



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**SIFIR-BÖLEN GRAFLARIN BAZI
TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN
İNCELENMESİ**

**Arslan ANNAGYLYJOV
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

**Temmuz-2025
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Arslan ANNAGYLYJOV tarafından hazırlanan ‘‘Sıfır-Bölen Grafların Bazı Topolojik İndekslerinin İncelenmesi’’ adlı tez çalışması 07/07/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliğı ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

.....

Danışman

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Arslan ANNAGYLYJOV

Tarih: 07.07.2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIFIR-BÖLEN GRAFLARIN BAZI TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Arslan ANNAGYLYJOV

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2025, 47 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

Graf Teorisi, matematiğin en geniş uygulama alanlarından birine sahip teorilerinden biridir. Ağ yapıları, veri analizi, optimizasyon problemleri ve hatta sosyal ağların modellenmesi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

Tez toplamda 4 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teorisinin tarihçesi, tanımı, bazı özellikleri ve bazı graf çeşitleri verilmiştir.

İkinci bölümde, tez kapsamında kullanılan kaynaklar detaylı bir şekilde araştırılmış ve içerik bilgileri sunulmuştur.

Üçüncü bölümde sıfır bölen grafların ve bazı Zagreb indekslerin tanımları verilerek bu Zagreb indekslerin ters tepe dereceleri kanıtlanmıştır ve örneklendirilmiştir.

Dördüncü bölüm çalışmanın sonuçları ve öneriler kısmını içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Graf, Maksimum Derece, Sıfır-Bölen Graflar, Ters Tepe Derece, Zagreb İndeksi.

ABSTRACT

MS THESIS

**EXAMINATION OF SOME TOPOLOGICAL INDICES OF ZERO-DIVISOR
GRAPHS**

Arslan ANNAGYLYJOV

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2025, 47 Pages

Jury

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Asst. Prof. Dr. Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

Graph Theory is one of the theories with one of the widest application areas in mathematics. It is used in many areas such as network structures, data analysis, optimization problems and even modeling of social networks.

The thesis consists of 4 main chapters in total.

In the first chapter, the history of graph theory, its definition, some properties and some graph types are given.

In the second chapter, the resources used within the scope of the thesis are researched in detail and their content information is presented.

In the third chapter, the definitions of zero-dividing graphs and some Zagreb indices are given and the reverse vertex degree of these Zagreb indices are proven and exemplified.

The fourth chapter includes the results and recommendations of the study.

Keywords: Graph, Maximum Degree, Reverse Vertex Degree, Zero-Divisor Graphs, Zagreb Index.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitim sürecinde bana yol gösteren, yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Nihat Akgüneş'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyen ve beni hiç yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkür ediyorum.

Arslan ANNAGYLYJOV
KONYA-2025



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Graf Tanımı, Özellikleri ve Çeşitleri	3
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	8
2.1. Graf Teorisi ve Sıfır Bölen Graflarla İlgili Kaynak Araştırması	8
2.2. Zagreb İndeksleri ve Ters Tepe Derece Kavramı Üzerine Kaynak Araştırması 10	
3. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI VE BU GRAFLARIN BAZI ZAGREB İNDEKSLERİNİN TANIMI VE TERS TEPE DERECE İNDEKSLERİNİN HESAPLANMASI.....	15
3.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI.....	15
3.2. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI VE BU GRAFLARIN BAZI ZAGREB TERS TEPE DERECE İNDEKSLERİ.....	17
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	32
4.1. Sonuçlar.....	32
4.2. Öneriler	33
5. KAYNAKLAR.....	34

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. 1. Königsberg şehri. (Samuel, 1697).....	1
Şekil 1. 2. Çoklu Graf Modeli	4
Şekil 1. 3. Tam Graf Modelleri.....	5
Şekil 1. 4. Çevre Graf Modeli.....	5
Şekil 1. 5. Yol Graf Modelleri.....	5
Şekil 1. 6. İki Parçalı Tam Graf Modeli	6
Şekil 1. 7. Düzgün Graf Modelleri	6
Şekil 1. 8. Tekerlek Graf Modelleri.....	6
Şekil 1. 9. Larva Graf Modeli.....	7
Şekil 3. 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ Sıfır bölen grafi	17



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{Z}	Tam Sayılar
$G(V, E)$	Graf
K_n	Tam graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
W_n	Tekerlek graf
C_n	Çevre graf
P_n	Yol graf
$T_{r,s}$	Larva graf
W_n	Tekerlek graf
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\Gamma(R)$	Sıfır-bölen graf
$\sigma(G)$	Minimum derece
d_v	v köşenin derecesi
R	Halka
c_v	Ters tepe derece
$M_1(G)$	G grafının birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	G grafının ikinci Zagreb indeksi
$\Pi_1(G)$	G grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(G)$	G grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\bar{M}_1(G)$	G grafının birinci Zagreb eşindeksi
$\bar{M}_2(G)$	G grafının ikinci Zagreb eşindeksi
$\bar{\Pi}_1(G)$	G grafının birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\bar{\Pi}_2(G)$	G grafının ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$HM_1(G)$	G grafının birinci Hiper-Zagreb indeksi
$HM_2(G)$	G grafının ikinci Hiper-Zagreb indeksi

$\chi(G)$	Randic bağlantısı indeksi
$S(G)$	Toplam bağlantı indeksi
$H(G)$	Harmonik bağlantı indeksi
$AZI(G)$	Artırılmış Zagreb indeksi
$rM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$rM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$r\Pi_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci çarpımsal Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$r\Pi_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci çarpımsal Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$r\bar{M}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci eşindeksinin ters tepe derecesi
$r\bar{M}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci eşindeksinin ters tepe derecesi
$r\bar{\Pi}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci çarpımsal Zagreb eşindeksinin ters tepe derecesi
$r\bar{\Pi}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksinin ters tepe derecesi
$rHM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci Hiper-Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$rHM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci Hiper-Zagreb indeksinin ters tepe derecesi
$r\chi[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin Randic bağlantı indeksinin ters tepe derecesi
$rS[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin Toplam bağlantı indeksinin ters tepe derecesi
$rH[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$	$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin Harmonik bağlantı indeksinin ters tepe derecesi

$rAZI [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)]$

$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının Artırılmış
Zagreb indeksinin ters tepe derecesi



1. GİRİŞ

Graf teorisinin kökenleri mütevazı ve hatta eğlenceli niteliktedir. Matematiğin birçok dalı, hesaplama, hareket ve ölçüm gibi temel problemlerin çözülmesi amacıyla ortaya çıkarken, graf teorisinin gelişimine yol açan problemler genellikle yalnızca zekayı sınamak için tasarlanmış bulmacalardan ibaretti. Ancak, bu tür bulmacalar görünüşte önemsiz olsa da, matematikçilerin ilgisini çekmeyi başardı. Sonuç olarak, graf teorisi beklenmedik bir çeşitlilik ve derinliğe sahip zengin bir teorik altyapıya kavuştu.



Şekil 1. 1. Königsberg şehri. (Pufendorf, 1697)

Königsberg Köprüleri Problemi, matematik tarihinde önemli bir yer tutmaktadır. Şekil 1.1'de gösterilen harita, 17. yüzyılda yayımlanmış bir kitaptan alınmış olup, Doğu Prusya'daki eski Königsberg şehrini ve şehirden geçen Pregel Nehri'ni gözler önüne sermektedir. Pregel Nehri, Kneiphof adı verilen bir adayı çevrelemekte ve haritanın sağ tarafında iki kola ayrılmaktadır. Königsberg halkının şehir içinde kolayca seyahat edebilmesi amacıyla, nehir üzerine Bal Köprüsü ve Demirciler Köprüsü gibi hoş isimlere sahip toplam yedi köprü inşa edilmiştir.

Şehir sakinleri, eğlence amaçlı olarak, her bir köprüyü yalnızca bir kez geçerek şehirde tam bir tur atmaya sağlayacak bir rota oluşturmayı denemişlerdir. Ancak, defalarca yapılan denemeler başarısız olmuş ve bu durum birçok kişi tarafından imkânsız olarak kabul edilmiştir. Bu problemin matematiksel açıdan ele alınması ve çözümüne dair kesin bir sonuca ulaşılması ise 1730'lu yıllara kadar gerçekleşmemiştir. 1736 yılında, dönemin önde gelen matematikçilerinden Leonhard Euler, diğer matematikçilerle bu konu hakkında yazışmalarda bulunmuş ve bu özel problemi ele aldığı bir makale kaleme almıştır. Euler, makalesinde yalnızca Königsberg Köprüleri Problemi'ni değil, aynı zamanda benzer türdeki problemlere yönelik genel bir yöntem geliştirmiştir. Bu çalışma, graf teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilmiş ve matematiğin birçok alanında etkili olmuştur.

Euler'in makalesinden 100 yılı aşkın bir süre sonra, 1847'de Kirchhoff, elektrik ağlarını temel aldıkları grafları modellemiştir. İlginç bir şekilde, Kirchhoff Königsberg'de doğmuş ve yerel üniversiteden mezun olmuştur. Kirchhoff, grafların bir alt sınıfı olan ağaç teorisini geliştirerek elektrik ağlarındaki her döngüdeki akımı tanımlamıştır.

