



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı  
Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEMLERDE EŞİTLİK KAVRAMINA  
İLİŞKİN SAHİP OLDUKLARI KANIT ŞEMALARININ MATEMATİKSEL BİLGİ  
TÜRLERİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

Burhan KARAKAYA

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet CİHANGİR

Konya 2021

## TEŞEKKÜR

Hiçbir zaman sonu gelmeyecek olan öğrenim hayatımın bir aşamasını daha geçmiş bulunmaktayım. İyi bir matematik eğitimcisi olabilmek için çıktığım bu yolda yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam Dr.Öğr.Üyesi Ahmet CİHANGİR olmak üzere tüm bölüm hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmayı hazırlarken moral kaynağım kızım Büşra KARAKAYA'ya ve yanımda olup bana destek olan eşim Kevser KARAKAYA'ya gönülden teşekkür ediyorum.

Burhan KARAKAYA

KONYA – 2021



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU.....	V
BİLİMSEL ETİK BEYANNAMESİ.....	VI
KISALTMALAR.....	Vii
ÖZET .....	Viii
ABSTRACT.....	IX
1 GİRİŞ .....	1
1.1 Problem Durumu.....	2
1.2 Araştırmanın Amacı.....	2
1.3 Araştırmanın Önemi.....	3
1.4 Varsayımlar.....	4
1.5 Sınırlılıklar .....	4
1.6 Tanımlar .....	4
2 ALAN YAZIN .....	6
2.1 Matematiksel Bilgi Türleri.....	6
2.2 Matematiksel Eşitlik .....	14
2.3 Kanıt Şemaları .....	18
2.3.1 Dışsal Kanıt Şemaları .....	19
2.3.2 Deneysel Kanıt Şemaları.....	20
2.3.3 Analitik Kanıt Şemaları .....	21
2.4 İlgili Araştırmalar.....	24
2.4.1 Matematiksel Bilgi ve Eşitlik Kavramına İlişkin Bazı Araştırmalar .....	24
2.4.2 Kanıt Şemaları Kavramına İlişkin Bazı Araştırmalar .....	31
3 YÖNTEM .....	39
3.1 Araştırmanın Modeli .....	39
3.2 Araştırmanın Çalışma Grubu .....	39
3.3 Veri Toplama Araç ve Teknikleri .....	40
3.4 Verilerin Toplanması ve Analizi.....	41
4 BULGULAR.....	51
4.1 Öğrencilerin Sahip Oldukları Matematiksel Bilginin Türü .....	51
4.1.1 KİBS Birinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular .....	52
4.1.2 KİBS ikinci soruya ilişkin elde edilen bulgular .....	54
4.1.3 KİBS Dördüncü ve Beşinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular .....	58
4.1.4 KİBS Altıncı Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular .....	60
4.2 Öğrencilerin Kullandıkları Kanıt Şemaları .....	62

4.2.1 A1 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması .....	63
4.2.2 A3 kodlu öğrencinin kullandığı kanıt şeması .....	65
4.2.3 A63 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması .....	66
4.2.4 A55 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması .....	67
4.2.5 B38 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması .....	68
4.2.6 B151 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması .....	68
4.3 Kanıt Şemalarının Matematiksel Bilginin Türü Açısından İncelenmesi .....	70
5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER .....	71
5.1 Tartışma .....	71
5.2 Sonuç.....	76
5.3 Öneriler .....	79
KAYNAKÇA.....	81
EKLER.....	91

## TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

8. Sınıf Öğrencilerinin Denklemlerde Eşitlik Kavramına İlişkin Sahip Oldukları Matematiksel Bilgi Türleri Ve Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişki başlıklı tez çalışmamın İç Kapak, Özetler, Ekler ve Ana Bölümlerden (Giriş, Alan Yazın, Yöntem, Bulgular, Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler) oluşan toplam **108** sayfalık kısmına ilişkin, 17/08/2021 tarihinde tez danışmanım tarafından **Turnitin** adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **%9** olarak belirlenmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

1. Tez kabul sayfası hariç,
2. Tez çalışması orijinallik raporu sayfası hariç,
3. Bilimsel etik beyannamesi sayfası hariç,
4. Önsöz hariç,
5. İçindekiler hariç,
6. Simgeler ve kısaltmalar hariç,
7. Kaynakça hariç
8. Özgeçmiş hariç,
9. Alıntılar dâhil,
10. 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve tez çalışmamın, bu uygulama esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

17/08/2021

Burhan KARAKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet CİHANGİR

## **BİLİMSEL ETİK BEYANNAMESİ**

Bu tezin tamamının kendi çalışmam olduğunu, planlanmasından yazımına kadar tüm aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez hazırlama kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını ve bu kaynakların kaynakça listesine eklendiğini beyan ederim.

17/08/2021

Burhan KARAKAYA



## KISALTMALAR

### Kısaltmalar

TDK: Türk Dil Kurumu

KİBS: Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları

KŞBS: Kanıt Şemaları Belirleme Mülakat Soruları

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

MDÖP: Matematik Dersi Öğretim Programı



## ÖZET

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

### 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEMLERDE EŞİTLİK KAVRAMINA İLİŞKİN SAHİP OLDUKLARI KANIT ŞEMALARININ MATEMATİKSEL BİLGİ TÜRLERİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

Burhan KARAKAYA

“İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları kanıt şemaları matematiksel bilginin türünden nasıl etkilenir?” sorusuna cevap aranan bu çalışmada; sekizinci sınıf öğrencilerinin kanıt şemalarının matematiksel bilginin türü açısından incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın modeli nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak belirlenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu, 2020-2021 yılında Afyonkarahisar merkez ilçesinde bulunan iki okulda öğrenim gören 36 sekizinci sınıf öğrencisi arasından ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilen 6 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin matematiksel bilgilerini sınıflandırmak için Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları kullanılırken, kanıt şemaları Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar yoluyla belirlenmiştir. Elde edilen verilerin analizinde betimsel yöntem kullanılmıştır. Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Sorularından edilen verilere göre, öğrencilerin işlemsel düzeyde dahi denklem çözümü yapmakta zorlandığı, kavramsal bilgiye sahip öğrencilerin denklem çözümlerinin daha yüksek olduğu ve öğrencilerin çoğunun kavramsal bilgiye sahip olamadıkları belirlenmiştir. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar sonucunda öğrencilerin denklemler çözümlerinden elde ettikleri sonuçların ve yaptıkları işlemlerin doğruluğunu kanıtlamakta yetersiz kaldıkları ve gerekçe olarak daha çok otoriter kanıt şemalarını kullandıkları görülmüştür. Nihai olarak öğrencilerin denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olsalar da bu bilgilerini kanıtlama yaparken kullanamadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin hem kavramsal bilgilerini geliştirmek hem de matematiksel olarak geçerli kanıt yapabilmelerini sağlamak için kendi zihinsel yapılarını oluşturabilecekleri öğretim ortamları düzenlenmeli ve problem çözümünde buldukları sonuçların ve yaptıkları işlemlerin nedenleri üzerine tartışmaları sağlanmalıdır.

**Anahtar Kelimeler:** Kanıt Şemaları, Matematiksel Bilgi, Cebir, Matematiksel Eşitlik, Eşittir Sembölü, Kavramsal Bilgi, Prosedürel Bilgi.

## ABSTRACT

Department of Mathematics and Sciences Education

Mathematics Education Program

Master Thesis

### EXAMINATION OF THE PROOF SCHEMES OF 8TH GRADE STUDENTS REGARDING THE CONCEPT OF EQUALITY IN EQUATIONS IN TERMS OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Burhan KARAKAYA

In this study, the answer to the question "How are the proof schemes of the eighth grade primary school students regarding the concept of equality in equations affected by the type of mathematical knowledge?" It is aimed to examine the proof schemes of eighth grade students in terms of the type of mathematical knowledge. The model of the research was determined as a case study, one of the qualitative research methods. The study group of the research consists of 6 students selected by criterion sampling method among 36 eighth grade students studying in two schools in Afyonkarahisar central district in 2020-2021. Conceptual and Operational Knowledge Determination Questions were used to classify students' mathematical knowledge, while proof schemes were determined through Semi-Structured Interviews. Descriptive method was used in the analysis of the obtained data. According to the data obtained from the Conceptual and Operational Knowledge Determination Questions, it was determined that the students had difficulty in solving equations even at the operational level, the equation solving performance of the students with conceptual knowledge was higher and most of the students did not have conceptual knowledge. As a result of the Semi-Structured Interviews, it was observed that the students were insufficient to prove the accuracy of the results obtained from the solutions of the equations and the operations they performed, and they mostly used authoritative proof schemes as a justification. Finally, it was determined that although the students had the knowledge of equality in equations conceptually, they could not use this knowledge while proving. In order to improve both their conceptual knowledge and provide mathematically valid proof, teaching environments should be organized in which students can create their own mental structures, and they should be provided with discussions on the results they find in problem solving and the reasons for the actions they take.

**Keywords:** Proof schemes, Mathematical knowledge, Algebra, Mathematical equality, Equals symbol, Conceptual knowledge, Procedural knowledge

## BÖLÜM 1

### 1 GİRİŞ

Muhakeme etme veya usa vurma; düşünme, akıl süzgecinden geçirme anlamına gelmektedir (Türkçe Sözlük, 2011). Bu tanımlamaya göre muhakeme; bir konu hakkında derinlemesine düşünme, konu hakkındaki bütün ayrıntıları dikkate alma ve düşüncelerini gerekçelendirme anlamlarına geldiği söylenebilir. Bir konu hakkında muhakeme yapabilen birey, o konu hakkında bilgi sahibi olmalıdır. Muhakeme yapan birey; mevcut bilgilerini araştırır, bu bilgileri diğer bilgilerle sentezler ve yeni bilgilere ulaşır. Ayrıca mevcut bilgilerini veya yeni ulaştığı bilgileri gerekçelendirerek sağlam temellere oturtma çabası içerisinde olur (Umay, 2003). Birey, düşüncelerini gerekçelendirmek için farklı yolları tercih edilebilir. Bu yollar, bazen herkes tarafından kabul edilen argümanlardan oluşurken bazen de küçük bir grup için geçerlidir. Eğitim sisteminde ise öğrenciler için neyin gerekçelendirme olarak kabul edileceği eğitim araştırmalarının önemli bir parçasıdır.

Matematik öğretiminde amaç, öğrencilerin matematiksel yeterlilik kazanmasıdır. Matematiksel yeterlilik, kavramları anlama ve problem çözme için işlemleri gerekli şekilde uyarlayarak uygulama becerisidir (Rittle-Johnson vd., 2016). Matematiksel yeterlilik oluşması ise öğrencideki matematiksel kavramlar ve işlemler hakkında bilginin geliştirilmesine bağlıdır. Matematiksel bilgi üzerine yapılan araştırmalar sonucunda matematiksel bilgi; kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi (prosedürel) olarak sınıflandırılmıştır (Yanık, 2016). Kavramsal ve işlemsel bilgi her ne kadar birbirinden keskin çizgilerle ayıramayan bilgi türleri olsa da bilginin gelişimini anlamak için bu iki tür arasında sınıflandırma yapmak faydalı olacaktır (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015).

Öğrenciler bilginin kaynağı olarak genellikle öğretmenlerine güvenirlere ve matematikte öğrendikleri bilgilerin doğru olup olmadığını sorgulamazlar. Bundan dolayı, birçok öğrenci kendileri için öğrendiklerinin gerçekliğini tespit etmenin yollarını araştırmaz (Flores, 2002). Öğretmenler matematiksel akıl yürütmelerini geliştirmelerine yardımcı olmak için öğrencilerin; bir cevabın doğru olup olmadığını, bir prosedürün doğru cevapları üretilip üretilmeyeceğini veya bir formülün anlamlı olup olmadığını belirleyebilme becerilerini anlayabilmeli ve teşvik etmelidir (Flores, 2002). Anlamlı öğrenme, hem bilginin zihinde yapılandırılmasıyla hem de bilginin doğasıyla yakından

ilgilidir. Yeni bir bilgi elde eden birey, bu bilgiyi anlamlandırmak için zihinsel süreçten geçirmelidir (Yanık, 2016). Bu süreç, çocukların gerçekleri belirlemek için kullandıkları doğal yaklaşımlar üzerine inşa edilmelidir. Bu nedenle öğretmenler, çocukların öğrendiklerini doğrulamak için hangi yaklaşımları kullandığını bulmalıdır. Öğretmenler, daha sonra çocukların matematiksel bir ifadenin veya gerçeğin doğru olup olmadığını belirleme yeteneğini geliştirmek için öğretim stratejileri planlayabilir (Flores, 2002).

Öğrencide bulunan matematiksel bilgiyi tespit etmek, doğrulamak ve anlamlandırmak için kullandığı kanıt şemaları bu araştırmanın konusu olarak belirlenmiştir.

### **1.1 Problem Durumu**

“İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları kanıt şemaları matematiksel bilginin türünden nasıl etkilenir?” sorusu araştırmanın ana problemi olarak belirlenmiştir. Bu bağlamda önce öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları bilgi kavramsal ve işlemsel olarak sınıflandırılmış, ardından öğrencilerin denklem çözümlerinde kullandıkları kanıt şemaları belirlenerek matematiksel bilginin türünün kanıt şemalarını nasıl değiştirdiği incelenmeye çalışılmıştır.

Araştırmada, ana probleme bağlı olarak aşağıdaki alt problemlere cevap aranacaktır.

- i.* Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili sahip oldukları bilginin türü nedir?
- ii.* Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik ile ilgili problemleri çözerken buldukları sonucu doğrulamak için hangi kanıt şemalarını kullanmaktadır?
- iii.* Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili sahip oldukları matematiksel bilginin türü, buldukları sonuçları doğrulamak için kullandıkları kanıt şemalarını nasıl etkiler?

### **1.2 Araştırmanın Amacı**

Kavramsal ve işlemsel bilginin iç içe geçmiş yapısı yüzünden, bunların ayırt edilmesi ve ölçülmesi çok zordur (Crooks ve Alibali, 2014). Ancak öğrencilerin kavramsal gelişimlerinin takip edilebilmesi ve kavramsal anlayışlarının

geliştirilebilmesi için buna ihtiyaç vardır. Matematiksel bilgi türlerine ilişkin birçok çalışma yapılmasına rağmen bilgi türlerinin ölçülmesi ve ayırt edilebilmesi için standart yöntemler geliştirilememiştir. Yapılan bu çalışmayla matematiksel bilginin ve kanıt şemalarının özelliklerinin daha iyi anlaşılması ayrıca kanıt şemaları yardımıyla matematiksel bilginin türünün belirlenebilmesi açısından alana katkı yapılması amaçlanmıştır.

Ayrıca kanıt şemaları kavramı incelendiğinde, çok çeşitli faktörlerden etkilendiği görülmektedir. Kanıt şemalarının öznel yapısı gereği öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları da kişiden kişiye veya toplumdaki topluma değişmektedir (Harel ve Sowder, 2007). Bundan dolayı, kanıt şemalarını etkileyen faktörler üzerine çalışmalar hala devam etmektedir. Bu tez çalışmasında da kanıt şemalarının bilgi türleri açısından incelenmesi amaçlanmıştır.

Bu bağlamda tez çalışmasının temel amacı; sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili edindikleri bilgileri, kavramsal ve işlemsel bilgi olmak üzere sınıflandırarak, kanıt şemalarını matematiksel bilgi türleri açısından incelemektir.

### **1.3 Araştırmanın Önemi**

Matematiksel yeterlilik; kavramsal bilginin ve işlemsel bilginin geliştirilmesine dayanır. Bu yapıların nasıl tanımlandığı ve ölçüldüğü konusunda farklı yaklaşımlar olsa da, kavramsal ve işlemsel bilgi arasında iki yönlü ilişki olduğu yönünde genel bir fikir birliği vardır. Her iki bilgi türünü desteklemek için; öğrencinin kullandığı alternatif çözüm yöntemlerini teşvik etmek, kendi kendine açıklamayı teşvik etmek ve öğretim sürecinden önce keşif fırsatları sağlamak gibi öğretim yöntemleri ortaya çıkmıştır. Rittle-Johnson ve Schneider (2015) çalışmalarında, matematiksel bilgi araştırmalarının; kavramsal ve işlemsel bilginin ölçülmesine, geçerli ve güvenilir ölçüm yöntemleri geliştirilmesine, kavramsal ve işlemsel bilginin nasıl geliştiğini anlamak için daha kapsamlı modeller geliştirilmesine odaklanılması gerektiğini belirtmişlerdir.

Öğrencilerin kanıt şemalarının incelenmesi, onların kavramsal gelişimlerinin takip edilmesi açısından önemlidir. Öğrenme sürecinde; sunulan bilgilerin nedenleri ile açıklanmadığı, önceki bilgiler ile ilişkinin kurulmadığı, bilginin doğruluğu için sadece kaynağına güvenildiği ve bilginin ezberletildiği eğitim ortamlarında öğrencide

kavramsal anlama tam olarak gerçekleşmez (İskenderoğlu, 2016). İspat şemaları, öğrencinin düşüncelerini yansıttığı için kavram yanlışlarını da ortaya koymaktadır (Dede ve Karakuş, 2014). Öğrencinin kavrama düzeyini arttırmak için yapılan öğretim deneylerinin sonucu kanıt şemaları yardımıyla takip edilebilir, öğretimin etkililiği ve öğrenciyi hangi düzeyde etkilediği öğrenilebilir (Gutiérrez ve Marrades, 2000).

Kanıt şemalarının bilgi türleri açısından incelenmesinin, matematiksel bilgi türlerinin farklarının belirlenmesi ve öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları yardımıyla kavramsal bilgilerinin belirlenmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

#### **1.4 Varsayımlar**

- i.* Kavramsal ve işlemsel bilgi içe içe geçen ve birbirinden kesin çizgilerle ayrılması zor olan bilgi türleri olsa da bu çalışmada; hem bu bilgi türleri arasındaki ilişkiyi daha iyi anlamak, hem de bu bilgi türlerinin kanıt şemalarına etkisi anlayabilmek için kavramsal ve işlemsel bilginin ayrılabilirdiği varsayılacaktır.
- ii.* Katılımcıların kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme soruları ve kanıt şemaları mülakatları boyunca içtenlikle cevap verdikleri ve bilgilerini doğru şekilde yansıttıkları varsayılmıştır.

#### **1.5 Sınırlılıklar**

- i.* Araştırma Afyonkarahisar il merkezinde bulunan iki ortaokuldaki iki sınıfta 2020-2021 yılında öğrenim gören sekizinci sınıf öğrencilerinden elde edilen veriler ile sınırlıdır.
- ii.* Nitel durum araştırmaları belli bir grubun belli bir durum altında incelendiği araştırmalardır. Durum araştırmalarından elde edilen sonuçlar genellenemez.

#### **1.6 Tanımlar**

**Kavramsal Bilgi:** Kavramların, prensiplerin ve tanımların bilgisi olarak tanımlanabilir (Yanık, 2016).

**İşlemsel Bilgi:** Bir problemi çözmek için kullanılan adımlar dizisine ve eylemlere denir. Diğer bir ifadeye işlemsel bilgi; nasılı bilmek ve hedefe ulaşmak için

gerekli adımların bilgisidir. Bir problemin çözümü için gerekli adımlardan ve algoritmalarından oluşur ve uygulamayla gelişir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015).

**Kanıt:** Bir şeyin doğruluğu, gerçekliği konusunda; kanaat verici belge, delil, iz, argümana denir. Mantıksal olarak kanıt; sonurguya ulaşan bir uslamamanın dayandığı gerçek gibi anlamlara gelmektedir (Türkçe Sözlük, 2011).

