y_0 \in \mathbb{R} - \{1/\alpha\}$  olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{1 - \alpha y_{n-2}} \quad (2.33)$$

denkleminin periyodik çözümlerini, global kararlılığını incelemişler ve çözümleri Padovan sayılarıyla ilişkilendirmişlerdir.

Tollu ve ark. (2017); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-1}}{by_n y_{n-1} + cy_{n-1} y_{n-2} + d} \quad (2.34)$$

denkleminin global asimptotik kararlılığını ve pozitif çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılığını, salınımlılığını incelemiştir.

Bu çalışmada rasyonel fark denklemleri ile ilgili olarak yapılan literatür taramasının ışığında (2.15), (2.27) ve (2.28) denklemlerinden hareketle yeni bir denklem tanımlanmış ve tanımlanan denklemin pozitif çözümlerinin bazı özellikleri başlangıç şartları ile parametrelere bağlı olarak incelenmiş ve teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

$$3. y_{n+1} = \frac{A + B y_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}} \quad \text{FARK DENKLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ}$$

Bu bölümde; başlangıç şartları ile  $A, B$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar,  $C, D$  parametreleri pozitif reel sayılar ve  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $q_i$  parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{A + B y_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışı incelenmiştir. (3.1) denkleminde

$$\sum_{i=1}^k q_i = \gamma \quad \text{olmak üzere}$$

$$y_n = \left( \frac{C}{D} \right)^{\frac{1}{\gamma}} x_n \quad (3.2)$$

değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\left( \frac{C}{D} \right)^{\frac{1}{\gamma}} x_{n+1} = \frac{A + B \left( \frac{C}{D} \right)^{\frac{1}{\gamma}} x_n}{C + D \left( \frac{C}{D} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma}} \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{q_i}} = \frac{\left( \frac{C}{D} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{A}{C} \left( \frac{D}{C} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{B}{C} x_n \right]}{1 + \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{q_i}} \quad (3.3)$$

elde edilir.  $\alpha = \frac{A}{C} \left( \frac{D}{C} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$  ve  $\beta = \frac{B}{C}$  olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{1 + \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{q_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada; başlangıç şartları ile  $\alpha, \beta$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar ve  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $q_i$  parametreleri pozitif tam sayılardır. (3.1) denklemini ile (3.4) denklemini aynı karakterde olduğundan çalışmanın bundan sonraki kısmında (3.4) denklemini incelenecektir.

### 3.1. $\alpha > 0$ Durumu

**Lemma 3.1.1.** (3.4) fark denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1)  $1 \leq \beta$  iken (3.4) denklemi  $\left( \sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}, \infty \right)$  aralığında tek bir denge noktasına sahiptir.

(2)  $\beta < 1$  iken

(i) Eğer  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  ise (3.4) denklemi  $\left( 0, \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}} \right)$  aralığında bir tek denge

noktasına sahiptir.

(ii) Eğer  $\gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} < \alpha$  ise (3.4) denklemi  $\left( \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}, \infty \right)$  aralığında bir tek

denge noktasına sahiptir.

**İspat.** Denge noktası tanımına göre  $\sum_{i=1}^k q_i = \gamma$  olmak üzere

$$\bar{x} = \frac{\alpha + \beta \bar{x}}{1 + \bar{x}^\gamma} \text{ veya } \frac{\alpha + \beta \bar{x}}{1 + \bar{x}^\gamma} - \bar{x} = 0 \quad (3.1.1)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\bar{x}^{\gamma+1} + (1-\beta)\bar{x} - \alpha = 0 \quad (3.1.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik aracılığıyla

$$f(x) = x^{\gamma+1} + (1-\beta)x - \alpha \quad (3.1.3)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda, (3.4) denkleminin denge noktalarının

$f(x) = 0$  denkleminin kökleri olacağı açıktır.

$$f'(x) = (\gamma+1)x^\gamma + 1 - \beta \quad (3.1.4)$$

türev fonksiyonunun işareti incelenerek aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

(1)  $1 \leq \beta$  iken

$$f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}\right) = \left(\frac{\beta-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + (1-\beta)\left(\frac{\beta-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \alpha \quad (3.1.5)$$

ve

$$f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}\right) = -\left(\gamma\left(\frac{\beta-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \alpha\right) < 0 \quad (3.1.6)$$

elde edilir.  $f(x)$  fonksiyonu  $\left(\sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}, \infty\right)$  aralığında artan olup,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ve

$$f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}\right) < 0 \text{ olduğundan } f(x) = 0 \text{ denklemi } \left(\sqrt[\gamma]{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}, \infty\right) \text{ aralığında bir tek köke}$$

sahiptir.

(2)  $\beta < 1$  iken

$$f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}\right) = \left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(1-\beta) - \alpha = \gamma\left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - \alpha \quad (3.1.7)$$

elde edilir.

(i) Eğer  $\alpha < \gamma\left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  ise  $0 < f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}\right)$  olduğu açıktır. Ayrıca,  $f(0) = -\alpha < 0$  ve

$f(x)$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında artandır. Bu nedenle,  $f(x) = 0$  denklemi bu şartlar

altında  $\left(0, \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}\right)$  aralığında bir tek köke sahiptir.