Dört Renk Problemi, graf teorisinin en ünlü problemlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Bir düzlemde yer alan herhangi bir haritanın, komşu ülkelerin farklı renklerde olmasını sağlayacak şekilde en fazla dört renk kullanılarak boyanabileceği doğru mudur? Bu problem yaklaşık 1850 yılında Guthrie ve De Morgan tarafından tartışılmış olup, Möbius'un da daha önce bu problemi bildiği düşünülmektedir.

Dört Renk Problemi, graf teorisi çerçevesinde şu şekilde yeniden formüle edilebilir: Ülkeler, grafın köşeleri (düğümleri) olarak temsil edilir ve iki düğüm, karşılık gelen ülkeler ortak bir sınır paylaşıyorsa birbirine kenarlarla bağlanır. Buna göre, problem, bir düzlemsel grafın köşelerinin en fazla dört renk kullanılarak boyanması ve komşu köşelerin farklı renklere sahip olmasının sağlanmasıdır.

Bu problemin çözümüne yönelik uzun yıllara dayanan çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Dört rengin yeterli olduğunu kanıtlamak veya bir karşı örnek bulmak adına birçok farklı yaklaşım denenmiştir. Son olarak, 1977 yılında Appel ve Haken, bir bilgisayar programının yardımıyla uzun ve algoritmik bir kanıt sunarak Dört Renk Teoremi'ni ispatlamıştır. Bununla birlikte, daha kısa ve estetik açıdan tatmin edici bir kanıt henüz ortaya konulamamıştır.

Graf boyamanın birçok ilginç uygulaması bulunmaktadır. Bunlar arasında mobil radyo frekans tahsisi, çizelgeleme/zamanlama, derleyicide kayıt optimizasyonu gibi

çeşitli alanlar yer almaktadır. Bu tür uygulamalar, karmaşık sistemlerde verimli kaynak yönetimi sağlamak ve çakışmaları önlemek amacıyla graf teorisi kullanılarak geliştirilmiştir.

1.1.Graf Tanımı, Özellikleri ve Çeşitleri

Tanım 1.1.1 V , boş olmayan ve noktalar içeren bir küme olsun. E ise, V 'nin öğelerinden meydana gelen sıralanmamış bir küme olarak tanımlansın. Eğer V , grafın düğümlerini (köşe) ve E , düğümler arasındaki bağlantıları (kenar) ifade edecek şekilde belirlenirse, $G = (V, E)$ yapısına sahip olan bu diyagram bir graf olarak adlandırılır.

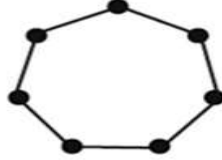
Tanım 1.1.2 Bir graf içerisinde, bir düğümün kendisine bağlanan kenara *ilmek* adı verilir. Aynı düğüm çiftinin birden fazla kenar ile birleştiren bağlantılar ise *çoklu kenar* olarak tanımlanır. Eğer bir graf ilmek veya çoklu kenar içermiyorsa, bu yapı *basit graf* olarak adlandırılır; aksi takdirde *çoklu graf* olarak nitelendirilir. Grafın her bir düğümünden diğer düğümlere en az bir kenar ile erişilebiliyorsa, bu graf *bağlı graf* olarak kabul edilir. Eğer bir grafın düğümler kümesi ve kenarlar kümesi sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa, bu tür graf *sonlu graf* olarak isimlendirilir. Bir sonlu graf için, $V(G)$ düğümler kümesi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şeklinde gösterilsin. Bu kümenin eleman sayısı n , grafın *mertebesi* olarak adlandırılır. Aynı şekilde, $E(G)$ düğümler arasındaki bağlantılar kümesi $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ şeklinde olsun ve içerdiği kenar sayısı m , grafın *boyutu* olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.3 Bir G grafında, düğüm kümesi V içinde iki düğüm v_i ve v_j seçildiğinde, eğer bu düğümler arasında bir bağlantı (kenar) bulunuyorsa, bu düğümler komşudur denir.

Tanım 1.1.4 Bir G grafında herhangi bir düğümün derecesi, ona bağlı olan diğer düğümlerin sayısı ile belirlenir ve $d_{(v_i)}$ ile gösterilir. Eğer bir düğümün derecesi 0 ise, bu düğüm *izole nokta* olarak adlandırılır. Derecesi 1 olan düğüme ise *uç nokta (pendant)* denir. Her bir düğüm, komşu olduğu düğüme 1 *derece* katkı sağlar. Ancak, bir düğüm kendisine bağlıysa, yani *ilmek* içeriyorsa, bu durum ona 2 *derece* kazandırır.

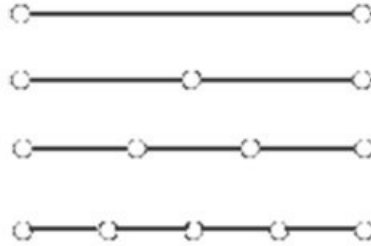
Şekil 1. 3. Tam Graf Modelleri

Tanım 1.1.6. Başlangıç ve bitiş düğümleri aynı olan ve tüm düğümlerin derecesi 2 olan bir graf, *çevre graf* veya *devir graf* olarak adlandırılır. Özellikle, n düğüm içeren böyle bir graf C_n şeklinde gösterilir.



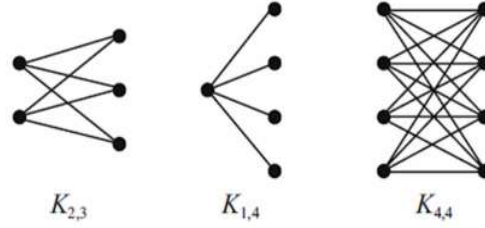
Şekil 1. 4. Çevre Graf Modeli

Tanım 1.1.7. Başlangıç ve bitiş düğümlerinin derecesi 1, geri kalan düğümlerin derecesi 2 olan bir graf *yol graf* olarak adlandırılır. n düğüm içeren bir *yol grafi* P_n sembolüyle ifade edilir.



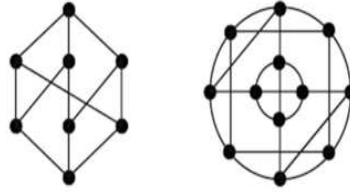
Şekil 1. 5. Yol Graf Modelleri

Tanım 1.1.8. Bir grafın düğüm kümesi V_1 ve V_2 olmak üzere iki ayrı kümeye bölündüğünü düşünelim. Eğer grafın tüm kenarları, V_1 kümesindeki düğümler ile V_2 kümesindeki düğümleri birbirine bağlayarak oluşturuluyorsa, bu yapı *iki parçalı graf* olarak adlandırılır. İki parçalı bir graf, $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olduğunda $K_{m,n}$ ile ifade edilir. Eğer V_1 ve V_2 kümelerindeki tüm düğümler birbirleriyle doğrudan bağlantılıysa, bu graf *iki parçalı tam graf* olarak isimlendirilir.



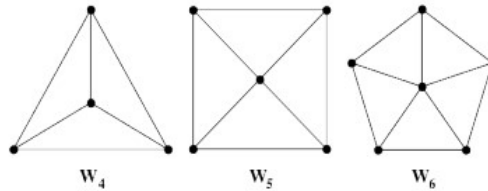
Şekil 1. 6. İki Parçalı Tam Graf Modeli

Tanım 1.1.9. Eğer bir graf içerisindeki tüm düğümler aynı dereceye sahipse, bu graf *düzgün graf* olarak adlandırılır. Bir grafın tüm düğümlerinin derecesi r ise, bu yapı r -*düzgün graf* şeklinde ifade edilir. Özellikle, n düğüm içeren bir *tam graf* söz konusu olduğunda, her düğüm $n - 1$ dereceye sahip olur. Bu nedenle, $n - 1$ dereceli *düzgün graf* olarak kabul edilir.



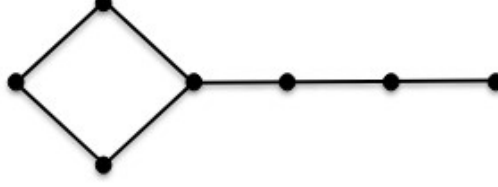
Şekil 1. 7. Düzgün Graf Modelleri

Tanım 1.1.10. Bir C_n çevre grafına, tüm düğümlerle bağlantılı olacak şekilde tek bir kenarla eklenen yeni bir düğümlerle oluşturulan graf, *tekerlek graf* olarak adlandırılır. Bu graf W_n ile gösterilir.



Şekil 1. 8. Tekerlek Graf Modelleri

Tanım 1.1.11. Bir G grafi, A ve B olmak üzere iki alt düğüm kümesine ayrılabiliriyorsa ve A kümesindeki düğümler bir çevre oluştururken, B kümesindeki düğümler bir yol yapısını meydana getiriyorsa, ayrıca çevrenin bir düğümü ile yolun uç düğümü ortak ise, bu graf *larva (tapdole) graf* olarak adlandırılır. Çevresel kısmında r düğüm, yol kısmında ise s düğüm bulunan bir larva grafi, $T_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1. 9. Larva Graf Modeli

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, araştırmamız için yol gösterici nitelikte olan ve literatürde önemli bir yer tutan Zagreb indeksleri, ters tepe derece kavramı ve sıfır bölen graflarla ilgili çalışmalar detaylı biçimde incelenmiştir. Konuyla bağlantılı akademik kaynaklar analiz edilerek, mevcut teorik yaklaşımlar ve yöntemler açıklığa kavuşturulmuştur.

