



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MONOJENİK YARI GRUP GRAFLARININ OMEGA DEĞİŞMEZLERİ

Merve Nagihan YALAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

EYLÜL - 2024

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Merve Nagihan YALAZ tarafından hazırlanan "Monojenik Yarı Grup Graflarının Omega Değişmezleri" adlı tez çalışması 23/09/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Danışman

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Üye

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../ .../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Merve Nagihan YALAZ

Tarih: .././2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MONOJENİK YARI GRUP GRAFLARININ OMEGA DEĞİŞMEZLERİ

Merve Nagihan YALAZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2024, 52 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Literatürde sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar yardımıyla graflar elde edilmiş ve bu elde edilen graflar için genel bir derece dizisi verilmiştir. Ayrıca literatürde son yıllarda omega değişmezi olarak isimlendirilen bir graf değişmezi, derece dizisi yardımıyla tanımlanmıştır. Yine son yıllarda literatürde ikinci omega indeksi isminde yeni bir değişmez tanımlanmıştır.

Bu tezde ise sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar yardımıyla elde edilen grafların hem omega değişmezleri hem de ikinci omega indeksleri hesaplanarak, genel kurallar elde edildi ve ispatlandı. Bu bahsedilen kurallar sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar yardımıyla elde edilen grafların köşe sayıları gibi basit bir değişkene bağlıdır. Ayrıca bu sonuçları destekleyen graf örnekleri verildi.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel graflar, monojenik yarı gruplar, omega değişmezi, ikinci omega indeksi.

ABSTRACT

MS THESIS

OMEGA INVARIANTS OF MONOGENIC SEMIGROUP GRAPHS

Merve Nagihan YALAZ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY**

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2024, 52 Pages

Jury

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

In the literature, graphs have been obtained with the help of finite monogenic semigroups with zero and a general degree sequence has been given for these obtained graphs. In addition, in recent years in the literature, a graph invariant called omega invariant has been defined with the help of degree sequence. Again in recent years, a new invariant called second omega index has been defined in the literature.

In this thesis, both omega invariants and second omega indexes of graphs obtained with the help of finite monogenic semigroups with zero are calculated and general rules are obtained and proved. These mentioned rules depend on a simple variable such as the number of vertices of graphs obtained with the help of finite monogenic semigroups with zero. In addition, graph examples supporting these results are given.

Keywords: Algebraic graphs, monogenic semigroups, omega invariant, the second omega index.

ÖNSÖZ

Bazı Graf Değişmezlerinin Yeni Özellikleri ve Yeni Cebirsel Graflar isimli bu tez, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü üyesi Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmış ve Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Öncelikle bu tez konusunu belirlemiş olan, yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini hiç bir zaman esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ hocama sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Hayatımın her anında desteğini hiç eksik etmeyen başta Babam Yavuz ÖZDEMİR, Annem Sevim ÖZDEMİR'e ve kardeşlerime saygı ve sevgilerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca göstermiş olduğu anlayış, sabır ve yardımlarından dolayı Eşim Ferit Yalaz'a sevgilerimi sunar, teşekkür ederim. Biricik oğlum Çınar YALAZ'a sevgilerimi sunar, mutlu ve parlak bir gelecek dilerim.

Merve Nagihan YALAZ
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
ÇİZELGELER LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
3.1. Grafların bazı temel parametreleri	14
3.2. Bir Grafın Omega Değişmezi	17
3.3. Bir Grafın İkinci Omega İndeksi	19
3.4. Yarı Gruplar ve Monojenik Yarı Gruplar	21
3.5. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Yönlendirilmemiş Graf Elde Edilmesi	24
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	28
4.1. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Elde Edilen Grafların Omega Değişmezinin Hesaplanması	28
4.2. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Elde Edilen Grafların İkinci Omega İndeksinin Hesaplanması	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	38
5.1. Sonuçlar	38
5.2. Öneriler	38
KAYNAKLAR	39



ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Königsberg Köprüsü	1
3.1 Bir \mathcal{G} grafi	6
3.2 Çoklu kenarlı ve ilmekli bir \mathcal{G} grafi	8
3.3 Bir süper ve alt graf	9
3.4 $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$ tam grafları	11
3.5 $\mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5, \mathcal{S}_6, \mathcal{S}_7$ yıldız grafları	11
3.6 $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5$ yol grafları	12
3.7 İki parçalı graf örnekleri	12
3.8 İki parçalı tam graf örnekleri	13
3.9 $\mathcal{T}_5, \mathcal{T}_8, \mathcal{T}_{12}$ ağaç grafları	13
3.10 $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ devir grafları	14
3.11 $\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_6, \mathcal{W}_7$ tekerlek grafları	14
3.12 Grafta çeşitli uzaklık kavramları	15
3.13 Bir grafın renklendirilmesi ve kromatik sayısı	16
3.14 Köşeleri, dereceleri ile etiketlenmiş bir graf	20
3.15 Bir sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen graf örneği .	25
3.16 Bir grafın çapı	25
3.17 Bir grafın derece dizisi	27
4.1 $\Gamma(\mathcal{M}_S^4)$ grafi	29
4.2 $\Gamma(\mathcal{M}_S^6)$ grafi	29
4.3 $\Gamma(\mathcal{M}_S^9)$ grafi	30
4.4 $\Gamma(\mathcal{M}_S^{12})$ grafi	30
4.5 $\Gamma(\mathcal{M}_S^5)$ grafi	35
4.6 $\Gamma(\mathcal{M}_S^7)$ grafi	35
4.7 $\Gamma(\mathcal{M}_S^8)$ grafi	36
4.8 $\Gamma(\mathcal{M}_S^{10})$ grafi	37

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge

Sayfa

1.1 Graf Teorisinin Kullanım Alanlarından Bazıları	1
--	---



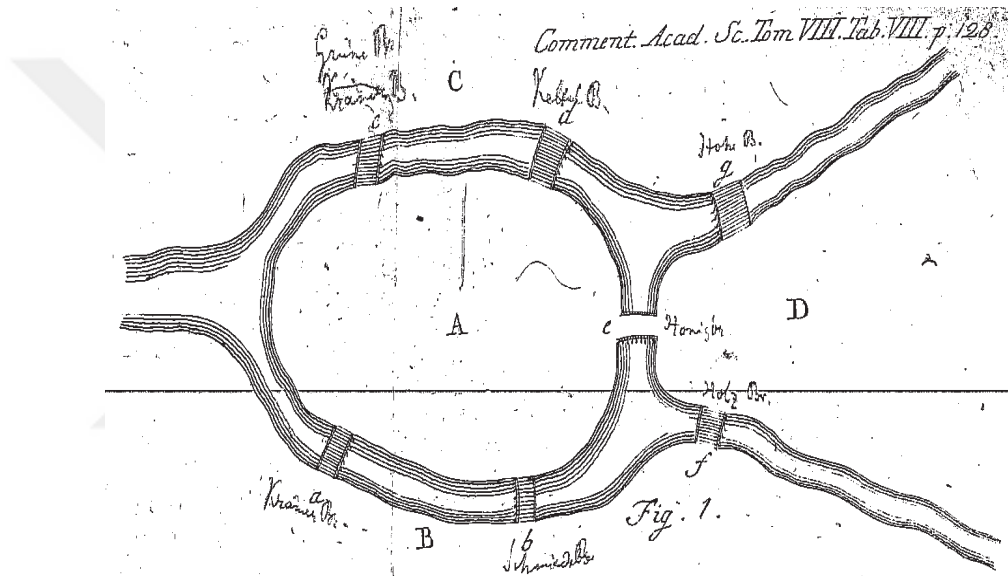
SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathcal{V}	: Bir grafın köşe kümesi
\mathcal{E}	: Bir grafın kenar kümesi
$\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$: Graf gösterimi
$\Omega(\mathcal{G})$: \mathcal{G} grafının omega değışmezi
$\mathcal{D}^S(\mathcal{G})$: \mathcal{G} grafının derece dizisi
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathcal{M}_S^r	: r elemanlı monojenik yarı grup
\mathcal{W}_n	: Tekerlek Graf
\mathcal{C}_n	: n köşeli devir graf
\mathcal{T}_n	: n köşeli ağaç graf
$\mathcal{K}_{r,t}$: r ve t parçalı tam graf
\mathcal{P}_n	: n köşeli yol graf
$e(u)$: u köşesinin eksantiriği
$rad(\mathcal{G})$: \mathcal{G} grafının yarıçapı
$diam(\mathcal{G})$: \mathcal{G} grafının çapı

1. GİRİŞ

Graf teorisinin başlangıcı, ünlü matematikçi Leonhard Euler'in Königsberg Köprüleri problemini çözmesiyle atılmıştır. Königsberg şehrinde bulunan yedi köprüyü her birini bir kez geçerek dolaşma problemi, Euler tarafından çözülmüş ve bu çalışma graf teorisinin doğuşuna zemin hazırlamıştır. Euler, grafın düğümleri (kara parçaları) ve kenarları (köprüler) kullanarak bu problemi formüle etmiştir (Euler, 1741). Aşağıdaki resim Euler'in (Euler, 1741) orjinal makalesinden alınmıştır. Bu makale graf teori ve topolojinin ortaya çıkış çalışması olarak bilinmektedir:



Şekil 1.1. Königsberg Köprüsü

Graf teori günümüzde en fazla çalışılan alanlardan biridir. Bunun en büyük sebebi şüphesiz ki matematik dışında da bir çok alanda uygulama bulmasıdır. Bunlarda bazıları aşağıdaki gibidir:

Çizelge 1.1. Graf Teorisinin Kullanım Alanlarından Bazıları

Alan Adı	Alanda Kullanımı
Bilgisayar Bilimleri	Algoritmalar ve veri yapıları, ağ analizi, internet arama motorları
Sosyal Bilimler	Sosyal ağ analizi, insan etkileşimleri, topluluk keşfi
Biyoloji	Protein-protein etkileşim ağları, genetik ağlar
Mühendislik	Elektrik devreleri, ulaşım ağları, telekomünikasyon ağları

Son yıllarda , ağaç graflarının yapraklarının dereceleri arasında olan ilişki baz alınarak omega değişmezi olarak bilinen yeni bir değişmez tanımlandı (Delen ve Cangul

(2018)). Bu değimez üzerine bir çok çalışmalar yapıldı. Çalışmalarda, genel olarak, belirli bir graf sınıfına ait grafların omega değışmezleri hesaplandı. Ayrıca literatürde sonlu sıfırlı monojenik yarı gruplar tarafından graflar elde edildi. Bu tip graflar üzerine bir çok çalışma yapıldı. Bu çalışmalarda bu tip grafların derece dizisi, renklendirme sayısı, klik sayısı gibibir çok parametresi hesaplandı. Bu tip grafların mükemmel graf olduğu gösterildi (Akgüneş, 2012; Akgüneş ve Çevik, 2013; Akgunes vd., 2014; Akgüneş, 2013).

Bu çalışmada, sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar tarafından elde edilen grafların derece dizilerinden yararlanarak omega değışmezleri en genel haliyle bulundu. Sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar tarafından elde edilen grafın köşe sayısına göre değışen omega değışmezi ve ikinci omega indeksini veren kurallar geliştirildi ve ispatları verildi.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Euler (1741) tarafından ortaya konan bu eser graf teori ve topolojinin çıkış noktası olarak kabul edilmektedir. Bu eserde yazar Königsberg Köprü problemini ortaya atmış ve çözüm yolları aramıştır. Şekil 1.1 bu eserden alınmıştır.

Ostrand (1973) tarafından elde edilen çalışmada, grafi yarı çapı ve çapı arasındaki ilişkiyi gösteren sonuç elde edildi. Bu sonuç, grafın çapının, yarıçapından büyük ancak yarıçapının iki katından küçük olduğunu göstermektedir. Yani $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$ eşitsizliğini ortaya koymuştur.

Beck (1988), bu çalışmada halkalardan yararlanılarak, sıfır bölen graf kavramı tanımlanarak, bu tip grafların renklendirilmeleri üzerine çalışılmıştır.

Erdős vd. (1989) tarafından elde edilen bu çalışmada bağlantılı ve bazı özel şartları sağlayan grafların yarıçapı ve çapı için üst sınıflar elde edilmiştir.