(ii) Eğer  $\gamma\left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} < \alpha$  ise  $f\left(\sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}\right) < 0$  olduğu açıktır. Ayrıca,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  ve

$f(x)$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında artandır. Bu nedenle,  $f(x) = 0$  denklemi bu şartlar

altında  $\left(\sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}, \infty\right)$  aralığında bir tek köke sahiptir.

**Teorem 3.1.1.** Eğer  $\beta < 1$  iken  $\alpha < \gamma\left(\frac{1-\beta}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  ise (3.4) denkleminin pozitif denge

noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**İspat.** (3.4) fark denkleminin lineerleştirilmiş denklemini elde edelim:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = f(u_0, u_1, \dots, u_k) \quad (3.1.8)$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{1 + \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{q_i}} = \frac{\alpha + \beta u_0}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.1.9)$$

olacak şekilde  $f(u_0, u_1, \dots, u_k)$  fonksiyonunu tanımlayalım.

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{x}, \dots, \bar{x}), p_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{x}, \dots, \bar{x}), \dots, p_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (3.1.10)$$

olmak üzere (3.4) denkleminin, lineerleştirilmiş denkleminin

$$z_{n+1} = p_0 z_n + p_1 z_{n-1} + \dots + p_k z_{n-k} \quad (3.1.11)$$

şeklinde olacağı açıktır.

$$\frac{\partial f}{\partial u_0} = \frac{\beta}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.1.12)$$

ve

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \frac{\beta}{1 + \bar{x}^\gamma} \quad (3.1.13)$$

Benzer şekilde,

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{-\frac{q_1}{u_1} \prod_{i=1}^k u_i^{q_i} (\alpha + \beta u_0)}{\left(1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}\right)^2} = \frac{-\frac{q_1}{u_1} \left(\prod_{i=1}^k u_i^{q_i}\right)}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \cdot \frac{(\alpha + \beta u_0)}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.1.14)$$

ve

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \frac{-q_1 \bar{x}^\gamma}{1 + \bar{x}^\gamma} \quad (3.1.15)$$

şeklinde dir. Devam edilirse,

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \frac{-q_k \bar{x}^\gamma}{1 + \bar{x}^\gamma} \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Bu durumda, (3.4) fark denkleminin lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} = \frac{\beta}{1+\bar{x}^\gamma} z_n - \frac{q_1 \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} z_{n-1} - \frac{q_2 \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} z_{n-2} - \dots - \frac{q_k \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} z_{n-k} \quad (3.1.17)$$

ve bu denklemin karakteristik denklemi

$$g(\lambda) = \lambda^{k+1} - \frac{\beta}{1+\bar{x}^\gamma} \lambda^k + \frac{q_1 \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} \lambda^{k-1} + \frac{q_2 \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} \lambda^{k-2} + \dots + \frac{q_k \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} = 0 \quad (3.1.18)$$

şeklindedir.

$$\beta < 1 \text{ iken eğer } \alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \text{ ise}$$

$$g(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - p_2 \lambda^{k-2} - \dots - p_k = 0 \quad (3.1.19)$$

karakteristik denklemi aracılığıyla

$$h_1(\lambda) = \lambda^{k+1} \quad (3.1.20)$$

$$h_2(\lambda) = -p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - p_2 \lambda^{k-2} - \dots - p_k \quad (3.1.21)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$h_1(\lambda)$  ve  $h_2(\lambda)$  fonksiyonlarının

$$C: |\lambda| = 1 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad (3.1.22)$$

eğrisi üzerinde ve içinde analitik olduğu açıktır.  $C$  eğrisi üzerinde

$$|h_1(\lambda)| = 1 \quad (3.1.23)$$

$$|h_2(\lambda)| \leq |-p_0| |\lambda^k| + |-p_1| |\lambda^{k-1}| + \dots + |-p_k| \quad (3.1.24)$$

$$|h_2(\lambda)| \leq \left| \frac{-\beta}{1+\bar{x}^\gamma} \right| |\lambda^k| + \left| \frac{q_1 \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} \right| |\lambda^{k-1}| + \dots + \left| \frac{q_k \bar{x}^\gamma}{1+\bar{x}^\gamma} \right| \quad (3.1.25)$$

$$|h_2(\lambda)| \leq \frac{\beta + \bar{x}^\gamma (q_1 + q_2 + \dots + q_k)}{1 + \bar{x}^\gamma} = \frac{\beta + \gamma \bar{x}^\gamma}{1 + \bar{x}^\gamma} \quad (3.1.26)$$

olmak üzere Rouché Teoreminin koşullarının sağlandığını gösterelim: Yani  $C$  eğrisi üzerinde

$$|h_2(\lambda)| < |h_1(\lambda)| \quad (3.1.27)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\beta < 1 \text{ ve } \alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \text{ iken } \bar{x} \in \left( 0, \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}} \right) \text{ olduğunu Lemma 3.1.1 den biliyoruz.}$$