2.1. Sıfır Bölen Graflarla İlgili Kaynak Araştırması

Beck (1988), "*Değişmeli Halkanın Renklenmesi*" adlı çalışması, cebirsel graf teorisinin temel eserlerinden biri olup, değişmeli halkalar ile bunlara bağlı graf renklendirmeleri arasındaki ilişkiyi araştırmaktadır. Bu çalışma köşeleri halkaların elemanlarından olan ve çarpımları sıfır olan eleman çiftlerini kenar kabul eden bir graf yapısını ortaya koymaktadır. Çalışma, halkaların renklenmesi ile ilgili bazı önemli sonuçlar ortaya koymuş ve graf teorisinin cebirsel yapılara uygulanabilirliğini göstermiştir. Daha sonra Anderson ve Livingston gibi araştırmacılar, Beck'in sıfır bölen grafi kavramını geliştirerek genişletilmiş versiyonlarını incelemişlerdir.

Anderson ve Livingston (1999), "*Değişmeli Halkanın Sıfır Bölen Grafi*" adlı çalışması, değişmeli halkalar ile sıfır bölen graflar arasındaki ilişkiyi inceleyen önemli bir akademik çalışmadır. Bu çalışmada, her değişmeli halka için basit graflar tanımlanarak, halkaların sıfır bölenleri ile graf teorisi arasındaki bağlantılar araştırılmıştır. Grafın köşeleri, halkadaki sıfır bölenler olarak belirlenirken, iki köşe arasındaki kenar, bu iki elemanın çarpımının sıfır olması durumunda çizilmektedir. Bu makale, halkaların cebirsel yapıları ile graf teorisi arasındaki bağlantıları ortaya koyarak, sıfır bölen grafları üzerine yapılan sonraki araştırmalara temel oluşturmuştur.

Anderson ve ark. (2003), "*Sıfır bölen graflar, von Neumann düzenli halkalar ve Boolean cebirleri*" adlı çalışmasında, sıfır bölen graflar ile belirli cebirsel yapılar arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Özellikle, von Neumann düzenli halkalar ve Boolean cebirleri bağlamında sıfır bölen grafların yapısal özelliklerine odaklanılmıştır. Çalışmada, von Neumann düzenli halkalar ve boolean cebirlerinin sıfır bölen graflarıyla nasıl etkileşime girdiği gösterilmiş ve bu yapıların belirli izomorfizmler aracılığıyla birbirleriyle olan bağlantıları açıklanmıştır. Ayrıca, sıfır bölen grafların özellikleri ve

cebirsel karakteristikleri arasındaki bağlantılar analiz edilerek, bu tür halkaların graflarının nasıl yapılabileceği üzerine çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Gross ve Yellen (2004), “*Graf Teorisi El Kitabı*”, adlı çalışması, graf teorisinin en kapsamlı kaynaklarından biri olarak kabul edilir. Bu kitap, graf teorisinin temel kavramlarını, algoritmalarını ve uygulamalarını detaylı bir şekilde ele almaktadır. İçeriğinde Euler grafları, Hamilton çevrimleri, renkendirme problemleri, ağ teorisi, cebirsel graf teorisi ve algoritmik yaklaşımlar gibi başlıklar yer almaktadır. Ayrıca, graf teorisinin bilgisayar bilimleri, optimizasyon ve mühendislik gibi disiplinlerdeki uygulamalarına da değinilmektedir. Eser, hem graf teorisine giriş yapmak isteyenler hem de ileri düzey araştırmalar yapan akademisyenler için önemli bir referans kaynağıdır.

Anderson ve Badawi (2008), “*Bir Halkanın Sıfır Bölen Grafi Üzerine*”, adlı çalışması, sıfır bölen grafların yapısal özelliklerini inceleyen önemli bir akademik kaynaktır. Bu çalışmada, değişmeli halkalar için sıfır bölen grafi tanımlanarak, halkaların sıfır bölenleri ile graf teorisi arasındaki bağlantılar araştırılmıştır. Grafın köşeleri, halkadaki sıfır bölenler olarak belirlenirken, iki köşe arasındaki kenar, bu iki elemanın çarpımının sıfır olması durumunda çizilmektedir. Ayrıca, sıfır bölen grafının tam, iki parçalı veya yıldız grafi olup olmadığı gibi durumlar analiz edilmiştir. Çalışma, halkaların cebirsel yapıları ile graf teorisi arasındaki bağlantıları ortaya koyarak, sıfır bölen grafları üzerine yapılan sonraki araştırmalara temel oluşturmuştur.

Sharma ve ark. (2011), “*Sonlu Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafi ile İlişkili Komşuluk ve Bitişiklik Matrisinin Analizi*”, adlı çalışması, sonlu değişmeli halkalar üzerine yapılan graf analizleri ele almaktadır. Bu çalışmada, sıfır bölen grafının komşuluk yapısı ve ilişkili bitişik matrisi incelenerek, halkaların graf temsili hakkında yeni fikirler ortaya konulmuştur. Makale, sıfır bölen grafları ile ilgili bazı yeni kavramlar sunmakta ve bitişiklik matrislerinin yapısal özelliklerini detaylandırmaktadır. Ayrıca, komşuluk kümelerinin graf algoritmalarında nasıl kullanılabileceği ve bitişiklik matrislerinin bilgisayar bilimlerindeki uygulamaları üzerine bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Akgüneş ve Togan (2012), “*Sıfır Bölen Grafları Üzerindeki Özel Parametrelerin Analizi*” adlı çalışması, sıfır bölen grafların belirli graf parametrelerini inceleyen önemli bir akademik araştırmadır. Bu çalışmada, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkaları için sıfır bölen grafi ele alınarak, grafın derece dizisi, düzensizlik indeksi, kaplama sayısı gibi özellikleri analiz edilmiştir. Çalışma, değişmeli halkaların sıfır bölen grafları ile ilgili

bazı önemli kavramları sunmakta ve graf teorisinin cebirsel yapılara uygulanabilirliğini göstermektedir.

Bollobás (2013), “*Modern Graf Teorisi*” adlı kitabı, graf teorisinin temel ve ileri düzey konularını kapsayan kapsamlı bir akademik kaynaktır. Kitap, hem klasik graf teorisi konularını hem de modern gelişmeleri ele alan, matematik ve bilgisayar bilimleri alanları için önemli bir kaynaktır. Kitap içeriğinde elektrik ağları, renklendirme, Ramsey teorisi gibi konular yer almaktadır.

Krone (2015), “*Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Graflarını Oluşturan Algoritmaları*” adlı çalışmasında, algoritmalar halkaların cebirsel yapısını graf olarak temsil ederek, sıfır bölenler arasındaki ilişkileri daha iyi anlamayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada, öncelikle sıfır bölen grafların temel özellikleri ve halkalar üzerindeki etkileri ele alınmış, ardından belirli halka sınıfları için uygun graf yapıları oluşturmak adına çeşitli algoritmalar sunulmuştur. Krone’un önerdiği yöntemler, küçük mertebeli halkaların sıfır bölen grafları temel alınarak genişletilmiş ve graf teorisi ile cebir arasındaki bağlantıları daha sistematik bir şekilde ortaya koymuştur.

Anderson ve Weber (2018), “*Birim Elemanı Olmayan Değişmeli Halkanın Sıfır Bölen Grafi*” adlı çalışması, birim elemanı olmayan değişmeli halkalar için sıfır bölen grafların yapısal özelliklerini inceleyen önemli bir akademik kaynaktır. Bu çalışmada, birim elemanı olmayan halkalar için sıfır bölen grafi tanımlanarak, bazı graf özellikleri analiz edilmiştir. Çalışma, çap, çevre, tamlık ve iki parçalı graf olma durumu gibi matematiksel ölçümleri ele alarak, sıfır bölen grafinin farklı halkalar üzerindeki etkilerini analiz etmektedir.

Moh’d ve Ahmed (2025), “*Genelleştirilmiş Beck’in Sıfır Bölen Grafi: Modül-Alt Modül Çifti Tarafından Türetilen Bir Halka ile İlişkili Bir Graf*” adlı çalışmasında, Beck’in değişmeli halkalar için sıfır bölen grafi kavramını genişleterek, modül – alt modül çiftleri temel alınarak türetilen yeni bir graf yapısı sunulmuştur. Bu yeni grafin ayırt edici özelliği, klasik halka yapılarından modüllere geçen olağan genellemeler yerine, köşe çiftlerinin bir modül ve onun alt modülünden oluşmasıdır.

2.2. Zagreb İndeksleri ve Ters Tepe Derece Kavramı Üzerine Kaynak Araştırması

Gutman ve Trinajstić (1972), “*Graf Teorisi ve Moleküler Orbitaler. Alternant Hidrokarbonların Toplam π -Elektron Enerjisi*” adlı çalışması, kimyasal graf teorisi ve

moleküler orbitaller arasındaki ilişkiyi inceleyen bir çalışmadır. Bu çalışma, birinci Zagreb indeksinin temelini atan araştırmalardan biridir. Bu makale, graf teorisinin moleküler orbital hesaplamalarına uygulanmasını ele alarak, alternant hidrokarbonların toplam π -elektron enerjisini incelemektedir. Çalışmada, Hückel moleküler orbital teorisi kullanılarak, moleküler topolojinin elektron enerjisi üzerindeki etkileri analiz edilmiştir

Gutman ve ark. (1975), “*Graf Teorisi ve Moleküler Orbitaller. XII. Açık Zincirli Polienler*” adlı çalışması, dallanmanın moleküler özellikler üzerindeki etkisini inceleyen önemli bir graf teorisi araştırmasıdır. Bu çalışma, ikinci Zagreb indeksi kavramının temelini atmıştır. Bu çalışma, graf teorisinin kimyasal bileşiklerin elektronik özelliklerini anlamada nasıl kullanılabileceğini gösteren önemli bir araştırmadır.