**Kanıtlamak:** Bir şeyin gerçekliğini kanıtla ortaya koymak, ispat etmek anlamına gelmektedir (Türkçe Sözlük, 2011).

**Matematikselsel Kanıt:** Nitelikli matematikçileri ikna eden deliller olarak tanımlanabilir (Dede, 2013).

**Matematikselsel Kanıtlama:** Kanıtlama kurallarına göre mantıksal kurallara dayalı cümlelerin dönüşümler dizilerini kullanarak bir savın doğruluğuna inandırma olarak tanımlanabilir (Dede, 2013).

**Kanıt Şemaları:** Kanıtlama sürecindeki davranışların gözlenmesinden çıkarılan; bilişsel basamak, zihinsel yetenek ve beceriyi ifade eder (Dede ve Karakuş, 2014).

**Matematikselsel Eşitlik:** Bir denklemin iki tarafının aynı miktarı temsil ettiği fikridir (Crooks ve Alibali, 2014).

## BÖLÜM 2

### 2 ALAN YAZIN

Bu bölümde araştırmaya kavramsal çerçeve oluşturan; matematiksel bilgi türleri, matematiksel eşitlik kavramı ve kanıt şemaları ilgili alan yazın taranarak sunulmuştur.

#### 2.1 Matematiksel Bilgi Türleri

Matematik öğretiminin amacı, öğrencilerin matematik alanında yeterlilik kazanmasıdır. Matematiksel yeterlilik ise kavramları anlama ve problem çözme için işlemleri gerekli şekilde uyarlayarak uygulama becerisidir (Rittle-Johnson vd., 2016). Öğrencide matematiksel yeterliliğin oluşması, öğrencideki matematiksel kavramlar ve işlemler hakkında bilginin geliştirilmesine bağlıdır (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015).

Matematiksel bilgi üzerine yapılan araştırmalar sonucu matematiksel bilgi; kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi (prosedürel) olmak üzere 2 sınıfa ayrılmıştır. (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Kavramsal bilgi; kavramlar, prensipler ve tanımlar bilgisi olarak tanımlanabilir (Yanık, 2016). Skemp (1978) kavramsal anlamayı; problem çözme sürecinde ne yapıldığını ve nasıl yapıldığını anlama olarak tanımlarken, öğrencinin kavramın özelliklerini belirlerken diğer kavramlar ile de ilişki kurması gerektiği üzerinde durmuştur (Aktaran Yanık, 2016).

Star (2000) kavramsal bilgi ve prosedürel bilgi terimlerinin yaygın kullanımının Hiebert (1986) tarafından hazırlanan kitaba atfedildiğini belirtmiştir. Kavramsal bilgi; ilişkiler açısından zengin bir bilgi, bağlantılı bir bilgi ağı, bağlantı ilişkilerinin ayrık bilgi parçaları kadar belirgin olduğu bir ağ olarak düşünülebilir. Tüm bilgi parçaları zihinsel bir ağa bağlanırlar ve birbirleri ile ilişki halindedirler. Kavramsal bilgi, bilgiler arasında ilişki kurulmasıyla elde edilir. Bu ilişkiler mevcut bilgiler arasında veya mevcut bilgiler ile yeni bilgi arasında meydana gelebilir. Bu durumda bilgiler arasında ne kadar çok ilişki kurulursa kavramsal bilgi o kadar gelişecektir (Star, 2000).

Rittle-Johnson ve Alibali (1999) ve Rittle-Johnson vd. (2001) kavramsal bilgiyi, bir alanda ilkelerin ve bilgilerin arasındaki ilişkilerin açık veya örtük olarak anlaşılması olarak tanımlamıştır. Kavramsal bilgi esnek, problem türüne bağlı değildir, genelleştirilebilir, sözlü veya sözsüz olabilir. Kilpatrick vd. (2001) göre ise

matematiksel kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişki ve işlemleri anlamak olarak tanımlanmıştır.

Geçmişte kavramsal bilgi; ilişkisel olarak zengin bilgi olarak tanımlanırken, güncel olarak ilişkinin zenginleşmesinin konuda uzmanlaştıkça artan, kavramsal bilginin bir özelliği olduğu üzerinde yoğunlaşmıştır (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015; Rittle-Johnson, 2019). Yukarıdaki tanımlardan yola çıkıldığına kavramsal bilgi; kavramın tanımı, kavramın özellikleri ve diğer kavramlarla olan ilişkilerin bilgisi iken, kavramsal anlama ise öğrencinin bu bilgiyi anlaması, mevcut veya yeni bilgilerle ilişkiler kurması ve bu özellikleri belirlenmesi olarak tanımlanabilir.

Croks ve Alibali (2014) çalışmalarında, kavramsal bilgi için altı alt kategori belirtmişlerdir. Her bir kategori, kavramsal bilginin literatürdeki farklı anlamlarından oluşur. Bunlar:

- i.* **Bağlantılar Bilgisi:** Bir alanda, kavramlar arasında ilişki kurulmasını ifade eder. İlişkiler ağı ne kadar belirgin ve zengin olursa kavramsal bilgi de o kadar belirgin olur.
- ii.* **Genel Prensipler Bilgisi:** Belirli bir alanda uygulanan gerçekler, kavramlar ve ilkeler hakkındaki bilgiyi ifade eder.
- iii.* **Prosedürün Altında Yatan Prensipler Bilgisi:** Konuya özgü prosedürlerin kavramsal temelini anlaşılması anlamına gelir.
- iv.* **Kategori Bilgisi:** Kavram ve bu kavrama ait alt kavramların kategorileştirilmesi anlamına gelir.
- v.* **Sembol Bilgisi:** Matematiksel sembollerin ne anlama geldiğini bilmek olarak tanımlanabilir.
- vi.* **Alan Yapısı Bilgisi:** Matematiğin temel yapılarının anlaşılmasıdır.

Öğrencide kavramsal anlamının gerçekleşmesi için kavrama ait bilgiler verildikten sonra belirli bir süre geçmesi ve bu bilgilerin zihinsel olarak gelişmesi gerekir. Zihinde oluşmasına yeterince süre tanınmayan kavramlar eksik kalır ve kavramsal anlama gerçekleşmez (Soylu ve Aydın, 2006). Kavramsal bilgi; çözülmesi gereken problem için hangi prosedürün gerekli olduğunun belirlenmesini, bir prosedürün yeni problemlere genellenmesini ve uzun süreli matematiksel anlayışın

gelişimini sağlar (Crooks ve Alibali, 2014). Kavramsal bilgi, çoğu zaman bir soru türüne bağlı olmaksızın zihinde oluşur ve gizli veya örtük olarak ortaya çıkabilir. Skemp (1978) göre kavramsal (ilişkisel) anlama gerçekleştiğinde; araçlar amaçlardan bağımsız hale gelir, şema-prosedür oluşturmak özünde tatmin edici hale gelir ve kendi şemalarını-prosedürlerini bulabilen öğrencinin özgüveni artar. Ayrıca şemalar-prosedürler sürekli genişler.

Prosedürel bilgi veya işlemsel bilgi ise kişinin matematiksel sembol ve temsilleri bir görevi ya da problemi tamamlamak için kullanılan algoritmalarından oluşur. Sembol ve temsiller bilgisi; matematiksel sembol ve temsillerin kullanımının bilinmesi, algoritmalar ise matematiksel bir problemi tamamlamak için gerekli adımları sırayla bilme anlamına gelir. Yapılan işlemlerin kişi için bir anlamı olmayabilir. Önemli olan (n-1). adımdan sonra n. adımın geldiğini bilmektir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

İşlemsel bilgi yapılandırılmıştır. Yani belirli bir hiyerarşiye sahiptir. Bu bilgi türünü kavramsal bilgiden ayıran en önemli özellik, açık şekilde belli olan ardışık doğasıdır (Hiebert ve Lefevre, 1986). Star (2000)'deki çalışmasında, prosedür bilgisini ikiye ayırmıştır: Birinci tür prosedür bilgisi; sistemin ayrı ayrı sembollerine ve sembollerin kabul edilebilir konfigürasyonları için söz dizimsel kurallara aşinalıktır. İkinci tür prosedür bilgisi ise, matematik problemlerini çözmek için kurallar veya prosedürlerden oluşur. Öğrencilerin sahip olduğu prosedürlerin çoğu, muhtemelen sembollerini manipüle etmek için reçete zincirleridir.

Rittle-Johnson ve Alibali (1999) ile Rittle-Johnson vd. (2001) çalışmalarında; işlemsel bilgiyi, problem çözmek için gerekli işlem dizilerini yürütme yeteneği olarak tanımlamıştır ve bu bilgi türü problemin türüne bağlı olduğundan genişletilemez. Birgin ve Gürbüz (2009) çalışmasında işlemsel bilgiyi; matematik sembollerini ile gösterimlerini tanıma, kural ile formülleri bilme ve verilen algoritmayı işlem basamaklarına uygun biçimde yürütebilme becerisi olarak tanımlanmıştır. Bir problemi çözmek için kullanılan adımlar dizisine ve eylemlere işlemsel bilgi denir. Nasılı bilmek ve hedefe ulaşmak için gerekli adımların bilgisidir. Algoritmalar ve problem çözümü için gerekli adımlardan oluşur ve uygulamalarla gelişir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Prosedürler; doğru yürütüldüğünde doğru cevaba yol açacak önceden belirlenmiş eylemler dizisi veya belirli bir problemi çözmek için uygun şekilde sıralanması gereken olası eylemler olabilir. Bu bilgi, problem çözme uygulaması yoluyla gelişir ve bu

nedenle belirli problem türlerine bağlıdır (Rittle-Johnson, 2019). İşlemsel anlama, işlemsel bilginin öğrencinin zihninde anlaşılmasıdır. Yanık (2016) çalışmasında işlemsel anlamının; kavramsal anlama sahip olmadan sahip olunan algoritma becerisi ve işlemleri etkili ve esnek şekilde tercihlere dayalı olarak kullanma becerisi olmak üzere 2 farklı şekilde tanımlandığı üzerinde durmuştur.

Skemp (1978) çalışmasında, kavramsal (ilişkisel) ve işlemsel (araçsal) bilgiyi şu örnekle açıklamıştır: Yeni bir şehre giden kişi, her gün kullanması gereken A noktası ile B noktası arasındaki yolu ezberleyebilir. Amaç, A noktasından B noktasına ulaşmak olduğu sürece bu kullanışlı olacaktır. Ancak böyle bir kişi kaybolduğunda ya adımlarını tersine izleyerek başa dönecek ya da kaybolacaktır. Diğer bir kişi ise, gittiği noktalar arasındaki yolları kullanarak noktalar arası şehrin zihin haritasını çıkartmış olsun. Bu durumda bu kişi, noktalar arasını daha önce kullanmamış olsa bile bu noktalar arası yollar için tahminler yürütebilir. Böyle bir kişi şehrin neresinde olursa olsun kaybolmayacaktır. Hatta yeni yollar keşfedecektir. Bunun gibi araçsal matematik kullanan bir öğrenci, başlangıç ve bitiş noktası sabit olan bir problemde kendisinde bulunan prosedürleri kullanabilecektir. Ancak karşısına daha önce karşılaşmadığı bir durum geldiğinde problem yaşayacaktır. İlişkisel anlamaya sahip bir öğrenci ise yeni durumlar karşısında eski bilgilerini uyarlayabilir hatta yeni yollar üretebilir.

Çocukların kavramsal ve işlemsel bilgileri sürekli olarak gelişir. Çocuklarda bu bilgi türleri; biri diğerinden önce gelişmekten ziyade, bilgiler birbirini sürekli olarak etkileyerek gelişir. Bilgi türlerinden birindeki artış, diğerinde de gelişime sebep olacaktır (Rittle-Johnson vd., 2001). Kavramsal ve prosedürel bilginin gelişiminin genellikle yinelemeli olduğunu gösteren kanıtlar vardır. Yani bir bilgi türündeki gelişim diğer bilgi türündeki gelişimi de destekleyecektir. Kavramsal bilgi; problem çözme prosedürlerinin oluşturulması, seçimi ve uygun şekilde yürütülmesine yardımcı olabilir. Aynı zamanda, pratik uygulama prosedürleri, öğrencilerin kavramları anlamalarını geliştirmelerine ve derinleştirmelerine yardımcı olabilir. Her iki bilgi türü de iç içe geçmiştir ve zamanla birbirini güçlendirir. Bununla birlikte, iki tür bilgi arasındaki ilişkiler her zaman simetrik değildir. Zaman-zaman kavramsal bilgi, prosedürel bilgiyi tersine göre daha tutarlı ve güçlü bir şekilde destekler. Altta yatan kavramların fark edilmesini teşvik etmek için prosedürel ağırlıklı dersler hazırlamak, gelişmiş prosedür

bilgisinden kavramsal bilgiye doğru daha güçlü bir bağlantı sağlayabilir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015).

Öğrencide bilginin anlamlı hale gelmesi, bu iki bilgi türünün beraber var olmasıyla mümkündür. Örneğin matematiksel eşitlik bilgisini anlamak; eşittir işareti hakkında kavramsal bilgi ve matematiksel eşitlik ilkesine uygun işlem yapabilme becerisi gerektirir. Sadece kavramsal bilgi veya sadece işlemsel bilgi içerikli öğretim şekilleri öğrencide anlamlı ve kullanışlı bilginin oluşmasını engelleyebilir. Örneğin öğretim sürecinde sadece işlemsel bilgi üzerinde durulduğunda işlemlerin altında yatan anlamın görülmesini engeller ve algoritmaların yanlış yerde kullanılmasına yol açabilirken, öğrencinin yeni keşifler yapmasını da engelleyebilir. Ters şekilde yalnızca kavramsal bilgi üzerinde durulduğunda ise kavrama ait işlemler doğru ve kullanışlı şekilde uygulanamaz (Rittle-Johnson vd., 2016). Rittle-Johnson vd. (2015) çalışmasında, bu iki bilgi türünden birindeki artışın diğerinde de artışa sebep olacağı üzerinde durulmuştur. Buradan hareketle anlamlı bilginin elde edilmesi için öğretim programlarında her iki bilgiye de yeteri kadar önem verilmesi gerektiği anlaşılmaktadır.

Skemp'e göre (1978) kavramsal öğretimin önemine rağmen bazı sebeplerden dolayı öğretmenler sınıf ortamında yalnızca işlemsel bilgiye odaklanabilir: İlişkisel anlamının gerçekleştirilmesi uzun sürer, bunun yanında öğrencinin ihtiyaç duyacağı şey belirli bir tekniği uyulabilmektir. Bunun farkında olan öğretmen, bazen hem eğitim sisteminin bir gereği hem de talepten dolayı işlemsel bilgiyi aktarmayı tercih edebilir. Ayrıca bilginin oluşturulması hem zahmetlidir hem de uzun sürer. Bu süreci yönetmektense işlemsel bilginin aktarılması daha kolay ve hızlı olacağından işlemsel bilgi tercih edilebilir. Bunun yanında öğrencilerin alışık olduğu bir sistem vardır. Mevcut durumu yapılandırmak öğretmen için çok zordur. Yeniden yapılandırma hem müfredat, hem öğretmen ve hem de öğrenci için ayrı ayrı düşünülmelidir. Bunlardan birisi eksik kaldığında yeterli verim alınamaz (Skemp, 1978).

Bir ülkenin eğitim sisteminde önemli olan istihdam için sınav ise, öğrenci yeterli sayıda soru çözmeye ihtiyaç duyar (Skemp, 1978). Taleplerini karşıladığı sürece bilgiler arasındaki ilişkiyi öğrenmesine gerek yoktur. Önemli olan rutin problemleri hızlı çözmek olduğunda, işlemsel bilgi bunu daha kolay şekilde sağlayacaktır. İlişkisel anlamayı kağıt üzerinde ölçebilmek çok zordur. Her öğrenci ile görüşmek ve yapılan işlemlerin altında yatanları anlamlandırmak gerekir. Ancak bu kalabalık sınıf

ortamlarında pek mümkün değildir. Ayrıca aşırı yüklü müfredat ilişkisel anlama için yeteri kadar vakit ayrılamaması anlamına gelir. Her şekilde ilişkisel anlamının gerçekleşebilmesi için müfredat daraltılmalıdır ve uygun şekilde düzenlenmelidir (Skemp, 1978).

İki tür yanlış eşleşme kavramsal ve işlemsel anlamayı olumsuz etkiler. Bunlarda birincisi, işlemsel bilgiyi ihtiyaç olarak gören öğrencilere karşın kavramsal öğretim yapmaya çalışan öğretmendir (Skemp, 1978). İşlem bilgisine dayalı öğrenimde, daha az kavramdan ziyade daha fazla kural kullanımı gerekir. Öğrencinin beklentisi soru çözmek için gerekli kuralı ezberlemek olduğundan kavramı anlamak için yeterli çaba göstermeyecek ve kural verildiğinde derse karşı ilgisi kaybolacaktır (Skemp, 1978). İkincisi; öğrenci kavramsal olarak anlamaya çalışırken eğitim sisteminin bunu imkanı kıldığı daha zarar verici durumdur (Skemp, 1978). Müfredatın kavramsal anlamaya yeterli önem verilecek şekilde oluşturulmaması, sınav sisteminde başarı için işlemsel bilginin yeterli olması veya öğretmenin kavramsal bir öğretimi benimsememesi bunlara sebep olabilir (Skemp, 1978).

Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki etkileşimler, matematiksel yeterliliklerin gelişimini etkiler. Bununla birlikte, onlarca yıllık araştırmalardan sonra, bu karşılıklı ilişkiler hala tartışılmaktadır ve elde edilen deneysel sonuçlar kesin değildir. Farklı bilgi ve yeterlilik türleri davranışta iç içe geçmiş olarak ortaya çıkar. Bu durum bilgi türlerinin geçerli ve birbirinden bağımsız olarak ölçülmesini zorlaştırır. Kavramsal veya prosedürel bilgiyi değerlendirmek için kullanılan görevler içerik alanları, yaş grupları ve hatta çalışmalar arasında farklılık gösterir (Schneider ve Stern, 2010). Kavramsal ve prosedürel bilgiyi ölçmek için kanıtlanmış; geçerlilik, güvenilirlik ve nesnellığe sahip standartlaştırılmış yaklaşımlar geliştirilememiştir. Bu son derece sorunlu bir durumdur. Çünkü bilgi hafızada depolanır ve açık davranışla birlikte ortaya çıkarılması gerekir. Bununla birlikte, insan davranışı, çok sayıda bilişsel sürecin karmaşık bir etkileşiminden kaynaklanır ve genellikle bellek içeriğini saf ve doğrudan bir biçimde yansıtmaz. Bu durum, öğrencilerin yanıtlarını yalnızca tek bir bilgi türü ile sınıflamayı zorlaştırır (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Öğrencide bilginin gelişimini izleyebilmek ve doğru şekilde yönlendirmek için bu iki bilgi türünün ölçülmesine ihtiyaç vardır. Bilgi türlerinin ölçülebilmesi, bilgideki değişimi anlamak ve öğretim sürecini geliştirmek için de yol gösterici olabilir (Crooks ve Alibali, 2014).

Bilginin nasıl geliştiğini anlamak için kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki karşılıklı ilişkileri dikkate almak gerekir. Ayrıca kavramsal veya prosedürel bilginin her potansiyel ölçüsü, en az dört farklı bileşene sahiptir (Schneider ve Stern, 2010). **İlk olarak**; ölçek dikkatli bir şekilde geliştirildiyse, değerlendirmesi gereken bilgi türünün miktarını yansıttığı varsayılabilir. **İkinci olarak**, her bir değerlendirme görevi de göreve özel bilgi gerektirir. Örneğin; çocuklar mülakat sorularını yanıtladıklarında, cevapları yalnızca kavramsal bilgilerini değil, aynı zamanda ilgili alandaki kelime dağarcığını ve daha genel sözel yeteneklerini de yansıtır. Kesirler hakkındaki yordamsal bilgiyi değerlendirmek için tasarlanmış bir diyagram görevi, sadece kesirler hakkındaki bilgiyi değil, aynı zamanda o görevde kullanılan özel diyagramlar hakkındaki bilgi ve deneyimi de yansıtır. **Üçüncü olarak**; birçok durumda, öğrenciler kavramsal bilgilerinden yeni prosedürler çıkarabilirler ve prosedürel deneyimlerinden yeni kavramları soyutlayabilirler. Dolayısıyla, kavramsal bilginin ölçüleri genellikle bazı prosedürel bilgileri yansıtır ve prosedürel bilginin ölçüleri de kavramsal bilgiyi bir dereceye kadar yansıtabilir. **Son olarak dördüncüsü**; neredeyse tüm psikolojik ölçümlerde rastgele ölçüm hatası mevcuttur (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Bu bilgileri doğru şekilde analiz etmek ve sonuçları öğretimi geliştirmek için kullanmak çocukların öğrenmesine yardımcı olacaktır.