(3.1.26) aracılığı ile tanımlanan

$$f(x) = \frac{\beta + \gamma x^\gamma}{1 + x^\gamma} \quad (3.1.28)$$

fonksiyonu artan olduğundan

$$\left| \frac{\beta + \gamma \bar{x}^\gamma}{1 + \bar{x}^\gamma} \right| < \left| \frac{\beta + \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma}}}{1 + \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma}}} \right| = \left| \frac{\beta\gamma - \beta + \gamma - \beta\gamma}{\gamma - 1} \right| = |1| = |h_1(\lambda)| \quad (3.1.29)$$

olduğu görülür ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için  $C: |\lambda|=1$  eğrisi üzerinde  $|h_2(\lambda)| < |h_1(\lambda)|$  eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, Rouché Teoremi gereğince  $h_1(\lambda)$  ve  $h_1(\lambda) + h_2(\lambda)$  fonksiyonları  $C$  içerisinde aynı sayıda sifıra sahiptir.  $h_1(\lambda) = \lambda^{k+1}$  fonksiyonu  $C$  içerisinde hepsi sıfır olan  $k+1$  tane köke sahiptir. Dolayısıyla,

$$h_1(\lambda) + h_2(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - p_2 \lambda^{k-2} - \dots - p_k \quad (3.1.30)$$

fonksiyonu da  $C$  içerisinde  $k+1$  tane köke sahiptir. Yani tüm kökler  $|\lambda| < 1$  eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak, Teorem 1.5 ten  $\bar{x}$  lokal kararlıdır.

**Lemma 3.1.2.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi (3.4) fark denkleminin bir çözümü ise  $\forall n > 0$  için

$$x_n < \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha \beta^i \right) + \beta^n x_0 \quad (3.1.31)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.**

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta x_0}{1 + x_{-1}^{q_1} x_{-2}^{q_2} \dots x_{-k}^{q_k}} < \alpha + \beta x_0 \quad (3.1.32)$$

$$x_2 = \frac{\alpha + \beta x_1}{1 + x_0^{q_1} x_1^{q_2} \dots x_{-k+1}^{q_k}} < \alpha + \beta x_1 < \alpha + \beta(\alpha + \beta x_0) = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 x_0 \quad (3.1.33)$$

$$x_3 = \frac{\alpha + \beta x_2}{1 + x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_{-k+2}^{q_k}} < \alpha + \beta x_2 < \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 x_0 \quad (3.1.34)$$

$$x_4 = \frac{\alpha + \beta x_3}{1 + x_2^{q_1} x_3^{q_2} \dots x_{-k+3}^{q_k}} < \alpha + \beta x_3 < \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4 x_0 \quad (3.1.35)$$

⋮

olduğundan,  $\forall n > 0$  için  $x_n < \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha\beta^i \right) + \beta^n x_0$  elde edilir.

**Sonuç 3.1.1.** Eğer  $\beta < 1$  ise (3.4) denkleminin  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sınırlıdır.

**Lemma 3.1.3.**  $\beta < 1$  ve (3.4) denkleminin bir çözümü  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  olsun. Eğer  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \Lambda$  ve  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$  ise

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^\gamma} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^\gamma} \quad (3.1.36)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.**  $\beta < 1$  iken (3.4) denkleminin  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün sınırlı olduğunu Sonuç 3.1.1 den biliyoruz. Eğer  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \Lambda$  ve  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$  ise her  $\varepsilon \in (0, \lambda)$  için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $\forall n \geq n_0$  için  $\lambda - \varepsilon \leq x_n \leq \Lambda + \varepsilon$  ve  $\forall n \geq n_0 + k$  için

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\Lambda + \varepsilon)^\gamma} \leq x_{n+1} \leq \frac{\alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^\gamma} \quad (3.1.37)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\Lambda + \varepsilon)^\gamma} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^\gamma} \quad (3.1.38)$$

ve

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^\gamma} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^\gamma} \quad (3.1.39)$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.2.** Eğer  $\beta < 1$  ve  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  ise  $\bar{x} \in \left( 0, \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}} \right)$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.

**İspat.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi (3.4) denkleminin bir çözümü olsun.  $\beta < 1$  iken  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sınırlıdır.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \Lambda$  ve  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$  olmak üzere Lemma 3.1.3 ten

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^\gamma} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^\gamma} \quad (3.1.40)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^\gamma} \leq \lambda \text{ ve } \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^\gamma} \quad (3.1.41)$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \beta \leq 1 + \Lambda^\gamma \text{ ve } 1 + \lambda^\gamma \leq \frac{\alpha}{\Lambda} + \beta \quad (3.1.42)$$

$$\alpha\lambda^{\gamma-1} + (\beta-1)\lambda^\gamma \leq (\lambda\Lambda)^\gamma \text{ ve } (\lambda\Lambda)^\gamma \leq \alpha\Lambda^{\gamma-1} + (\beta-1)\Lambda^\gamma \quad (3.1.43)$$

elde edilir. (3.1.42) ve (3.1.43) eşitsizliklerinden

$$\alpha\lambda^{\gamma-1} + (\beta-1)\lambda^\gamma \leq \alpha\Lambda^{\gamma-1} + (\beta-1)\Lambda^\gamma \quad (3.1.44)$$

ve

$$(1-\beta)\Lambda^\gamma - \alpha\Lambda^{\gamma-1} \leq (1-\beta)\lambda^\gamma - \alpha\lambda^{\gamma-1} \quad (3.1.45)$$

olduğu görülür. (3.1.45) aracılığıyla

$$h(x) = (1-\beta)x^\gamma - \alpha x^{\gamma-1} \quad (3.1.46)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$h'(x) = x^{\gamma-2} [\gamma(1-\beta)x - \alpha(\gamma-1)] \quad (3.1.47)$$

türev fonksiyonunun işareti incelenirse  $h(x)$  fonksiyonunun  $\left( \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma(1-\beta)}, \infty \right)$  aralığında

artan olduğu görülür. Ayrıca,  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  iken Lemma 3.1.1 den  $\bar{x} \in \left( 0, \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}} \right)$

olur ve  $\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma(1-\beta)} < \bar{x} < \sqrt[\gamma]{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$  eşitsizliği sağlanır. Bu durum ve (3.1.45) eşitsizliği birlikte düşünülürse  $\lambda = \Lambda = \bar{x}$  elde edilir ve  $\bar{x}$  nin global çekici olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla,  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^\gamma$  iken  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlı ve global çekici olduğundan global asimptotik karardır.