Randi’c (1975), “*Moleküler Dallanmanın Karakterizasyonu Üzerine*” adlı çalışması Randic bağlantısı indeksini tanıtan önemli bir akademik kaynaktır. Bu çalışma, kimyasal graf teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilir ve moleküler dallanma ile ilgili sonraki araştırmalara önemli bir temel oluşturmuştur.

Balaban ve ark. (1983), “*Yapı-Etki Korelasyonları İçin Topolojik İndeksler*” adlı çalışmasında, kimyasal bileşiklerin yapısal özelliklerini graf teorisiyle ilişkilendiren çeşitli topolojik indeksler tanımlanmıştır. Bu çalışma, ilaç tasarımı ve kimyasal bileşiklerin özelliklerini tahmin etme açısından önemli bir referans kaynağıdır.

Fajtlowicz (1987), “*Graffiti varsayımları üzerine—II*”, adlı çalışmasında ilk olarak harmonik indeks tanımı yapıldı. Bu çalışmada Graffiti programı tarafından üretilen graf teorisi varsayımları incelenmektedir. Bu çalışma, bilgisayar destekli matematiksel keşiflerin önemini vurgulamakta ve graf teorisi alanında yeni araştırmalara ilham vermektedir.

Das ve Gutman (2004), “*İkinci Zagreb İndeksinin Bazı Özellikleri*” adlı çalışması, ikinci Zagreb indeksi üzerine yapılan önemli matematiksel ve kimyasal analizleri içermektedir. Bu makale, ikinci Zagreb indeksinin yapısal özelliklerini detaylandırarak, hem kimyasal graflarda hem de matematiksel analizlerde nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Todeschini ve Consonni (2010), “*Düğüm Derecelerinin Fonksiyonlarına Dayalı Yeni Yerel Düğüm Değişmezleri ve Moleküler Tanımlayıcılar*” adlı çalışması, yerel köşe değişmezleri (LOVI’ler) ve moleküler tanımlayıcılar üzerine kapsamlı bir inceleme sunmaktadır. Bu çalışmada, çarpımsal Zagreb indeksi tanımlanmıştır. Çalışma, graf teorisinin kimyasal bileşiklerin fizikokimyasal özelliklerini tahmin etmede nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Ashrafi ve ark. (2010), “*Graf İşlemlerinin Zagreb Eşindeksleri*” adlı çalışması, Zagreb indekslerinin genelleştirilmiş versiyonları olan Zagreb eşindekslerini tanıtan önemli bir akademik kaynaktır. Bu çalışmada, kimyasal graf teorisi bağlamında Zagreb eşindeksleri incelenmiş ve çeşitli graf işlemleri altında bu yeni değişmezlerin nasıl davrandığı araştırılmıştır. Bu çalışma, graf teorisinin kimya ve ağ analizi gibi alanlardaki uygulamalarını detaylandırarak, Zagreb eşindekslerinin yapısal özelliklerini ortaya koymaktadır.

Furtula ve ark. (2010), “*Artırılmış Zagreb İndeksi*” adlı çalışmada, ilk defa artırılmış Zagreb indeksi tanımı ortaya kondu. AZI, atom-bağ bağlantı indeksine benzer şekilde tanımlanan yeni bir topolojik indeks olarak sunulmuştur. Bu çalışmada, kimyasal ağaçlar için üst ve alt sınırlar belirlenmiştir.

Zhou ve Trinajstić (2010), “*Toplam Bağlantı İndeksi Üzerine*” adlı çalışmada, ilk defa toplam bağlantı indeksinin tanımı ortaya kondu. Bu çalışmada toplam bağlantı indeksi için özel matematiksel bağıntılar türetilmiştir. Çeşitli graf türleri için toplam bağlantı indeksinin sınırları belirlenmiştir.

Ashrafi ve ark. (2011), “*Nanotüpler ve Nanotorusların Eksantrik Bağlantı İndeksi*”, adlı çalışması, birinci ve ikinci Hiper-Zagreb tanımlarını ortaya koymuştur. Bu çalışma nanotüpler ve nanotorusların eksantrik bağlantı indeksini incelemektedir.

Ranjini ve ark. (2011), “*Alt Bölme Grafların Çizgi Grafları Üzerindeki Zagreb İndeksleri Üzerine*” adlı çalışması, Zagreb indekslerinin çizgi grafları ve alt bölme grafları üzerindeki davranışlarını inceleyen bir kaynaktır. Bu çalışmada, tapdole grafları, wheel grafları ve ladder grafları gibi özel graf türleri ele alınarak, Zagreb indekslerinin bu graflar üzerindeki etkileri analiz edilmiştir. Bu çalışmanın içeriğinde Zagreb indekslerinin tanımı, kimyasal ve ağ analizi uygulamaları gibi konular yer almaktadır.

Xu ve Das (2012), “*Tek Çevrimli ve İki Çevrimli Graflar*” adlı çalışması, çarpımsal Zagreb indeksleri bağlamında ağaçlar, tek ve çift çevrimli grafların ekstremal özelliklerini inceleyen bir çalışmadır. Bu çalışmada, ilk ve ikinci Zagreb indekslerinin çarpımsal versiyonları ele alınarak, tek ve çift çevrimli grafların Zagreb indeksleri analiz edilmiştir. Bu çalışmada Zagreb indekslerinin kimyasal bileşiklerin fizikokimyasal özelliklerini tahmin etmede nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir.

Eliasi ve ark. (2012), “*Birinci Zagreb İndeksinin Çarpımsal Versiyonları*” adlı çalışması, çarpımsal toplam Zagreb indeksini tanımlamış ve matematiksel özelliklerini ortaya koymuştur. Bu indeks, geleneksel birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin

çarpımsal versiyonları olarak ifade edilir. Bu makalede çarpımsal Zagreb indekslerinin ağaçlar, yollar ve tam graflar üzerindeki değişimleri incelenmiştir.

Das ve ark. (2013), “*Graf İşlemlerinin Çarpımsal Zagreb İndeksleri*”, adlı çalışması, çarpımsal Zagreb indekslerinin çeşitli graf işlemleri üzerinde davranışlarını inceleyen önemli bir akademik çalışmadır. Bu çalışmada kartezyen çarpım, corona çarpım, bileşim ve ayrışım gibi graf işlemleri için çarpımsal Zagreb indekslerinin üst sınırları türetilmiştir.

Xu ve ark. (2013), “*Grafların Çarpımsal Zagreb Eşindeksi Üzerine*” adlı çalışması, çarpımsal Zagreb eşindeksleri üzerine yapılan akademik bir çalışmadır. Bu çalışmada, ilk ve ikinci Zagreb eşindekslerinin çarpımsal versiyonları tanımlanmıştır ve çeşitli graf türleri için çarpımsal Zagreb eşindekslerinin üst ve alt sınırları belirlenmiştir.

Togan ve ark. (2015), “*r-bölüm graflarının çeşitli Zagreb indekslerindeki bazı formüller ve eşitsizlikler*” adlı çalışmasında, kimyasal graf teorisinde önemli topolojik tanımlayıcılar olan Zagreb indekslerini incelemekte ve bu indeksler için r-alt bölüm grafları bağlamında formüller ile eşitsizlikler geliştirmektedir.

Das ve ark. (2016), “*Grafların Birinci Zagreb İndeksi ve Çarpımsal Zagreb Eşindeksleri Üzerine*” adlı çalışmasında, Zagreb indeksleri ve çarpımsal Zagreb eşindeksleri ele alınarak Zagreb indeksleri ve eşindeksleri için matematiksel sınırlar belirlenmiştir. Çeşitli graf türleri için çarpımsal Zagreb eşindekslerinin üst ve alt sınırları belirlenmiştir.

Cangul ve ark. (2017), “*Zagreb İndeksleri İçin Yeni Formüller*”, adlı çalışması, Zagreb indekslerinin yeni formüllerini ortaya koyan önemli bir akademik kaynaktır. Bu çalışmada Zagreb indekslerinin kimyasal bileşiklerin özelliklerini tahmin etmede nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir.

Nacaroglu ve Maden (2017), “*Bazı Graf İşlemlerinin Çarpımsal Toplam Zagreb İndeksi İçin Üst Sınırlar*” adlı çalışmada, graf işlemleri bağlamında çarpımsal toplam Zagreb indeksinin matematiksel sınırları belirlenmiştir. Bu çalışmada çeşitli graf işlemleri altında çarpımsal toplam Zagreb indeksinin açık formülleri sunulmuştur.

Kulli (2018), “*Ters Zagreb ve Ters Hiper-Zagreb İndeksleri ile Bunların Eşkenar Dörtgen Silikat Ağları Üzerindeki Polinomları*” adlı çalışması, ters tepe derecesi kavramını ortaya koymuştur. Bu çalışma, graf teorisinin kimya ve malzeme bilimi gibi alanlardaki uygulamalarını detaylandırarak, ters Zagreb indekslerinin yapısal özelliklerini ortaya koymaktadır.