Anderson ve Naseer (1993) tarafından verilen bu çalışmada sıfır bölen graflar üzerine, literatüre bırakılmış açık sorulara cevap vermişlerdir. Çeşitli ters örnekler vermişlerdir.

Anderson ve Livingston (1999) tarafından verilen çalışmada değişmeli halkalardan elde edilen sıfır-bölen grafları için temel alınacak bir çalışmadır. Bu çalışmada yazarlar teoremler ve örneklerden yararlanarak okuyucuya istenileni aktarmaya çalışmışlardır. Eğer bir halka cisim değil ve sonlu olması durumunda, elde edilen grafında sonlu olacağını göstermişlerdir. Ayrıca halkanın değişmeli olması durumunda ise elde edilen grafın bağlantılı olacağını göstermişlerdir.

Dankelmann ve Entringer (2000) tarafından sunulan çalışmada, graflardaki ortalama mesafe kavramı için, köşe sayısı ve minimum derece kavramlarından yararlanılarak üst sınır etmişlerdir.

DeMeyer vd. (2002) tarafından verilen bu çalışmada, değişmeli yarı gruplardan sıfır bölümlü graflar elde edilmiştir. Yani halkalarda tanımlanan sıfır bölümlü graf kavramı, yarı gruplara aktarılmış oldu. Ayrıca bu grafların bir çok parametreleri için sınırlar ortaya koydular. Bu tip grafların bağlantılı olduğunu gösterdiler.

Akbari vd. (2003) tarafından verilen çalışmada, elde edilen sıfır bölen grafın hangi şartlar altında düzlemsel ve yine hangi şartlar altında parçalı graf olduğunu elde etmişlerdir.

Gross ve Yellen (2003), “Handbook of Graph Theory” adlı eserlerinde genel graf bilgisi yer almaktadır. Bu eserde grafın tanımları, çeşitleri, özellikler ve graf ile ilgili teoremler ortaya konulmuştur.

DeMeyer ve DeMeyer (2005) tarafından, değişmeli olma zorunluluğu olmayan bir yarı gruptan elde edilen sıfır bölen graflarının bir çok özelliği elde edilmiştir.

Anderson ve Badawi (2008) tarafından, halkalardan elde edilen sıfır bölen grafindan yararlanarak, halkanın ve idealinin üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

Vukičević ve Furtula (2009) tarafından bilinen aritmatik ve geometrik ortalama kavramlarını kullanarak geometrik aritmatik indeks isimli graf parametresi tanımlamıştır.

Mukwembi (2012) tarafından düzensizlik indeksi parametresi graflarda tanımlanıp, graf çapı için sınır elde edilmiştir.

Akgüneş (2012) tarafından, p ve q farklı asallar olmak üzere, $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ sıfır-bölen grafını ele alınarak p ve q ya asallarına bağlı çeşitli graf parametreleri verilmiştir.

Akgüneş ve Çevik (2013) tarafından, graflardaki yarıçap parametresi için düzensizlik indeksi yardımıyla yeni bir üst sınır elde etmiştir.

Das vd. (2013) tarafından, sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar yardımıyla yeni bir graf elde edildi. Bu grafların bir çok özelliği graf parametrelerine göre incelenmiştir. Ayrıca graflardaki kartezyen çarpımı kullanılarak yeni özellikler vermişlerdir ve bu tip grafların mükemmel graf olduklarını ortaya koymuşlardır.

Akgunes vd. (2014) tarafından, sıfırlı sonlu monojenik yarı gruplar yardımıyla elde edilen grafların, bu verilen yarı grubun mertebesiyle ifade edilebileceğini ve bu grafların topolojik indekslerini elde etmişlerdir.

Cangül (2017) Bu kitapta graf teorisinin tarihi ve graf teori ile ilgili temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Delen ve Cangul (2018) “A New Graph Invariant” isimli makalede bir grafın derece dizisi yardımıyla Ω ile gösterilen yeni bir graf değişmezi tanımlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada bu değişmez ile Euler karakteristiği arasında ilişkiyi gösteren teorem verilmiştir. Bu değişmezin, Euler karakteristiğine göre daha fazla bilgi verdiği vurgusu yapılmıştır.

Delen ve Cangul (2019) Bu çalışmada yazarlar ilmeklerin ve bir grafın bileşenlerinin maksimum sayısını, derece dizisi ve omega değişmezi kullanarak hesaplamışlardır.

Delen vd. (2019) Bu çalışmada Omega değişiminin bazı yeni özellikleri incelenmiştir. Özellikle grafların cycle olup olmaması ve bir grafin bileşen sayısı ile omega değişimi arasında ilişki kurulmuştur.

Diestel (1997) ve Gross ve Yellen (2003) kitaplarında graf teori ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Sanli vd. (2020) Graflardaki bağlantılılık kavramı ile omega değişimi arasında ilişki kurularak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, bir grafin omega değişimi -4 ten küçük veya eşit ise o grafin bağlantısız olduğu gösterilmiştir. Eğer bir bağlantılı graf için $\Omega(\mathcal{G}) = -2$ ise bu grafin acyclic olduğu elde edilmiştir. Ayrıca bağlantılı graf için $\Omega(\mathcal{G}) \geq 0$ ise bu grafin kesinlikle cycle graf olduğu sonuçlarına varılmıştır.

Ozalan vd. (2024) Graflar üzerinde, birinci omega değişimine benzer şekilde, derece dizisinden ve grafların kenarlarından yararlanarak ikinci omega indeksini tanımladılar. Devir graf, tam graf, iki parçalı tam graf gibi özel graf tiplerinin ikinci omega indeksini hesapladılar.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Graf teori üzerine temel bilgiler (Akgüneş, 2013), (Diestel, 1997), (Gross ve Yellen, 2003), (Harris, 2008) gibi kaynaklardan alınmıştır.

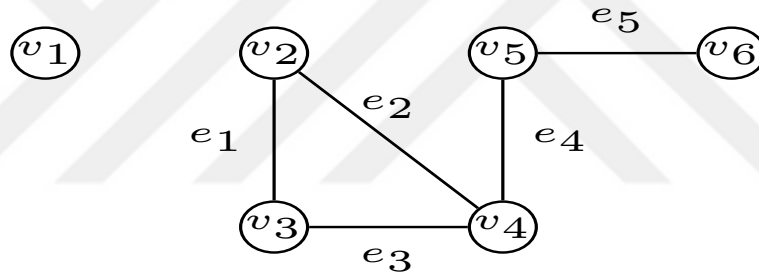
Tanım 3.1 \mathcal{V} kümesinin elemanlarını köşeleri ve bu köşelerin sıralı ikililerinden oluşan \mathcal{E} kümesinin elemanların kenar kabul eden şekle **graf** denir. Bir graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ olarak gösterilir.

Örnek 3.1 Şekil 3.1 deki graf için;

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \{e_1 = (v_2, v_3), e_2 = (v_2, v_4), e_3 = (v_3, v_4), e_4 = (v_4, v_5), e_5 = (v_5, v_6)\}$$

olur. İkililer kısaca $v_i v_j$ şeklinde de yazılabilir.



Şekil 3.1. Bir \mathcal{G} grafi

Bir grafın köşelerinin sayısına grafın mertebesi denir ve genellikle n harfi ile gösterilir. Grafın boyutu ise kenar sayısıdır ve genellikle m harfi ile gösterilir. Bir grafın köşeleri noktalarla ifade edilir ve kenarları ise bu köşeler arasındaki doğru parçalarıyla gösterilir. Köşelerinden ve kenarlarından oluşan kümeler sonlu olan graflara **sonlu graf** denir. Kenarlarında yön olan, yani köşeleri sıralı ikililer tarafından sıralanmış olan graflara **yönlendirilmiş graf** denir. Yönlendirilmemiş graflarda da kenarlar köşelerin sıralı ikililerinden oluşmaktadır. Ancak yönlendirilmemiş graflarda bu sıralamanın bir önemi yoktur. Farzedelim ki v_1 ve v_2 bir grafın iki köşesi olsun. $e = v_1 v_2$ kenarı yönlendirilmemiş graflarda v_1 ve v_2 köşeleri arasında yönü olmayan bir kenar olduğunu söylerken yönlendirilmiş graflarda ise v_1 köşesini başlangıç v_2 köşesini ise bitiş noktası kabul eden bir kenar olduğunu söyler.

Örnek 3.2 Şekil 3.1 da verilen \mathcal{G} grafinin mertebesi $n = 6$, boyutu ise $m = 5$ tir.

Tanım 3.2 Bir grafin herhangi iki köşesi arasında en az bir kenar varsa bu köşelere **komşu köşeler** denir.

Örnek 3.3 Şekil 3.1 da verilen \mathcal{G} grafinde v_2 köşesi v_3 ve v_4 köşeleri ile komşu iken v_1 köşesi grafin hiç bir köşesi ile komşu değildir.

Tanım 3.3 Bir grafta bir v köşesini göz önüne alalım. Bu köşeyle arasında bir kenar olan köşelerin sayısına bu **köşenin derecesi** denir ve bu sayı $der(v)$ ile ifade edilir. Derecesi sıfır olan yani hiç bir köşeye komşu olmayan köşeye **izole köşe** denir. Ayrıca köşe derecesi 1 olan köşeye de **uç köşe** (pendant) denir. Eğer bir köşe farklı bir köşeye komşu ise komşu olduğu köşeye 1 derece kazandırır. İlmekte bulunan köşenin derecesi 2 dir. Bir grafta bir köşenin derecesi tek sayıya eşitse bu köşeye **tek nokta**, çift bir sayıya eşitse **çift nokta** olarak adlandırılır. Bir \mathcal{G} grafinin en küçük dereceli köşesi **minimum dereceli** olarak isimlendirilir ve bu derece $\delta(\mathcal{G})$ olarak gösterilir. En yüksek dereceli köşe ise **maksimum dereceli** olarak isimlendirilir ve $\Delta(\mathcal{G})$ ile ifade edilir.

Örnek 3.4 Şekil 3.2 ye göre,

$$der(v_1) = 0$$

$$der(v_2) = 2$$

$$der(v_3) = 2$$

$$der(v_4) = 6$$

$$der(v_5) = 3$$

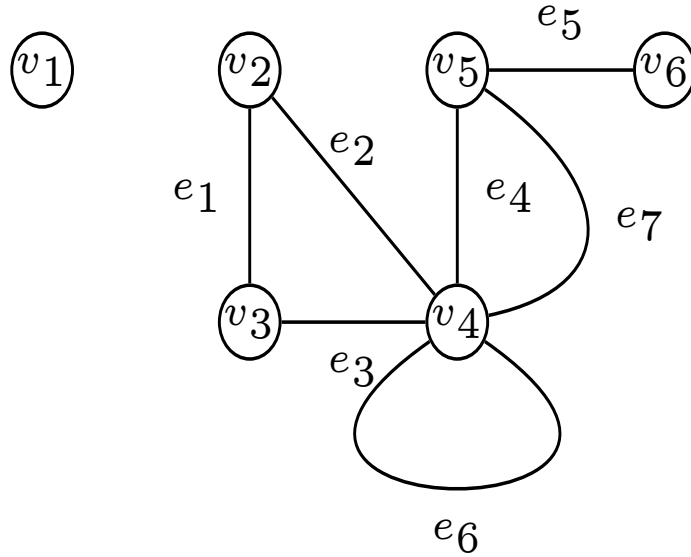
$$der(v_6) = 1$$

olarak elde edilir. Bu durumda v_1 köşesi **izole köşedir**. v_1 köşesi **uç köşedir**. Ayrıca bu şekilde göre $\delta(\mathcal{G}) = 0$ ve $\Delta(\mathcal{G}) = 6$ dir.

Bir grafta her kenar iki köşeden oluşur. Dolayısıyla köşe dereceleri ile kenar sayısı arasında bir ilişki vardır. Aşağıdaki teorem bu durumu göstermektedir.

Teorem 3.1 (Gross ve Yellen, 2003) $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\})$ olacak şekilde bir graf verilsin. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^n der(v_k) = 2m \quad (3.1)$$



Şekil 3.2. Çoklu kenarlı ve ilmekli bir \mathcal{G} grafi

eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla bir grafın tüm köşe derecelerinin toplamı çift olacağı açıktır. Aşağıdaki teorem ise tek dereceli köşelerin sayısı hakkında bilgi vermektedir.