### 3.2. $\alpha = 0$ Durumu

(3.4) denkleminde  $\alpha = 0$  olarak alınırsa

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n}{1 + \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{\alpha_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2.1)$$

denklemini elde edilir.

**Lemma 3.2.1.** (3.2.1) fark denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer  $1 < \beta$  ise (3.2.1) denkleminin negatif olmayan iki denge noktası vardır ve bu noktalar  $\bar{x} = 0$  ve  $\bar{x} = \sqrt[\gamma]{\beta-1}$  dir.

(ii) Eğer  $\beta \leq 1$  ise (3.2.1) denkleminin negatif olmayan tek denge noktası vardır ve bu nokta  $\bar{x} = 0$  dir.

**İspat.** Denge noktası tanımına göre

$$\bar{x} = \frac{\beta \bar{x}}{1 + \bar{x}^\gamma} \quad (3.2.2)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\bar{x}(\bar{x}^\gamma + 1 - \beta) = 0 \quad (3.2.3)$$

olup  $1 < \beta$  için  $\bar{x} = 0$  ile  $\bar{x} = \sqrt[\gamma]{\beta-1}$  ve  $\beta \leq 1$  için  $\bar{x} = 0$  negatif olmayan denge noktaları elde edilir.

**Lemma 3.2.2.** Eğer  $\beta < 1$  ise (3.2.1) denkleminin  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sınırlıdır.

**İspat.**

$$x_1 = \frac{\beta x_0}{1 + x_{-1}^{q_1} x_{-2}^{q_2} \dots x_{-k}^{q_k}} < \beta x_0 \quad (3.2.4)$$

$$x_2 = \frac{\alpha + \beta x_1}{1 + x_0^{q_1} x_{-1}^{q_2} \dots x_{-k+1}^{q_k}} < \beta x_1 < \beta(\beta x_0) = \beta^2 x_0 \quad (3.2.5)$$

$$x_3 = \frac{\beta x_2}{1 + x_1^{q_1} x_0^{q_2} \dots x_{-k+2}^{q_k}} < \beta x_2 < \beta^3 x_0 \quad (3.2.6)$$

$$x_4 = \frac{\beta x_3}{1 + x_2^{q_1} x_1^{q_2} \dots x_{-k+3}^{q_k}} < \beta x_3 < \beta^4 x_0 \quad (3.2.7)$$

⋮

olduğundan,  $\forall n > 0$  için  $x_n < \beta^n x_0$  elde edilir. Dolayısıyla,  $\beta < 1$  iken  $x_n < x_0$  olup

(3.2.1) denkleminin  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sınırlıdır.

**Teorem 3.3.3.** (3.2.1) denkleminin  $\bar{x} = 0$  denge noktası için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer  $\beta < 1$  ise  $\bar{x} = 0$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer  $\beta > 1$  ise  $\bar{x} = 0$  denge noktası kararsızdır.

**İspat.** (3.2.1) fark denkleminin  $\bar{x} = 0$  denge noktası için lineerleştirilmiş denklemini elde edelim:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = f(u_0, u_1, \dots, u_k) \quad (3.2.8)$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n}{1 + \prod_{i=1}^k x_{n-i}^{q_i}} = \frac{\beta u_0}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.2.9)$$

olacak şekilde  $f(u_0, u_1, \dots, u_k)$  fonksiyonunu tanımlayalım.

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0}(0, \dots, 0), p_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, \dots, 0), \dots, p_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}(0, \dots, 0) \quad (3.2.10)$$

olmak üzere (3.2.1) denkleminin, lineerleştirilmiş denkleminin

$$z_{n+1} = p_0 z_n + p_1 z_{n-1} + \dots + p_k z_{n-k} \quad (3.2.11)$$

şeklinde olacağı açıktır.

$$\frac{\partial f}{\partial u_0} = \frac{\beta}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.1.12)$$

ve

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0}(0, \dots, 0) = \beta. \quad (3.2.13)$$

Benzer şekilde,

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{-\frac{q_1}{u_1} \prod_{i=1}^k u_i^{q_i} (\beta u_0)}{\left(1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}\right)^2} = \frac{-\frac{q_1}{u_1} \left(\prod_{i=1}^k u_i^{q_i}\right)}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \cdot \frac{(\beta u_0)}{1 + \prod_{i=1}^k u_i^{q_i}} \quad (3.2.14)$$

ve

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, \dots, 0) = 0 \quad (3.2.15)$$

şeklinde dir. Devam edilirse,

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}(0, \dots, 0) = 0 \quad (3.2.16)$$

elde edilir. Bu durumda, (3.2.1) fark denkleminin  $\bar{x} = 0$  denge noktası için lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} = \beta z_n \quad (3.2.17)$$

ve bu denklemin karakteristik denklemi

$$g(\lambda) = \lambda - \beta = 0 \quad (3.2.18)$$

şeklinde dir ve  $\lambda = \beta$  elde edilir. Bu durumda,  $\beta < 1$  iken  $|\lambda| < 1$  eşitsizliği sağlanır.