Aykaç ve ark. (2019), “*Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafları Üzerindeki Zagreb İndekslerinin Analizi*” adlı çalışması, sıfır bölen grafların Zagreb indeksleri üzerine yapılan detaylı bir akademik incelemedir. Bu çalışmada, sonlu değişmeli halkalar için sıfır bölen grafi ele alınarak, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri, çarpımsal Zagreb indeksleri, Zagreb eşindeksleri analiz edilmiştir. Bu çalışma, graf teorisinin cebirsel yapılara uygulanabilirliğini detaylandırarak, sıfır bölen grafları üzerine yapılan araştırmalara katkı sağlamaktadır.



3. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI VE BU GRAFLARIN BAZI ZAGREB İNDEKSLERİNİN TANIMI VE TERS TEPE DERECE İNDEKSLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümde sıfır bölen grafları ile ilgili daha önce yapılan akademik çalışmalardan kesitler yer almaktadır. Ayrıca (Kulli, 2018)'de literatüre kazandırdığı tepe derece kavramından yola çıkılarak bazı Zagreb indekslerinin, Randic indeksinin ve Harmonik indekslerinin ters tepe derece indeksleri bulunmuştur.

3.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI

Bu bölümde sıfır bölen graflar ile ilgili yapılan akademik çalışmalardan özet sunulacak ve sıfır bölen grafların ve ters tepe derecenin tanımları verilecektir.

Değişmeli bir halkada sıfır bölen grafinin incelenmesi son zamanların ilgi çeken araştırma konusu olmuştur, bu araştırmalar sonunda birçok sonuca ulaşılmıştır ve beraberinde birçok merak duyulan soruları da getirmiştir.

Cebir ve graf teorisi, matematiğin iki temel alanı olup, her biri kendine özgü yöntemler ve odak noktalarına sahiptir. Ancak bu iki alanın kesişimi oldukça ilginç ve faydalı sonuçlar doğurur. Cebir, grafların yapısını anlamamıza yardımcı olurken, graflar da cebirsel problemlerin çözümüne ışık tutmaktadır.

Bu etkileşim, cebirsel kavramların grafların incelenmesine olanak sağladığı ve graf tabanlı tekniklerin cebirsel yapıları keşfetmek için kullanıldığı "Graf Teorisi"nin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Bu birleşim sayesinde, her iki alanın derinliklerini daha iyi kavrayabilir, yeni yaklaşımlar ve yöntemler geliştirebiliriz.

(Beck, 1988)'de graf teorisi ile değişmeli halka teorisi olan iki matematik alanı için karşılıklı bağlantı kurmayı ve değişmeli bir halkanın renklendirilmesi fikrini sunmayı amaçladığı makalesinde ilk defa sıfır bölen grafi tanımını ortaya koydu. Bu çalışma, sonlu renklendirilebilen halkaları karakterize etmeyi tartışmaktadır. Ayrıca bu çalışmada, R halkasındaki kliklerin boyutları sınırlı değilse klik $R = \infty$, olduğu ve sonsuz bir kliğin varlığı gösterilmiştir.

(Anderson ve ark., 2003) çalışmasında, $T(R)$ 'nin R 'nin toplam bölüm halkası olduğu durumda, $\Gamma(R)$ 'nin yalnızca ve yalnızca $T(R)$ 'nin von Neumann düzenlisi veya $\Gamma(R)$ 'nin bir yıldız grafi olması durumunda, $\Gamma(T(R))$ ve $\Gamma(R)$ 'nin graf olarak izomorf

olduğunu gösterdi. Daha sonra (Anderson ve Badawi, 2008) çalışmasında, çeşitli halka sınıfları için sıfır bölen graflarını inceleyerek bu bağlantıyı daha da genişletmiştir. Özellikle, elemanları arasında belirli bölünebilirlik koşullarına uyan veya asal idealler arasındaki karşılaştırılabilirlik koşullarını sağlayan sıfır bölenleri olan halkalar için $\Gamma(R)$ 'yi analiz etmişlerdir.

(Krone, 2015) çalışmasında değişmeli halkalar için sıfır bölen graflar türeten algoritmalar geliştirdi. Bu algoritmalar daha küçük mertebeli halkaların sıfır bölen graflarından olan alt graflardan oluşan halka için graf oluşturur.

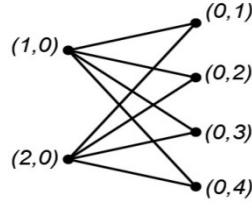
(Moh'd ve Ahmed, 2025) çalışmasında, Beck'in değişmeli halkalar için sıfır bölen grafinin yeni bir versiyonunu tanıttı. Bu grafi özel kılan şey, halkalardan modüllere giden olağan genellemeler yerine, köşe çiftlerinin modülden ve onun alt modülünden oluşmasıdır. Bu çalışmada, R değişmeli halka, M R 'nin sol modülü, ve N M 'nin R 'deki alt modülü olmak üzere $G(R; M, N)$ ve $G(R)$ grafları arasındaki güçlü bağlantılar özetlenmiştir ve R 'nin cebirsel özellikleri ve $G(R; M, N)$ 'nin graf özellikleri arasındaki etkileşim görülmüştür.

Tanım 3.1.1 (Beck,1988) R , değişmeli bir halka ve $\mathbb{Z}(R)$, R 'nin sıfır bölenlerini içeren küme olarak tanımlanmıştır. Sıfır bölen graf $\Gamma(R)$, düğüm (köşe) kümesi $xy = 0$ koşulunu sağlayan $x, y \in \mathbb{Z}(R)^* = \mathbb{Z}(R) \setminus \{0\}$ düğümleri (köşeleri) ile oluşturulan (yönlendirilmemiş) bir graftır.

Tanım 3.1.2 (Akgüneş ve Togan, 2012) r ve s asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ 'nin sıfır bölenlerinin kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir.

$\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin düğüm (köşe) kümesi, belirtilen sıfır bölenlerden oluşurken, bağlantı (kenar) kümesi, düğüm (köşe) kümesindeki elemanların çarpımının $(0,0)$ sonucunu verdiği bağlantılardan (kenarlardan) meydana gelmektedir.

Örnek 3.1.1 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır bölen grafinin düğümleri (köşeleri) ve bağlantıları (kenarları) şu şekilde gösterilebilir.



Şekil 3. 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ Sıfır bölen grafi

Tanım 3.1.3 (Kulli, 2018) $G = (V, E)$ basit bir graf olsun. Bir köşenin derecesi ona bağlı olan kenarların sayısını ifade eder, d_v ile gösterilir. G grafının maksimum derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir. Herhangi bir köşenin *ters tepe derecesi* $c_v = \Delta(G) - d_v + 1$, $v \in V$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.2 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır bölen grafının $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 4$, $v = (1,0)$ köşesi için $d_v = 4$. *Tanım 3.1.3* gereği *ters tepe derecesi* $c_v = 1$ bulunur.

3.2. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI VE BU GRAFLARIN BAZI ZAGREB TERS TEPE DERECE İNDEKSLERİ

Bu bölümde sıfır bölen grafları ve Zagreb indeksleri kavramlarını göz önüne alarak, r ve s asalları için, $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafları üzerine alınan Zagreb indekslerin, Randic bağlantı indeksinin ve Harmonik indekslerinin ters tepe derece indekslerinin sonuçlarını ifade edip kanıtlayacağız. Bu çalışma boyunca $s > r$ olacak şekilde asal sayılar olarak varsayılacaktır.

Lemma 3.2.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0), 0 < i < r$ köşelerinin derecesi $(s - 1)$ olur ve tüm $(0, j), 0 < j < s$ köşelerinin derecesi $(r - 1)$ olur. $s > r$ olduğundan $(s - 1) > (r - 1)$ olur. Dolayısıyla $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)) = (s - 1)$ dir. *Tanım 3.1.3* gereği $(i, 0), 0 < i < r$ köşelerinin hepsinin ters tepe derecesi 1 bulunur, yine *Tanım 3.1.3* gereği $(0, j), 0 < j < s$ köşelerinin hepsinin ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ bulunur.

Tanım 3.2.1. Bir G grafi, $E(G)$ bağlantı (kenar) kümesine ve $V(G)$ düğüm (köşe) kümesine sahip olsun.

G grafindeki birinci ve ikinci Zagreb indeksleri sırasıyla,

$$M_1(G) = \sum_{u,v \in E(G)} d_u + d_v \quad (3.1)$$

ve

$$M_2(G) = \sum_{u,v \in E(G)} (d_u)(d_v) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Gutman ve Trinajstić, 1972).

Teorem 3.2.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin birinci ters tepe derece Zagreb indeksi

$$rM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+2) \quad (3.3)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s-1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r-1)$ olur. $s > r$ olduğu için $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)) = (s-1)$ bulunur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi $c_{(i,0)} = \Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)) - d_{(i,0)} + 1$, yani $c_{(i,0)} = (s-1) - (s-1) + 1 = 1$ bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi $c_{(0,j)} = (s-1) - (r-1) + 1 = s-r+1$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin toplamı $1 + (s-r+1) = s-r+2$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinde tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin toplamlarının toplamını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin kenar sayısı kadar $s-r+2$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin kenar sayısı $(r-1)(s-1)$ olduğundan, $rM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+2)$ olur ki istenendir.