Tanım 3.4 $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \mathcal{E})$ olacak şekilde bir graf verilsin. Bu durumda

$$N(v_k) = \{v_j : v_k v_j \in \mathcal{E}\}$$

kümesine v_k köşesinin **açık komşuluğu** denir.

Tanım 3.5 $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \mathcal{E})$ olacak şekilde bir graf verilsin. Bu durumda

$$N[v_k] = \{v_j : v_k v_j \in \mathcal{E}\} \cup \{v_k\}$$

kümesine v_k köşesinin **kapalı komşuluğu** denir.

Örnek 3.5 Şekil 3.1 e göre açık komşuluklar,

$$N(v_1) = \emptyset$$

$$N(v_2) = \{v_3, v_4\}$$

$$N(v_3) = \{v_2, v_4\}$$

$$N(v_4) = \{v_2, v_3, v_5\}$$

$$N(v_5) = \{v_4, v_6\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.6 $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ve $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ iki graf olsun. Eğer

$$1. \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$$

$$2. \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$$

şartları sağlanıyorsa \mathcal{G}_1 grafına \mathcal{G}_2 grafının **alt grafi** denir. Ayrıca \mathcal{G}_2 grafına \mathcal{G}_1 grafının **süper grafi** denir.

Örnek 3.6 Şekil 3.3a da ve Şekil Şekil 3.3b de verilen \mathcal{G}_1 ve \mathcal{G}_2 graflarının köşelerinin ve kenalarının kümesi;

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

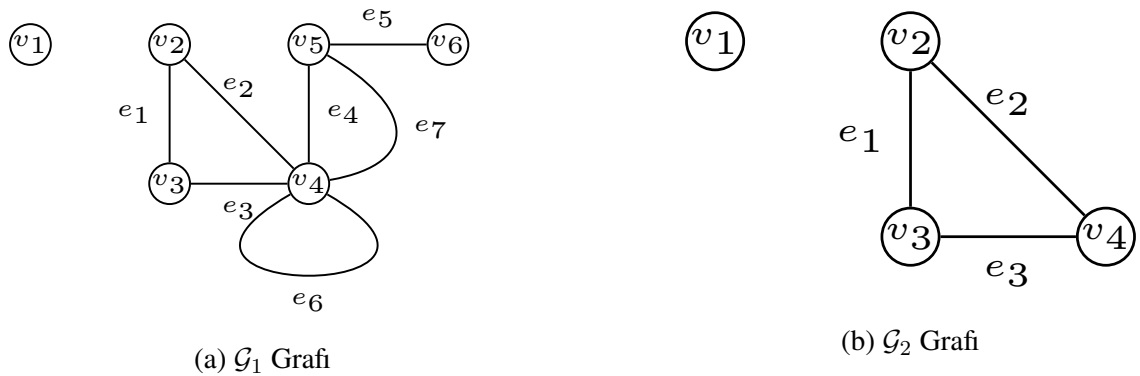
$$\mathcal{E}(\mathcal{G}_1) = \{e_1 = (v_2, v_3), e_2 = (v_2, v_4), e_3 = (v_3, v_4), e_4 = (v_4, v_5), e_5 = (v_5, v_6),$$

$$e_6 = (v_4, v_4), e_7 = (v_4, v_5)\}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{G}_2) = \{e_1 = (v_2, v_3), e_2 = (v_2, v_4), e_3 = (v_3, v_4)\}$$

$\mathcal{V}(\mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G}_1)$ ve $\mathcal{E}(\mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{G}_1)$ olduğundan Şekil 3.3a deki graf Şekil 3.3b deki grafın süper grafidir. Şekil 3.3b deki graf Şekil 3.3a deki grafın alt grafidir.



Şekil 3.3. Bir süper ve alt graf

Tanım 3.7 Bir $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ grafindaki e_k kenarını oluşturan köşeler v_{k-1} ve v_k olmak üzere, kenar ve köşelerden oluşan

$$\mathcal{W} = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$$

dizisine bir **yürüme** (walk) denir. Burada v_0 köşesine **başlangıç köşesi**, v_n köşesine ise **bitiş köşesi** denir. Bir yürümenin uzunluğu kenar sayısına eşittir. Aksi takdirde açık yürüme olarak isimlendirilir. Bir yürümede hiç bir köşe tekrarlanmıyorsa bu yürüme **yol** (path) denir. Bir yürümedeki yolların tamamı farklıysa bu yürüme **gezi** (trail) denir. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı, diğer bütün köşeleri ve kenarları farklı olan kapalı yürüme **devir** denir. Bir devir k uzunlukta ise k -devir olarak isimlendirilir. Ayrıca k tek sayı ise devire tek devir, çift sayı ise çift devir denir.

Örnek 3.7 Şekil 3.3a deki \mathcal{G}_1 grafi için;

$$v_2e_2v_4e_4v_5e_7v_4$$

bir yürümedir ancak bir yol değildir.

$$v_2e_2v_4e_4v_5$$

bir yol ve bir gezidir,

$$v_2e_2v_4e_3v_3e_1v_2$$

bir 3-devirdir.

Teorem 3.2 (Gross ve Yellen, 2003) Bir \mathcal{G} grafindaki iki köşe arasında yürüme varsa yol vardır.

Tanım 3.8 Bütün köşe çiftleri arasında en az bir yol bulunan graflar **bağlantılı** olarak adlandırılır.

Tanım 3.9 Bir grafta başladığı köşeyi kendisine yapıştıran kenara **ilmek** denir.

Örnek 3.8 Şekil 3.2 da e_6 kenarı bir ilmektir.

Tanım 3.10 İki köşe arasında birden fazla kenar bulunan graflara **çoklu graf** denir.

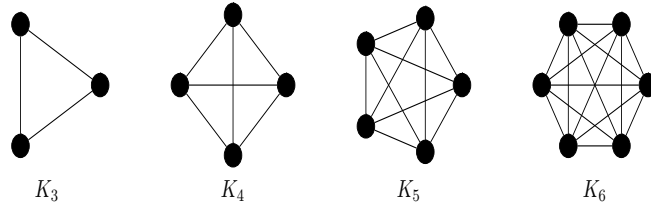
Örnek 3.9 Şekil 3.2 daki graf çok bir graftır. Çünkü v_4 ve v_5 köşeleri arasında 2 tane köşe vardır.

Tanım 3.11 Çoklu kenar ve ilmek ihtiva etmeyen graflara **basit graf** denir.

Örnek 3.10 Şekil 3.1 daki graf bir basit graf örneğidir.

Tanım 3.12 Bir grafin tüm köşeleri arasında bir kenar varsa bu grafa tam (complete) graf denir. Yani $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, her $u, v \in \mathcal{V}$ için $uv \in \mathcal{E}$ oluyorsa \mathcal{G} grafinin tam grafıdır. n köşeli bir tam graf \mathcal{K}_n ile gösterilir.

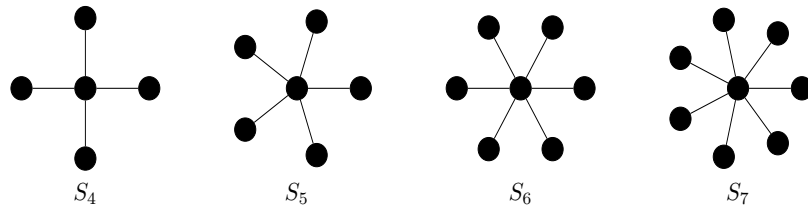
Örnek 3.11 Bazı tam graf örnekleri Şekil 3.4 ta verilmiştir.



Şekil 3.4. $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$ tam grafları

Tanım 3.13 Bir \mathcal{G} grafi n tane köşeden oluşsun. Bir merkez olarak adlandırılan köşesi $n - 1$ dereceye sahip ve diğer köşe dereceleri 1 olan grafa yıldız grafı denir. n köşeli bir yıldız grafı \mathcal{S}_n ile gösterilir.

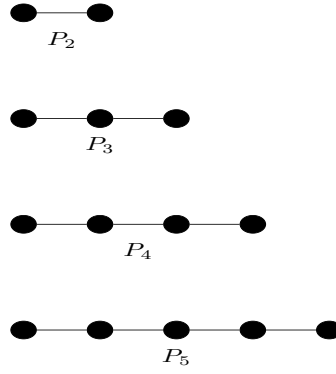
Örnek 3.12 Bazı yıldız graf örnekleri Şekil 3.5 ta verilmiştir.



Şekil 3.5. $\mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5, \mathcal{S}_6, \mathcal{S}_7$ yıldız grafları

Tanım 3.14 İki köşesinin derecesi 1, bu iki köşe hariç diğerlerinin derecesi 2 olan grafa yol grafı (path graph) denir. n köşeli bir yol grafı \mathcal{P}_n ile gösterilir.

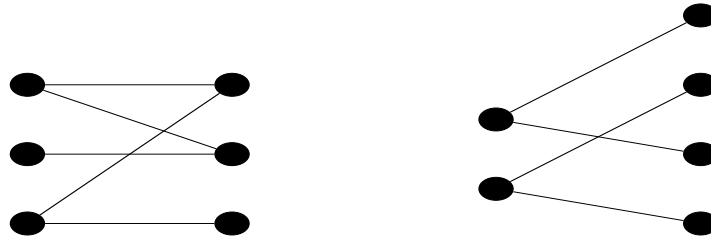
Örnek 3.13 Bazı yol grafı örnekleri Şekil 3.6 ta verilmiştir.



Şekil 3.6. $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5$ yol grafları

Tanım 3.15 Bir \mathcal{G} grafinin köşelerinin kümesinin iki ayrık kümeye bölündüğünü düşünelim. Bir kümedeki bazı köşeler diğer kümedeki köşelerin bazularına kenarlar yolu ile bağlı ve aynı kümede olan köşeler birbirleri arasında kenar yoksa bu grafa **iki parçalı graf** denir. Eğer bir kümedeki tüm köşeler ile diğer kümedeki tüm köşeler arasında bir kenar var ve aynı kümede olan köşeler arasında kenar yoksa, graf **iki parçalı tam graf** olarak isimlendirilir. n elemanlı köşe kümesi r ve t elemanlı iki ayrık kümeye bölünmüş iki parçalı tam graf $\mathcal{K}_{r,t}$ ile gösterilir. Tabi ki burada $n = r + t$ dir.

Örnek 3.14 Bazı iki parçalı graf örnekleri Şekil 3.7 ta verilmiştir.



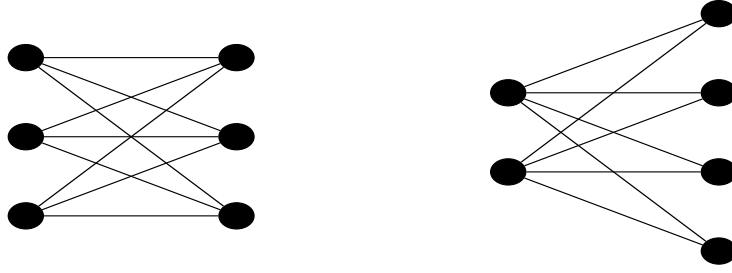
Şekil 3.7. İki parçalı graf örnekleri

Örnek 3.15 Bazı iki parçalı tam graf örnekleri Şekil 3.8 ta verilmiştir.

Tanım 3.16 Herhangi bir iki kenarı birbirini kesmeden çizilebilen graflara **düzlemsel graf** (planer graph) denir.

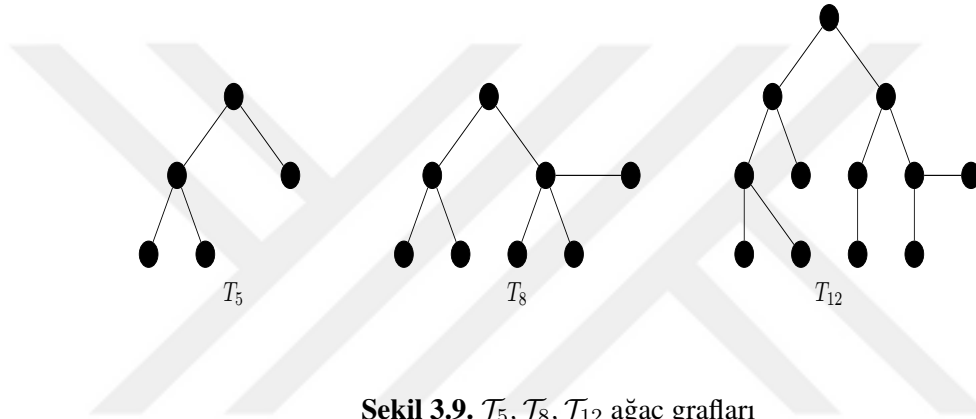
Örnek 3.16 Şekil 3.4 da \mathcal{K}_3 düzlemsel olmasına rağmen \mathcal{K}_6 değildir.