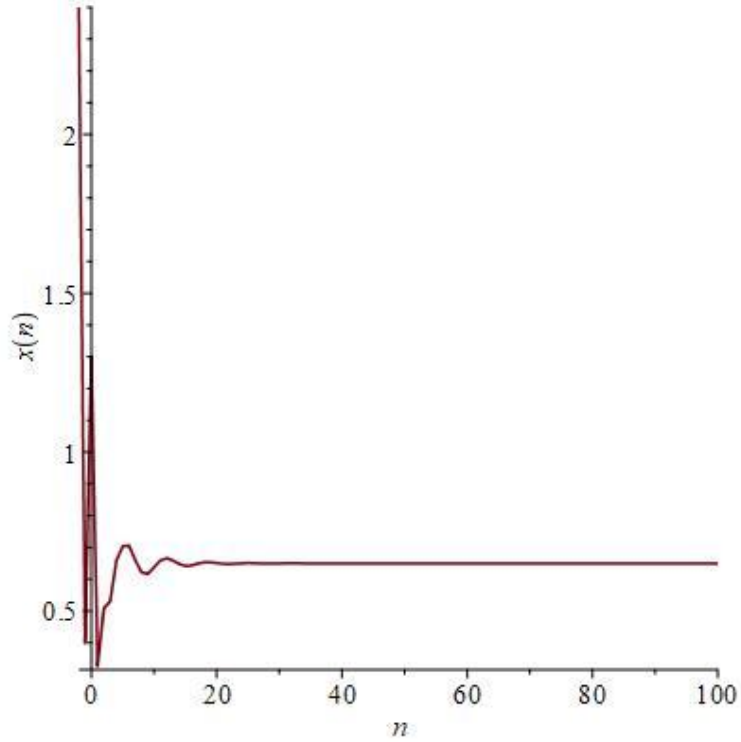
Dolayısıyla, Teorem 1.5 ten  $\bar{x} = 0$  denge noktası lokal kararlıdır. Benzer düşünce ile

$\beta > 1$  iken  $\bar{x} = 0$  denge noktası kararsızdır. Ayrıca,  $\beta < 1$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olduğundan  $\bar{x} = 0$  denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır.

### 3.3. Nümerik Örnekler

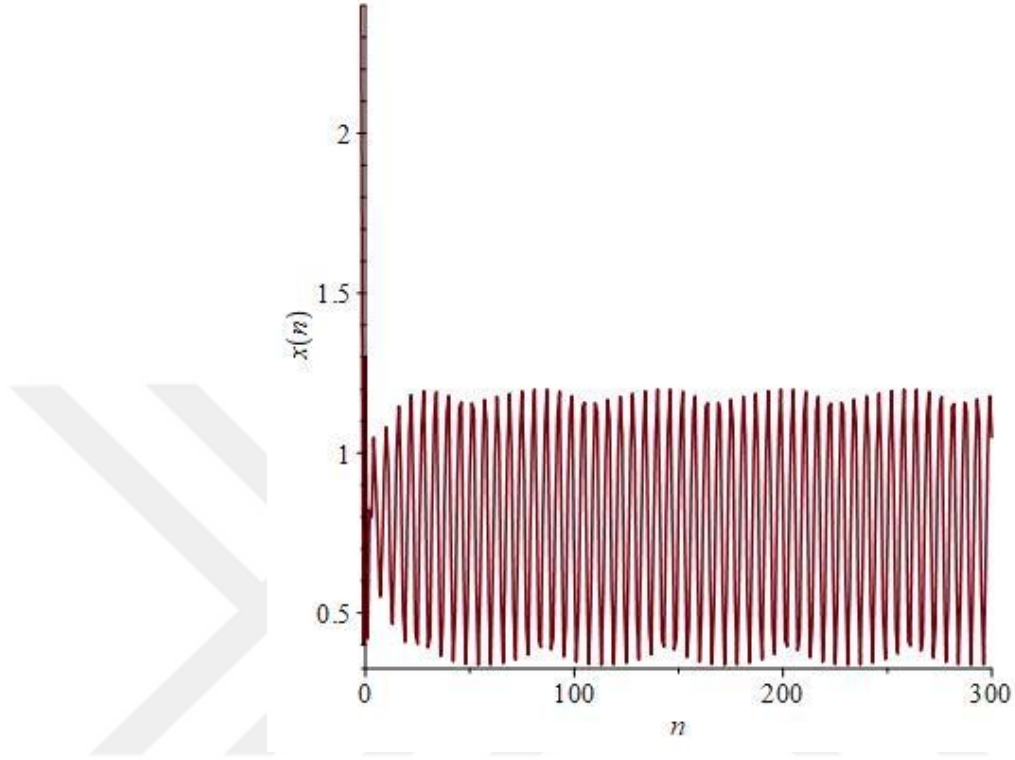
Bu kısımda, başlangıç şartları ve parametrelerin farklı değerleri dikkate alınarak (3.4) denklemini için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

**Örnek 3.3.1.**  $k = 2$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $q_1 = 2$  ve  $q_2 = 3$  olmak üzere  $x_{-2} = 2.4$ ,  $x_{-1} = 0.4$ ,  $x_0 = 1.3$  başlangıç şartları için (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.