Teorem 3.2.2. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci ters tepe derece Zagreb indeksi

$$rM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+1) \quad (3.4)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur. $s > r$ olduğu için $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)) = (s - 1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi $c_{(i,0)} = \Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)) - d_{(i,0)} + 1$, yani $c_{(i,0)} = (s - 1) - (s - 1) + 1 = 1$ bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi $c_{(0,j)} = (s - 1) - (r - 1) + 1 = s - r + 1$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin çarpımı $(1)(s - r + 1) = s - r + 1$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin çarpımlarının toplamını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar $s - r + 1$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r - 1)(s - 1)$ olduğundan, $rM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1)(s - r + 1)$ bulunur.

Tanım 3.2.2. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun.

G grafindaki birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri sırasıyla,

$$\Pi_1(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^2 \quad (3.5)$$

ve

$$\Pi_2(G) = \prod_{u,v \in E(G)} d_G(u) d_G(v) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır (Todeschini ve Consonni, 2010).

Teorem 3.2.3. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının birinci çarpımsal ters tepe derece Zagreb indeksi

$$r\Pi_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)^2]^{(s-1)} \quad (3.7)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturduğundan ve tersi de doğru olduğu için, $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesindeki elemanlarının her birinin ters tepe derecelerinin karelerinin çarpımını hesaplırsak ispat tamamlanmış olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafindaki köşe kümesindeki herhangi bir $(i, 0)$ elemanının derecesi $(s - 1)$ ve Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinda ters tepe derecesi 1 olan $(r - 1)$ adet köşe bulunmaktadır ve bu köşelerin karelerinin çarpımı yani

$$\prod_{i=1}^{r-1} (1^2) = (1^2)^{r-1} \quad (3.8)$$

Diğer taraftan $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafindaki köşe kümesindeki herhangi bir $(0, j)$ elemanının derecesi $(r - 1)$ ve Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinda ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olan $(s - 1)$ adet köşe bulunmaktadır ve bu köşelerin karelerinin çarpımı yani

$$\prod_{i=1}^{s-1} (s - r + 1)^2 = ((s - r + 1)^2)^{s-1} \quad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9)'un çarpımı tüm köşelerin karelerinin çarpımını verir ve $r\Pi_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)^2]^{(s-1)}$ bulunur.

Teorem 3.2.4. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının ikinci çarpımsal ters tepe derece Zagreb indeksi

$$r\Pi_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)^{(r-1)(s-1)}] \quad (3.10)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur ve Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur ve Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin çarpımı $(1)(s - r + 1) = s - r + 1$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinda tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin çarpımlarının çarpımını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar

$s - r + 1$ 'lerin çarpımını hesaplamamız gerekir. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r - 1)(s - 1)$ olduğundan, $r\Pi_2[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)]^{(r-1)(s-1)}$ bulunur.

Tanım 3.2.3. G , $E(G)$ bağlantı (kenar) kümesine ve $V(G)$ düğüm (köşe) kümesine sahip bir graf olsun. G grafında birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri sırasıyla,

$$\bar{M}_1(G) = \sum_{u,v \in E(G)} d_G(u) + d_G(v) \quad (3.11)$$

ve

$$\bar{M}_2(G) = \sum_{u,v \in E(G)} d_G(u) d_G(v) \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilir (Das ve Gutman, 2004).

Teorem 3.2.5. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının birinci Zagreb ters tepe derece eşindeksi

$$r\bar{M}_1[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = 2 \left[\binom{r-1}{2} + \binom{s-1}{2} (s-r+1) \right] \quad (3.13)$$

dir.

İspat: $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. $(i, 0)$ köşeleri kendi aralarında kenar oluşturamaz. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz. $(i, 0)$ köşelerinden hangi iki köşe çiftini seçersek seçelim kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(i, 0)$ köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftinin sayısı $\binom{r-1}{2}$ adettir. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftlerinin sayısı $\binom{s-1}{2}$ adettir. $(i, 0)$ köşelerinin derecesi $(s - 1)$ olduğundan, Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. $(i, 0)$ köşesinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin toplamı $1 + 1 = 2$ olur. $(i, 0)$ köşesindeki kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin toplamlarının toplamını hesaplamamız için $\binom{r-1}{2}$ adet 2'lerin toplamını hesaplamamız gerekiyor, yani

$$\sum_{i=1}^{\binom{r-1}{2}} 2 = 2 \binom{r-1}{2} \quad (3.14)$$

bulunur. Benzer şekilde $(0, j)$ köşelerinin derecesi $(r - 1)$ olduğundan Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olur. $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin toplamı $(s - r + 1) + (s - r +$

1) = 2(s - r + 1) olur. (0, j) köşelerinde kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin ters tepe derecelerinin toplamlarının toplamını hesaplamamız için $\binom{s-1}{2}$ adet 2(s - r + 1)'lerin toplamını hesaplamalıyız, yani

$$\sum_{i=1}^{\binom{s-1}{2}} 2(s - r + 1) = 2(s - r + 1) \binom{s-1}{2} \quad (3.15)$$

olur. (3.14) ve (3.15)'in toplamları $r\bar{M}_1[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = 2[\binom{r-1}{2} + \binom{s-1}{2}(s - r + 1)]$ olur ki istenendir.

Teorem 3.2.6. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci Zagreb ters tepe derece eşindeksi

$$r\bar{M}_2[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = \binom{r-1}{2}(1)^2 + \binom{s-1}{2}(s - r + 1)^2 \quad (3.16)$$

dir.

İspat: $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. (i, 0) köşeleri kendi aralarında kenar oluşturamaz. Benzer şekilde (0, j) köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz. (i, 0) köşelerinden hangi iki köşe çiftini seçersek seçelim kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden (i, 0) köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftinin sayısı $\binom{r-1}{2}$ adettir. Benzer şekilde (0, j) köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden (0, j) köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftlerinin sayısı $\binom{s-1}{2}$ adettir. (i, 0) köşelerinin derecesi (s - 1) olduğundan, Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. (i, 0) köşesinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin çarpımı (1)(1) = 1² olur. (i, 0) köşesindeki kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin çarpımlarının toplamını hesaplamamız için $\binom{r-1}{2}$ adet 1²'lerin toplamını hesaplamamız gerekiyor, yani

$$\sum_{i=1}^{\binom{r-1}{2}} 1^2 = 1^2 \binom{r-1}{2} \quad (3.17)$$

bulunur. Benzer şekilde (0, j) köşelerinin derecesi (r - 1) olduğundan Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi (s - r + 1) olur. (0, j) köşesinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin çarpımı (s - r + 1)(s - r + 1) = (s - r + 1)² olur. (0, j) köşelerinde kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin ters tepe

derecelerinin çarpımlarının toplamını hesaplamamız için $\binom{s-1}{2}$ adet $(s - r + 1)^2$ 'lerin toplamını hesaplamalıyız, yani

$$\sum_{i=1}^{\binom{s-1}{2}} (s - r + 1)^2 = (s - r + 1)^2 \binom{s-1}{2} \quad (3.18)$$

olur. (3.17) ve (3.18)'in toplamlarından $r\bar{M}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = \binom{r-1}{2}(1)^2 + \binom{s-1}{2}(s - r + 1)^2$ bulunur.

Tanım 3.2.4. G , $E(G)$ bağlantı (kenar) kümesine ve $V(G)$ düğüm (köşe) kümesine sahip bir graf olsun. G grafında birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri sırasıyla,

$$\bar{\Pi}_1(G) = \prod_{u,v \in E(G)} d_G(u) + d_G(v) \quad (3.19)$$

ve

$$\bar{\Pi}_2(G) = \prod_{u,v \in E(G)} d_G(u) d_G(v) \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir. (Xu ve ark., 2013).

Teorem 3.2.7. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının birinci çarpımsal Zagreb ters tepe derece eşindeksi

$$r\bar{\Pi}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [2(s - r + 1)]^{\binom{s-1}{2}} \left(2^{\binom{r-1}{2}}\right) \quad (3.21)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. $(i, 0)$ köşeleri kendi aralarında kenar oluşturamaz. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz. $(i, 0)$ köşelerinden hangi iki köşe çiftini seçersek seçelim kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(i, 0)$ köşelerinde kenar oluşturmayan köşe çiftinin sayısı $\binom{r-1}{2}$ adettir. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin sayısı $\binom{s-1}{2}$ adettir. $(i, 0)$ köşelerinin derecesi $(s - 1)$ olduğundan, Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. $(i, 0)$ köşesinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin toplamı $1 + 1 = 2$ olur. $(i, 0)$ köşesindeki kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin toplamlarının çarpımını hesaplamamız için $\binom{r-1}{2}$ adet 2'lerin çarpımını hesaplamamız gerekiyor, yani

$$\prod_{i=1}^{\binom{r-1}{2}} 2 = 2^{\binom{r-1}{2}} \quad (3.22)$$

bulunur. Benzer şekilde $(0, j)$ köşelerinin derecesi $(r - 1)$ olduğundan Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olur. $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin toplamı $(s - r + 1) + (s - r + 1) = 2(s - r + 1)$ olur. $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin ters tepe derecelerinin toplamalarının çarpımını hesaplamamız için $\binom{s-1}{2}$ adet

$2(s - r + 1)$ 'lerin çarpımını hesaplamalıyız, yani

$$\prod_{i=1}^{\binom{s-1}{2}} 2(s - r + 1) = [2(s - r + 1)]^{\binom{s-1}{2}} \quad (3.23)$$

olur. (3.22) ve (3.23)'ün çarpımları tüm eşindekslerin toplamalarının çarpımını verir $r\bar{\Pi}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [2(s - r + 1)]^{\binom{s-1}{2}} (2^{\binom{r-1}{2}})$ bulunur.