Tanım 3.17 Devir içermeyen basit graflara **ağaç graf** (\mathcal{T}_n) denir.



Şekil 3.8. İki parçalı tam graf örnekleri

Örnek 3.17 Bazı ağaç grafi örnekleri Şekil 3.9 ta verilmiştir.



Şekil 3.9. T_5 , T_8 , T_{12} ağaç grafları

Tanım 3.18 Ağaçların ayrık birleşiminden oluşan graflara **orman graf** (forest graph) denir. Bir başka ifade ile bağlantılı bileşenleri ağaç olan graflara orman graf denir.

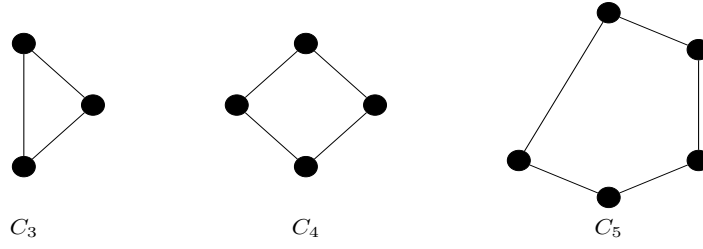
Tanım 3.19 Bir grafın tüm köşelerini içeren ve en az sayıda kenarla çizilebilen alt grafına **tam kapsayan ağaç** (spanning tree) graf denir

Tanım 3.20 Her köşesinin derecesi 2 olan, başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan graflara **devir graf** (C_n) denir.

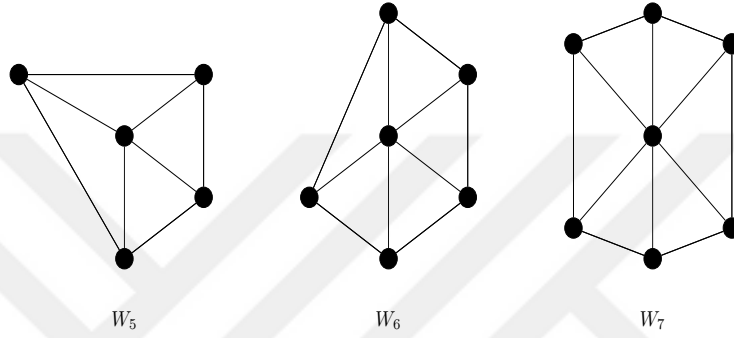
Örnek 3.18 Bazı devir grafi örnekleri Şekil 3.10 ta verilmiştir.

Tanım 3.21 Bir köşe, C_{n-1} devir grafının tüm köşelerine tek kenarla bağlansın. Bu şekilde oluşturulan graflara **tekerlek** (wheel) graf denir ve W_n ile gösterilir.

Örnek 3.19 Bazı tekerlek graf örnekleri Şekil 3.11 ta verilmiştir.



Şekil 3.10. C_3, C_4, C_5 devir grafları



Şekil 3.11. W_5, W_6, W_7 tekerlek grafları

3.1. Grafların bazı temel parametreleri

Tanım 3.22 \mathcal{G} bağlantılı grafiında iki köşe arasındaki **uzaklık**, bu köşeler arasındaki en kısa yolun uzunluğuna eşittir, $d_{\mathcal{G}}(u, v)$ ile gösterilir.

Tanım 3.23 Bir \mathcal{G} grafiındaki bir m köşesini eksantiriği $e(m)$ ile gösterilir ve

$$e(m) = \max\{d_{\mathcal{G}}(m, k) : k \in \mathcal{G}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.24 Bir bağlantılı \mathcal{G} grafiının **yarıçapı** $rad(\mathcal{G})$ ile gösterilir,

$$rad(\mathcal{G}) = \min\{e(m) : m \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\}$$

şeklinde tanımlanır.

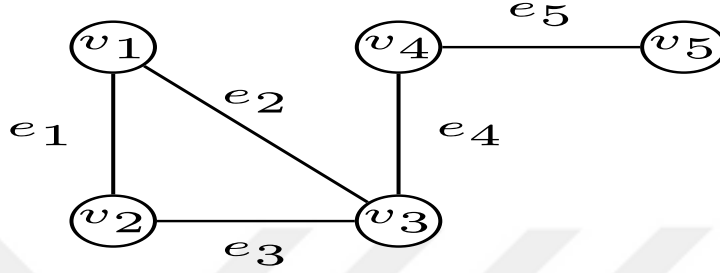
Tanım 3.25 Bir bağlantılı \mathcal{G} grafiının **çapı** $diam(\mathcal{G})$ ile gösterilir,

$$diam(\mathcal{G}) = \max\{e(m) : m \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin bir tam grafi ele alalım. Tam grafin tüm köşelerinden diğer köşelere bir kenar vardır. Dolayısıyla her köşe ile diğer köşe arasındaki uzaklık 1 dir. Yani her köşenin eksantirliği 1 olur. Bu durumda tam grafların çapı ve yarıçapı 1 dir.

Örnek 3.20 Şekil 3.12 de verilen grafin köşelerinin eksantirikleri, $1 < k < 5$ için v_k köşeleri için sırasıyla, 3, 3, 2, 2, 3 şeklinde hesaplanır. Bu durumda bu graf için yarıçapı 2 ve çapı 3 olarak elde edilir.



Şekil 3.12. Grafta çeşitli uzaklık kavramları

Teorem 3.3 (Haynes vd., 1998) Bir \mathcal{G} grafi verilsin. Bu durumda

$$rad(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{V}(\mathcal{G}) \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{G}), uv \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$$

dir.

Tanım 3.26 Bir \mathcal{G} grafi için, $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$ alt kümesi, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ kümesindeki tüm kenarların en az bir köşesini ihtiva ediyorsa bu \mathcal{M} kümesine **örtü kümesi** denir.

Tanım 3.27 Bir grafin en az elemanlı örtü kümesinin eleman sayısına **örtü sayısı** ($\alpha(\mathcal{G})$) denir. Yani

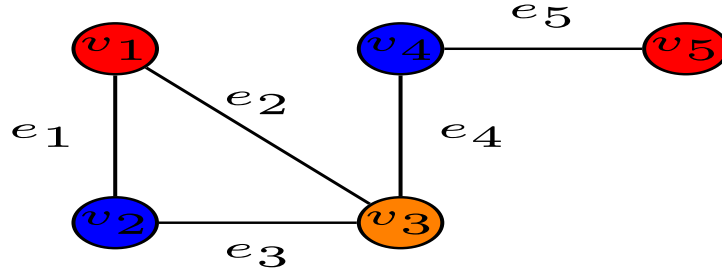
$$\alpha(\mathcal{G}) = \min\{|\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ kümesi } \mathcal{G} \text{ grafinin örtü kümesidir}\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.21 Şekil 3.12 göre, $\{v_1, v_3, v_4\}$ kümesi bir örtü kümesidir. Hatta tüm köşelerin kümesi de bir örtü kümesidir. Bu grafin örtü sayısı 3 tür.

Tanım 3.28 Komşu iki köşe farklı renkle etiketleme koşulu altında, bir grafin köşelerini renklendirmede kullanılan minimum sayıdaki rengin sayısına **kromatik sayı** denir ve $\chi(\mathcal{G})$ ile gösterilir.

Örnek 3.22 Şekil 3.12 graf aşağıdaki şekilde gibi renklendirilebilir. 3 renkten daha az bir renk kombinasyonu ile renklendirilememektedir. O bakımdan kromatik sayısı $\chi(\mathcal{G}) = 3$ tür.



Şekil 3.13. Bir grafın renklendirilmesi ve kromatik sayısı

Teorem 3.4 Herhangi bir graf için,

$$\chi(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G}) + 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 3.29 Bir \mathcal{G} grafında bulunan en büyük tam grafın köşe sayısına **klik sayısı** denir ve $\omega(\mathcal{G})$ ile gösterilir.

Örnek 3.23 Şekil 3.12 deki grafa klik sayısı $\omega(G) = 3$ tür.

Tanım 3.30 Verilen grafi bağlantısız yapmak için çıkarılan en az sayıdaki köşe sayısına **bağlantı noktaları sayısı** denir ve $\kappa(\mathcal{G})$ ile gösterilir.

n tane köşeye sahip bir tam grafi ele alalım. Bu grafi bağlantısız hale getirmek için $n - 1$ tane köşe silinmesi gerekir. Yani $\kappa(K_n) = n - 1$ olarak bulunur. Ayrıca bir bağlantısız graf için bağlantı noktaları sayısı 0 olacaktır. Ayrıca n tane köşeye sahip bağlantılı fakat tam olmayan herhangi bir graf için,

$$1 \leq \kappa(\mathcal{G}) \leq n - 2$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 3.24 Şekil 3.12 deki graf için $\kappa(\mathcal{G}) = 1$ dir.

Tanım 3.31 \mathcal{G} grafi ve $M \subseteq \mathcal{V}$ alt kümesi verilsin. Eğer bu kümedeki köşeler birbiriyle komşu değilse, bu küme **bağımsız** olarak isimlendirilir. Bir graftaki tüm bağımsız kümelerden en fazla elemana sahip olanın sayısına ise **bağımsız sayı** ($ind(\mathcal{G})$) denir.

Örnek 3.25 Şekil 3.12 deki graf için $ind(\mathcal{G}) = 2$ dir.

3.2. Bir Grafın Omega Değişmezi

Bu bölümde bir \mathcal{G} grafının derece dizisi

$$\mathcal{D}^S(\mathcal{G}) = \{0^{(m_0)}, 1^{(m_1)}, 2^{(m_2)} \dots \Delta^{(m_\Delta)}\}$$

şeklinde gösterilecektir. Burada m_k ler üzerine yazılan dereceden kaç tane köşe olduğunu göstermektedir.

Tanım 3.32 (Delen ve Cangul, 2018) D kümesi azalmayan ve negatif olmayan tam sayıların bir kümesi olsun. Eğer D kümesi bir \mathcal{G} grafının derece dizisine eşitse, bu D kümesine \mathcal{G} grafının **gerçekleşmesi** (realization) denir.

Her D kümesi için bir graf olmayacağı kesindir. Örneğin, $D = \{1, 2, 5\}$ kümesi herhangi bir grafın gerçekleştirilmesi değildir. Ancak her graf bir derece dizisine sahiptir. Farklı iki graflar aynı derece dizisine sahip olabilirler.

k dereceli köşelerin sayısı m^k ve Δ en büyük derece olmak üzere, bir \mathcal{T} ağaç grafi için;

$$m_1 = 2 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots + (\Delta - 2)m_\Delta \quad (3.2)$$

eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. Bu eşitlik tekrar düzenlenirse

$$-2 = m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots + (\Delta - 2)m_\Delta - m_1 \quad (3.3)$$

olarak elde edilir. Bu motivasyonla (Delen ve Cangul, 2018) da Ω değişmezi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.33 (Delen ve Cangul, 2018) $D = \{1^{(m_1)}, 2^{(m_2)}, \dots, \Delta^{(m_\Delta)}\}$ gerçekleştirilebilir bir derece dizisi ve onun gerçekleştirilmesi \mathcal{G} grafi olsun. D derece dizisine göre \mathcal{G} grafının Ω değişmezi;

$$\begin{aligned} \Omega(\mathcal{G}) &= m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots + (\Delta - 2)m_\Delta - m_1 \\ &= \sum_{k=1}^{\Delta} (k - 2)m_k \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.5 (Delen ve Cangul, 2018) Herhangi bir \mathcal{G} grafi için,

$$\Omega(\mathcal{G}) = 2(m - n)$$

dir. Burada m grafinin toplam kenarlarının sayısı, n ise köşelerinin sayısıdır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

Teorem 3.6 (Delen ve Cangul, 2018) *Herhangi bir \mathcal{G} grafi için $\Omega(\mathcal{G})$ her zaman çift bir sayıdır.*

Sonuç 3.1 (Delen ve Cangul, 2018) *D kümesi azalmayan ve negatif olmayan tam sayıların bir kümesi olsun. Eğer $\Omega(D)$ tek sayı ise D kümesi gerçekleşemez. Yani D kümesini derece dizisi olarak kabul eden bir graf yoktur.*

Sonuç 3.2 (Delen ve Cangul, 2018) *Literatürde bulunan bazı özel graflar için Ω değişmezi aşağıda hesaplanmıştır:*

1. \mathcal{P}_k , k uzunluklu yol graf olmak üzere;

$$\Omega(\mathcal{P}_k) = -2$$

2. \mathcal{C}_k , k uzunluklu devir graf olmak üzere;

$$\Omega(\mathcal{C}_k) = 0$$

3. \mathcal{S}_k yıldız grafi için;

$$\Omega(\mathcal{S}_k) = -2$$

4. T ağaç grafi için;

$$\Omega(T) = -2$$

5. \mathcal{K}_k tam grafi için;

$$\Omega(\mathcal{K}_k) = k(k - 3)$$

6. $r + s = k$ olmak üzere, $\mathcal{K}_{r,s}$ çift parçalı tam grafi için;

$$\Omega(\mathcal{K}_{r,s}) = 2[rs - (r + s)]$$

7. $r + s = k$ olmak üzere, $\mathcal{T}_{r,s}$ tadpole grafi için;

$$\Omega(\mathcal{T}_{r,s}) = 0$$

Yukarıdaki sonuçta yol, yıldız ve ağaç graflar için Ω değişiminin -2 olduğu görülmektedir. Aslında bu durum tüm devirsiz(acyclic) graflar için doğrudur(Delen ve Cangul, 2018).