Kavramsal bilginin belirlenmesinde çok çeşitli yöntemler kullanılabilirken, işlemsel bilginin belirlenmesi daha az yöntem içerir. Kavramsal bilgi, açık veya örtük olarak ortaya çıkabilir. Açık kavramsal bilginin ölçülmesi, tanım veya açıklamaların verilmesini içerirken, örtük kavramsal bilgiyi ölçmek daha zordur. Örtük kavramsal bilgi, tanımlarda doğrudan kendini göstermeyen ancak öğrencinin zihninde var olan kavrama ait özelliklerin bilgisidir. Kavramsal bilgi ölçülürken öğrencinin nispeten aşına olmadığı problemler kullanılır. Burada amaç, öğrencinin ezber işlem bilgilerini kullanmadan kavramsal bilgilerinden yola çıkarak cevap verebilmesidir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015; Crooks ve Alibali, 2014). Kavramsal bilginin ölçülmesinde, genel olarak bireydeki kavram ile kavramın tanımının ne kadar uyumlu olduğuna bakılır. Bunun yanında literatür incelendiğinde kavramsal bilginin ölçümünde en fazla aşağıda belirtilen iki yöntemin kullanıldığı görülmektedir (Crooks ve Alibali, 2014). Bunlar;

- i. **Genel Prensipler Bilgisi**; prosedür ya da problemler ilişkisi olmadan matematiksel fikrin anlaşılmasıdır.

ii. **Prosedürün Altında Yatan Anlam Bilgisi**; bir prosedürün neden işe yaradığının anlaşılması ve her işlem adımının amacını bilme olarak tanımlanabilir.

Ek olarak, kavramsal bilgi ölçümlerinde birden fazla görev kullanırlarsa daha güçlü sonuçlar elde edilir. Bunun sebeplerinden ilki, aynı kavramı değerlendirmek amacıyla birden fazla görevin kullanılmasının göreve özgü özelliklerin etkisini azaltmasıdır. Sebeplerden ikincisi, bir alandaki kavramsal bilginin genellikle birçok kavram hakkında bilgi gerektirmesi ve çok boyutlu bir yapıya yol açması gösterilebilir (Schneider ve Stern, 2010).

İşlemsel bilgiyi ölçmek ise nispeten daha kolaydır. Daha önce öğrenilen algoritmaların kullanılmasını gerektiren veya bunların küçük uyarlamalarını içeren problemler ile öğrenciler karşılaştırılır. Öğrencinin problemi çözmesi istenerek, sonucun ya da işlemin doğruluğuna bakılır. Bazı durumlarda işlemsel bilginin ezbere kullanıldığını görmek adına öğrencinin problem çözme hızına da bakılabilir (Rittle-Johnson vd., 2015).

Matematiksel yeterlilik, hem kavramsal hem de prosedürel bilginin geliştirilmesine dayanır. Bu yapıların nasıl tanımlandığı ve ölçüldüğü konusunda bazı değişkenlikler olsa da kavramsal ve prosedürel bilgi arasındaki ilişkilerin genellikle çift yönlü ve yinelemeli olduğu konusunda genel bir fikir birliği vardır. Her iki tür bilgiyi desteklemek için; alternatif çözüm yöntemlerinin karşılaştırılmasını teşvik etmek, kendini açıklamayı teşvik etmek ve öğretimden önce keşif için fırsatlar sağlamak gibi öğretim yöntemleri ortaya çıkmıştır (Rittle-Johnson vd., 2015).

Gelecekteki araştırmalarda; kavramsal ve işlemsel bilginin ölçülmesine odaklanmalı, geçerli ve güvenilir ölçüm yöntemleri geliştirilmeli, kavramsal ve işlemsel bilginin nasıl geliştiğini anlamak için daha kapsamlı modeller geliştirilmelidir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Kavramsal ve işlemsel anlamının ölçülmesi öğrencilerin hedeflenen matematiksel kazanımlara ne ölçüde ulaşabildiklerinin gözlenmesi, ne tür matematiksel ilişkiler kurabildiklerinin anlaşılması ve öğretmenlerin ders programlarını yeniden planlanması açısından önemlidir (Yanık, 2016).

## 2.2 Matematiksel Eşitlik

Matematiksel eşitlik, bir denklemin iki tarafının aynı miktarı temsil ettiği fikridir (Crooks ve Alibali, 2014). Eşitlik, matematiğin temel kavramlarından biridir. Eşittir işareti sayıları ve işlemleri kullanan tüm matematikte en önemli sembollerden biridir. (Van De Walle vd., 2012) Matematiğin bir dalı olan cebirin eşitlik kavramı üzerine kurulduğu söylenebilir. Cebiri anlamak ve kullanmak, matematiksel eşitliğin de dahil olduğu bir dizi kavramı anlamaya bağlıdır (Knuth vd, 2006). NCTM (2000)'e göre eşitlik kavramı ve sembolik temsili, müfredat boyunca geliştirilmesi gereken bir kavram olarak görülmüştür. Bunun sebebi; öncelikle eşitlik kavramı matematiksel ifadeler arasındaki ilişkilerin anlaşılması için temel olması ikinci olarak ise eşitlik kavramını doğru anlayamayan öğrencilerin cebirsel işlemleri gerçekleştirirken zorluk yaşamalarıdır (Crooks ve Alibali, 2014; Knuth vd, 2006; Van De Walle vd., 2012). Ayrıca matematiksel eşitlik kavramının anlaşılması öğrencilerin sayı sistemlerindeki ilişkileri görmeleri, anlamaları ve sembolize etmeleri için temeldir (Van De Walle vd., 2012).

Öğrencilerde matematiksel eşitlik anlayışı, okul öncesine kadar uzanır. Okul öncesi dönemde A ve B şeklinde iki kümenin eşitliğini belirlemenin yolu, karşılaştırmalı sayma yaklaşımına dayanır. Daha sonra karşılaştırma fikrini geliştiren çocuk, iki kümeyi saymaya dayalı olarak birleştirip başka bir kümeye eşitleme fikrini geliştirir.  $A+B=C$  olması fikri okul döneminde karşılaşılan ilk aritmetik işlemdir. Uzun bir dönem boyunca karşılaşılan bu aritmetik düzen daha sonraki süreçte aslında öğrenci için eşitlik kavramının yanlış anlaşılmasının temelini oluşturacaktır. Çünkü bu dönemde öğrencinin karşılaştığı birçok aritmetik düzen A ve B arasındaki işlemin yapılmasına bağlıdır. Bu yüzden birçok öğrenci buradaki eşitlik kavramını A ve B arasındaki işlemi yap olarak algılanmakta eşitliğin kavramsal anlamına dikkat etmemektedir. Hatta daha yüksek sınıf seviyelerinde yapılan araştırmalarda bile bazı öğrenciler için bu anlayışın devam ettiği belirlenmiştir (Kieran, 1981).

İlkokul döneminin sonlarında öğrencinin zihinsel gelişimiyle birlikte eşitlik anlayışında değişimler meydana gelir. 13 yaş bir çocuk için eşittir işaretinin anlamını anlamak için bir geçiş dönemidir. Çocuk eşittir işaretinin; “sonucu isteme” ve “eşdeğerlik” sembolü anlamı arasında geçiş yapar. Bu dönem ile birlikte eşitliğin sağ tarafının sol tarafın sonucunu göstermesi fikri yerine sağ ve sol taraflarda farklı ifadelerin eşitliğini gösterebileceği fikri oluşur. Yapılan çalışmalarda katılımcıların

eşittir işaretinin sol ve sağ tarafları arasında yaptıkları karşılaştırmalar, eşitlik sembolünün bu aşamada bir "bir şeyler yap sinyali" olmaktan çok ilişkisel bir sembol olarak görüldüğünü göstermektedir Zihinsel gelişim ile birlikte birbirine denk farklı gösterimler üzerine verilen eğitiminin eşitlik kavramının anlaşılmasını sağladığı gösterilmiştir (Kieran, 1981). Eşittir işaretinin denge olarak kavramsallaştırılması ilk okulda verilen eşitlik kavramının somut olarak anlaşılmasını sağlayabilir (Van De Walle vd., 2012). Bunun yanında Knuth vd. (2006) çalışmasında; eşittir işaretinin gelişimsel olmaktan ziyade öğrencinin matematik becerisine ve bunun geliştirilmesine bağlı olduğunu söylemiştir. Eşittir işareti geleneksel olarak öğrencilerin ilkökul yıllarında tanıtılır ve sonraki sınıflarda kavram için açıkça çok az öğretim süresi harcanır. Öğretmenler genellikle öğrenciler için ilkökul sırasında kavramla tanıştıktan sonra, çok az veya hiç inceleme gerekeceğini varsayarlar. Daha sonraki sınıflarda eşit işareti açık bir şekilde dikkat edilmemesi, büyük ölçüde, birçok öğrencinin ortaokul ve ötesinde neden sembolü yetersiz anladıklarını açıklayabilir (Knut vd., 2006).

Eşittir işareti için tarafların eşitliği fikrini geliştirme gerekliliğinin en önemli nedenlerinden biri de cebirsel denklemler için bir anlam inşası oluşturmaktır. Öğrencilerin eş değer denklemleri doğru şekilde tanımlaması ile ulaştıkları yargılar için doğru gerekçelendirmeler yapmaları arasında anlamlı bir ilişki olduğu bulunmuştur (Steinberg vd., 1991). Öğrencide eşitlik fikri geliştirilememesi durumunda cebirsel denklemler çalışmalarında öğrenci sonucun her zaman eşittir işaretinin sağ tarafında olduğu fikrini benimseyecektir. Bir tarafın cebirsel ifade diğer tarafın bir sayıdan oluştuğu denklemler öğrencilerin sahip oldukları mevcut kavramlarına uyabilir, ancak iki farklı cebirsel ifadenin eşit olduğu denklemler bu fikre uymayacaktır. Sağ taraftaki bu çoklu işlemin varlığı ona yabancı gelmekle kalmaz, aynı zamanda onu bir cebirsel denklem bağlamında ilk kez görmek bilişsel gerilimi artıracaktır. Bu nedenle, cebirsel denklemlerin tanıtılmasından önce aritmetik eşitlikler çerçevesinde eşittir işareti kavramının genişletilmesi, daha karmaşık denklemlerin anlamının inşasında gerekli görülmüştür (Kieran, 1981).

Matematiksel eşitlik kavramının daha iyi kavramsallaştırılabilmesi için terazi benzetmesi önemli bir araçtır. Terazi örneği öğrencilerin eşitliği her iki tarafına yapılacak eş müdahalelerin eşitliği bozmayacağı fikrini anlamalarını sağlar (Van De Walle vd., 2012). Öğrenciler eşittir işaretinin denklemin her iki taraftaki niceliğinin aynı

olması anlamına geldiğini öğrendikten sonra problem çözümlerinde kavramsal bilgilerini kullanabilirler (Van De Walle vd., 2012). Eşitliğin kavramsal bilgisine sahip olan öğrenci  $7-x=6-4$  örneğinde denklemin sağındaki işlemi hesaplamak yerine 6 yediden bir eksiktir. O zaman çıkan sayı eşitliği bozmamak için 4 ten bir fazla olmalıdır. Şeklinde açıklama yapabilecektir (Van De Walle vd., 2012).

Eşitliği sadece denklem çözme prosedürleri tartışmasının bir parçası olarak öğretmek yeterli değildir. Öğrenciler denklem çözme konusunda yetkin olduktan sonra, bilgilerini yansıtmaları sağlanmalı ve kavramsal anlayışlarını geliştirmek için farklı denklem durumlarına maruz bırakılmalıdır. Eşdeğer denklem kavramına ilişkin örnekler,  $3x = 5 + 4$  ve  $3 + x = 5 + 4$  gibi denklemlerle ilgili dönüşümler açıkça eşliği belirlenemeyen farklı eş değer durumları da içermelidir (Steinberg vd., 1991).

Eş değer denklemlerin öneminin vurgulanmasına rağmen bazı araştırmalar birçok cebir öğrencisinin eş değer denklemleri iyi anlamadığını göstermiştir (Steinberg vd., 1991). Öğrencilerin çoğu cebirsel dönüşümleri yapabilse de bu dönüşümler ile eş değer denklemler elde edeceklerini fark edememişlerdir. Çoğu öğrenci denklemlerin eşitliğini kontrol etmek için sadece sonuçları karşılaştırma yolunu tercih etmiştir. Ve bu durum zayıf bir kavramsal anlayışa işaret eder. Bunun sebebi okul hayatı boyunca öğrencilere denklemleri çözmek için prosedür adımları öğretilmesi, ancak bu işlemlerin ve eşdeğer denklemlerin altında yatan kavramların vurgulanmaması olduğu söylenebilir (Steinberg vd., 1991)

Matematiksel eşitlik kavramının anlaşılmasının matematiksel başarıyı ve diğer matematiksel kazanımların elde edilmesini etkilediği ortaya konmuş ve matematiksel eşitlik kavramının anlaşılması daha ileri matematiği özellikle cebirin anlaşılması için gerekli görülmüştür ancak birçok çalışma matematiksel eşitlik kavramına gerekli önemin verilmediğini de göstermiştir (Crooks ve Alibali, 2014). Matematiksel bilginin gelişimini izleyebilmek ve doğru şekilde yönlendirmek için bu iki bilgi türünün ölçülmesine ihtiyaç vardır. Bu türlerin ölçülebilmesi bilgideki değişimi anlamak ve öğretim sürecini geliştirmek içinde yol gösterici olabilir (Crooks ve Alibali, 2014). Crooks ve Alibali (2014) çalışmasında, matematiksel bilgi türünün belirlenmesi konusunda en çok kullanılan kavramlardan birinin eşitlik kavramı olduğu söylenmiş ve bu araştırmalarda kullanılan ölçüm yöntemleri aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır.

### **i. Eşittir İşaretinin Tanımı**

Bu görevde katılımcılardan eşittir işaretinin açık bir tanımını vermeleri istenir ( Örneğin; eşittir işaretinin bir denklemin iki tarafının aynı/aynı değere sahip olduğunu gösterdiğini belirtmek). Bu görevin sonuçları genelde kavramsal anlayışın yetersiz olduğunu göstermektedir. Öğrenciler genelde bu görevde eşittir işaretinin iki tarafının aynı olduğu fikri yerine sonucu bulma veya işlemi yapma şeklinde tanımlamalar yapmaktadır.

### **ii. Örnek Değerlendirmesi**

Katılımcıların örnek denklemlerin doğru olup olmadığını ya da mantıklı olup olmadığını belirtme görevlerini içerir. Bu görevlerde, örnek denklemler tipik olarak aşağıdaki dört eşitlik formatının bazı kombinasyonlarında sunulur: geleneksel (örn.,  $2 + 2 = 4$ ), geleneksel olmayan (örn.  $4 = 2 + 2$ ), her iki tarafta denklik (örn.  $2 + 2 = 1 + 3$ ) ve özdeşlik (ör.  $2 = 2$ ). Belirlenmek istenen denklemin iki tarafının eşitliği, iki tarafa da yapılan aynı müdahalelerin eşitliği bozmayacağı ya da eş değer denklemlerin birbirinin yerine kullanılabileceği fikridir. Birçok öğrenci geleneksel  $a+b=c$  formatının dışında verilen denklemlerde zorluk yaşamaktadır. Bu da öğrencilerin çoğu zaman her iki taraftaki işlemlerle denklemleri doğru bir şekilde değerlendirmede zorluk yaşadıklarını gösterir.

### **iii. Soruyu Yeniden Yapılandırma**

Bu görevlerde, katılımcılar belirli bir süre için bir denklemin görüntüler ve ardından denklem görünümünden gizlenir ve tam olarak gördüklerini yazarlar. Bu görevlerdeki performans genellikle zayıftır ve birçok öğrenci hedef denklemlerin yapısını yanlış bir şekilde yeniden üretir.

### **iv. Eşittir İşaretinin Derecelendirilmesi**

Katılımcıların eşittir işareti için verilen tanımları derecelendirmeleri istenir. Katılımcılardan tipik olarak üç tür tanımla derecelendirmeleri istenir: Kavramsal (ör. "aynısı"), İşlemsel (ör. "cevap") ve çeldirici (ör. "problemin sonu"). İşlemsel veya çeldirici tanımlarla karşılaştırıldığında kavramsal tanımlar daha yüksek derecede kavramsal bilginin kanıtı olarak alınır.

## v. Eş Değer Denklemler

Bu görevde katılımcılardan denklemlerin eş değerliği fikrini kullanarak iki denklemin eş değer olup olmadığının gösterilmesi istenir. (Örneğin,  $n + 3 = 7$  ve  $n + 3 - 5 = 7 - 5$  de n'nin değerinin her ikisinde de aynı olup olmadığını belirtmeleri istenir. )

## vi. Problem Çözme

Verilen bir problemin çözümünden kavramsal bilgi çıkartılmaya çalışılır veya problem çözme prosedürlerinin açıklanması istenir. Ancak çok az çalışma bu prosedürü kullanmıştır.

## vii. Diğer Görevler

Burada nadiren kullanılan diğer görevler sınıflandırılmıştır.

Crooks ve Alibali (2014) çalışmasında, eşitliğin kavramsal ve işlemsel bilginin ölçülmesinde en çok kullanılan kavramlardan olduğunun göstermiş, bununla birlikte standarda yakın hale gelen ölçüm maddelerinin çeşitli çalışmalarda kullanılarak güvenilirliğinin artırıldığını bildirmişlerdir. Ayrıca Crooks ve Alibali (2014) eşitlik kavramının okul öncesi çağdan itibaren gelişen ve öğrencide sürekli var olan bir kavram olması nedeniyle geçerli ölçümler yapılabileceğini belirttiğinden araştırmamızda eşitlik kavramı üzerinde çalışma yapılmıştır.

## 2.3 Kanıt Şemaları

Öğrenciyi ne ikna eder? Kanıtlama öğretimi ile ilgili sorunları çözmek için öğrencilerin matematiksel kanıt anlayışını, yani öğrenciler tarafından neyin kanıt olarak kabul edildiğini bilmemiz gerekir. “Öğrencilerin kanıt anlayışlarından, matematikçilerin kabul ettikleri kanıt (ispat) anlayışına nasıl geçebiliriz?” sorusundan hareketle; matematik öğretiminde kanıt ile ilgili yapılan araştırmaların amacı, son yıllarda teorik matematikteki matematiksel kanıtları geliştirmek yerine öğrenciler için kanıt şemalarını geliştirme olarak değişmiştir (Marrades ve Gutierrez, 2000). Matematik eğitiminde kanıtın en çok doğrulama ve açıklama rolü kullanılmaktadır. Bir matematiksel iddia çeşitli yöntemler ile doğrulanır. Fakat çoğu zaman sadece doğrulanması yetmez, aynı zamanda neden doğru olduğunun açıklanması gerekir. Bu şekilde bilginin zihinde oluşması sağlanır. Matematiksel kanıtlarla uğraşan öğrenci, aynı

zamanda kendisi veya tüm matematik dünyası için yeni keşiflere ulaşabilir. Bu süreçte öğrencinin kullandığı yöntemler onun düşünce sisteminin bir göstergesidir (Harel ve Sowder 2007). Kanıt şemaları, kanıtlama sürecindeki davranışların gözlenmesinden çıkarılan bilişsel basamak, zihinsel yetenek ve beceriyi ifade eder (Dede ve Karakuş, 2014).