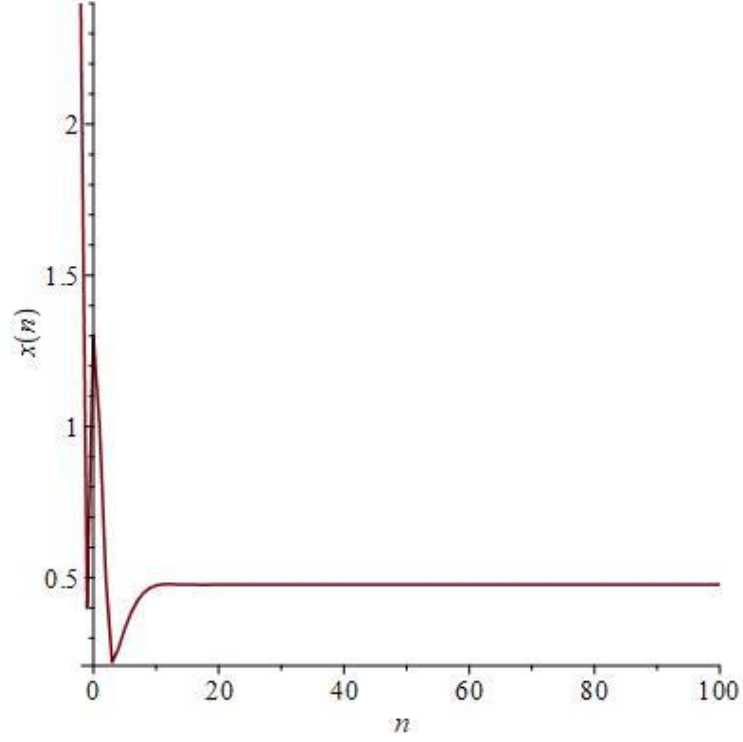
- Örnekte verilen parametreler için  $\beta < 1$  ve  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^\gamma$  olduğundan Teorem 3.2.1 gereği (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.

**Örnek 3.3.2.**  $k=2$ ,  $\alpha=0.7$ ,  $\beta=0.5$ ,  $q_1=2$  ve  $q_2=3$  olmak üzere  $x_{-2}=2.4$ ,  $x_{-1}=0.4$ ,  $x_0=1.3$  başlangıç şartları için (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.



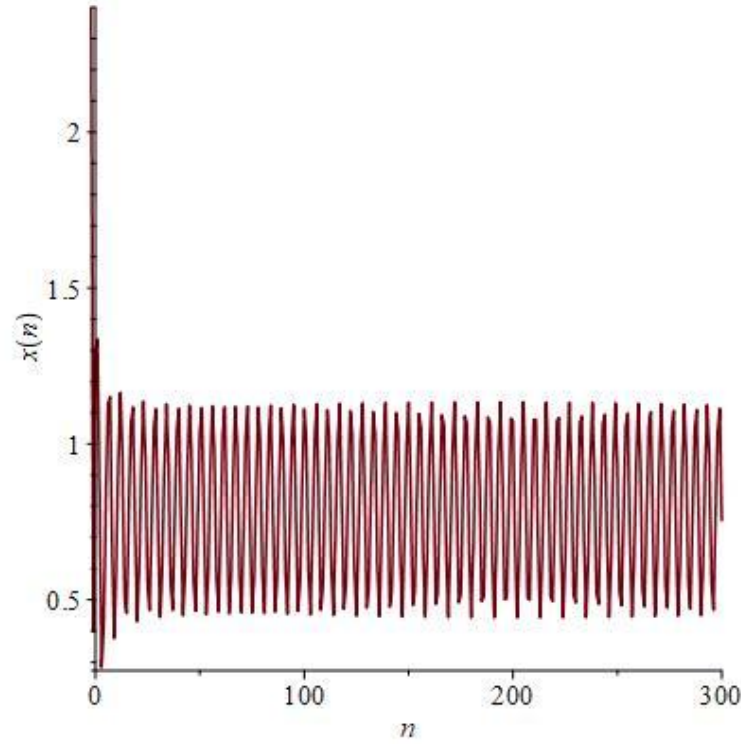
- Örnekte verilen parametreler için  $\gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} < \alpha$  olup (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.

**Örnek 3.3.3.**  $k=2$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $\beta=0.12$ ,  $q_1=3$  ve  $q_2=1$  olmak üzere  $x_{-2}=2.4$ ,  $x_{-1}=0.4$ ,  $x_0=1.3$  başlangıç şartları için (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.