Teorem 3.2.8. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin ikinci çarpımsal Zagreb ters tepe derece eşindeksi

$$r\bar{\Pi}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)^2]^{\binom{s-1}{2}} \quad (3.24)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. $(i, 0)$ köşeleri kendi aralarında kenar oluşturamaz. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz. $(i, 0)$ köşelerinden hangi iki köşe çiftini seçersek seçelim kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(i, 0)$ köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftinin sayısı $\binom{r-1}{2}$ adettir. Benzer şekilde $(0, j)$ köşeleri de kendi aralarında kenar oluşturamaz, bu yüzden $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturamayan köşe çiftlerinin sayısı $\binom{s-1}{2}$ adettir. $(i, 0)$ köşelerinin derecesi $(s - 1)$ olduğundan, Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi 1 olur. $(i, 0)$ köşesinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin çarpımı $(1)(1) = 1^2$ olur. $(i, 0)$ köşesindeki kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin çarpımlarının çarpımını hesaplamamız için $\binom{r-1}{2}$ adet 1'lerin çarpımını hesaplamamız gerekiyor, yani

$$\prod_{i=1}^{\binom{r-1}{2}} 1 = 1^{\binom{r-1}{2}} \quad (3.25)$$

bulunur. Benzer şekilde $(0, j)$ köşelerinin derecesi $(r - 1)$ olduğundan Lemma 3.2.1 gereği ters tepe derecesi $(s - r + 1)$ olur. $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan herhangi iki köşe çiftinin ters tepe derecelerinin çarpımı $(s - r + 1)(s - r + 1) = (s - r + 1)^2$ olur. $(0, j)$ köşelerinde kenar oluşturmayan tüm köşe çiftlerinin ters tepe derecelerinin çarpımlarının çarpımını hesaplamamız için $\binom{s-1}{2}$ adet $(s - r + 1)^2$ 'lerin çarpımını hesaplamalıyız, yani

$$\prod_{i=1}^{\binom{s-1}{2}} (s - r + 1)^2 = [(s - r + 1)^2]^{\binom{s-1}{2}} \quad (3.26)$$

olur. (3.25) ve (3.26)'nın çarpımları tüm eşindekslerin çarpımlarının çarpımlarını verir ve $r\bar{\Pi}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s - r + 1)^2]^{\binom{s-1}{2}}$ bulunur.

Tanım 3.2.5. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun.

G grafında birinci ve ikinci Hiper-Zagreb indeksleri sırasıyla

$$HM_1(G) = \sum_{u,v \in E(G)} (d_u + d_v)^2 \quad (3.27)$$

ve

$$HM_2(G) = \sum_{u,v \in E(G)} [(d_u)(d_v)]^2 \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilir. (Ashrafi ve ark., 2011).

Teorem 3.2.9. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının birinci Hiper-Zagreb ters tepe derece indeksi

$$rHM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1)(s - r + 2)^2 \quad (3.29)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$

adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s - r + 1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin toplamalarının karesi $[1 + (s - r + 1)]^2 = [(s - r + 2)]^2$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin toplamalarının karelerinin toplamını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar $[(s - r + 2)]^2$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r - 1)(s - 1)$ olduğundan, $rHM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1)(s - r + 2)^2$ olur ki istenendir.

Teorem 3.2.10. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının ikinci Hiper-Zagreb ters tepe derece indeksi

$$rHM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1)(s - r + 1)^2 \quad (3.30)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s - r + 1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin çarpımının karesi $[(1)(s - r + 1)]^2 = [(s - r + 1)]^2$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin çarpımlarının karesinin toplamını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar $[(s - r + 1)]^2$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r - 1)(s - 1)$ olduğundan, $rHM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1)(s - r + 1)^2$ bulunur.

Tanım 3.2.6. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun.

G grafında Randic bağlantısı indeksi

$$\chi(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{du dv}} \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilir. (Randić, 1975).

Teorem 3.2.11. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının Randić bağlantısı ters tepe derece indeksi

$$r\chi[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{1}{\sqrt{(s-r+1)}} \quad (3.32)$$

dir.

İspat: $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s-1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r-1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s-r+1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin 1 bölü kök içindeki çarpımı $\frac{1}{\sqrt{(1)(s-r+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(s-r+1)}}$ olur. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm

$(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin 1 bölü kök içindeki çarpımlarının toplamını hesaplamamız için $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar $\frac{1}{\sqrt{(s-r+1)}}$ 'lerin toplamını

hesaplamamız gerekir. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r-1)(s-1)$ olduğundan,

$$r\chi[\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{1}{\sqrt{(s-r+1)}} \text{ olur ki istenendir.}$$

Tanım 3.2.7. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun. G grafında Toplam bağlantı indeksi

$$S(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{du + dv}} \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilir. (Zhou ve Trinajstić, 2010)

Teorem 3.2.12. $\mathbb{F}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının Toplam bağlantı ters tepe derece indeksi

$$rS [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{1}{\sqrt{(s-r+2)}} \quad (3.34)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s-1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r-1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r-1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s-r+1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin 1 bölü kök içindeki toplamı $\frac{1}{\sqrt{(1)+(s-r+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(s-r+2)}}$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin 1 bölü kök içindeki toplamının toplamalarını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin kenar sayısı kadar $\frac{1}{\sqrt{(s-r+2)}}$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin kenar sayısı $(r-1)(s-1)$ olduğundan, $rS [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{1}{\sqrt{(s-r+2)}}$ olur ki istenendir.

Tanım 3.2.8. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun. G grafında Harmonik bağlantı indeksi

$$H(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \frac{2}{du + dv} \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir. (Fajtlowicz, 1987)

Teorem 3.2.13. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafinin Harmonik ters tepe derece indeksi

$$rH [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{2}{(s-r+2)} \quad (3.36)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafinin köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o

köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s - r + 1)$ olur. Herhangi bir $(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin 2 bölü toplamı $\frac{2}{(1) + (s - r + 1)} = \frac{2}{(s - r + 2)}$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında tüm $(i, 0)$ köşeleri ile tüm $(0, j)$ köşelerinin ters tepe derecelerinin 2 bölü toplamının toplamlarını hesaplamamız için $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı kadar $\frac{2}{(s - r + 2)}$ 'lerin toplamını hesaplamamız gerekir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r - 1)(s - 1)$ olduğundan, $rH[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1) \frac{2}{(s - r + 2)}$ bulunur.

Tanım 3.2.9. G , $E(G)$ bağlantıların (kenarların) kümesine ve $V(G)$ düğümlerin (köşelerin) kümesine sahip bir graf olsun.

G grafında artırılmış Zagreb indeksi,

$$AZI(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \left[\frac{d_u d_v}{d_u + d_v - 2} \right]^3 \quad (3.37)$$

şeklinde ifade edilir. (Furtula ve ark., 2010)

Teorem 3.2.14. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ sıfır bölen grafının artırılmış Zagreb ters tepe derece indeksi

$$rAZI[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r - 1)(s - 1) \left[\frac{(s - r + 1)}{(s - r)} \right]^3 \quad (3.38)$$

dir.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının köşe kümesi $\{(i, 0), (0, j) : 0 < i < r, 0 < j < s, i, j \in \mathbb{N}\}$ dir. Tüm $(i, 0)$ köşesi, tüm $(0, j)$ köşesi ile kenar oluşturur. Bir köşenin derecesi, o köşeye bağlı kenarların toplam miktarıdır. O halde tüm $(i, 0)$ köşesi $(s - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için, derecesi $(s - 1)$ olur. Diğer taraftan tüm $(0, j)$ köşesi $(r - 1)$ adet köşe ile kenar oluşturduğu için derecesi $(r - 1)$ olur. Buradan herhangi bir $(i, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği 1 bulunur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecesi Lemma 3.2.1 gereği $(s - r + 1)$ olur. Herhangi bir

$(i, 0)$ köşesi ile herhangi bir $(0, j)$ köşesinin ters tepe derecelerinin payı çarpımlarından, paydası toplamlarının 2 eksiğinden oluşan kesrin küpü $\frac{(1)(s-r+1)}{[(1) + (s-r+1)]-2} = \frac{(s-r+1)}{(s-r)}$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafında kenar sayısı kadar $\frac{(s-r+1)}{(s-r)}$ 'lerin toplamı grafın artırılmış Zagreb indeksinin ters tepe derecesini verir. $\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ grafının kenar sayısı $(r-1)(s-1)$ olduğundan $rAZI[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)\left[\frac{(s-r+1)}{(s-r)}\right]^3$ bulunur.

Örnek 3.2.1 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır bölen grafının bazı Zagreb ters tepe derece indekslerinin hesaplanması.