Öğrencilerin; kanıt ve kanıtlama ile ilgili zorluklarını, bu zorlukların nedenlerini, anlayışlarını ve kanıtlarına yönelik tutumlarını anlamak için kapsamlı bir bakış açısına ihtiyaç vardır. Kanıt şemalarının sınıflandırması temelde bu amaçla oluşturulmuştur.

Harel ve Sowder (1998)'e göre, kanıt şemalarının sınıflandırılmasında kanıtın öznel anlamı referans alınır. Öznel anlamıyla kanıt, kişi ya da toplum için gerçeği belirleyen şeydir. Kanıt şemaları ise öğrencilerin neyden ikna oldukları ve başkalarını ne ile ikna ettikleri ilgili bir sınıflamadır. Kanıt şemaları; kişiden kişiye, medeniyetten medeniyete ve aynı medeniyet içerisinde nesilden nesile farklılık gösterebilir. Bu anlamıyla kanıt, tüm öğretim müfredatını ve tarihini etkiler (Harel, 2001).

Matematik müfredatı açısından, kanıtın öznel olarak alınması kavramın öğretiminde bir belirsizlik oluşturmaz. Kanıt kavramı öznel olsa da müfredatın amacı, matematikçiler tarafından ortak olarak kabul edilen ve uygulanan bir anlayışı öğrencilerde de geliştirmektir. Bu iddianın dayandığı nokta, ortak bir planın matematiksel ilerlemenin temeli olduğu inancıdır (Harel, 2001).

Kanıt şemaları üç ana kategori ile çeşitli alt kategorilerden oluşur. Bu üç ana kategori; dışsal kaynaklı kanıt şemaları, deneysel kanıt şemaları ve tümdengelimli kanıt şemalarıdır (Harel ve Sowder, 2007).

### **2.3.1 Dışsal Kanıt Şemaları**

Bireyin ya da toplumun; bir argümanın doğruluğuna ikna olmak için kitap, öğretmen ve alışkanlıklar gibi dışsal etmenlere güvendiği kanıt şemalarıdır (Harel ve Sowder, 2007). Bu şemaya sahip öğrenciler bir iddianın doğru olduğunu bilirler, çünkü onlara güvendikleri biri söylemiştir. Ayrıca bu şemaya sahip öğrenciler bir iddianın doğruluğunu bilirler, fakat neden doğru olduğunu belirleyemezler (Flores, 2002).

Dışsal kanıt şemaları üç alt şemaya ayrılır.

- i. Otoriter Kanıt Şemaları:** Bireyin veya toplumun ikna olmak için otoriteye güvenmesini ifade eder. Birey kendi mantıksal akıl yürütmelerinden ziyade; öğretmen gibi, kitap gibi doğruluğuna inandığı otoriteleri sorgulamaksızın kanıt olarak sunar. Bu şemaya sahip öğrenciler, bir kanıtın doğruluğu hakkında yeterince gerekçe geliştiremezler. Öğrencinin bir denklem çözme sorusunda cevabın doğruluğunu “*öğretmenimden bu şekilde öğrendim*” diyerek kanıtlamaya çalışması otoriter kanıt şemalarına örnek olarak gösterilebilir.
- ii. Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şemaları:** Öğrenciler, mantıksal çıkarımlar yapmaktansa daha önce öğrendiği formül ve algoritmalara güvenir. Formüllerin veya algoritmaların anlamlarını dikkate almadan aynıyla uygular. Yüzeysel deliller sunulur ve daha önce öğrenilen formüller aynıyla uygulanmaya çalışılır (Harel ve Sowder, 2007). Bu kanıt şemasında matematiksel durumun neden doğru olduğundan ziyade, uygulanan algoritmanın görüntüsü önemlidir (İskenderoğlu, 2016). Örneğin, üniversite öğrencileri geleneksel lise düzeyi öğretim programında iki sütunlu kanıt formatını gördükleri için kanıt olarak sadece bu formatı kabul etmektedirler (Sowder ve Harel, 1998).
- iii. Sembolik Kanıt Şemaları:** Öğrenciler, ikna sürecinde tutarsız sembol manipülasyonları kullanır. Sembollerin sanki kendi hayatı varmış gibi cebirsel ve niceliksel anlamlarından bağımsız olarak kullanırlar (Harel, 2001). Matematiksel kanıtın ilk veya birkaç adımını sembolik olarak yazma ve anlamına dikkat etmeksizin iyi bilinen sembolik algoritmaları kullanma görülür. Örneğin öğrencinin  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  şeklinde işlem yapması sembollerin anlamlarına dikkat etmeksizin genelleme yaptığını gösterir (Sowder ve Harel, 1998).

### 2.3.2 Deneysel Kanıt Şemaları

Deneysel kanıt şemalarını kullanan bireyler genel bir kanıtlama yapmak yerine birkaç örnek veya algularına güvenirler. İddia için tüm durumların kanıtlanması yerine birkaç örneğin yeterli olduğuna inanırlar. Bu şemada öğrenci olası tahminleri yapamaz. Sonuçları sırayla göstermekle yetinir ve kanıtlama sürecindeki temel ilkelerden yoksundur. Yunan öncesi matematik, deneysel deneyimler sonucu elde edilen kanıtlardan ortaya çıkmaktadır. Bu da deneysel kanıt şemalarına işaret eder. Deneysel kanıt şemaları kaçınılmazdır. Çünkü bireyler öncelikle deneyimlerinden elde ettiği

çıkarımlar sonucu öğrenirler. Sorun deneysel kanıt şemasına sahip olan bireyin tümdengelimli kanıt şemalarına geçişini nasıl yapılabileceğidir (Harel ve Sowder, 2007). Deneysel kanıt şemalar aşağıdaki gibi 2 alt şemaya ayrılır.

- i.  rnek Temelli Kanıt Şemaları:**  ğrencilerin bir iddiayı doğrulanması için sınırlı sayıda  rneği yeterli görmesidir. Mantıksal deliller sunmazlar ve bunun yerine yeterli gördükleri birkaç durumu kanıt olarak sunarlar. Örneğin  $a^n=a.n$  eşitliğinin doğru olduğunu söyleyen  ğrenci  $2^2=2.2$  örneğini kanıt olarak gösterebilir.
- ii. Algısal Kanıt Şemaları:** Kanıtlama için kendi algılarına veya basit çizimlerine güvenirler. Örneğin asal sayıların sonsuzluğu hakkında algısal olarak sonsuz olduğunu düşünüp başka bir kanıtlama sürecine gerek olmadığını düşünebilirler. Daha çok geometrik kanıtlar için çizimleri kullanarak kanıt yapmaya çalışırlar. Bu izimler yine genel bir durumun kanıtı olmaktan daha çok özel örnekler konumundadır. Örneğin,  genin   açısı olduğunu eşkenar bir üçgen çizerek gösteren bir  ğrenci farklı üçgen eşitleri ile karşılaştığında bunların üçgen yapısına aykırı olduğunu söyleyebilir.

Öğretmenler,  ğrencileri deneysel şemalardan analitik kanıt şemalarına geçirebilmek için sistematik olarak örnekler verebilirler ve desenler aramaları için yönlendirebilirler. Desenler, ocukların tahmin etmelerine ve ardından tahminlerini doğrulamasına izin verme avantajına sahiptir. Buna ek olarak öğretmenler, öğrencilerin varsayımları anlamak ve test etmek için çok faydalı olsa da örneklerin bir ifadenin genel olarak doğru olup olmadığını belirlemek için yeterli olmadığını görmelerine de yardımcı olmalıdır (Flores, 2002).

### 2.3.3 Analitik Kanıt Şemaları

Analitik kanıt şemaları, dışsal ve deneysel kanıt şemalarının aksine güçlü matematiksel akıl y r tmelere ve teoremlere dayanır. Bu şemada  ğrenci kanıtlama için herkesin ikna olabileceği mantıklı argümanların sunulması gerektiğinin farkındadır. Matematik  ğretimi açısından öğrencilerin bu şemaları kullanması beklenir. Aşağıdaki gibi iki alt şemaya ayrılır.

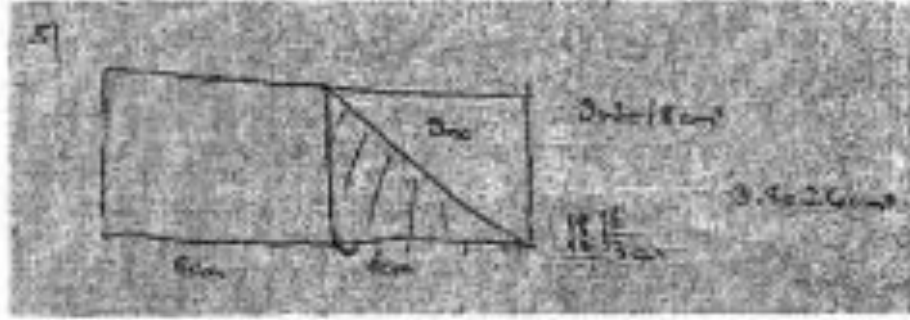
**i. Dönüşümsel Kanıt Şemaları:** Bu şemaları kullanan öğrenciler, kanıt için mantıksal akıl yürütmeler kullanarak tutarlı basamaklar oluşturur. Öğrenci, bir kanıtın önceki kanıtlara dayanması gerektiğinin farkındadır.

Dönüşümsel Kanıt Şemalarının; genellik, operasyonel düşünme ve mantıksal çıkarım olmak üzere 3 temel özelliği vardır. *Genellik ilkesi*, kanıtlama sürecindeki amacın herkesi ikna etmek olmasıdır. *Operasyonel düşünme*, kanıtlama sürecinde sonuçları öngörebilme anlamına gelmektedir. Bu özelliğe sahip kişiler yaptığı işlemlerin sebep ve sonuçlarının farkındadır. Sembolik kanıt şemasından bu özelliği ile ayrılır. Sembolik kanıt şemalarında anlamsız manipülasyonlar yapılırken bu şemadaki kişiler yaptıkları manipülasyonların farkındadır ve bir sebebe bağlı olarak yaparlar. *Mantıksal çıkarım* ise gerekçelerin mantıksal kurallara uygun olmasıdır.

Dönüşümsel kanıt şemaları, bu özellikleri içerirken aynı zamanda ayrıntılı gerekçelendirme gerektirir. Sembolik kanıt şemaları ile dönüşümsel kanıt şemaları arasındaki fark, sembolik kanıt şemalarında bireyler sembol veya cebirsel ifadeleri işlevsel ve niceliksel anlamlarına başvurmadan sembollerin kendi hayatları varmış gibi kullanırlar. Dönüşümsel kanıt şemalarında ise bireyler kanıtlanacak ifadeyi sembollerle ifade etmeyi ve anlamlı şekilde manipülasyon yapmayı öğrenir, anlayışını derinleştirir ve çözüme götürecek bilgiler elde etmeye çalışır. Birey sembolleri yanlış biçimde kullandığında bu sembolik kanıt şeması olurken, sembollerin altında bir anlam yatıyorsa bu dönüştürülebilir kanıt şemasına dahil edilir (İskenderoğlu 2016). Anlama kanıtın her aşamasında olmayabilir. Bu potansiyel bir yetenektir. Ancak anlamamanın gerçekleştiği öğrenci kritik aşamalarda kavramın anlamına uygun tercihlerde bulunur (Harel ve Sowder, 2007).

Şekil 2.1 de İskenderoğlu' nun (2003) çalışmasında dönüşümsel kanıt şemalarına uygun olarak verdiği öğrenci cevabı görülmektedir. Örnekte üçgen alan formülünü hatırlayamayan öğrenci dikdörtgenin alanının yarısının üçgenin alanını vereceğini düşünerek doğru cevaba ulaşmıştır. Elde ettiği bu bilgiyi ise kendi zihinsel süreçlerine bağlamıştır.

M : Soruyu yaptim da nasil anlatayim? Yauu, sonuqta yanlarin olqulleri ept. Yani su yan olqulleri ept. Orduu dduynerok yani.  
T : Peki bu tip sorulari her zaman buyle mi qozersin?  
M : Qogunu.  
T : Peki nereden biliyorsun buyle qozmen gerektiqini?  
M : Buyle qozmen gerektiqini nerden biliyorum? Bi yerdan biliyorum onu. Yani dduyindim, buyle olabilir diye. O yuzden buyle qozdum. Dduynerok yaptim, yani bi yerdan bilgim yok.



Şekil 2.1 Dönüşümsel kanıt şeması örneği

- ii. **Aksiyomatik Kanıt Şemaları:** Aksiyomlar ile başlayan dönüşümsel kanıt şemaları olarak tanımlanabilir. Bu şemada birey, akıl yürütmenin yanında kanıtın matematiksel anlamına uygun olarak formal süreçleri kullanır. Kanıtlama sürecinde aksiyomatik sistemleri kullanır.

Şeki 2.2 de İskenderoğlu' nun (2010) yaptığı çalışmadan alınan aksiyomatik kanıt şeması örneği görülmektedir. Öğrenci bileşke fonksiyonun bire birliğini göstermek için bire birlik tanımını kullanmıştır.



Şekil 2.2 Aksiyomatik kanıt şeması örneği

Öğrencilerin analitik kanıt şemalarını geliştirebilmeleri için öğretmenler, öğrencilerin doğal olarak kullandıkları matematiksel özellikleri bilinçli olarak

anlamalarına yardımcı olmalıdır. Örneğin dağılma özelliğın nasıl kullanıldığını anlamak, dağılma özelliğı gibi teknik kelimeleri bilmekten daha önemlidir. Öğrenciler hazır olduğunda, öğretmen açıklamalarını daha kesin hale getirmelerine yardımcı olmak için matematiksel terimleri tanıtılabilir. Ancak asıl amaç, terimin sözlük anlamını ezberlemek olmamalıdır. Sayılar, işlemler ve aralarındaki ilişkiler öğrencilerin sadece bir cevabı hesaplamanın bir yolu olarak değil, kendi başlarına ilgilenilen matematiksel konular olarak öğretilmelidir (Flores, 2002).

## **2.4 İlgili Araştırmalar**

Araştırmanın kavramsal çerçevesi; matematiksel bilgi türleri ve kanıt şemaları olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Matematiksel bilgi türleri, matematiksel eşitlik kavramı ve kanıt şemaları üzerine yapılan çeşitli çalışmalar ve sonuçları aşağıda sunulmuştur.

### **2.4.1 Matematiksel Bilgi ve Eşitlik Kavramına İlişkin Bazı Araştırmalar**

Araştırmaya çerçeve oluşturan kavramlardan ilki matematiksel bilgi türleridir.

Alıbalı vd. (2007) ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretinin anlamaları, eş değer denklemleri çözme performansları ve anlayışlarındaki gelişimi incelemeyi amaçladıkları çalışmasında, 3 yıl boyunca öğrenciler izlenerek veriler elde edilmiştir. Çalışmaya göre öğrencilerin matematiksel eşitlik anlayışları ortaokul boyunca gelişmesine rağmen birçok öğrencinin sekizinci sınıf sonunda bile anlayışlarının zayıf olduğu görülmüştür. Ayrıca eşittir işaretinin kavramsal olarak anlaşılması denklem problemlerini çözme performansını arttırmaktadır. Elde edilen bulgulara göre matematik müfredatının öğretiminde eşittir işaretinin anlamına sürekli olarak dikkat edilmesi gerekmektedir. Özellikle cebir ve denklem çözmeyi öğrendikten sonra karşılaşılan zorlukların çoğu eşittir işaretinin işlem yapma zorunluluğuna dayanmaktadır. Bu yüzden süreç içerisinde kavramsal bir anlayış geliştirilmeye çalışılmalıdır.

Uzun süredir matematiksel düşünme üzerine yapılan çalışmaların çoğu prosedürel bilgiye ve problemlerin nasıl çözüleceğine odaklanmıştır. Ancak son yıllarda sadece problemleri çözmeye değil, aynı zamanda kavramsal bilgiye doğru bir kayma olmuştur. (Crooks ve Alıbalı 2014). 2014 ve öncesi yapılan eşitlik kavramı ve kavramsal bilgiye odaklanan çalışmaların analizinin yapıldığı Crooks ve Alıbalı (2014)

çalışmalarında; kavramsal bilginin matematiksel düşünme literatüründe nasıl tanımlandığını ve kavramsal bilginin üç matematiksel alanda nasıl tanımlandığını, operasyonel hale getirildiğini ve ölçüldüğünü gözden geçirmişlerdir. Bu araştırmaya göre çok az çalışmanın kavramsal bilginin açık tanımını sağladığı ve kavramsal bilgiyi ölçmek için kullanılan görevlerin literatürle uyumlu olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Elde edilen bulgular ışığında kavramsal bilgiyi genel ilkeler bilgisi ve prosedürlerin altında yatan anlam bilgisi olmak üzere iki ana boyutta sınıflandırmışlardır. Genel ilke bilgisi, belirli problemler veya prosedürlerle ilişkisi olmaksızın matematiksel fikirlerin anlaşılmasını içerir. Öte yandan, prosedürlerin altında yatan ilkelerin bilgisi, kavramları belirli prosedürlere bağlamayı içerir. Kavramsal bilginin belirlenmesi konulu araştırmalarda en çok incelenen kavram eşitlik ve eş değerlik olarak öne çıkmaktadır. Eşdeğerlik üzerine yapılan çalışmaların çoğu, katılımcıların problemleri çözmelerini ve prosedürel gerekçeler sağlamalarını gerektirmektedir. Bulgulardan yola çıkarak kavramsal anlayışın belirlenmesi için dört yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler; prosedürlerin uygulanması ve gerekçelendirilmesi, prosedür görevlerinin değerlendirilmesi; örnek görevlerin değerlendirilmesi ve kavram görevlerinin açıklaması olarak belirtilmiştir.

Eşitlik kavramının merkeze alındığı denklem çözümüne ilişkin literatürde iki yöntem ön plana çıkmaktadır. Bunlar denge yöntemi ve ters yöntem olarak sınıflandırılabilir. Ngu vd. (2015) çalışmalarında bu iki yöntemi karşılaştırmıştır. Bu çalışmaya göre denklem çözenin merkezinde, denklemin her iki tarafında denkleğin korunması vardır. Bununla birlikte, süreç birden fazla ögenin etkileşimini içerdiğinde, bir denklemi çözmek yüksek bir bilişsel yük getirebilir. *Denge yöntemi*, denklemin her iki tarafında da işlemleri gerektirirken, ters yöntem yalnızca bir taraftaki işlemleri içerir. Bir çalışmada, ortaokul öğrencilerinin denge ve ters yöntem kullanımına göre ön test ve son test karşılaştırmaları, ters grubun, yüksek element etkileşimi içeren denklemler için denge grubundan daha iyi performans gösterdiğini bulmuştur. Öğretimsel verimlilik ölçümleri ayrıca denge yönteminin daha yüksek bilişsel yük getirdiğini doğrulamış ve ters yöntemin etkileşen öğeler nedeniyle bilişsel yükü azaltabildiğini göstermiştir.