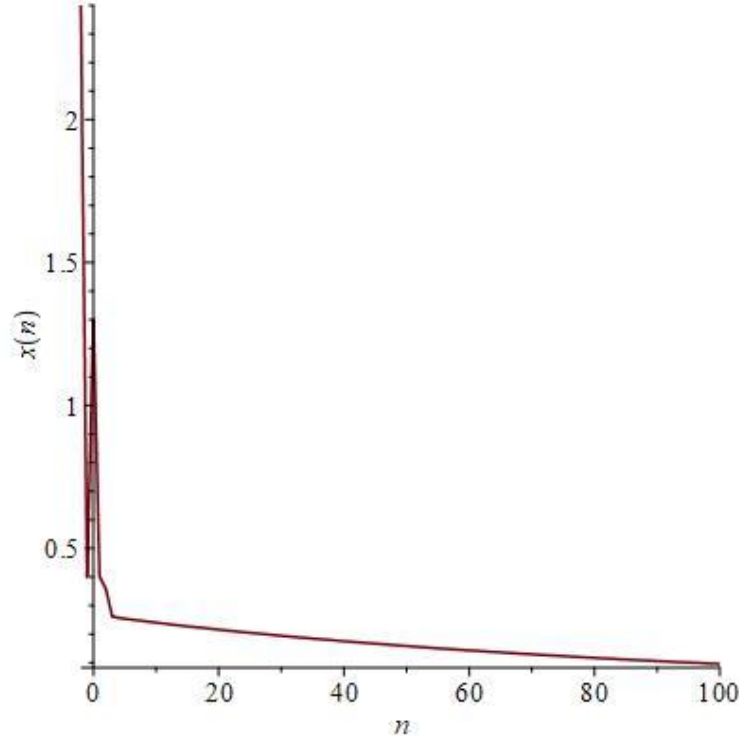
- Örnekte verilen parametreler için  $\beta < 1$  ve  $\alpha < \gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  olduğundan Teorem 3.2.1 gereği (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.

**Örnek 3.3.4.**  $k=2$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $\beta=0.5$ ,  $q_1=3$  ve  $q_2=1$  olmak üzere  $x_{-2}=2.4$ ,  $x_{-1}=0.4$ ,  $x_0=1.3$  başlangıç şartları için (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.



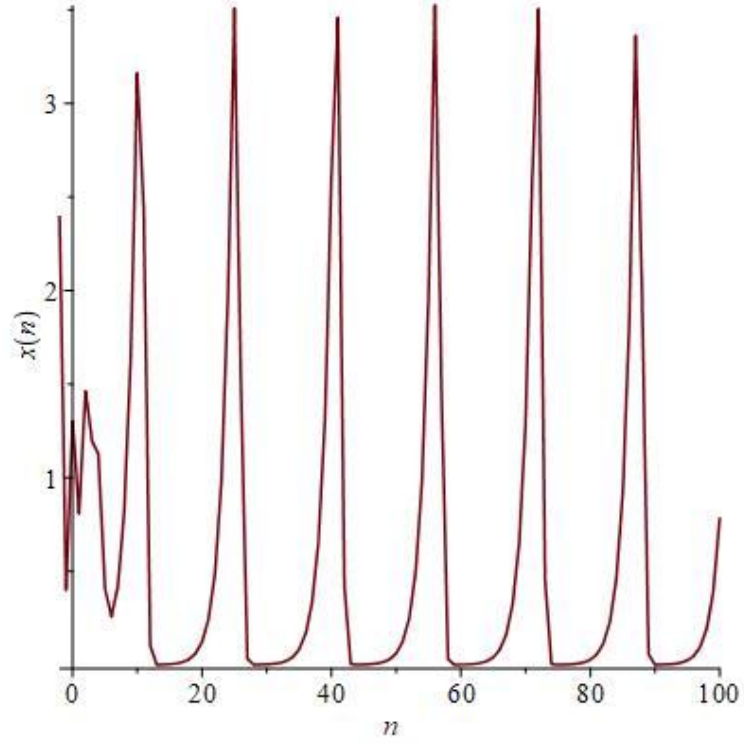
- Örnekte verilen parametreler için  $\gamma \left( \frac{1-\beta}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} < \alpha$  olup (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.

**Örnek 3.3.5.**  $k=2$ ,  $\alpha=0$ ,  $\beta=0.99$ ,  $q_1=2$  ve  $q_2=3$  olmak üzere  $x_{-2}=2.4$ ,  $x_{-1}=0.4$ ,  $x_0=1.3$  başlangıç şartları için (3.4) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.



- $\alpha=0$  ve  $\beta < 1$  olduğundan Teorem 3.3.3 (i) gereği (3.2.1) denkleminin  $\bar{x}=0$  denge noktası global asimptotik kararlıdır.

**Örnek 3.3.6.**  $k = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $q_1 = 2$  ve  $q_2 = 3$  olmak üzere  $x_{-2} = 2.4$ ,  $x_{-1} = 0.4$ ,  $x_0 = 1.3$  başlangıç şartları için (3.2.1) denkleminin  $\bar{x} = 0$  denge noktası kararsızdır.



- $\alpha = 0$  ve  $1 < \beta$  olduğundan Teorem 3.3.3 (ii) gereği (3.2.1) denkleminin  $\bar{x} = 0$  denge noktası kararsızdır.