Bir grafin kenarlarıyla sınırlı kapalı bölgelerinin sayısı b olsun. Aslında bir kapalı bölge $3 \leq k$ için k -devir, loop veya çoklu kenarlardan (2-gen) oluşur.

Teorem 3.7 (Delen ve Cangul, 2018) $D = \{1^{(m_1)}, 2^{(m_2)} \dots \Delta^{(m_\Delta)}\}$ gerçekleştirilebilir bir derece dizisi ve onun gerçekleşmesi bağlantılı düzlem grafi \mathcal{G} olsun. Bu grafin kapalı bölgelerinin sayısı

$$b = \frac{\Omega(\mathcal{G})}{2} + 1 \quad (3.4)$$

dir.

Teorem 3.8 (Delen ve Cangul, 2018) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_c$ bağlantısız bir \mathcal{G} grafinin bileşenleri olmak üzere,

$$\Omega(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^c \Omega(\mathcal{G}_k) \quad (3.5)$$

Sonuç 3.3 (Delen ve Cangul, 2018) $D = \{1^{(m_1)}, 2^{(m_2)} \dots \Delta^{(m_\Delta)}\}$ gerçekleştirilebilir bir derece dizisi ve onun gerçekleşmesi c bileşenli \mathcal{G} grafi olsun. Bu grafin kapalı bölgelerinin sayısı

$$b = \frac{\Omega(\mathcal{G})}{2} + c \quad (3.6)$$

dir.

Teorem 3.9 (Delen ve Cangul, 2018) Her bir G grafi için,

$$c \geq -\frac{\Omega(\mathcal{G})}{2} \quad (3.7)$$

ve buna denk olarak $c \geq n - m$ dir.

3.3. Bir Grafin İkinci Omega İndeksi

Tanım 3.34 (Ozalan vd., 2024) $\mathcal{D}^S(\mathcal{G}) = \{1^{(m_1)}, 2^{(m_2)} \dots \Delta^{(m_\Delta)}\}$ gerçekleştirilebilir derece dizisi, G grafi da bu dizinin bir gerçekleşmesi olsun. Bu durumda G grafinin kenarlarının

kümesi E ve $1 \leq i, j \leq \Delta$ olmak üzere, G grafinın ikinci omega indeksi

$$\Omega_2(G) = \sum_{ij \in E} [(i-2)m_i][(j-2)m_j]$$

olarak tanımlanır.

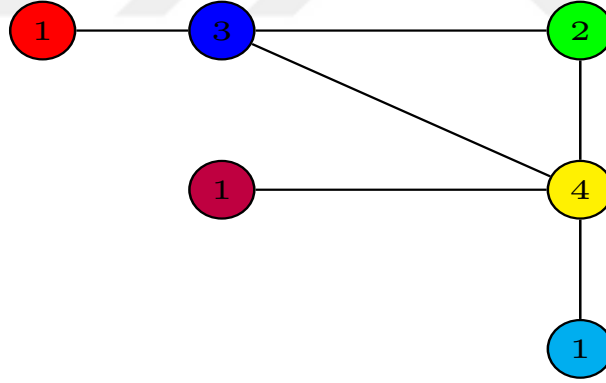
Yukarıdaki tanımdaki grafinde köşeleri dereceleri ile etiketlenmiştir.

Örnek 3.26 Şekil 3.14 de köşeleri, dereceleri ile etiketlenmiş grafin kenar kümesi $E = \{13, 23, 34, 24, 14, 14\}$ şeklindedir. Ayrıca köşe dizisi $\mathcal{D}^S(\mathcal{G}) = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}, 4^{(1)}\}$ dir.

Bu grafin ikinci omega indeksi

$$\begin{aligned} \Omega_2(G) &= \sum_{ij \in E} [(i-2)m_i][(j-2)m_j] \\ &= [(1-2).3][(3-2).1] + [(2-2).1][(3-2).1] + [(3-2).1][(4-2).1] \\ &\quad + [(2-2).1][(4-2).1] + [(1-2).3][(4-2).1] + [(1-2).3][(4-2).1] \\ &= -3 + 0 + 2 + 0 - 6 - 6 \\ &= -13 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 3.14. Köşeleri, dereceleri ile etiketlenmiş bir graf

Bazı özel grafların ikinci omega indeksleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.10 (Ozalan vd., 2024) \mathcal{K}_n tam grafi için,

$$\Omega_2(\mathcal{K}_n) = \frac{n^3(n-3)^2(n-1)}{2}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.11 (Ozalan vd., 2024) \mathcal{C}_n döngü (cycle) grafi için,

$$\Omega_2(\mathcal{C}_n) = 0$$

Teorem 3.12 (Ozalan vd., 2024) $\mathcal{K}_{m,n}$ iki parçalı tam graf için,

$$\Omega_2(\mathcal{C}_n) = (m - 2)(n - 2)m^2n^2$$

Teorem 3.13 (Ozalan vd., 2024) \mathcal{S}_n yıldız graf için,

$$\Omega_2(\mathcal{S}_n) = (3 - n)(n - 1)^2$$

Teorem 3.14 (Ozalan vd., 2024) \mathcal{W}_n tekerlek graf için,

$$\Omega_2(\mathcal{W}_n) = (n - 1)^2(2n - 4)$$

3.4. Yarı Gruplar ve Monojenik Yarı Gruplar

Bu bölümde yarı gruplar ve monojenik yarı gruplar hakkında temel bilgiler verilecektir.

Tanım 3.35 (Howie, 1995) \mathcal{S} boştan farklı küme ve "*" bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in \mathcal{S}$ için;

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad (3.8)$$

sağlanıyorsa, bu $(\mathcal{S}, *)$ cebirsel yapısına **yarı grup** denir. Yani bir küme üzerinde tanımlı olan ikili işlem birleşme özelliğini sağlıyorsa bu cebirsel yapı "yarı grup" olarak isimlendirilir.

Bu çalışma boyunca, herhangi bir karışıklığa yol açmayacağı düşünüldüğünde, "*" sembolü yerine, alışılga gelen terminoloji kullanılacaktır. Yani 3.8 eşitliği

$$a(bc) = (ab)c \quad (3.9)$$

olarak ifade edilecektir. Ayrıca $(\mathcal{S}, *)$ yerine kısaca \mathcal{S} yarı grubu ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 3.27 "+" işlemi ile birlikte doğal sayılar kümesi \mathbb{N} bir yarı gruptur. Gerçekten bu cebirsel yapıda birleşme özelliği sağlandığı açıktır. Ancak bu yapının birimi ve ters elemanı yoktur. Yani grup olmadığı açıktır.

Örnek 3.28 2 nin pozitif tam sayı kuvvetlerinden oluşan, $K(2) = \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$ kümesini bilinen çarpma işlemi ile göz önüne alalım. Bu cebirsel yapı yarı gruptur. Birimi ve ters elemanları yoktur.

Örnek 3.27 ve Örnek 3.28 yarı grupları sırasıyla 1 ve 2 elemanı tarafından üretildiğine dikkat ediniz. Ayrıca Örnek 3.27 yarı grup toplamsal olmasına rağmen Örnek 3.28 deki yarı grup çarpımsaldır.

Tanım 3.36 (Howie, 1995) S yarı grubunda, her $a, b \in S$ için,

$$ab = ba \quad (3.10)$$

oluyorsa bu yarı gruba, **değişmeli (veya abelyen) yarı grup** denir.

Tanım 3.37 (Howie, 1995) S yarı grubunda, her $a \in S$ için,

$$a1 = 1a = a \quad (3.11)$$

olacak şekilde "1" elemanı varsa bu yarı gruba **birimli yarı grup (veya monoid)** denir.

Gruplara benzer şekilde, yarı gruplarda da, eğer birim elemanı varsa tektir. Ayrıca verilen bir yarı gruptan monoid yapısı oluşturmak oldukça kolaydır. Örneğin elimizdeki bir S yarı grubuna, her $a \in S$ için $a1 = 1a = a$ şartını sağlayan 1 elemanını, $S \cup \{1\}$ olacak şekilde ekleyelim.

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahipse} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ birim elemana sahip değilse} \end{cases} \quad (3.12)$$

Şeklinde tanımlanan S^1 birimli bir yarı gruptur yani monoidtir. Bu monoide, S yarı grubundan üretilen monoid denir.

Tanım 3.38 (Howie, 1995) En az iki elemanlı bir S yarı grubunda, her $a \in S$ için,

$$a0 = 0a = 0 \quad (3.13)$$

olacak şekilde 0 elemanı varsa bu elemana S **yarı grubunun sıfırı** denir. S yarı grubuna da **sıfırlı yarı grup** denir.

Birime benzer şekilde, eğer bir yarı grubun sıfırı varsa tektir. İleriki bölümlerde graf yapısı oluşturmak için, bir yarı gruba sıfır eklenecektir. O bakımdan elimizde mevcut olan bir yarı grubu sıfırlı yarı grup yapısına dönüştürmek isteyebiliriz. Örneğin elimizdeki bir S yarı grubuna, her $a \in S$ için $a0 = 0a = 0$ şartını sağlayan 0 elemanını, $S \cup \{0\}$ olacak şekilde ekleyelim.

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ yarı grubu 0 elemanına sahipse} \\ S \cup \{0\}, & S \text{ yarı grubu 0 elemanına sahip değilse} \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanan S^0 sıfırlı bir yarı gruptur. Bu yarı gruba, S yarı grubundan üretilen sıfırlı yarı grup denir.

Bir S yarı grubunun M ve K gibi iki alt kümesi için;

$$MK = \{mk : m \in M, k \in K\} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır. Bu kümelerden eğer birisi, örneğin $K = \{k\}$ tek elemanlı ise $M\{k\}$ gösterimi yerine Mk gösterimi tercih edilecektir.

Bir yarı grubun, grup yapısında daha zayıf olduğu açıktır. Bu bölüm de verilen örneklerde de bu görüldü. Şimdi, "bir yarı grup hangi şart altında grup oluşturur?" sorusuna cevap aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.15 (Howie, 1995) S yarı grubu verilsin. Her $a \in S$ için,

$$aS = S \text{ ve } Sa = S \quad (3.16)$$

ise S yarı grubu bir gruptur.

Tanım 3.39 (Howie, 1995) S ve \mathcal{T} birer yarı grup olmak üzere $\phi : S \rightarrow \mathcal{T}$ dönüşümü, her $a, b \in S$ için,

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad (3.17)$$

şartını sağlıyorsa ϕ dönüşümüne **morfizim (homomorfizm)** denir.