Yine denklem çözümede kullanılan denge ve ters yöntemlerin, incelendiği Ngu ve Phan (2016) çalışmasında, iki yöntem arasındaki farkın operasyonel çizgide yattığı belirtilmiştir. Yapılan deneysel çalışmada ters yöntemi kullanan grubun denge

yöntemine göre prosedürel bilgi testinde daha iyi problem çözme performansı göstermiş ve her iki grupta ters yöntemin kullanıldığı kavramsal teste iyi performans göstermiştir. Çalışmanın bulgularına göre; ters yöntemi kullanan grup için prosedürel bilgi performansı ile kavramsal bilgi performansı arasında pozitif ilişki tespit edilirken denge yöntemini kullanan grup için böyle bir ilişki bulunamamıştır. Ters yöntem, öğrencilerin denge yöntemine kıyasla daha az etkileşimli öge işlemesine izin verdiği için denge yönteminden daha iyi denklem çözme için şema elde etmeyi kolaylaştırmıştır. Önceki araştırmalar eşitlik kavramına daha uygun olduğu için denge metodunu önerse de ters yöntem grubunun eşittir işaretini yeterince kavramsallaştırabilmiştir. Araştırmada beklenenin aksine ters yöntem uygulayan grup hem prosedürel hem de kavramsal teste daha başarılı olmuş bunun sebebi olarak denge kavramını kavramakta zorlanmaları gösterilmiştir.

Ortaokul döneminde cebirsel muhakemenin gelişimine vurgu yapan Knuth vd. (2005)'deki cebirsel fikri, eşitlik ve değişken kavramlarını inceledikleri makalelerinde; öğrencilerin bu temel fikirleri anlamalarının, problem çözümedeki başarılarını, çözüm süreçlerinde kullandıkları stratejileri ve çözümleri için sağladıkları gerekçeleri etkilediğini göstermektedir. Araştırmaya göre birçok öğrenci eşittir işaretine ilişkin işlemsel anlayışa sahiptir ve sınıf düzeyi yükseldikçe eşitlik anlayışı da gelişmektedir. Ancak gelişim olsa da öğrencilerin çoğunluğu kavramsal bir anlayış geliştirememektedir. Bir diğer bulguya göre kavramsal anlayışa sahip öğrenciler problemlere alternatif çözümler bulmada daha başarılı olmuşlardır. Bu tür sonuçlar, eşdeğerlik anlayışının cebirsel muhakeme ve gelişimin önemli bir yönü olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, öğrencilerin cebire hazırlanması ve nihai başarısı, matematiksel eşdeğerlik anlayışlarını ve eşittir işaretinin anlamını geliştirme çabalarına bağlı olabilir. Buna rağmen eşitliğin anlamına ilerleyen sınıflarda çok az dikkat edilmektedir. Knuth vd. (2011) çalışmalarında da benzer sonuçlar elde edilmiş ve öğrencilerin cebire hazırlanması ve nihai başarısı, matematiksel eşdeğerlik anlayışlarını ve eşittir işaretinin anlamını geliştirme çabalarına bağlı olabileceği bildirilmiştir.

Benzer bir çalışmada Knuth vd. (2006) tarafından yapılmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini anlamalarını ve bunun denklem çözme performansı ile nasıl ilişkili olduğu incelenmiş ve sonuçlar, nispeten az sayıda ortaokul öğrencisinin eşittir işareti için kavramsal bir görüşe sahip olduğunu

göstermektedir. Ayrıca, orta sınıflarda eşittir işareti anlayışının geliştiğini gösteren hiçbir kanıt bulunamamıştır. Eşittir işaretinin kavramsal olarak anlaşılması ile denklem çözme başarısı arasında güçlü bir ilişki bulunmasına rağmen öğrencilerin çok azı kavramsal bir anlayış göstermiştir. Bununla birlikte eşittir işaretine ilişkin bir kavramsal anlayışın, yalnızca denklemleri anlamlı bir şekilde üretmek ve yorumlamak için değil, aynı zamanda denklemler üzerinde anlamlı bir şekilde işlem yapmak için de gerekli olduğudur. Bu çalışmanın sonuçları öğrencilerin eşittir işareti anlayışlarını geliştirme çabalarının cebirde daha iyi performansla sonuçlanabileceğini göstermektedir.

Yukarıda sunulan çalışmalar ortaokul öğrencilerinin eşitlik için yeterli kavramsal anlayışa sahip olmadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin cebirde daha iyi performans gösterebilmeleri için eşitlik kavramının anlaşılmasına vurgu yapılmıştır. Öğretimsel müdahalelerle ortaokul öğrencilerinin eşitlik anlayışının gelişip gelişmeyeceğini araştıran McNeil vd. (2019) çalışmasında öğrencilerin bu deney sonucunda daha iyi eş değerlik anlayışına sahip olabildiklerini göstermişlerdir. Ancak Powell vd. (2012) yaptığı çalışmada ilköğretim düzeyinde müfredatı içeren ders kitaplarını incelemiş ve öğrencilerin matematiksel eşitliğe ilişkin kavramsal anlayışını geliştirebilmeleri için yeterli eşitlik içeren denklemlere maruz kalmadıklarını ayrıca öğretmen kılavuz kitaplarının gerekli niteliklere asgari düzeyde sahip olduğu belirtilmişlerdir. Yine bu araştırmanın bulgularına göre öğrenci kitaplarında daha çok sol tarafta bilinmeyen bulunduğu ifadeler yer alırken standart olmayan denklemler çok az kullanılmıştır. Eşittir işaretinin kavramsal bir anlayış geliştirdiği düşünülen iki taraflı denklemlere ise beşinci sınıftan itibaren daha çok yer vermeye başlanmıştır. Öğretmen kılavuz kitaplarında eşittirin kavramsal anlamına yer verilse de çok az sayıda bahsedilmiş ve eşittir işaretinin anlamına farklı seviyelerde farklı şekilde bahsedilmesinden dolayı kafa karışıklığı oluşturabileceği düşünülmektedir.

Rittle-Johnson ve Star (2009) araştırmasında da denklemler üzerine karşılaştırmalı eğitimin eşittirin kavramsal anlamına ve esnek kullanımına etkisi incelenmiştir. Benzer problemler için benzer yöntemlerin, benzer problemler için farklı yöntemlerin ve farklı problemler için benzer yöntemlerin karşılaştırıldığı bu çalışmada tüm karşılaştırmaların aynı derece etkili olmadığı, kavramsal bilgiyi ve prosedürel esnekliği desteklemek için benzer problemler için farklı yöntemlerin karşılaştırılmasının

daha etkili olduğu belirtilmiştir. Ayrıca zıt çözümlerinin kullanılması prosedürel esnekliğin gelişmesi için faydalı olmuştur.

Pek çok aladan yetkin olmanın kavramsal ve işlemsel bilgiye ve bilginin esnek kullanımına bağlı olduğunun altını çizen Schineder vd. (2011) çalışmalarında denklem çözümlerinde kavramsal ve işlemsel bilginin çift yönlü olup olmadığını, bu ilişkilerin öğrencilerin önceki bilgileriyle yönetilip yönetilmediğini ve her iki yapının işlemsel esnekliğe nasıl etkilediğini incelemişlerdir. Elde edilen bulgular kavramsal ve işlemsel bilginin çift yönlü bir ilişkiye sahip olduğunu, her iki bilgi türünün de esnekliğe katkı sağladığını göstermiştir.

Steinberg vd. (1991) çalışmasında, cebir öğrencilerinin eşdeğer denklemleri anlamalarını incelemiştir. Sekizinci ve dokuzuncu sınıf öğrencilerine denklem çiftleri sunulmuş ve her çiftteki denklemlerin eşdeğer olup olmadığına karar vermeleri istenmiştir. Öğrencilerden ayrıca cevaplarını gerekçelendirmeleri istendiği bu araştırmada, yanıtlar üç ana gruba ayrılmıştır: Hesaplanmış çözümler, denklemlerin dönüşümlerine dayalı yargılar ve yanlış çözümler. Öğrencilerin çoğu tutarlı bir şekilde bir gruptan gerekçeler vermiş ve dönüşümlere dayalı nedenler ortaya koyan çocukların çözümleri hesaplayan çocuklara göre anlamlı olarak daha yüksek oranda doğru yanıtlara sahip olduğu görölmüştür. Dönüşüm grubundaki çoğu öğrenci, bilgilerini denklem çözümlerinde kullanılmayan dönüşümlere aktarabilmişlerdir. Ayrıca elde edilen bulgulara göre birçok öğrencinin denklem kavramını iyi anlamadığı, denklemler üzerinde yapılan dönüşümlerle eş değer denklemler elde edilebileceğini anlamakta zorlandıklarını göstermiştir. Öğrencilerin üçte birinin denklemlerin denkliğini, denklemi çözerek belirlediği görölmüştür ancak bu yöntem doğru olmasına rağmen zayıf bir kavramsal anlayışa işaret etmektedir.

Warren ve Cooper (2005) makalelerinde, öğrencilerin bilinmeyen içeren problemleri çözmek için denge modelini kullanma becerileri incelenmiştir. Çalışmada üçüncü sınıflar üzerinde bir öğretim deneyi yapılmıştır. Bu deney, denklemleri temsil etmek ve bilinmeyenleri çözmek için denge modelinin uygulamasının keşfedilmesine odaklanmıştır. Öğretim deneyi, öğrencilerin eşitlik açısından toplama ve çıkarma denklemlerini görmeye doğru bir geçişi sağlamak için tasarlanmış ve başlangıçta dersler araştırmacılar tarafından iki sınıfta denenmiştir. Öğretim deneyinin bitiminden iki hafta sonra, ortalama yaşları sekiz olan yirmi öğrenciden oluşan rastgele bir örnekleme bire

bir görüşme yapılmıştır. Görüşmeler, denge modeli öğrencilerin bilinmeyenleri bulmak için çözümlere ulaşmalarına yardımcı olurken, bazı öğrenciler için daha fazla açık öğretimin gerekli olduğunu göstermiştir.

Denklemleri çözme yeteneği, öğrencileri matematiğin birçok alanında ve formül manipülasyonları gerektiren diğer disiplinlerde başarıya hazırlar. Doğrusal denklemleri çözmenin öğrencilerin ustalaşması için zor bir beceri olmasının birçok nedeni vardır. Öğrenciler için önemli bir engel, eşittir işaretini "bir şey yapma sinyali" dışında herhangi bir şey olarak yorumlayamamaktır. Cebirde başarılı olmak için öğrenciler, eşittir işaretinin bu işlemsel görünümünden bir denklik veya ilişkisel görünüme geçiş yapmalıdır (Baratta, 2011). Bu geçişin nasıl sağlanabileceğini araştıran Baratta (2011) çalışmasında, öğrencileri ilk olarak aritmetikte eşittirin denklik ilişkisi anlamına maruz bırakarak, daha karmaşık cebir tanıtılmadan önce anlayışlarını dönüştürmeye başlanabileceği göstermiştir. Modellerin, bu farkındalığı desteklemek ve ayrıca öğrencilerin denklemler üzerinde işlemleri anlamalarına yardımcı olmak için kullanılabilirliği, bununla birlikte, herhangi bir model kullanımında olduğu gibi, modelin yalnızca soyut fikirlerin anlaşılmasını geliştirmek için geçici bir destek olarak kullanıldığından emin olmak için özen gösterilmesi gerektiğine vurgu yapılmıştır.

Joffrion (2005) çalışmasında, kavramsal ve işlemsel öğretim arasındaki denge ve bunun cebirsel muhakemenin gelişimine etkisi incelenmiştir. Katılımcıları iki öğretmen ile yedinci sınıf öğrencileri olan bu çalışmada, öğretmenlerin kavramsal bilgiye yaptıkları vurgular incelenmiş, derslerinde kavramsal vurgusu daha açık olan öğretmenin öğrencilerinin sınavda daha iyi performans gösterdikleri ve alışılmadık bağlamlarda esnek akıl yürütme sergileyebildikleri sonucuna varılmıştır. Öğretmeni kavramsal bağlantılar olmadan daha yoğun bir şekilde prosedürel öğretime odaklanan öğrencilerin muhakeme konusunda daha az esnek oldukları ve sınıfta öğretilen bazı prosedürleri uygulayamadıkları görülmüştür. Ayrıca; “öğretmenler, öğrencileri cebirsel işlemleri kendi iyilikleri için yerine getirmeye değil, problemleri çözmek ve durumları temsil etmek için bir araç olarak kullanmaya hazırlamalıdır. Kavramsal anlayış olmadan prosedürler neredeyse hiçbir şey ifade etmez. Bağlantılar, matematiği anlamlı, akılda kalıcı ve güçlü kılar.” çıkarımlarında da bulunulmuştur.

Yine kavramsal ve işlemsel bilgi göz önünde bulundurularak verilecek eğitimin cebir performansına etkisinin incelendiği Mohammed (2016)'daki çalışmasında, bu iki

bilgi türünün birlikte kullanıldığı eğitim ortamlarının öğrencilere temsil biçimleri arasında esnek dönüşümler yapmalarını sağladığı ve öğrencilerin denklemleri modelleme ve çıkarım yapma becerilerini geliştirdiği gözlenmiştir.

Fyfe vd. (2020) yaptıkları çalışmada ise üniversite öğrencilerinin eşitlik anlayışı ve cebir derslerindeki başarıları arasındaki ilişki incelenmiştir. Elde edilen verilere göre, çoğu öğrenci kavramsal bilgiye sahip olsa da bir kısmı işlemsel bilgi sunmuştur. Buda yetişkin öğrencilerin bile eşitlik anlayışının çocuklarınkine benzer olduğunu göstermektedir. Daha da önemlisi eşittir işaret bilgisi ile cebir performanslarının ilişkili olmasıdır. Eşittir işaretinin ilişkisel bir yorumunu sağlayan öğrenciler, cebir problemlerinde en başarılı olan öğrencilerken ve yalnızca eşittir işaretinin işlemsel bir yorumunu sağlayan öğrenciler en az başarılı olmuşlardır. Bu sonuçlar, eşittir işaretinin yanlış yorumlanmasının ilkokulun çok ötesinde devam edebileceğini ve üniversite öğrencileri arasında geniş matematiksel akıl yürütmelerin kritik bir göstergesi olabileceğini göstermektedir.

Öğrencilerin eşitlik kavramını doğru bir şekilde anlamalarını sağlamak matematik öğretiminde temel bir sorundur. Eşitlik kavramının yanlış anlaşılmasının değiştirip değiştirilemeyeceğini inceleyen Fischer vd. (2019) çalışmalarında, birinci sınıflar üzerinde bir deney yürütmüşler ve bu deneysel çalışmanın sonuçlarına göre kavramsal öğretim yapan grubun işlemsel öğretim gören gruba göre daha iyi performans gösterdiklerini bulmuşlardır. Buradan hareketle çocuklarda doğru eşitlik kavramı gelişiminin doğru eğitimle sağlanabileceği söylenebilir.

Fyfe ve Brown (2017) meta analiz çalışmasında, eşitlik problemlerinde öğrencilere verilecek geri bildirim kavramsal ve prosedürel anlayışlarına etkisini incelemiştir. Bu çalışmaya göre geribildirim, düşük bilgiye sahip öğrenciler için olumlu etkiye sahip olduğu ancak yüksek bilgiye sahip öğrenciler için olumsuz etkiye sahip olduğu görülmüş ve bu etkilerin kavramsal bilgiden daha çok işlemsel bilgiyi etkilediği belirlenmiştir. Bulgular kavramsal bir öğretim için düşünme, muhakeme modelleri, öğrenen özellikleri, öğretim materyalleri ve bunlar arasındaki dinamik etkileşimin gerekliliğini vurgulamaktadır.

Matematiksel eşitlik performansını etkilediği düşünülen bir diğer konuda meta biliş olmuştur. İlkokul öğrencilerinin matematiksel eşitlik problemleri üzerindeki

performanslarını doğru şekilde izleme yetenekleri ve ne zaman yardım isteyeceklerinin farkındalıklarının incelendiği Nelson ve Fyfe (2019)'daki çalışmalarında; çocukların cevapları yanlış olsa da kendilerinden son derece emin oldukları ve genelde yardım istememe eğiliminde oldukları görülmüştür. Elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin matematiksel eşitlik kavramının öğreniminde üst bilişsel zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Ertekin (2017) çalışmasında, eşitlik ve değişken kavramlarının 8. Sınıf öğrencilerinin denklem çözme performanslarını nasıl tahmin ettiğine odaklanmış ve elde edilen bulgulara göre eşitlik ve değişken kavramları ile denklem çözme performansları arasında pozitif anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Ayrıca eşittir işaretini ilişkisel bir sembol olarak anlamının cebirsel denklem çözmeyi öğrenmede önemli rol oynadığı belirtilmiştir.

#### **2.4.2 Kanıt Şemaları Kavramına İlişkin Bazı Araştırmalar**

Bu çalışmanın diğer bir kavramsal çerçevesini oluşturan Harel ve Sowder (1998) makalesinde lise ve üniversite öğrencilerinin ispat yaparken kullandıkları bilişsel şemaları ortaya çıkarmayı amaçlamış ve bunun sonucunda kanıt şemaları teorisi ortaya konulmuştur. Daha sonrasında konuya ilişkin birçok çalışma yapılmıştır. 1998 ve 2019 tarihleri arasında yapılan kanıt şemaları konulu aşağıdaki 28 araştırma incelendiğinde sekiz tanesinin kanıt şemalarını etkileyen faktörler üzerine yapıldığını, diğerlerinin ise belli bir matematik alanında öğrenci veya öğretmenlerin kullandıkları kanıt şemalarının belirlenmesi üzerine olduğu görülmüştür.

Kanıt şemalarını etkileyen faktörlerinin belirlenmesine ilişkin yapılan çalışmalara bakıldığında öğretmen davranışları (Soucy vd., 2004; Martin vd., 2005), bilişsel stilleri ve cinsiyet (Ören, 2007; Şengül ve Güner, 2014), matematiksel tanım anlayışı (Plaxco, 2011), öğrenme stilleri (Pektaş ve Bilgici, 2019), öğrenme stratejileri (Housman ve Porter, 2003), matematiksel bilginin aktarılabilirliği (Miyakawa, 2002) gibi konuların incelendiği görülmektedir.

Geometri dersinde öğretmen davranışlarının öğrencinin kullandığı kanıt şemalarına etkisinin incelendiği araştırmaya göre öğretmen desteğiyle öğrencilerin üst düzey kanıt şemalardan aksiyomatik kanıt şemasına kolaylıkla çıkabildiği görülmektedir (Soucy vd., 2004). Ancak öğrencilerin formal ispatlara adapte olacak

şekilde yapılan öğretimin sonucunda bile öğrencilerin birçok deneme yapmadan genel durumların doğruluğundan emin olamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenciler formal ispat yöntemlerini kullanabilse de ikna olmak için deneme yanılmayı da sıkça kullandıkları görülmektedir (Martin vd., 2005).

Cinsiyet farkı, kanıt ve kanıt şemaları arasındaki ilişkinin incelendiği araştırmalarda deneysel kanıt şemalarını kız öğrencilerin erkek öğrencilere göre önemli ölçüde fazla kullandığı görülmüş (Ören, 2007), bunun sebebi olarak Şengül ve Güner (2014) araştırmasında; kız öğrencilerin kanıta olan güvenlerinin düşük olması ve erkek öğrencilerin bazı soruları uğraşmak istemedikleri için boş bıraktıklarından dolayı bu sonuçların elde edilmiş olabileceği görüşüne varılmıştır.

Öğrencilerin bilişsel stillerinin kanıt şemalarına etkisinin incelendiği araştırmaya göre; alan bağımlı öğrenciler dışsal kaynaklı kanıt şemalarını, alan bağımsız öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullanmaktadır. Ayrıca alan bağımsız öğrenciler, analitik kanıt şemalarını alan bağımlı öğrencilere göre daha fazla kullanmaktadır. Ayrıca kanıt şemalarında bilişsel stil ve cinsiyete göre ortaya çıkan farklılıkların kanıt kavramı öğretilirken birer değişken olarak alınması öneri olarak sunulmuştur (Ören, 2007). Benzer bir konu olan öğrenme stilleri ile kanıt şemaları arasındaki ilişkinin incelendiği Pektaş ve Bilgici'nin (2019)'daki çalışmasına göre kullanılan kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre farklılaşmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Housman ve Porter'in (2003) çalışmasında ise ortalama üzeri akademik başarıya sahip matematik öğrencilerinin bir kavramı öğrenme stratejileri ve kullandıkları kanıt şemaları arasındaki ilişki incelemiş ve araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin ispat yaparken birden fazla şema kullandığı, dış kaynaklı şemaları kullanan öğrencilerin kavramları formalize etmede zorlandığı ve tümdengelimli kanıtlamalar yapan az sayıda öğrencinin kavram oluşturma stratejilerini daha verimli kullandığı görülmüştür.