$r = 3$ ve $s = 5$ olur. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ grafında $(3-1)(5-1) = 8$ adet kenar meydana gelir ve $(3-1) + (5-1) = 6$ adet köşe oluşur. $(a, 0), 0 < a < 3-1$, köşelerinin derecesi 4, diğer taraftan $(0, b), 0 < b < 5-1$, köşelerinin derecesi 2 olduğundan $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 4$ olur. Lemma 3.2.1 gereği herhangi bir $(a, 0)$ köşesinin ters tepe derecesi 1 olur ve herhangi bir $(0, b)$ köşesinin ters tepe derecesi 3 bulunur. Birinci Zagreb indeksinin ters tepe derecesi bu köşelerin ters tepe derecelerinin toplam sonuçlarının toplamını hesapladığından, 8 adet $1 + 3$ ' ün toplamı yani,

$$rM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = 32 \text{ bulunur} \quad (\text{Teorem 3.2.1.})$$

$$rM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)(5-3+1)(1) = 24 \quad (\text{Teorem 3.2.2.})$$

$$r\Pi_1[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (1^2)^{(3-1)}[(5-3+1)^2]^{(5-1)} = 3^8 \quad (\text{Teorem 3.2.3.})$$

$$r\Pi_2[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = [(1)(5-3+1)]^{(3-1)(5-1)} = 3^8 \quad (\text{Teorem 3.2.4.})$$

$$r\bar{M}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = 2\left[\binom{3-1}{2} + \binom{5-1}{2}(5-3+1)\right] = 38 \quad (\text{Teorem 3.2.5.})$$

$$r\bar{M}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = \binom{3-1}{2}(1)^2 + \binom{5-1}{2}(5-3+1)^2 = 55 \quad (\text{Teorem 3.2.6.})$$

$$r\bar{\Pi}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = [2(5-3+1)]^{\binom{5-1}{2}}(2)^{\binom{3-1}{2}} = (2^7)(3^6) \quad (\text{Teorem 3.2.7.})$$

$$r\bar{\Pi}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = ((5-3+1)^2)^{\binom{5-1}{2}} = 9^6 \quad (\text{Teorem 3.2.8.})$$

$$rHM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)(5-3+2)^2 = 128 \quad (\text{Teorem 3.2.9.})$$

$$rHM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)(5-3+1)^2 = 72 \quad (\text{Teorem 3.2.10.})$$

$$r\chi[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)\frac{1}{\sqrt{(5-3+1)}} = 8\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{Teorem 3.2.11.})$$

$$rS[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)\frac{1}{\sqrt{(5-3+2)}} = 4 \quad (\text{Teorem 3.2.12.})$$

$$rH[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3-1)(5-1)\frac{2}{(5-3+2)} = 4 \quad (\text{Teorem 3.2.13.})$$

$$rAZI [\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)] = (3 - 1)(5 - 1) \left[\frac{(5-3+1)}{(5-3)} \right]^3 = 27 \quad (\text{Teorem 3.2.14.})$$



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada son dönemlerin merak edilen konularından biri olan sıfır bölen grafları üzerinde bazı Zagreb indekslerin ters tepe dereceleri incelenmiştir.

Ters tepe derece tanımı sıfır bölen grafların bazı Zagreb indekslerine uygulanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

İNDEKS İSMİ	TERS TEPE DERECESİ
Birinci Zagreb İndeksi	$rM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+2)$
İkinci Zagreb İndeksi	$rM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+1)$
Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi	$r\Pi_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s-r+1)^2]^{(s-1)}$
İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi	$r\Pi_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s-r+1)^{(r-1)(s-1)}]$
Birinci Zagreb Eşindeksi	$r\bar{M}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = 2\left[\binom{r-1}{2} + \binom{s-1}{2}(s-r+1)\right]$
İkinci Zagreb Eşindeksi	$r\bar{M}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = \binom{r-1}{2}(1)^2 + \binom{s-1}{2}(s-r+1)^2$
Birinci Çarpımsal Zagreb Eşindeksi	$r\bar{\Pi}_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [2(s-r+1)]^{\binom{s-1}{2}} (2^{\binom{r-1}{2}})$
İkinci Çarpımsal Zagreb Eşindeksi	$r\bar{\Pi}_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = [(s-r+1)^2]^{\binom{s-1}{2}}$
Birinci Hiper-Zagreb İndeksi	$rHM_1[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+2)^2$
İkinci Hiper-Zagreb İndeksi	$rHM_2[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1)(s-r+1)^2$
Randic Bağlantı İndeksi	$r\chi[\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] = (r-1)(s-1) \frac{1}{\sqrt{(s-r+1)}}$

Toplam Bağlantı İndeksi	$rS [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] =$ $(r - 1) (s - 1) \frac{1}{\sqrt{(s - r + 2)}}$
Harmonik İndeksi	$rH [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] =$ $(r - 1) (s - 1) \frac{2}{(s - r + 2)}$
Artırılmış Zagreb İndeksi	$rAZI [\Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)] =$ $(r - 1) (s - 1) \left[\frac{(s - r + 1)}{(s - r)} \right]^3$

4.2.Öneriler

Bu araştırma kapsamında, genişletilerek çeşitli cebirsel yapıların grafları üzerinde çeşitli indekslerinin ters tepe dereceleri hesaplanabilir.

5. KAYNAKLAR

- Akgüneş, N., Togan, M., 2012, Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, *Adv. Stud. Contemp. Math*, 22 (2), 305-315.
- Anderson, D. F., Badawi, A., 2008, On the zero-divisor graph of a ring, *Communications in Algebra*, 36, 3073–3092.
- Anderson, D. F., Livingston, P. S., 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 217 (2), 434-447.
- Anderson, D. F., Levy, R., Shapiro, J., 2003, Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 180, 221 – 241.
- Anderson, D. F., Weber, D., 2018, The zero-divisor graph of a commutative ring without identity. *International Electronic Journal of Algebra*, 23 (23), 176-202.
- Ashrafi, A. R., Došlić, T., Hamzeh, A. 2010, The Zagreb coindices of graph operation., *Discrete applied mathematics*, 158 (15), 1571-1578.
- Ashrafi, A. R., Saheli, M., Ghorbani, M., 2011 The eccentric connectivity index of nanotubes and nanotori, *J. Comput. Appl. Math.* 235, 4561–4566
- Aykaç, S., Akgüneş, N., Çevik, A. S., 2019, Analysis of Zagreb indices over zero-divisor graphs of commutative rings, *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol.12, No; 06, P. 2040003.
- Balaban, A. T., Motoc, I., Bonchev, D., Mekenyan, O., 1983, Topological indices for structure-activity correlations, *Steric effects in drug design*, Springer, Berlin, Heidelberg, 21-55.
- Beck, I., 1988, Coloring of commutative rings, *Journal of Algebra*, 116 (1), 208-226.
- Bollobás, B., 2013, *Modern graph theory*, Springer Science & Business Media, Vol. 184.
- Cangul, I. N., Yurttaş, A., Togan, M., Çevik, A. S., 2017, New formulae for Zagreb indices, *AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing, Vol. 1863, No;1, 300013.
- Das, K. C., Yurttaş, A., Togan, M., Çevik, A. S., Cangul, I. N., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013 (1), 90.
- Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttaş, A., Cangul, I. N., Çevik, A. S., 2016, On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 24 (1), 153-176.

- Das, K. C., Gutman, I., 2004, Some properties of the second Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 52 (1), 3-1.
- Eliasi, M., Iranmanesh, A., & Gutman, I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68 (1), 217.
- Fajtlowicz, S., 1987, On conjectures of Graffiti—II, *Congr. Numer.*, 60, 187-197.
- Furtula, B., Graovac, A., Vukicevic, D., 2010, Augmented Zagreb index, *J. Math. Chem.*, 48, 370-380.
- Gutman, I., Trinajstić, N., Wilcox Jr, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *The Journal of Chemical Physics*, 62 (9), 3399-3405.
- Gutman, I., Trinajstić, N. 1972, Graph theory and molecular orbitals, Total ϕ -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17 (4), 535-538..
- Gross, J. L., Yellen, J., & Zhang, P., 2004, *Handbook of graph theory*, Chapman and Hall/CRC.
- Krone, J., 2015, Algorithms for constructing zero-divisor graphs of commutative rings, preprint.
- Kulli, V.R., 2018, Reverse Zagreb and reverse hyper-Zagreb indices and their polynomials of rhombus silicate networks, *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16(1), 47-51.
- Moh'd, F., Ahmed, M., 2025, Generalized Beck's Zero-Divisor Graph: A Graph Associated with a ring induced by a module-submodule pair, *Communications in Combinatorics and Optimization*, Vol. xx, No. x (xxxx), pp. 1-16.
- Pufendorf, v., S., 1697, *Histoire du regne de Charles Gustave, roy de Suede*, C.Riegel.
- Nacaroglu, Y., Maden, A. D., 2017, The upper bounds for multiplicative sum Zagreb index of some graph operations. *Journal of Mathematical Inequalities*, 11 (3), 749-761.
- Randić, M., 1975, On characterization of molecular branching. *J. Am. Chem. Soc.*, 97, 6609–6615.
- Ranjini, P. S., Lokesh, V., Cangül, I. N., 2011, On the Zagreb indices of the line graphs of the subdivision graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (3), 699-702.
- Sharma, P., Sharma, A., Vats, R. K., 2011, Analysis of adjacency matrix and neighborhood associated with zero divisor graph of finite commutative rings, *Analysis*, 14 (3).

- Todeschini, R., Consonni, V., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 64 (2), 359-372.
- Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., 2015, Some formulae and inequalities on several Zagreb indices of r-subdivision graphs, *Enlightments of Pure and Applied Mathematics*, 1 (1), 29-45.
- Xu, K., Das, K. C., 2012, Trees, unicyclic, and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68 (1), 257.
- Xu, K., Das, K. C., Tang, K., 2013, On the multiplicative Zagreb coindex of graphs, *Opuscula Mathematica*, 33, 191-204.
- Zhou, B., Trinajstić, N., 2010, On general sum-connectivity index, *J. Math. Chem.* 47, 210–218.