Tanım 3.40 (Howie, 1995) S ve \mathcal{T} birer yarı grup olmak üzere $\phi : S \rightarrow \mathcal{T}$ homomorfizmi terslenebilirse, yani $\phi^{-1} : \mathcal{T} \rightarrow S$ ve her $a, b \in \mathcal{T}$ için,

$$\phi^{-1}(ab) = \phi^{-1}(a)\phi^{-1}(b) \quad (3.18)$$

olacak şekilde $\phi \circ \phi^{-1}$ bileşkesi S nin birim dönüşümüne, $\phi^{-1} \circ \phi$ bileşkesi \mathcal{T} nin birim dönüşümüne eşit olma şartını sağlıyorsa ϕ dönüşümüne **izomorfizm** denir. Daha kısa net bir ifade ile bire bir örten homomorfizme **izomorfizm** denir. S ve \mathcal{T} yarı grupları arasında bir izomorfizm varsa bu durum $S \cong \mathcal{T}$ ile gösterilir.

Tanım 3.41 (Howie, 1995) S yarı grubu verilsin. Bu yarı grup tek bir eleman tarafından üretiliyorsa **monojenik yarı grup** olarak isimlendirilir. Yani bir $a \in S$ için;

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\} = S \quad (3.19)$$

şartı sağlanıyorsa.

\mathcal{S} bir yarı grup ve $a \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ alt yarı grubunda tekrarlanan eleman olmadığını varsayalım. Yani $a^m = a^n$ olması $m = n$ olmasını gerektirsin. Bu şekildeki çarpımsal $(\langle a \rangle, \cdot)$ alt yarı grup, $(\mathbb{N}, +)$ toplamsal yarı grubuna izomorftur.

3.5. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Yönlendirilmemiş Graf Elde Edilmesi

Bu bölümde, literatürde verilmiş olan sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı gruplar yardımıyla yönlendirilmemiş bir graf elde edilmesi hatırlatılacaktır. Bu bölümdeki temel bilgiler (Akgüneş, 2013) den alınmıştır.

Öncelikle $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r = \{0, a, a^2, \dots, a^r\}$ sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubu göz önüne alalım. Elde edilecek grafın köşeleri verilen yarı grubun sıfırdan farklı elemanlarıdır. Ayrıca bu elemanlar arasında bir kenar olması için gerek ve yeter şart çarpımlarının sıfıra eşit olmalarıdır. Yani birbirinin sıfır böleni olmalarıdır. Bu yarı grupta sıfırdan farklı elemanların çarpımının sıfır olması için gerek ve yeter şart çarpımlarının kuvvetinin r den büyük olmasıdır. Matematiksel olarak yazacak olursak, $1 \leq i, j \leq r$ olmak üzere,

$$a^i \text{ ve } a^j \text{ arasında bir kenar vardır} \Leftrightarrow a^i \cdot a^j = 0 \Leftrightarrow i + j > r$$

Bir $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r$ sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen graf $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)$ ile gösterilir. Bu grafın köşe kümesi $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)(V)$ ve kenar kümesi de $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)(E)$ ile gösterilecektir. $r > 1$ için, $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)$ grafındaki a^r köşesinin tüm köşeler ile arasında mutlaka bir kenar olacağı kolayca gözlemlenebilir. Bunun bir sonucu olarak Teorem 3.16 literatüre kazandırılmıştır.

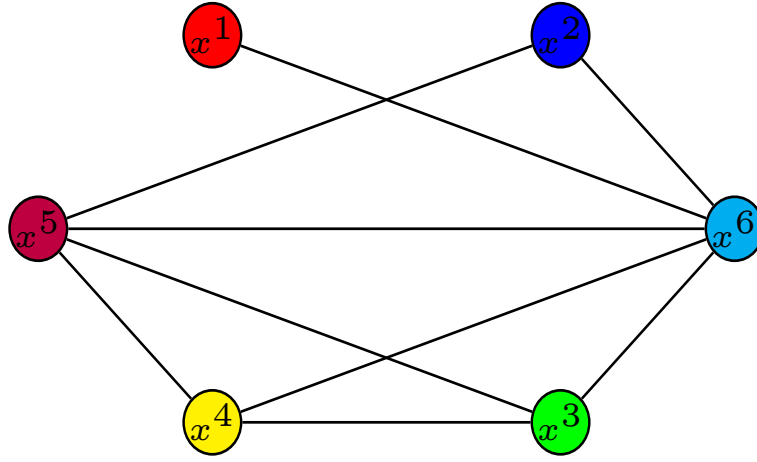
Örnek 3.29 $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^6 = \{0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^6)$ grafının köşelerinden oluşan küme;

$$\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^6)(V) = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$$

ve kenar kümesi

$$\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^6)(E) = \{(x^1, x^6), (x^2, x^5), (x^2, x^6), (x^3, x^4), (x^3, x^5), (x^3, x^6), (x^4, x^5), \\ (x^4, x^6), (x^5, x^6)\}$$

dır. Grafın kendisi de Şekil 3.15 de verilmiştir.



Şekil 3.15. Bir sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen graf örneği

Herhangi bir bağlantılı \mathcal{G} grafında, bağlantılılık tanımından dolayı her iki kenar arasında mutlaka yol vardır. Ayrıca her $s, t \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ için,

$$d_{\mathcal{G}}(s, t) = 0 \Leftrightarrow s = t \quad (3.20)$$

durumu sağlanır. Bununla birlikte her $s, t \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ için,

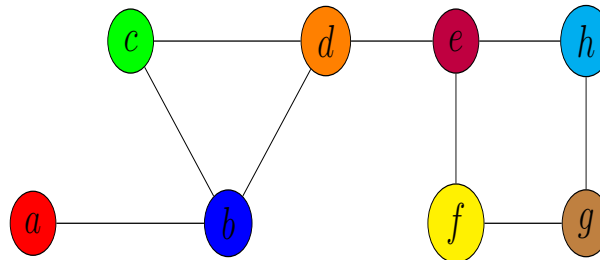
$$d_{\mathcal{G}}(s, t) = d_{\mathcal{G}}(t, s) \text{ (simetri özelliği)} \quad (3.21)$$

Son olarak her $s, t, k \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ için,

$$d_{\mathcal{G}}(s, t) \leq d_{\mathcal{G}}(s, k) + d_{\mathcal{G}}(k, t) \text{ (üçgen eşitsizliği)} \quad (3.22)$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak 3.20, 3.21 ve 3.22 den, $d_{\mathcal{G}}$ nin \mathcal{G} grafının köşelerinden oluşuna küme üzerinde bir metrik olduğu görülür.

Örnek 3.30 Şekil 3.16 deki grafın diametresi 5 tir.



Şekil 3.16. Bir grafın çapı

Teorem 3.16 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için,

$$\text{diam}(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = 2 \quad (3.23)$$

dir.

Şekil 3.16 deki graf 3 ve 4 uzunluğunda iki tane devir içermektedir. Grafların içerdiği devir sayıları da graflar hakkında bilgi vermektedir.

Tanım 3.42 Bir \mathcal{G} basit grafini ele alalım. Bu grafin içerdiği en küçük uzunluktaki devire grafin **girth** sayısı ($\text{girth}(\mathcal{G})$) denir. Ayrıca bir grafta devir yoksa girth sonsuz kabul edilir.

Teorem 3.17 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için,

$$\text{girth}(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = 3 \quad (3.24)$$

olur.

Tanım 3.43 Bir \mathcal{G} grafında $u \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ verilsin. $\{v \in \mathcal{V}(\mathcal{G}) : uv \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$ kümesinin eleman sayısına t köşesinin derecesi ($d_{\mathcal{G}}(t)$) denir. Ayrıca

$$\Delta(\mathcal{G}) = \text{maks}\{d_{\mathcal{G}}(t) : t \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\}$$

$$\delta(\mathcal{G}) = \text{maks}\{d_{\mathcal{G}}(t) : t \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\}$$

Aşağıdaki teorem $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafinin en küçük ve en büyük köşe derecesi hakkında net bir bilgi vermektedir.

Teorem 3.18 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için,

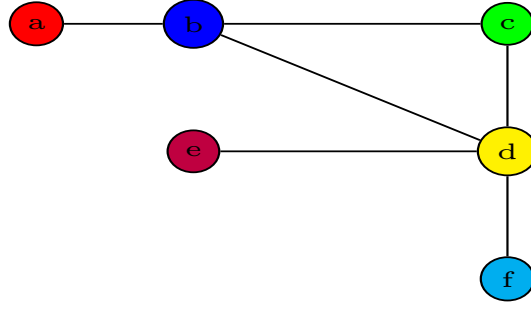
$$\Delta(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = r - 1$$

$$\delta(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = 1$$

eşitlikleri her zaman sağlanır.

Tanım 3.44 $\mathcal{D}^S(\mathcal{G})$ (derece dizisi) nin farklı elemanlarının sayısına **düzensizlik indeksi** denir ve $t(\mathcal{G})$ ile gösterilir.

Örnek 3.31 Şekil 3.17 daki graf için, $\mathcal{D}^S(\mathcal{G}) = \{1, 1, 1, 2, 3, 4\}$ ve $t(\mathcal{G}) = 4$ tür.



Şekil 3.17. Bir grafın derece dizisi

Teorem 3.19 $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r$ sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)$ grafi için,

$$\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)) = \left\{ 1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1, \dots, r - 2, r - 1 \right\}$$

$$t(\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)) = r - 1$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 3.45 Bir \mathcal{G} grafi ve $B \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$ alt kümesini göz önüne alalım. Eğer $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus B$ kümesindeki her bir köşe ile B kümesinin en az bir köşesi komşu ise B kümesine bu grafın bir **baskın kümesi** denir. Ayrıca bir \mathcal{G} grafının baskınlık sayısı $\gamma(\mathcal{G})$ ile gösterilir ve

$$\gamma(\mathcal{G}) = \min\{|B| : B, \mathcal{G} \text{ grafının baskın kümesi} \}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.20 $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r$ sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r)$ grafi için,

$$\gamma(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^r) = 1$$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Tezin bu bölümünde elde edilen ana sonuçlar sunulacaktır. Sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı gruplar yardımıyla elde edilen grafların omega değişmezleri ve ikinci omega indeksi için genel kurallar verilecek, ispatlanacak ve elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenecektir.

4.1. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Elde Edilen Grafların Omega Değişmezinin Hesaplanması

Teorem 4.1 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için omega değişmezi, $r > 1$ için;

$$\Omega(\mathcal{M}_S^r) = \frac{(r-2)(r-3)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 3 \quad (4.1)$$

tir.

İspat \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için Teorem 3.19'deki derece dizisi, Tanım 3.33 ile birlikte dikkate alındığından aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\left\{ 1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}, \dots, \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \right)^{(1)}, \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \right)^{(2)}, \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \right)^{(1)}, \dots, (r-2)^{(1)}, (r-1)^{(1)} \right\}$$

Bu derece dizisine göre, Tanım 3.33 kullanılarak,

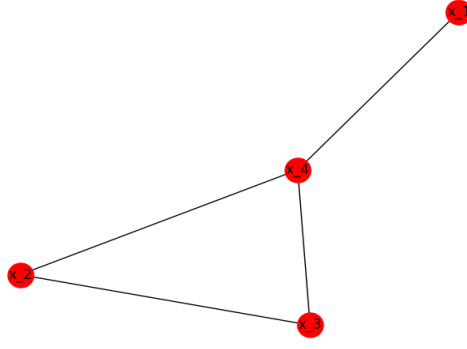
$$\begin{aligned} \Omega(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) &= 1 + \dots + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 3 \right) \cdot 1 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2 \right) \cdot 2 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \right) \cdot 1 + \dots \\ &\quad + (r-4) \cdot 1 + (r-3) \cdot 1 - 1 \\ &= 1 + \dots + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 3 \right) + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2 \right) + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \dots \\ &\quad + (r-4) + (r-3) - 1 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2 \right) \\ &= \frac{(r-2)(r-3)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 3 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.1 Teorem 4.1'deki formül kullanılarak Şekil 4.1'deki grafin omega değişmezi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathcal{M}_S^4) &= \frac{(4-2)(4-3)}{2} + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

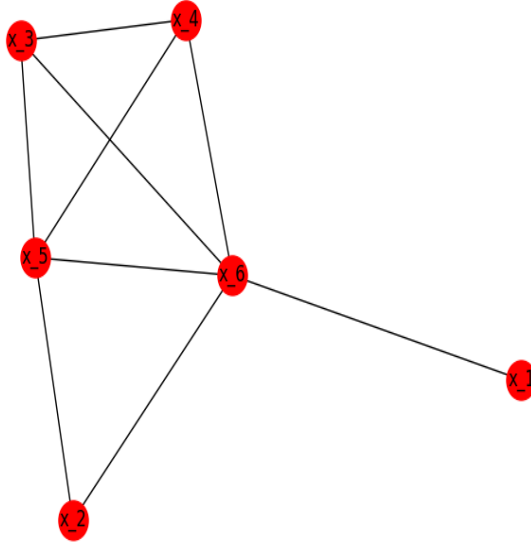
olarak elde edilir.