Öğrencilerin kullandığı kanıt şemalarını etkilediği düşünülen diğer bir faktör olan matematiksel tanım anlayışı, matematiksel kavram imajı ve matematiksel bilgiyi adapte edebilme yeteneğinin kanıt şemalarını geliştirebildiği yada engelleyebildiği görülmüştür (Plaxco 2011). Miyakawa (2002) öğrencilerin sahip olduğu bilginin ispat sürecini nasıl etkilediğini incelemiş ve bu çalışmaya göre matematiksel kanıt oluşturma zorluğu cebirsel yeterlilik ve kanıt kavramıyla ilgili olduğu kadar matematiksel bilgidir

de kaynaklanmaktadır. Matematiksel bilgisini farklı durumlara aktarabilen öğrencilerin daha başarılı kanıtlar ortaya koydukları sonucuna ulaşılmıştır.

Liu ve Manouchehri (2013) çalışmalarında, ortaokul öğrencilerinin farklı önermeler için yaptıkları ispatları incelemiştir. Öğrencilerin tek tip şema kullanmak yerine önermenin bağlamına göre farklı şemalar kullandığı sonucuna varmışlardır. Farklı argüman türleriyle karşılaşan öğrencilerin analitik şemaları seçme eğiliminde olduklarını görmüşlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin farklı matematiksel bağlamlarla öğretim süreci içerisinde karşılaşmaları onların kanıt şemalarını analitik basamaklara doğru yönlendirebilir.

Öğrencilerin kullandıkları problem çözme yolları ile kullandıkları kanıt şemaları arasındaki ilişkiyi inceleyen Stylinou vd. (2006) lisans öğrencileriyle yaptığı çalışmada; çoğu öğrencinin deneysel kanıt şemalarını kullandığını ve farklı kanıt şeması kullanan öğrencilerin farklı problem çözme yolları kullandığı sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin deneysel kanıt şeması özelliği gösteren öğrenciler okuma yaptıktan sonra tanım sunmuş ve sembol manipülasyonu yaparak sonuca ulaşmış, deneysel kanıt şeması özelliği gösteren öğrenciler ise sayısal örnekler ile keşif yoluna başvurduktan sonra tümevarımsal varsayımlarda bulunmuşlardır. Analitik kanıt şemalarını kullanan öğrenciler ise okuma yaptıktan sonra tanımları sunmuşlar ve analize başlamışlardır. Analitik kanıt şeması özellikleri gösteren öğrenciler birbirini izleyen etkinlikler için bir amaç belirlemişler, tanımlarını sembolleştirmişler, tanımlarını araştırarak problem durumuna fazladan anlayışlar kazandırmışlar ve yeni bilgiyi başlangıçtaki problemle ilişkilendirmişlerdir. Bunların sonucunda ise tümdengelsel ispatı yapılandırmayı başarmışlardır.

Yukarıdaki araştırmalar incelendiğinde kanıt şemalarını etkileyen birçok faktör olduğu görülmektedir. Ancak çok az araştırma bu faktörler üzerinde çalışmış ve bu alanda daha fazla araştırmaya ihtiyaç olduğu düşünülmektedir.

İskenderoğlu (2003) çalışmasında; 5, 6, 7, 8 ve 9. Sınıf düzeylerinde öğrencilerin karşılaştıkları problemlerin sonuçlarından nasıl emin olduklarını belirlemeye çalışmıştır. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin cevaplarından emin olmak için otoriter ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları, analitik şemaların ise çok az kullanıldığı görülmüştür. Sınıf seviyelerine göre kanıt şemalarının farklılık göstermediği

belirtilmiştir. Öğrencilerin gerekçelendirmelerinin ve kanıt şemalarının incelemesinin amaçlandığı Flores' in (2006) çalışması da yine öğrencilerin kanıt şemalarının belirlenmesi üzerine yapılmış ve Harel ve Sowder (1998) destekleyen bulgular elde edilmiştir. Çalışmaya, 5.sınıftan 12.sınıfa kadar farklı sayılarda toplam 70 öğrenci dâhil olmuştur. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin farklı gerekçelendirme şemalarına örnekler sağladıkları belirlenmiştir. Birçok öğrenci, bir durumda otoriteyi kullanırken başka birçok durumda deneysel ya da analitik şemayı kullanmıştır. Bazı öğrenciler ise aynı örnek için farklı şemalar kullanmışlardır. Çalışmada, birçok öğrenci otorite olarak öğretmeni daha sonra ise ders kitaplarını göstermişlerdir. Çalışmada, daha çok alt sınıflarda öğrenim gören birçok öğrenci sembolik gerekçelendirmeler sunmuştur. Bu öğrenciler durumların niceliksel ilişkileri üzerine odaklanmaktan çok verilen sayılarla hesaplama işlemleri yoluna gitmişlerdir. Bunun yanında öğrenciler açıklama olarak işlemsel adımlar vermişlerdir. Bunu yaparken ise sembolik manipülasyonlar hakkında ne yaptıklarını açıkça bilmelerine rağmen yaptıklarının anlamları hakkında açıklama yapmamışlardır.

CadwalladerOlsker (2007) çalışmasında, öğrencilerin kanıt şemaları dönem başında ve dönem sonunda karşılaştırılmıştır ve bir dönem boyunca kanıt şemalarının nasıl geliştiği ve kanıt şemaları ve ispat yazma becerileri arasındaki ilişki incelenmiştir. Öğrencilerin, algısal argümanlardan ziyade aksiyomatik argümanları ikna edici buldukları görülmüştür. İlk uygulamada hiçbir öğrenci tümevarımsal ve sembolik argümanları ikna edici bulamazken, ikinci uygulamada yalnızca bir öğrenci tümevarımsal argümanı ikna edici bulmuştur. Bunun dışında öğrencilerin büyük çoğunluğu analitik dönüşümsel ve aksiyomatik argümanları ikna edici bulmuşlardır. Haverhals (2011)'de öğrencilerin eğitim donemi boyunca ispatı öğrenme ve kanıt şemalarının değişim sürecini incelemiş; öğrenciler için ortak bir şemanın olmadığı, süreç içerisinde öğrencilerin çok az gelişim gösterdiği, çoğu öğrencinin analitik şemaları kullandığı ve bunun sebebinin de daha önce aldığı dersler olabileceği belirtilmiştir.

Öğrencilerin kanıt şemaları ile ilgili görüşlerinin incelendiği Saru vd. (2007) çalışmalarında elde ettikleri bulgulara göre, öğrencilerin kanıt geliştirmedeki başarısı analiz dersindeki başarıları ile paraleldir. Sadece bir öğrenci dönüşümsel şemaya uygun yaklaşım gösterse de diğer öğrenciler kanıt süreçlerinde deneysel ve otoriter şemalar

kullanmışlardır. Koichu (2009)'daki çalışmasında; öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin ispat ve ispatlama dersi bağlamında lise öğrencileriyle yaptıkları görev temelli görüşmeler sonucunda ispat yapma yollarının ve kanıt şemalarının ortaya çıkarılması amaçlamıştır. Çalışma sonuçlarına göre bir katılımcı, ispatı hakkında tam anlamıyla ikna olduğunu ve ispatında matematiksel semboller kullandığında sınıf arkadaşlarının da ikna olacağını ileri sürmüştür. İki öğretmen adayına göre katılımcının başlangıçta emin olma sebebi, ifadeyi matematiksel bir aksiyom gibi görmesinden dolayı olmuştur. Bu durum, onun analitik aksiyomatik kanıt şemasını kullandığının göstergesi olduğu belirtilmiştir. Bunun yanı sıra katılımcının ispatın doğruluğundan emin olmasına ilişkin duygusunun kaynağının öğretmenin okuldaki anlatımlarından kaynaklandığı ve otoriter kanıt şemasını kullandığı belirtilmiştir. Katılımcı, ifadeyi ispatladığı zaman ifadesinin doğruluğuna matematiksel sembollerin gücünden dolayı ikna olduğunu söylemiştir. Bu durum onun sembolik kanıt şemasına sahip olduğuna işaret ettiği belirtilmiştir. Bazı katılımcıların kanıt şeması kavramını anlamakta zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. İskenderoğlu vd., (2010) çalışmalarında; öğretmen adaylarının matematik problemlerine yönelik çözümlerini nasıl gerekçelendirdiklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma sonuçlarına göre öğretmen adaylarının problemleri farklı yollarla çözdüğü ve genelde deneysel kanıt şemalarını kullandığı görülmüştür. Weber (2010) çalışmasında; öğrencilerin hangi tip argümanları ikna edici bulduklarının, hangi tip argümanları matematiksel ispat olarak gördüklerinin belirlenmesi ve ispatlanan bir iddianın doğru olup olmadığına ilişkin şüpheleri olup olmadığı, olduysa nedenlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma bir üniversitede birinci ve ikinci sınıfta öğrenim gören 28 matematik lisans öğrencisi üzerinde yürütülmüştür. Çalışmanın sonuçlarına göre, katılımcıların çoğu deneysel argümanı ikna edici bulmamıştır ve ispatın standartlarını karşılamadığını belirtmiştir. Çalışmada lisans öğrencilerinin matematiksel argümanları anlamalarının; onların deneysel argümanlarının sınırlıklarının farkında olmasına değil, okudukları argümanları işleme yollarını geliştirmelerine bağlı olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin neredeyse tamamı deneysel argümanı ispat sayılmaması gereken ve ikna edici olmayan bir argüman olarak görmüşlerdir. Çalışmada, öğrencilerin tümdengelimli argümanlar hakkındaki yargılarının karışık olduğu belirtilmiştir. Bununla beraber, katılımcılar tümdengelimli argümanlarda hata tespitinde problemler yaşamışlardır ve hatalı tümdengelimli argümanları ikna edici geçerli ispatlar olarak kabul etme eğiliminde olmuşlardır. Geogebra programının ispat şeması gelişimine etkisinin incelendiği Ceylan (2012) çalışmasına göre geogebra programının

kullanımı öğrencilerin varsayımlar yapmalarına yardımcı olduğu ve kanıt yapmalarına teşvik ettiği görülürken, deneysel şemalardan tümdengelimli şemalara geçişe yardımcı olduğu belirtilmiştir. Yine öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarının belirlenmeye çalışıldığı Liu ve Manouchehri (2013) çalışmasında, öğrencilerin geometri haricindeki alanlarda analitik yöntemler kullanmaya gerek duymadıkları, farklı alanlarda ispat yaparken diğer şemalara güvendikleri görülmesine rağmen analitik şemaları deneysel şemalara göre daha ikna edici bulmuşlardır. Birçok çalışmanın gösterdiği gibi Oflaz vd. (2016) çalışmasında da öğrencilerin genel olarak dışsal kanıt şemaları kullandığı, kanıt yapmanın gerekli olduğuna inanılmasına rağmen yeterli seviyede kanıt yapamadıkları bulgusuna ulaşılmıştır.

Farklı bölümlerde okuyan öğrenciler arasında kullanılan kanıt şemalarının incelendiği Karakuş vd. (2017) çalışması, ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğrencilerin kanıt yapmada daha başarılı olduklarını göstermektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının birçoğu kanıt için formal yollar kullanırken, matematik bölümü öğrencilerinin yalnızca yüzde 30'u bu seviyede kanıtlama yapabilmiştir. Birçok öğrencinin kanıt yaparken dışsal ve deneysel şemaları kullandığını gösteren bir diğer çalışmada Çontay ve Paksu (2017) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, öğrencilerin birden fazla kanıt şemasını birlikte kullanabildiği ve bunlardan birinin genelde dışsal kaynaklı kanıt şeması olduğu görülmüştür. Dönüşümsel kanıt şeması kullanan adaylar ise genelde bu şemayı tek başına kullanmıştır. Öğretmen adaylarının; kanıtın doğası hakkındaki fikirlerinin dışsal kaynaklı olduğu, dışsal kaynaklı fikirlerinin büyük çoğunluğunun dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özellikleri gösterdiği belirlenmiştir. Görev temelli görüşmeler boyunca elde edilen verilere göre; öğretmen adaylarının kanıtları doğru yapamamalarının kaynağının, onların dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını kullanıyor olmalarından kaynaklanabileceği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel fikirleri ile onların kanıtı yapılandırırken dönüşüm yapmalarına engel olan fikirlerinin ilişkili olabileceği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında bilgi eksikliklerinin kanıt yapılandırmalarını yanlış biçimde oluşturmalarına sebep olabileceği belirlenmiştir. Sayılabilirlik kavramına ilişkin kanıt şemalarının incelendiği Pala ve Narlı (2018) çalışmalarında benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun deneysel kanıt şemalarına sahip olduğu, en az ise analitik kanıt şemaları özelliklerini gösterdikleri belirlenmiştir.

Ayrıca, bireylerin kavramsal anlayışları ile onların kanıtlarında önemli bir boyutu oluşturan “ikna” bileşeni arasında önemli bir ilişkinin olduğu da belirlenmiştir. Bu araştırmaya göre, öğretmen adaylarının formal kanıta ulaşmalarını engellediği düşünülen genel faktörler şöyle sıralanabilir: Kavram yanlışları, Matematiksel dil ve notasyonların yerinde kullanılamaması, İspatlamanın bir doğrulama işlemi olarak görülmesi ve örneklerin kanıta eşdeğer tutulması, Sezgisel kabullerin ve informal yaklaşımların birer delil olarak kabul edilmesidir. Eldekci (2018) yaptığı çalışmada; öğretmen adaylarının ortaokul matematik eğitimi kapsamında rasyonel sayıların tanımlanması ve rasyonel sayılarla yapılan işlemlerin gerektirdiği alan eğitimine ait bilgisi üzerine hangi türde kanıt şemalarını ortaya koyduklarını belirlemeye çalışmış; öğretmen adaylarının ortaya koydukları kanıt şemaları incelendiğinde analitik kanıt şemalarının ağırlıkta olduğu görülmekle birlikte sembolik, algısal ya da alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını da kullandıkları gözlemlenmiştir. Zeybek ve Üstün (2019) araştırmasında; 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki kanıt seviyelerinin incelenmesi amaçlanmış, çalışmanın bulguları ise öğrencilerin verilen doğru matematiksel ifadeleri kanıtlamak için argüman geliştirmekte zorlandıklarını göstermiştir. Sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğunu kanıtlamak için argüman geliştirebilen öğrencilerin argümanları incelendiğinde; bu argümanların çoğunlukla deneysel kanıt şemasında olduğu bulunmuştur. Bulgulara göre; neredeyse hiçbir öğrencinin, kanıtın genellenebilir olma özelliği hakkında bir fikir öne sürmediği gözlemlenmiştir. Her ne kadar öğrenciler doğru bir ifadeyi kanıtlamakta zorlansalar da karşıt örnek geliştirmede daha iyi bir performans göstermişlerdir.

Çontay ve Paksu'nun (2019) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kanıt şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını araştırmayı amaçladığı çalışmalarında; öğretmen adaylarının en çok dışsal, daha sonra analitik ve en az deneysel kanıt şemalarını ortaya koyan tepkiler verdikleri belirlenmiştir. Çalışmada; daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının, daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayına göre analitik kanıt şemasını ortaya koyan tepkileri daha sık gösterdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının dışsal kaynaklı fikirlerinin, çoğunlukla onların dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını ortaya çıkaran özellikleri ile ilişkili olduğu belirlenmiştir.

Yapılan alışmalar genel olarak değerlendirildiğinde, büyük çoğunluğunda sadece belirli konularda ve sınıf düzeylerinde kullanılan kanıt şemaları araştırılmıştır. Bu alışmalar sonucunda, genel olarak öğrencilerin ispat yaparken otoriter ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları saptanmıştır. Analitik kanıt şemalarının kullanıldığı sonucuna ulaşılan araştırmalarda, seçilen konunun öğrencinin kavrama düzeyine uygun ve sınıf seviyesi gereği uzmanlaştığı konular olduğu görülmektedir. Altı araştırmada diğerlerinden farklı olarak, kullanılan kanıt şemalarını etkileyen faktörler üzerinde durulmuş, iki araştırmada ise öğrencide bulunan ispat kavramının gelişimi incelenmiştir.

Yukarıda verilen çalışmalara bakıldığında; belirli bir konuda kullanılan kanıt şemaları üzerine yoğunlaşıldığı ve buna ilişkin yeterince veri toplandığı görülmektedir. Ancak kanıt şemalarını etkileyen faktörler ve eğitim ortamlarında kullanımlarına ilişkin yeteri kadar araştırma yapılmadığı anlaşılmaktadır. Bu yüzden kanıt şemalarına ilişkin yapılacak araştırmaların bu durumu göz önüne alarak yapılmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

## BÖLÜM 3

### 3 YÖNTEM

Üçüncü bölümde, çalışmada kullanılan araştırma yöntemi ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

#### 3.1 Araştırmanın Modeli

Öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili mevcut matematiksel bilgilerini sınıflandırarak, matematiksel bilginin türünün kullandıkları kanıt şemalarına etkisinin inceleneceği bu çalışmada nitel bir araştırma modeli olan durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışmaları; bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlanır (Büyüköztürk vd.; 2008). Belirlenen duruma ilişkin; ortam, birey, olaylar, süreç, vb. etkenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır. Durum çalışmaları; nitel veya nicel olabilir ve genelde birden fazla veri toplama yöntemi işe koşulmaktadır. Verilerin raporlaştırılmasında kavramlar ve bunlar arasındaki ilişkileri ortaya konulur ve yorumlanır. Araştırmaya konu olan durumlar birbirinden farklı olduğu için durum çalışmalarında sonuçların genellenmesi söz konusu değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu çalışmada da birden fazla nitel veri toplama tekniğinin birlikte kullanıldığı, çalışmaya konu olan matematiksel bilginin türü ve öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları durumlarının araştırılmaya katılan çalışma grubu içerisinde inceleneceğinden durum çalışması model olarak seçilmiştir.

#### 3.2 Araştırmanın Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma gurubunu; 2020-2021 öğretim yılında Afyonkarahisar merkez ilçesinde bulunan iki ortaokulun sekizinci sınıfında öğretim gören 36 öğrenci arasından kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme soruların analizinden elde edilen verilere göre seçilen, denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili kavramsal bilgiye sahip üç ve işlemsel bilgiye sahip üç olmak üzere toplam altı öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın katılımcıları; nitel araştırma yöntemlerinde sıklıkla kullanılan amaçlı örneklem yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örnekleme ve ölçüt örnekleme yöntemleriyle seçilmiştir.

Birinci aşamada; kolay ulaşılabilir durum örnekleme kullanılarak birisi araştırmacının görev yaptığı diğeri yakın çevresinde bulunmak üzere iki okul belirlenmiş ve bu okullardan belirlenen birer sınıfa kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme soruları uygulanmıştır. Okulların kendi içerisinde sınıf seçilirken öğretmenin kendi sınıfı ve diğer okuldan kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme sorularının uygulanacağı gün müsait olan sınıf seçilmiştir. Kolay ulaşılabilir durum örnekleme, araştırmaya hız ve pratiklik kazandırır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Seçilen okullar il genelinde okullar arasında yapılan başarı testlerine göre orta sıralarda yer almaktadır.

Araştırmacının görev yaptığı okul A araştırma yapılan diğeri okul ise B koduyla kodlanmıştır. Her bir öğrenci için okul kodunun arkasından okul numarası yazılarak öğrenci kodları oluşturulmuştur.