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; (2.15), (2.27) ve (2.28) denklemlerinden yola çıkılarak başlangıç şartları ile  $A$ ,  $B$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar,  $C$ ,  $D$  parametreleri pozitif reel sayılar ve  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $q_i$  parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{A + B y_n}{C + D \prod_{i=1}^k y_{n-i}^{q_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemi tanımlanmış ve pozitif çözümlerinin global davranışı incelenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda denklemdeki pozitif parametrelerin yerine negatif parametreler veya farklı diziler alınarak yeni çalışmalar yapılabileceği gibi denklemdeki bilinmeyen sayısı artırılarak daha genel çalışmalar yapılabilir. Ayrıca, bu denklemler kullanılarak fark denklem sistemleri tanımlanabilir ve tanımlanan sistemlerin farklı özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Abo-Zeid, R., 2014, Global behavior of a higher order difference equation, *Mathematica Slovaca*, 64(4), 931-940.
- Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a kth order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1328-1335.
- Amleh, A. M., Kirk, V. and Ladas, G., 2001, On the dynamics of  $x_{n+1} = \frac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}$ , *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, 5, 1-15.
- Battaloğlu, N., Çinar, C. and Yalçinkaya, İ., 2010, The dynamics of the difference equation  $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-(k+1)}^p}$ , *ARS Combinatoria*, 97, 281-288.
- Belhannache, F., Touafek, N. and Abo-Zeid, R., 2016, Dynamics of a third-order rational difference equation, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 59(107), 13-22.
- Belhannache, F., Touafek, N. and Abo-Zeid, R., 2016, On a higher order rational difference equation, *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, 5-6(34), 369-3822.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitabevi*, Ankara.
- Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. and Ladas, G., 2003, On the trichotomy character of  $x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(12), 1113-1128.
- Camouzis, E., Chatterjee, E. and Ladas, G., 2007, On the dynamics of  $x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}}$ , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331(1), 230-239.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Chen, D., Li, X. and Wang, Y., 2009, Dynamics for nonlinear difference equation  $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^p}$ , *Advances in Difference Equations*, 235691.
- Elabbasy, E. M., Barsoum, M. and Alshawee, H. S., 2016, On the dynamics of a higher-order rational difference equation, *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 2016, 1-13.
- Elaydi, S., 1995, *An Introduction to Difference Equations*, New York: Springer-Verlag.

- El-Dessoky, M. M., 2015, On the difference equation  $x_{n+1} = \alpha x_{n-1} + bx_{n-k} + \frac{cx_{n-s}}{dx_{n-s} - e}$ , *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(3), 535-545.
- El-Metwally, H., Elsayed E. M. and El-Morshedy, H., 2015, Dynamics of some rational difference equations, *Journal Computational Analysis and Applications*, 18, 933-1003.
- El-Metwally, H. and Elsayed, E. M., 2016, Qualitative behavior of some rational difference equations, *Journal Computational Analysis and Applications*, 20, 226-236.
- El-Owaidy, H. M. and El-Afifi, M., 2000, A note on periodiccycle of  $x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}$ , *Applied Mathematic sand Computation*, 109(2-3), 301-306.
- El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2003, On the recursive sequences  $x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$ , *Applied Mathematics and Computation*, 145(2-3), 747-753.
- El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsaydy, Z., 2004, Global attractivity of recursive sequence  $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$ , *Applied Mathematics and Computation*, 151(3), 827-833.
- El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsaydy, Z., 2004, Global attractivity of recursive sequence  $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n}$ , *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 16(1), 243-249.
- El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M., 2005, The dynamics of the recursive sequence  $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$ , *Applied Mathematics Letters*, 18, 1013-1018.
- Elsayed, E. M., Mahmoud S. R. and Ali, A. T., 2015, The dynamics and the solutions of some rational difference equations, *Journal Computational Analysis and Applications*, 18, 430-439.
- Elsayed, E. M. and El-Metwally, H., 2015, Global behavior and periodicity of some difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 19, 298-309.
- Elsayed, E. M. and Ibrahim, T. F., 2015, Solutions and periodicty of a rational recursive sequences of order five, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38(1), 95-112.
- Elsayed, E. M. and Khaliq, A., 2017, Global attractivity and periodicity behavior of a recursive sequence, *Journal Computational Analysis and Applications*, 22, 369-379.

Gibbons, C. H., Kulenovic, M. and Ladas, G., 2000, On the recursive sequence

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}, \text{ Mathematical Sciences Research Hot-Line, 4(2), 1-11.}$$

Gümüş, M., Abo-Zeid, R. and Öcalan, Ö., 2017, Dynamical behavior of a third-order difference equation with arbitrary powers, *Kyungpook Mathematical Journal*, 57, 251-263.

Gümüş, M. and Soykan, Y., 2017, The dynamics of positive solutions of a higher order fractional difference equation with arbitrary powers, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 35, 267-276.

Hamza, A. E., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M., 2011, On the recursive sequence

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{A + Bx_{n-1}^k}, \text{ Arab Journal of Mathematical Sciences, 17, 31-44.}$$

Huang, Y. S. and Knopf P. M., 2014, Mapping with a single critical point and applications to rational difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 20, 641-663.

Ibrahim, T. F. and El-Moneam, M. A., 2017, Global stability of a higher-order difference equation, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 41, 51-58.

Khaliq A. and Elsayed, E. M., 2016, Qualitative properties of difference equation of order six, *Mathematics*, 4(2), 24, 1-14.

Khaliq, A. and Elsayed, E. M., 2016, The dynamics and solution of some difference equations, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 1052-1063.

Tollu, D. T., Yazlık, Y. and Taőkara, N., 2017, Global behavior of solutions for a difference equation of third order, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B*, 24, 299-307.

Tollu, D. T., Yazlık, Y. and Taőkara, N., 2017, Behavior of positive solutions of a difference equation, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 35, 217-230

Yan, X. X. and Li, W. T., 2003, Global attractivity in the recursive sequence

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}, \text{ Applied Mathematics and Computation, 138(2-3), 415-423.}$$

Zeng, X. Y., Shi, B. and Zhang, D. C., 2004, Stability of solutions for the recursive

sequence  $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$ , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176, 283-291.