Şekil 4.1. $\Gamma(\mathcal{M}_S^4)$ grafi

Örnek 4.2 Teorem 4.1 deki formül kullanılarak Şekil 4.2 deki grafin omega değışmezi aşığıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Omega(\mathcal{M}_S^6) &= \frac{(6-2)(6-3)}{2} + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

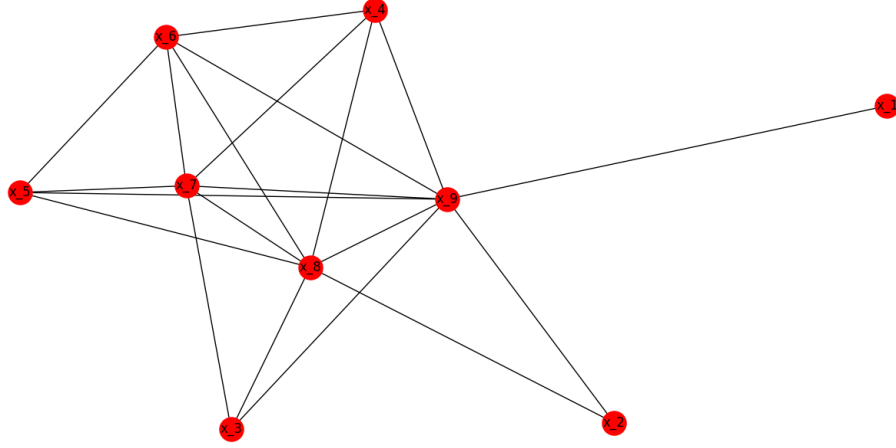


Şekil 4.2. $\Gamma(\mathcal{M}_S^6)$ grafi

Örnek 4.3 Teorem 4.1 deki formül kullanılarak Şekil 4.3 deki grafin omega değışmezi

aşağıdaki gibi elde edilir:

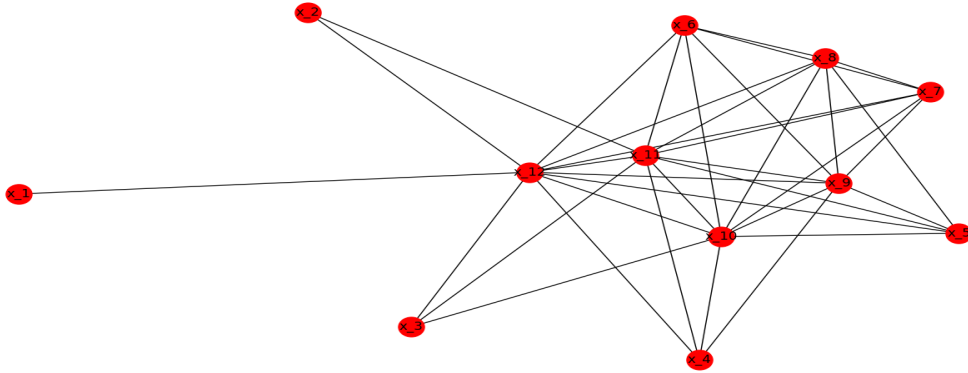
$$\begin{aligned}\Omega(\mathcal{M}_S^9) &= \frac{(9-2)(9-3)}{2} + \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= 22\end{aligned}$$



Şekil 4.3. $\Gamma(\mathcal{M}_S^9)$ grafi

Örnek 4.4 Teorem 4.1 deki formül kullanılarak Şekil 4.4 deki grafin omega değişmezi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Omega(\mathcal{M}_S^{12}) &= \frac{(12-2)(12-3)}{2} + \left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= 48\end{aligned}$$



Şekil 4.4. $\Gamma(\mathcal{M}_S^{12})$ grafi

4.2. Sıfırlı Sonlu Çarpımsal Monojenik Yarı Gruplar Yardımıyla Elde Edilen Grafların İkinci Omega İndeksinin Hesaplanması

Teorem 4.2 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi verilsin. $r > 2$ için ikinci omega indeksi

r tek sayı ise,

$$\Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = \sum_{j=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} \left((j-2) \sum_{k=r-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} (k-2) \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2 \right) \right)$$

r çift sayı ise,

$$\Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = \sum_{j=\frac{r}{2} + 1}^{r-1} \left((j-2) \sum_{k=r-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\frac{r}{2}}^{r-1} (k-2) \left(\frac{r}{2} - 2 \right) \right) + \left(\frac{r}{2} - 2 \right)^2$$

olarak hesaplanır.

İspat r tek olmak üzere $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ nin kenarlarının kümesi

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{ & 1(r-1), 2(r-1), \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-1), \lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-1), \dots, (r-2)(r-1), \\ & 2(r-2), \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-2), \lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-2), \dots, (r-3)(r-2), \\ & \vdots \\ & \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1 \right) \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2 \right), \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2 \right), \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2 \right), \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right) \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2 \right), \\ & \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right), \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right) \} \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca bu grafin derece dizisi

$$D(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = \{1^{(1)}, 2^{(1)}, \dots, \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor \right)^{(2)}, \dots, (r-2)^{(1)}, (r-1)^{(1)}\}$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi r tek sayısı için, kenarların kümesinden ve derece dizisinden yararlanarak ikinci omega indeksi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) &= (1-2)1(r-1-2)1 + (2-2)1(r-1-2)1 + \dots + \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2 \right) 2(r-1-2)1 \\ &+ \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2 \right) 2(r-1-2)1 + \dots + (r-2-2)1(r-1-2)1 \\ &+ (2-2)1(r-2-2)1 + \dots + \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2 \right) 2(r-2-2)1 \\ &+ \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2 \right) 2(r-2-2)1 + \dots + (r-3-2)1(r-2-2)1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 - 2\right) 1 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) 1 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) 2 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) 1 \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) 2 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) 1 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) 1 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) 1 \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) 2 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) 1 + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) 2 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) 1 \\
& = (r - 1 - 2) \left[(1 - 2) + (2 - 2) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) + \cdots + (r - 2 - 2) \right] \\
& + 3 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) (r - 1 - 2) \\
& + (r - 2 - 2) \left[(2 - 2) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) + \cdots + (r - 3 - 2) \right] \\
& + 3 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) (r - 2 - 2) \\
& \vdots \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) \left[\left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 - 2\right) + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) \right] \\
& + 3 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \\
& + 3 \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) \\
& = (r - 1 - 2) \sum_{k=1}^{r-2} (k - 2) + (r - 2 - 2) \sum_{k=2}^{r-3} (k - 2) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) \sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1} (k - 2) \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) \sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (k - 2) + 3 \left(\sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} (k - 2) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \right) \\
& = (r - 1 - 2) \sum_{k=r-(r-1)}^{r-2} (k - 2) + (r - 2 - 2) \sum_{k=r-(r-2)}^{r-3} (k - 2) + \cdots \\
& + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 2 - 2\right) \sum_{k=r-(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2)}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1} (k - 2) + \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 - 2\right) \sum_{k=r-(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (k - 2) \\
& + 3 \left(\sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} (k - 2) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \right) \\
& = \sum_{j=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} \left((j - 2) \sum_{k=r-j}^{j-1} (k - 2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} (k - 2) \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 2\right) \right)
\end{aligned}$$

r çift olmak üzere $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ nin kenarlarının kümesi

$$E = \{1(r-1), 2(r-1), \dots, \frac{r}{2}(r-1), \frac{r}{2}(r-1), \dots, (r-2)(r-1),$$

$$\begin{aligned}
& 2(r-2), \dots, \frac{r}{2}(r-2), \frac{r}{2}(r-2), \dots, (r-3)(r-2), \\
& \quad \vdots \\
& \left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}+1\right), \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right), \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right), \left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)\}
\end{aligned}$$

$$D(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) = \{1^{(1)}, 2^{(1)}, \dots, \left(\frac{r}{2}\right)^{(2)}, \dots, (r-2)^{(1)}, (r-1)^{(1)}\}$$

r çift sayısı için, kenarların kümesinden ve derece dizisinden yararlanarak ikinci omega indeksi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
& \Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) \\
& = (1-2)1(r-1-2)1 + (2-2)1(r-1-2)1 + \dots + \left(\frac{r}{2}-2\right)2(r-1-2)1 \\
& + \left(\frac{r}{2}-2\right)2(r-1-2)1 + \dots + (r-2-2)1(r-1-2)1 \\
& + (2-2)1(r-2-2)1 + \dots + \left(\frac{r}{2}-2\right)2(r-2-2)1 \\
& + \left(\frac{r}{2}-2\right)2(r-2-2)1 + \dots + (r-3-2)1(r-2-2)1 \\
& \quad \vdots \\
& + \left(\frac{r}{2}-1-2\right)1\left(\frac{r}{2}+1-2\right)1 + \left(\frac{r}{2}-2\right)2\left(\frac{r}{2}+1-2\right)1 \\
& + \left(\frac{r}{2}-2\right)2\left(\frac{r}{2}+1-2\right)1 + \left(\frac{r}{2}+1-2\right)1\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+2-2\right)1 \\
& + \left(\frac{r}{2}-2\right)2\left(\frac{r}{2}-2\right)2 \\
& = (r-1-2)\left[(1-2) + (2-2) + \dots + \left(\frac{r}{2}-2\right) + \dots + (r-2-2)\right] \\
& + 3(r-1-2)\left(\frac{r}{2}-2\right) \\
& + (r-2-2)\left[(2-2) + \dots + \left(\frac{r}{2}-2\right) + \dots + (r-3-2)\right] \\
& + 3(r-2-2)\left(\frac{r}{2}-2\right) \\
& \quad \vdots \\
& + \left(\frac{r}{2}+1-2\right)\left[\left(\frac{r}{2}-1-2\right) + \left(\frac{r}{2}-2\right)\right] \\
& + 3\left(\frac{r}{2}-2\right)\left(\frac{r}{2}+1-2\right) \\
& + \left(\frac{r}{2}-2\right)^2 + 3\left(\frac{r}{2}-2\right)^2 \\
& = (r-1-2)\sum_{k=1}^{r-2}(k-2) + (r-2-2)\sum_{k=2}^{r-3}(k-2) + \dots + \left(\frac{r}{2}+1-2\right)\sum_{k=\frac{r}{2}-1}^{\frac{r}{2}}(k-2) \\
& + 3\sum_{k=\frac{r}{2}}^{r-1}(k-2)\left(\frac{r}{2}-2\right) + \left(\frac{r}{2}-2\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (r-1-2) \sum_{k=r-(r-1)}^{r-2} (k-2) + (r-2-2) \sum_{k=r-(r-2)}^{r-3} (k-2) + \dots \\
&+ \left(\frac{r}{2}+1-2\right) \sum_{k=r-\left(\frac{r}{2}+1\right)}^{\frac{r}{2}} (k-2) + 3 \sum_{k=\frac{r}{2}}^{r-1} (k-2) \left(\frac{r}{2}-2\right) + \left(\frac{r}{2}-2\right)^2 \\
&= \sum_{j=\frac{r}{2}+1}^{r-1} \left((j-2) \sum_{k=r-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\frac{r}{2}}^{r-1} (k-2) \left(\frac{r}{2}-2\right) \right) + \left(\frac{r}{2}-2\right)^2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 4.1 \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi ve