İkinci aşamada, kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme soruları analiz edilerek öğrencilerin bilgileri kavramsal ve işlemsel olmak üzere belirlenmiş ardından kavramsal ve işlemsel bilgiye sahip üçer öğrenci araştırmanın nihai katılımcıları olarak belirlenmiştir. İkinci aşamada, kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme testinin sonucuna göre nihai grup belirlenirken ölçüt örnekleme yapıldığı söylenebilir. Ölçüt örneklemede temel anlayış önceden belirlenen ölçütlere göre seçim yapılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Burada kullanılan ölçüt kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme sorularının analizinden elde edilen verilerdir.

Araştırmacı nitel araştırma yöntemlerinin gereği olarak tamamen gözlemci konumunda değildir. Nitel yöntemde araştırmacı, nicelden farklı bir role sahiptir. Nitel araştırmada araştırmacı, nicel araştırmada olduğu gibi sadece incelediği konuya ilişkin çeşitli yöntemlerle bilgi toplayan, veriye dönüştüren, analizlerini yapıp raporlaştıran kişi değildir. Burada araştırmacı araştırma sürecinde alanda, araştırmaya katılan kişilerle doğrudan görüşmeler yapıp gerektiğinde bu kişilerle benzer deneyimler yaşayan, bu deneyimleri ve onlar sayesinde kazandığı bakış açısını verilerin çözümlenmesinde kullanan kişi konumundadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

### **3.3 Veri Toplama Araç ve Teknikleri**

Bu araştırmada veriler, nitel veri toplama tekniklerinden klinik görüşmeler ve yazılı sorulara verilen açık uçlu cevaplar kullanılarak toplanmıştır. Hem bilgi türlerinin ölçülebilmesi hem de kanıt şemalarının belirlenebilmesi için standart ölçüm

yöntemlerinin bulunmaması nitel veri toplama teknikleri ile araştırmacının yorumuna bağlı yöntemleri gerekli kılmıştır.

Öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip olduğu bilginin türünü belirlemek için araştırmacı tarafından ilgili literatür taranarak; “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Belirleme Soruları (KİBS)” oluşturulmuştur. KİBS altı soru ve üç maddeden oluşmaktadır.

Öğrencinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin kullandıkları kanıt şemalarını belirlemek için ise yarı yapılandırılmış mülakatlar yoluyla veriler elde edilmiştir. Mülakatlar esnasında, “Kanıt şemaları Belirleme Mülakat Soruları (KşBS)” kullanılmıştır. Kanıt şemaları Belirleme Mülakat Soruları (KşBS), yazılı denklem çözümleri gerektiren üç soru ile sözel olarak öğrenciye yöneltilecek dört sorudan oluşmaktadır. Ayrıca mülakatlar esnasında görüşmenin seyrine göre araştırmacı öğrencilere çeşitli sorular yöneltmiştir.

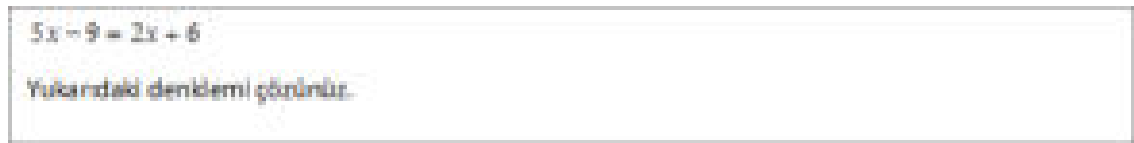
Her bir sorunun analizi ve kodlama örnekleri Verilerin Toplanması ve Analizi bölümünde açıklanmıştır.

### **3.4 Verilerin Toplanması ve Analizi**

Yapılan bu araştırmanın, öğrencilerin sahip oldukları matematiksel bilginin türü ve kullandıkları kanıt şemaları olmak üzere iki odak noktası olduğu söylenebilir. Odak noktalarından birini oluşturan matematiksel bilgi türüne ait veriler 8.sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgilerini belirlemeyi amaçlayan sorulara verdikleri cevaplardan oluşmaktadır. Sorular; Knuth (2006), Knuth (2011), Alibali vd. (2007) ve Yaman (2003) çalışmalarından uyarlanmış ve ayrıca bir madde araştırmacı ve bir uzman tarafından eklenmiştir. Değerlendirme; öğrencilerin denklemde eşitliğin kullanımına ilişkin işlemsel bilgiyi ölçmek için tasarlanmış bir soru ile kavramsal bilgilerini belirlemek için tasarlanmış beş sorudan oluşmaktadır. Uygulama sonrasında, güvenilir sonuçlar vermediği gerekçesiyle bir soru araştırmacı ve bir uzman tarafından değerlendirmeden çıkarılmıştır. Hazırlanan sorular iki farklı okuldaki iki sınıftan 36 öğrenciye uygulanmış ve yazılı olarak cevaplar alınmıştır. Elde edilen veriler analiz edilerek öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları matematiksel bilginin türü belirlenmeye çalışılmıştır. KİBS’ten elde edilen veriler bir

uzmanla birlikte analiz edilerek öğrencilerin matematiksel eşitlik bilgisinin türü belirlenmiştir.

İşlemsel bilginin ölçülmesi kavramsal bilginin ölçülmesine göre daha kolaydır. Daha önce öğrenilen algoritmaların kullanılmasını gerektiren veya bunların küçük uyarlamalarını içeren problemler ile öğrenciler karşılaştırılır. Öğrencinin problemi çözmesi istenerek sonucun ya da işlemin doğruluğuna bakılır. Bazı durumlarda işlemsel bilginin ezbere kullanıldığını görmek adına öğrencinin problem çözme hızına da bakılabilir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Bu bağlamda öğrencilerin birinci soruyu (Şekil 3.1) çözmeleri istenmiş ve cevapların ve işlemlerin doğruluğuna bakılarak öğrencinin denklemlerde eşitlik kavramının kullanımına ilişkin işlemsel bilgiye sahip olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır. İlgili soru, yedi ve sekizinci sınıf matematik müfredatında bulunan “Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (Matematik Dersi Öğretim Programı [MDÖP], 2018).” kazanımına uygun olarak hazırlanmıştır. Sekizinci sınıf kazanımına ilişkin açıklamada rasyonel katsayıların denklemlerde kullanılabilmesi belirtilmesine rağmen bu soruda denklem çözme performansını belirlemekten ziyade denklem çözümüne ilişkin işlemsel bilginin belirlenmesi amaçlandığından rasyonel katsayılar kullanılmamıştır. Soru bir iki uzman tarafından incelenmiş ve geçerli olarak görülmüştür. KİBS 1. soruya verilen cevaplar; işlemsel ve diğer olarak kodlanmıştır. Öğrenciler soruya doğru işlem ve doğru cevap verdikleri durumlarda işlemsel, yanlış işlem ve yanlış cevap ve boş bırakılması durumunda ise cevaplar diğer koduna dahil edilmiştir. Kodlama İskenderoğlu, (2016) çalışmasından alınan Tablo 3.1’e uygundur.



$5x - 9 = 2x + 6$   
Yukarıdaki denklemi çözünüz.

Şekil 3.1 KİBS 1. Soru

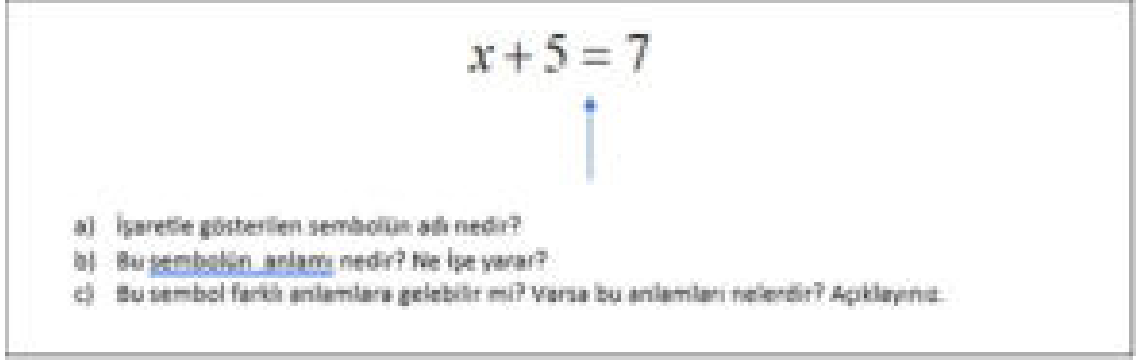
**Tablo 3.1** İşlemsel Bilginin Ölçülmesi

İşlem Soruları	Değerlendirme Yöntemleri
Aşağıdaki işlemleri yapınız.	Doğru işlem süreç-Doğru sonuç
$\frac{7}{11} + \frac{7}{8} = ?$	Doğru işlem süreç-Yanlış sonuç
$\frac{3}{4} * \frac{2}{5} = ?$	Yanlış işlem süreç-Yanlış sonuç

*Not: (İskenderoğlu, 2016)*

Soru 2 (Şekil 3.2), Knuth (2006) ve Alibali vd. (2007) tarafından hazırlanan maddeden uyarlanmıştır. Ayrıca bu soru, Crooks ve Alibali (2014) çalışmasında belirtilen matematiksel eşitlik kavramsal bilgisinin ölçülmesi kriterlerinden olan “Eşittir İşaretinin Tanımı” maddesine uygundur. Bu görev türünde katılımcılardan kavramın açık anlamı ya da tanımları beklenir. Bu sorunun a maddesi öğrenci eşittir işaretinin sembolünün adlandırılması, b maddesi sembolün öğrencideki anlamına ilişkin bir ifade sağlanması ve c maddesi mümkünse alternatif bir anlam belirtmesini gerektirmektedir. Bu sorunun a maddesinin mantığı, sembolün adını soru içerisinde kullanmamak iken; c maddesinin amacı, öğrencilerin kavrama ilişkin farklı anlamları ortaya çıkarmalarını sağlamaktır. Alibali vd. (2007) çalışmalarında sorunun yeterli geçerliliğe sahip olduğunu belirtmişlerdir.

KİBS 2. soruya verilen cevaplar; kavramsal, işlemsel ve diğer olarak kodlanmıştır. Öğrenci eşittir işaretini “ *tarafların eşitliği* ” anlamına gelecek şekilde ifade ederse kavramsal, “*cevap*” anlamına geldiğini ifade ederse işlemsel olarak kodlanmıştır. Her iki anlama gelecek şekilde yapılan farklı iki tanım kavramsal olarak kodlanmıştır. Özel bir anlama gelmeyecek şekilde verilen yanıtlar diğer kategorisine dahil edilmiştir. Her bir kodlama için çeşitli örnekler Tablo 3.1’de sunulmuştur.



Şekil 3.2 KİBS 2. soru

Tablo 3.2 KİBS 2. soru kodlama örnekleri

Kategoriler	Örnekler
Kavramsal	1. Eşitlik belirtir.
	2. Eşittirin bir tarafı ile diğer tarafının aynı olduğunu gösterir.
İşlemsel	1. Herhangi bir işlemin sonucunu karşısına yazmak için kullanılır.
	2. Sorunun cevabını belirtmek için kullanılır.
	3. Yapılan işlemin sonucundan önce gelen semboldür.
Diğer	1. Cevap yok.
	2. Anlamsız cevaplar.

KİBS 3. soru (Şekil 3.3), Yaman'ın (2003)'deki çalışmasında kullanılan bir sorudan uyarlanarak ölçüm aracına eklenmiştir. Ancak ölçüm aracının uygulanmasından sonra geçerli sonuçlar vermediği gerekçesiyle uzman görüşü alınarak değerlendirmede kullanılmamıştır. KİBS' ten elde edilen veriler incelendiğinde ölçüm aracının diğer sorularında öğrencilerin cevaplarının farklılaştığı görülürken üçüncü soruda tüm öğrencilerin benzer cevaplar verdiği görülmüştür. Soru ölçülmek istenen özellikleri ayırt etmekte yetersiz kalmıştır.



Şekil 3.3 KİBS 3. soru

Alibali vd. (2007) çalışmasından uyarlanan KİBS soru dört ve soru beşte (Şekil 3.4 ve Şekil 3.5), öğrencilerden eşittir işaretinin miktarlar arasındaki ilişkiyi temsil ettiği fikrinden yola çıkarak ikinci denklemde yapılan işlem manipülasyonunun birinci denklemdeki eşitliği bozmadığı fikrine göre iki denklemin eş değer olduğunu fark etmeleri beklenmektedir. Ayrıca bu soru Croks ve Alibali (2014) çalışmasında belirtilen ve matematiksel eşitlik kavramsal bilgisinin ölçülmesi kriterlerinden olan “Eş Değer Denklemler” maddesine uygundur. Bu görev türünde; katılımcılar bir prosedürü yürürlüğe koyarlar veya bir sorunu çözerler. Bazı durumlarda, katılımcılar kullandıkları prosedürü de kanıtlar veya açıklar. Bu görevlerin doğası gereği, kavramsal olup olmadığı konusunda alanlardaki bazı anlaşmazlıklara rağmen, kavramsal bilgiyi ölçmek için en yaygın kullanılan görevler arasındadırlar. Bu görevler, bir katılımcının görevi tamamlamak için seçtiği prosedüre dayalı olarak bilginin çıkarılmasına dayanır. Ek olarak bu görevler katılımcıların aktif olarak problem çözmelerini veya açıklamalarını gerektirdiğinden, açık kavramsal bilginin ölçülmesine izin verir. Soruda denklem çözümü yapmak yerine eşitlik fikrini kullanmalarını sağlamak için denklem çözümü yapmadan soruya bir açıklama getirmeleri istenmiştir. Soruların uygulanması esnasında katılımcılara sözel olarak açıklama yapılmıştır.

KİBS dördüncü ve beşinci sorular için kavramsal, işlemsel ve diğer kodları oluşturulmuştur. Öğrenci cevaplarında; strateji belirtmediği, denklem çözümü yaparak birinci ve ikinci denklemdeki değişkenlerin karşılaştırıldığı ya da birinci veya ikinci denklemde elde edilen değişken değerinin diğer denklemde yerine konularak eşit olduğunu belirttiği cevaplar işlemsel, öğrencinin ikinci denklem üzerinde yapılan dönüşümün eş değerlik ilişkisini bozmadığını ifade ettiği cevaplar kavramsal olarak kodlanmıştır. Bunlar dışında kalan yanlış ya da boş bırakılan veya diğer iki kategoriye girmeyen cevaplar diğer koduna dahil edilmiştir.

$x - 5 = 20$  denkleminde  $x=25$  dir. Buna göre ;  
 $x - 5 + 40 = 20 + 40$  denkleminde  $x$  in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Şekil 3.4 KİBS 4. soru

$2n+15=31$	$2n+15-10=31-10$
Yukarıda verilen iki denklemde n değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebebinizi açıklayınız.	

Şekil 3.5 KİBS 5. soru

Soru 6 (Şekil 3.6) araştırmacı tarafından ankete eklenmiştir. Bu soruda Crooks ve Alibali (2014) çalışmalarında, belirtilen “Örnek Değerlendirmesi” maddesine uygun olarak hazırlanmıştır. Bu görev türü verilen örneklerin katılımcı tarafından değerlendirildiği görevlerdir. Çeşitli örneklerin mantıklı olup olmadığı değerlendirilebilir, olası denklem çiftlerinden eş değer olanlar seçilebilir ya da katılımcı eşittir işaretinin anlamları arasından en mantıklı olanı nedenleriyle beraber değerlendirmeye çalışabilir. Bu soruda öğrenciye hatalı denklem çözme prosedürü verilmiş, hatanın nerede olduğu ve sebebinin belirtilmesi istenmiştir. Öğrenciden denklemlerin eşitliği fikrine dayanarak denklemin iki tarafına yapılan farklı değerdeki işlemlerin eşitliği bozacağı fikrini kullanmaları beklenmiştir.

Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebinizi açıklayınız.

$2x-3=11$
$2x+3-3=11+3$
$2x=16$
$\frac{2x}{2}=\frac{16}{2}$
$x=8$

Şekil 3.6 KİBS 6. soru

KİBS 6. soru ise kavramsal, işlemsel ve diğer olarak kodlanmıştır. Öğrencinin; soruda verilen yanışı denge modeline uygun olarak açıkladığı cevaplar kavramsal koduna dahil edilirken, karşıya atma metodu kullanılan algoritmaya dayalı verilen cevaplar işlemsel koduna dahil edilmiştir. Bunlarında dışında kalan cevaplar ise diğer olarak kodlanmıştır.

KİBS kodlanması ve ilgili kazanımlar Tablo 3.3’de verilmiştir. Kodlamalar araştırmacı ve bir uzmanla birlikte ilgili kaynaklardan uyarlanarak oluşturulmuştur.

**Tablo 3.3** KİBS kodlama-alıntı ve kazanımları

Sorular	Yanıtlar	Kategorisi	Alıntı	Kazanım
$5x - 9 = 2x + 6$ Yukarıdaki denklemi çözünüz.	Prosedüre uygun denklem çözümü Sadece doğru cevap Uygun prosedüre rağmen işlem hatası	İşlemsel	Ngu vd. (2015)	Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (8. Sınıf).
	Yanlış prosedür veya sadece yanlış cevap	Diğer		
$x + 5 = 7$ a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir? b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar? c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.	Aynı-iki tarafın eşitliği vb.	Kavramsal	Atıfbaşı vd. (2007), Knut vd. (2011)	Eşitliğin korunumu ilkesini anlar (7. sınıf). Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (8. Sınıf).
	İşlemi yap-cevap	İşlemsel		
	Yanıt yok-İlgisiz yanıtlar	Diğer		
$x - 5 = 20$ denkleminde $x=25$ dir. Buna göre ; $x - 5 + 40 = 20 + 40$ denkleminde $x$ in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.	$x=25$ çünkü eşitliğin her iki tarafına aynı işlemlerin yapılması eşitliği bozmaz.	Kavramsal	Alıbalı vd. (2007), Knut vd. (2011)	Eşitliğin korunumu ilkesini anlar (7. sınıf). Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (8. Sınıf).
	$x=25$ çünkü denklemi çözersek cevap 25 çıkar.	İşlemsel		
	Yanıt yok-Bilmiyorum-Boş	Diğer		
$2n + 15 = 31$ $2n + 15 - 10 = 31 - 10$ Yukarıda verilen iki denklemde $n$ değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebebini açıklayınız.	Eşittir çünkü eşitliğin her iki tarafına aynı işlemlerin yapılması eşitliği bozmaz.	Kavramsal	Alıbalı vd. (2007)	Eşitliğin korunumu ilkesini anlar (7. sınıf). Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (8. Sınıf).
	Eşittir çünkü denklemi çözersek cevaplar aynı çıkar.	İşlemsel		
	Yanıt yok-Bilmiyorum-Boş	Diğer		
Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız. $2x + 5 = 11$ $2x + 5 - 5 = 11 + 5$ $2x = 16$ $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$ $x = 8$	2. adımda hata var. Her iki taraftan aynı sayı çıkarılmalı	Kavramsal	Araştırmacı ve bir uzman tarafından hazırlanarak araca eklenmiştir.	Eşitliğin korunumu ilkesini anlar (7. Sınıf).
	Hata yok. Adımlar doğru uygulanmış.	İşlemsel		
	Diğer durumlar	Diğer		

Araştırmanın bir diğer odak noktası olan öğrencilerin denklemlerin eşitliği kavramına ilişkin problemlerde kendilerini ve başkalarını ikna etmek için kullandıkları kanıt şemalarını belirlemek için gerekli veriler, kanıt şemaları belirleme mülakatları yoluyla toplanmıştır. Mülakatlar esnasında, Kanıt Şemaları Belirleme Mülakat Soruları (KŞBS) kullanılmıştır. Kanıt Şemaları Belirleme Mülakat Soruları (KŞBS); yazılı denklem çözümü gerektiren üç soru (Şekil 3.7) ve sözel olarak öğrenciye yöneltilecek dört sorudan (Şekil 3.8) oluşmaktadır. Ayrıca mülakatlar esnasında görüşmenin seyrine göre araştırmacı çeşitli sorular sormuştur. Mülakatlar esnasında öğrenciye yazılı olarak verilen sorular yedi ve sekizinci sınıf müfredatında yer alan “Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer (MDÖP, 2018).” kazanımına uygun olarak hazırlanmıştır. Üç sorudan oluşan bu bölümde; birinci soru sol taraf denklem sağ taraf sayı ve sonuç doğal sayı, ikinci denklem her iki taraf denklem ve sonuç negatif tam sayı ve üçüncü soru her iki taraf denklem ve sonuç negatif rasyonel sayı olacak şekilde tasarlanmıştır. Bu bölümde öğrencinin denklem çözüme aşamasında kullanacağı kanıt şemalarını belirlemek istendiği için farklı denklem durumları oluşturulmuş, ayrıca araştırmanın amacına uygun olarak öğrencinin problem çözme becerisinin verileri etkilememesi için sözel problemler verilmemiştir.

$$20 - 2x = 10 \text{ denklemini çözünüz.}$$
$$3x + 5 = x - 13 \text{ denklemini çözünüz.}$$
$$12 - 3n = -5n + 9 \text{ denklemini çözünüz.}$$

Şekil 3.7 Kanıt Şemaları Belirleme Yazılı Mülakat Soruları

Sonucu nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?  
Bulduğun sonucun doğru olduğunu nereden biliyorsun?  
Bulduğun sonucun doğruluğunu her zaman böyle mi gösterirsin?  
Bulduğun sonucun doğruluğuna başkalarını nasıl ikna edersin?