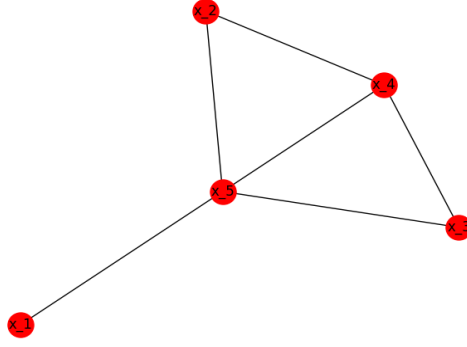
$$f(r) = \begin{cases} 0, & r \text{ tek} \\ 1, & r \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu verilsin. $r > 2$ için ikinci omega indeksi,

$$\begin{aligned}
\Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^r)) &= \sum_{j=\left[\frac{r}{2}\right]+1}^{r-1} \left((j-2) \sum_{k=r-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\left[\frac{r}{2}\right]}^{r-1} (k-2) \left(\left[\frac{r}{2}\right]-2\right) \right) \\
&+ f(r) \left(\frac{r}{2}-2\right)^2
\end{aligned}$$

Örnek 4.5 Şekil 4.5 teki graf için Sonuç 4.1 daki formülü uygulayalım:

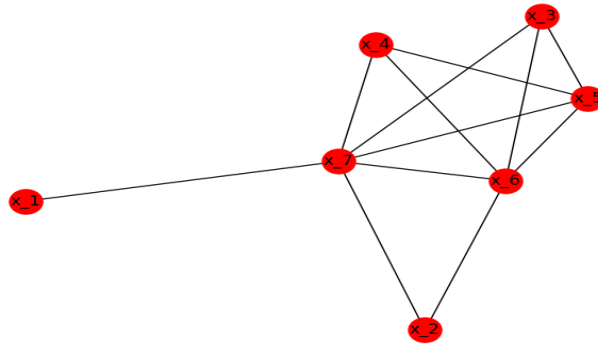
$$\begin{aligned}
\Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^5)) &= \sum_{j=\left[\frac{5}{2}\right]+1}^{5-1} \left((j-2) \sum_{k=5-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\left[\frac{5}{2}\right]}^{5-1} (k-2) \left(\left[\frac{5}{2}\right]-2\right) \right) \\
&+ f(5) \left(\frac{5}{2}-2\right)^2 \\
&= \sum_{j=3}^4 \left((j-2) \sum_{k=5-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=3}^4 (k-2) (2-2) \right) \\
&= \left((3-2) \sum_{k=5-3}^{3-1} (k-2) \right) + \left((4-2) \sum_{k=5-4}^{4-1} (k-2) \right) + 0 \\
&= 1.(2-2) + 2.(-1+0+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$



Şekil 4.5. $\Gamma(\mathcal{M}_S^5)$ grafi

Örnek 4.6 Şekil 4.6 daki graf için Sonuç 4.1 deki formülü uygulayalım:

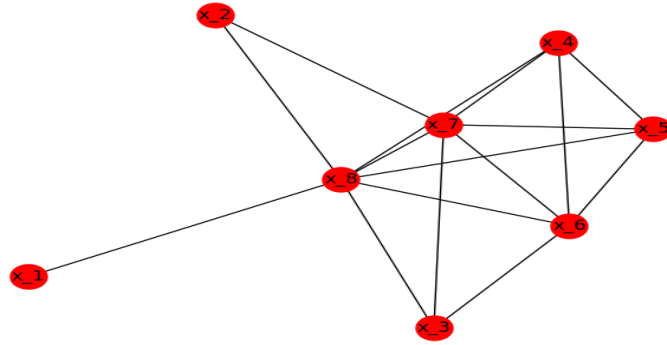
$$\begin{aligned}
 \Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^7)) &= \sum_{j=\lfloor \frac{7}{2} \rfloor + 1}^{7-1} \left((j-2) \sum_{k=7-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\lceil \frac{7}{2} \rceil}^{7-1} (k-2) \left(\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor - 2 \right) \right) \\
 &\quad + f(7) \left(\frac{7}{2} - 2 \right)^2 \\
 &= \sum_{j=4}^6 \left((j-2) \sum_{k=7-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=4}^6 (k-2) (3-2) \right) \\
 &= \left(2 \sum_{k=3}^3 (k-2) \right) + \left(3 \sum_{k=2}^4 (k-2) \right) + \left(4 \sum_{k=1}^5 (k-2) \right) + 3(2.1 + 3.1 + 4.1) \\
 &= 2.1 + 3.(0 + 1 + 2) + 4.(-1 + 0 + 1 + 2 + 3) + 27 \\
 &= 58
 \end{aligned}$$



Şekil 4.6. $\Gamma(\mathcal{M}_S^7)$ grafi

Örnek 4.7 Şekil 4.7 daki graf için Sonuç 4.1 deki formülü uygulayalım:

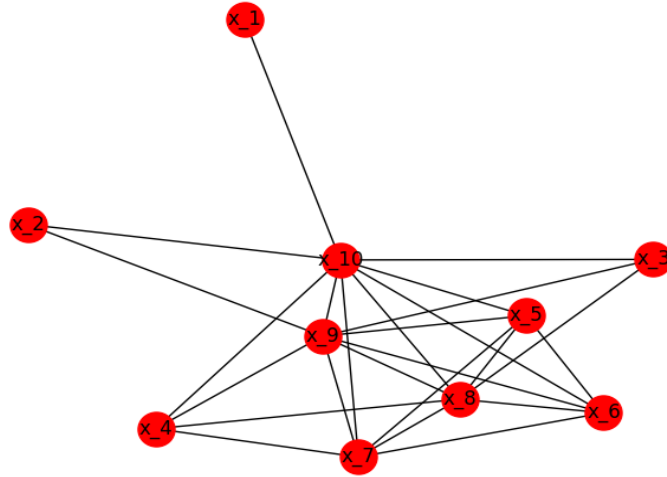
$$\begin{aligned}
\Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^8)) &= \sum_{j=\lfloor \frac{8}{2} \rfloor + 1}^{8-1} \left((j-2) \sum_{k=8-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\lfloor \frac{8}{2} \rfloor}^{8-1} (k-2) \left(\left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor - 2 \right) \right) \\
&\quad + f(8) \left(\frac{8}{2} - 2 \right)^2 \\
&= \sum_{j=5}^7 \left((j-2) \sum_{k=8-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=4}^7 (k-2) (4-2) \right) + 4 \\
&= \left(3 \sum_{k=3}^4 (k-2) \right) + \left(4 \sum_{k=2}^5 (k-2) \right) + \left(5 \sum_{k=1}^6 (k-2) \right) \\
&\quad + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2) + 4 \\
&= 9 + 24 + 45 + 88 \\
&= 166
\end{aligned}$$



Şekil 4.7. $\Gamma(\mathcal{M}_S^8)$ grafi

Örnek 4.8 Şekil 4.8 daki graf için Sonuç 4.1 deki formülü uygulayalım:

$$\begin{aligned}
 \Omega_2(\Gamma(\mathcal{M}_S^{10})) &= \sum_{j=\lfloor \frac{10}{2} \rfloor + 1}^{10-1} \left((j-2) \sum_{k=10-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=\lceil \frac{10}{2} \rceil}^{10-1} (k-2) \left(\lfloor \frac{10}{2} \rfloor - 2 \right) \right) \\
 &+ f(10) \left(\frac{10}{2} - 2 \right)^2 \\
 &= \sum_{j=6}^9 \left((j-2) \sum_{k=10-j}^{j-1} (k-2) \right) + 3 \left(\sum_{k=5}^9 (k-2) (5-2) \right) + 9 \\
 &= \left(4 \sum_{k=4}^5 (k-2) \right) + \left(5 \sum_{k=3}^6 (k-2) \right) + \left(6 \sum_{k=2}^7 (k-2) \right) + \left(7 \sum_{k=1}^8 (k-2) \right) \\
 &+ 3 \cdot (3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3) + 9 \\
 &= 20 + 50 + 90 + 140 + 234 \\
 &= 534
 \end{aligned}$$



Şekil 4.8. $\Gamma(\mathcal{M}_S^{10})$ grafi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tezde öncelikle graf teori hakkında genel bilgiler ve konuyla bağlantılı kaynak araştırması bölümüne yer verildi. Daha sonra literatürdeki omega değişmezi ve ikinci omega indeksi ile ilgili temel bilgiler sunuldu. Yine literatürde bulunan \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafının elde edilmesi hatırlatıldı. Ana sonuçlar olarak, \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ grafi için omega değişmezi ve ikinci omega indeksi için genel bir formül elde edildi.

5.2. Öneriler

Literatürde çeşitli graf çarpımları tanımlanmıştır. Herhangi iki grafın özel bir çarpımının omega değişmezi ve ikinci omega indeksi hesaplanabilir. Bu bulunan sonuç sıfır bölen graflara ve \mathcal{M}_S^r sıfırlı sonlu çarpımsal monojenik yarı grubundan elde edilen $\Gamma(\mathcal{M}_S^r)$ graflara uygulanabilir. Daha genel olarak, yeni bir cebirsel veya topolojik bir yapıdan özel bir graf elde edilip yukarıda bulduğumuz sonuca benzer şekilde derece dizileri, omega değişmezleri veya ikinci omega indeksleri hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

Akbari, S., Maimani, H., ve Yassemi, S., 2003, When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph, *Journal of Algebra*, 270(1), 169–180.

Akgüneş, N., 2012, Analyzing special parameters over zero-divisor graphs, *AIP Conference Proceedings*, 1479(1), 390–392.

Akgüneş, N., 2013, Graf parametreleri ve cebirsel yapılara grafsal yaklaşımlar, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya*.

Akgüneş, N. ve Çevik, A. S., 2013, A new bound of radius with irregularity index, *Applied Mathematics and Computation*, 219(11), 5750–5753.

Akgunes, N., Das, K., ve Cevik, A., 2014, Topological indices on a graph of monogenic semigroups, *Topics in Chemical Graph Theory*, 16, 3–20.

Anderson, D. ve Livingston, P., 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 217, 434–447.

Anderson, D. ve Naseer, M., 1993, Becks coloring of a commutative ring, *Journal of algebra*, 159(2), 500–514.

Anderson, D. F. ve Badawi, A., 2008, On the zero-divisor graph of a ring, *Communications in Algebra*, 36(8), 3073–3092.

Beck, I., 1988, Coloring of commutative rings, *Journal of algebra*, 116(1), 208–226.

Cangül, İ. N., 2017, Graf teori-1, *Dora Yayıncılık*.

Dankelmann, P. ve Entringer, R., 2000, Average distance, minimum degree, and spanning trees, *Journal of Graph Theory*, 33(1), 1–13.

Das, K. C., Akgüneş, N., ve Çevik, A. S., 2013, On a graph of monogenic semigroups, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 1–13.

Delen, S. ve Cangul, I. N., 2018, A new graph invariant, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6(1), 30–33.

Delen, S. ve Cangul, I. N., 2019, Extremal problems on components and loops in graphs, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 35, 161–171.

Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., ve Cangul, I., 2019, Omega invariant of graphs and cyclicity, *Applied Sciences*, 21, 91–95.

DeMeyer, F. ve DeMeyer, L., 2005, Zero divisor graphs of semigroups, *Journal of Algebra*, 283(1), 190–198.

DeMeyer, F. R., McKenzie, T., ve Schneider, K., 2002, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup forum*, 65, 206–214.

Diestel, R., 1997, Graph theory, *Springer, New York*.

Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., ve Tuza, Z., 1989, Radius, diameter, and minimum degree, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 47(1), 73–79.

Euler, L., 1741, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, s. 128–140.

Gross, J. L. ve Yellen, J., 2003, Handbook of graph theory, *CRC press*.

Harris, J. M., 2008, *Combinatorics and graph theory* Springer.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., ve Slater, P. J., 1998, Fundamentals of domination in graphs marcel dekker, *Inc., New York*

Howie, J. M., 1995, *Fundamentals of semigroup theory* oxford university Press

Mukwembi, S., 2012, A note on diameter and the degree sequence of a graph, *Applied mathematics letters*, 25(2), 175–178.

Ostrand, P. A., 1973, Graphs with specified radius and diameter, *Discrete mathematics*,

4(1), 71–75.

Ozalan, N. U., Cevik, A. S., ve Cangul, I. N., 2024, The second omega index, *Current Organic Synthesis*, 21(3), 286–291.

Sanli, U., Celik, F., Delen, S., ve CANGÜL, İ., 2020, Connectedness criteria for graphs by means of omega invariant, *Filomat*, 34(2), 642–647.

Vukičević, D. ve Furtula, B., 2009, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges, *Journal of mathematical chemistry*, 46, 1369–1376.