Şekil 3.8 Kanıt Şemaları Belirleme Sözlü Mülakat Soruları

Araştırmacı KŞBS veri toplama aracının uygulamasını iki aşamada yapmıştır. birinci aşamada araç araştırmacının kendi görev yaptığı okulda bulunan 17 öğrenciye uygulanmış ardından araştırma yapılacak diğer okulda 19 öğrenciye uygulanmıştır. Araştırmadan önce araştırmacı kendi okulundan olmayan öğrenciler ile tanışmıştır. Görüşmenin; notlandırma veya başarıyı lme amaçlı olmadığı, soruları çözerken rahat olabileceği, çözümlerini yaparken anlatmasını istendiği ve görüşmenin kayıt altına alınacağı tüm öğrencilere bildirilmiş ve velisinin bilgilendirilmesi için veli onam formu kendisine verilmiştir. Velisinin ve öğrencinin onayından sonra görüşmeler yapılmıştır.

Her ğrenci ile yaklaşık 15-20 dakikalık görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler, ğrencinin sınıf ortamında ve okul derslerinin bitiminden sonra yapılmıştır. Görüşmeler esnasında önce öğrenciye kanıt şemaları belirleme soruları yazılı olarak verilmiş, öğrenciden soruyu yazılı olarak çözmesi ve çözerken yaptığı işlemleri anlatması istenmiştir. Öğrenci soruları çözdükten sonra, ona görüşmenin akışına göre çeşitli sorular yöneltilmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından soru farklı yöntemlerle zldkten sonra hangi yöntemin doğru olduğu öğrenciye yöneltilmiş açıklaması istenmiştir.

Görüşmeler sesli olarak kayıt altına alındıktan sonra bilgisayar ortamında transkript edilerek yazılı doküman haline getirilmiş, daha sonra veriler betimsel analiz yöntemiyle analiz edilmiştir. Betimsel analiz nitel araştırmalarda sıkça kullanılan analiz trlerindenidir. Bu yöntemde, elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ya da yorumlanır (Yıldırım ve şimşek, 2016). Verilerin analizinde öğrencilerin denklemleri doğru zmesinden daha çok buldukları sonuçların doğruluğundan nasıl emin oldukları ve başkalarını nasıl ikna ettikleri üzerinde durulmuştur. Analizde Harel ve Sowder (1998)'in kavramsal çerçevesini oluşturduğu kanıt şemaları kullanılmıştır. Kanıt şemaları; otoriter, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategori ile şemalara ait alt kategorilerden oluşur. ğrenciden elde edilen verilerin hangi şemalara ait olduğu belirlenirken Tablo 3.4'deki veriler kullanılmıştır. Öğrenci ifadelerine göre öğrencinin hangi kanıt şemalarını kullandığı araştırmacı ve bir uzman tarafından ortak karar verilerek belirlenmiştir.

Kanıt şemaları belirlenirken öğrencilerin üç soruya verdikleri cevaplar ve kullandıkları ifadeler genel olarak değerlendirilmiştir. Kullandıkları ifadelerin her üç soruda tutarlılığına dikkat edilmiştir. Öğrencilerin kanıt şemaları sınıflandırılması yapıldığında her ğrenci en az bir şemaya dahil edilebilmiştir.

**Tablo 3.4** Kanıt Şemalarının Özeti

	Kanıt Şemaları	Kanıt Şemasının Karakteristiği	Gerçekleşme Metotları
Dışsal Kanıt Şemaları	<b>Otoriter</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Bir kanıtın neden doğru olduğu hakkında gerekçe geliştirmede yetersiz kalma</li> <li>⇒ Kanıtın doğruluğunun birey tarafından belirlenememesi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Teoremleri ezberlemek</li> <li>⇒ Formülleri uygulamak</li> <li>⇒ Kuralları uygulamak</li> <li>⇒ Kanıtı öğretmene, arkadaşına, kitaba, anneye, babaya vs. dayandırmak</li> </ul>
	<b>Alışkanlık Edinilmiş</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Yüzeysel deliller sunmak</li> <li>⇒ Bir kanıtın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurmak</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Tanıdık kanıt süreçlerini kullanmak</li> <li>⇒ Diğer kanıt süreçlerine benzeyen kanıt süreçlerini kullanmak</li> </ul>
	<b>Sembolik</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Sembollerin anlamını anlamak</li> <li>⇒ Sembollerin anlamsız deliller olarak sunmak</li> <li>⇒ Bir kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanmak</li> <li>⇒ Matematiksel semboller ile kanıtlamak</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Matematiksel durumları sembollerini kullanarak yazma</li> <li>⇒ İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak</li> <li>⇒ Bir kanıtın ilk ve takip eden adımlarına sembolik işlemler yapmak</li> </ul>
Deneysel Kanıt Şemaları	<b>Örnek Temelli</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Mantıksal delillerin bulunmaması</li> <li>⇒ Sonuçları hızlıca yapmak</li> <li>⇒ Bir kanıtın doğruluğunu örneklerle belirtmek</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek</li> <li>⇒ Bir kanıtı örnek göstererek oluşturmak</li> </ul>
	<b>Algısal</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Çizimler aracılığıyla kanıt basamakları ile hipotezleri ilişkilendirmek, bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etmek</li> <li>⇒ Bir kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirtmek</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Akranlarını çizimlerle ikna etmek</li> <li>⇒ Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak</li> </ul>
Analitik Kanıt Şemaları	<b>Dönüştürülebilir</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Tutarlı basamaklar oluşturmak</li> <li>⇒ Bir kanıtın önceki durumlarına mantıklı kurallar uygulamak</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Temel konuyu belirlemek</li> <li>⇒ Akıl yürütmeye diğerlerini ikna etmek</li> </ul>
	<b>Aksiyomatik</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme kurmak</li> <li>⇒ Lineer metotları kullanarak kanıtlamak</li> <li>⇒ Geleneksel kanıt süreçlerini kullanmak</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Aksiyomatik bir sistem geliştirmek</li> <li>⇒ Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak kanıtlamak</li> </ul>

Not: (Lee, 1999; Aktaran İskenderoğlu, 2003)

## BÖLÜM 4

### 4 BULGULAR

Bu bölümde sırasıyla, öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgileri ile kanıt şemalarıyla ilişkin elde edilen bulgular sunulacaktır.

#### 4.1 Öğrencilerin Sahip Oldukları Matematiksel Bilginin Türü

Bu kesimde denklemde eşitlik kavramına ilişkin öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgileri belirleme sorularından elde edilen veriler sunulacaktır. Bu kesimde araştırmanın, “Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili sahip oldukları bilginin türü nedir?” alt problemine ilişkin veriler elde edilmeye çalışılmıştır. KİBS’deki her bir soru için sırasıyla bulgular örnekleriyle beraber sunulacaktır. Tablo 4.1’de, sorulardan elde edilen verilerin genel analizi verilmiştir.

**Tablo 4.1** KİBS' ten elde edilen verilerin kodlara göre dağılımı

Kodlama	Kavramsal	İşlemsel	Diğer
1.soru	-	17	19
2.soru	21	13	2
4.soru	3	1	32
5.soru	3	1	32
6.soru	2	8	26
<b>Toplam</b>	<b>29</b>	<b>40</b>	<b>111</b>

Tablo 4.1’de birinci sorunun amacı işlemsel bilgiyi belirlemek olduğundan kavramsal kodu oluşturulmamıştır. Üçüncü soru ise, araştırmacı tarafından geçerli verileri sunmadığı kanaatine varıldığından değerlendirilmeden çıkarılmıştır. Diğer sorular ise hem işlemsel hem kavramsal olarak kodlanabilen sorulardır. Öğrencilerin çoğunlukla işlemsel bilgiye sahip oldukları görülmektedir. Ayrıca ikinci soruda 21 öğrenci kavramsal cevap vermiş olmasına rağmen dördüncü, beşinci ve altıncı sorularda çok daha az kavramsal cevaplar elde edilmiştir. Bunun sebebi olarak ikinci soru eşittir işaretinin kavramsal tanım bilgisini ölçerken dördüncü, beşinci ve altıncı sorular eşittir işaretinin denklem çözümünde kavramsal anlamının kullanımını içermesinden dolayı olduğu düşünülmektedir. Oluşan farklılık, öğrenciler eşittirin kavramsal anlamını sözel

olarak ifade edebilseler de kavramsal anlamına uygun işlem yapamadıklarından dolayı olabilir.

#### 4.1.1 KİBS Birinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular



$5x - 9 = 2x + 6$   
Yukarıdaki denklemini çözünüz.

Şekil 4.1 KİBS 1. soru

KİBS 1. (Şekil 4.1) soruda denklem çözümü istenmektedir. Bu soruda öğrencilerin denklem çözümüne ilişkin işlemsel bilginin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Soruya verilen cevapların işlemsel ve diğer kodlarına göre dağılımı Tablo 4.2’ de verilmiştir.

Tablo 4.2 KİBS 1’den elde edilen verilerin kodlara göre dağılımı

Kodlama	Kavramsal	İşlemsel	Diğer
1.soru	-	17	19

Tablo 4.2’de görülebileceği gibi, 17 öğrenci işleme bilgiye sahip olarak belirlenmiştir. 17 öğrencinin tamamı soruya doğru çözüm yaparak doğru cevaplar üretmişlerdir. Bu durumda öğrenciler denklemlerde eşittirin anlamına uygun işlemsel bilgiye sahip oldukları var sayılmıştır. Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de bu soruya ilişkin bazı örnekler verilmiştir.

B38 kodlu öğrencinin soruya verdiği cevap Şekil 4.2’de görülmektedir. Öğrenci soruyu çözerken yaygın olarak kullanılan karşıya atma metodunu kullanmıştır. Bu yöntem kavramsal bilgi gerektirmeksizin algoritmanın uygulanmasını içermektedir.

B151 kodlu öğrencinin cevabında (Şekil 4.3) ise yeterince açıklama yapılmamış, ancak doğru sonuca ulaşılmıştır. Bu durumda da öğrencilerin işlemsel bilgiye sahip oldukları var sayılmıştır. Öğrencinin kullandığı yöntem, verilen cevaptan tam olarak belirlenememiştir.

$3x - 9 = 2x + 6$   
 Yukarıdaki denklemleri çözünüz.  
 $5x - 9 = 2x + 6$   
 $5x - 2x = 3 + 6$   
 $\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$   
 $x = 5$

**Şekil 4.2** B38 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap

$3x - 9 = 2x + 6$   
 Yukarıdaki denklemleri çözünüz.  
 $3x = 15$   
 $x = 5$

**Şekil 4.3** B151 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap

Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de verilen örneklerde de görüldüğü gibi, işlemsel bilgiye sahip olduğu düşünülen öğrenciler denklemin çözümünde karşıya atma metodunu kullanmışlardır. Doğru cevap ve doğru çözüm üreten diğer öğrenciler de bu yöntemi kullanmışlardır.

KİBS 1. soruda 19 öğrencinin cevabı diğer olarak kodlanmıştır. Bu kodlama; yanlış çözüm, yanlış cevap, boş ve anlamsız cevapları içermektedir. 17 öğrenci başarılı denklem çözümü gerçekleştirirken, 19 öğrenci denklem çözümünde yetersiz kalmıştır.

$$5x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemi çözünüz.

$$5x + 6 = 2x + 6$$

Şekil 4.4 A40 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap

A40 kodlu öğrencinin 1. soruya verdiği cevap (Şekil 4.4) diğer olarak kodlanmıştır. Öğrencinin verdiği cevapta karşıya atma algoritmasına ait bazı bilgilere sahip olduğu çözümlerinden anlaşılmasına rağmen algoritmayı yanlış uyguladığı görülmektedir.

Şekil 4.5’de A99 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap görülmektedir. Öğrencinin verdiği cevap diğer koduna dahil edilmiştir.

$$5x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemi çözünüz.

$$5x - 9 = 2x + 6$$

$$x + 11 = 9$$

$$x = 70$$

Şekil 4.5 A99 kodlu öğrencinin KİBS 1. soruya verdiği cevap

#### 4.1.2 KİBS ikinci soruya ilişkin elde edilen bulgular

$$x + 5 = 7$$

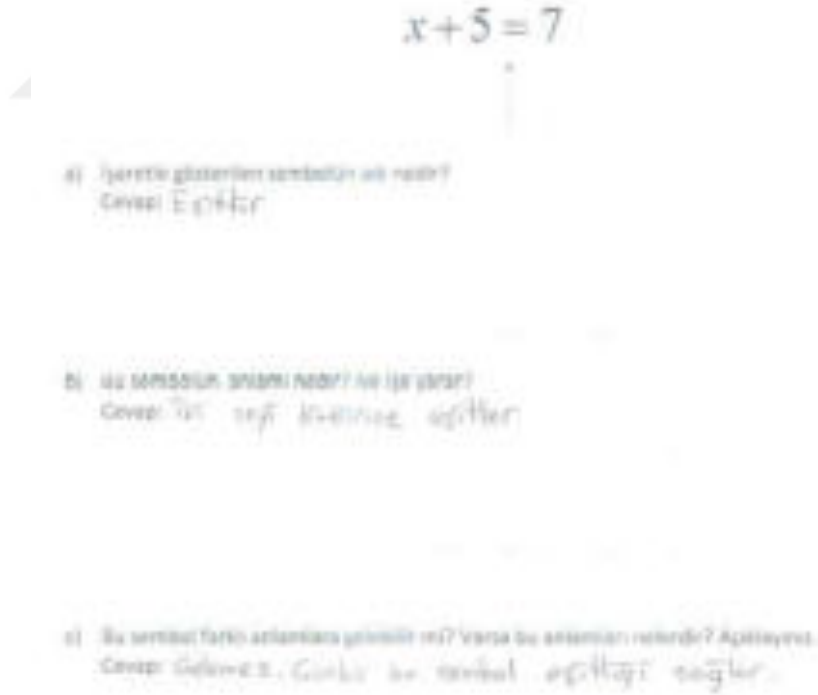
a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?  
b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?  
c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.

Şekil 4.6 KİBS 2. soru

KİBS 2. soru (Şekil 4.6) öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal bilgilerini belirlemeye çalışan üç maddeden oluşmaktadır. Kodlanmasında eşittirin anlamının istendiği b maddesi kullanılmış a ve c maddeleri ile elde edilen verilerden b maddesi desteklenmeye çalışılmıştır. Bu sorunun a maddesi öğrenci eşittir işaret sembolünün adlandırılması, b maddesi sembolün öğrencideki anlamına ilişkin bir ifade sağlanması ve c maddesi mümkünse alternatif bir anlam gerektirmektedir. Sorunun a maddesinin mantığı sembolün adını soru içerisinde kullanmamak iken c maddesinin mantığı öğrencilerin kavrama ilişkin farklı anlamları ortaya çıkarmalarını sağlamaktır. Alibali vd. (2007) yaptıkları çalışmada sorunun yeterli geçerliliğe sahip olduğunu belirtmişlerdir.

**Tablo 4.3** KİBS 2. sorudan elde edilen verilerin kodlara göre dağılımı

Kodlama	Kavramsal	İşlemsel	Diğer
2.soru	21	13	2



**Şekil 4.7** KİBS 2. soruya ilişkin kavramsal bilgi cevap örneği 1

$$x+5=7$$



a) İşaretli gösterilen sembolün adı nedir?  
Cevap: Eşittir

b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne iş yapar?  
Cevap: Eşitliğin bir tarafına bir terafına aynı adımı gösterir.

c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları yazınız? Açıklayınız.  
Cevap:

Şekil 4.8 KİBS 2. soruya ilişkin kavramsal cevap örneği 2

$$x+5=7$$



a) İşaretli gösterilen sembolün adı nedir?  
Cevap: Eşittir

b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne iş yapar?  
Cevap: Her iki tarafa bir birine eşit adımı gösterir.

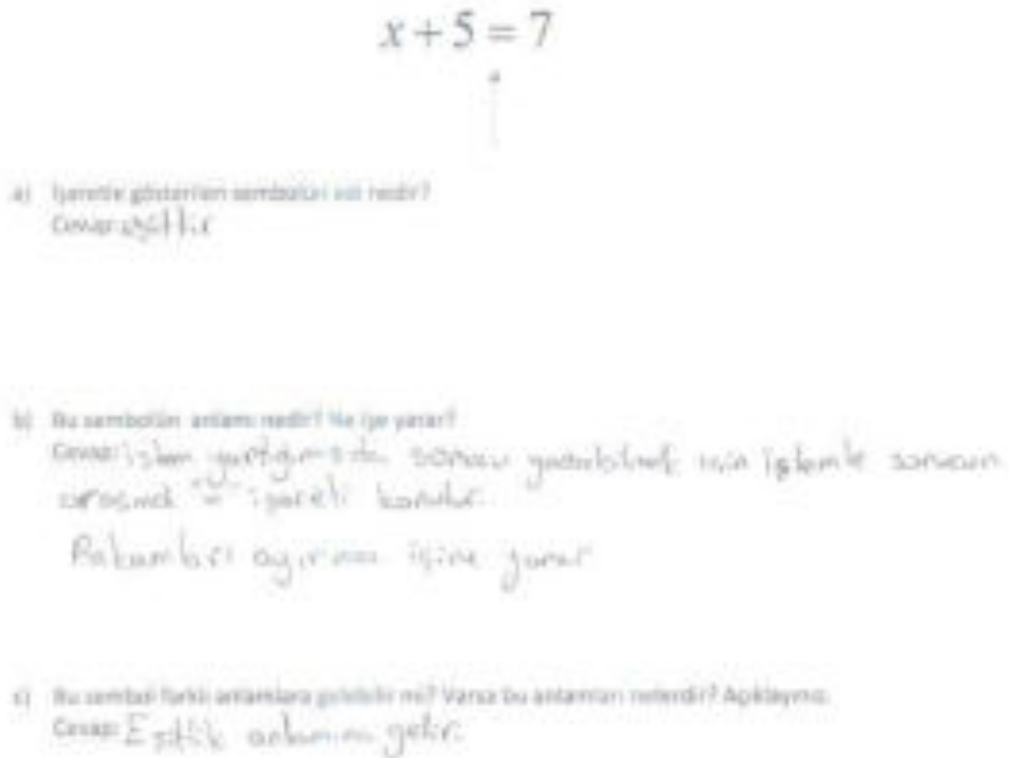
c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları yazınız? Açıklayınız.  
Cevap: Yoktur diye biliyoruz. Aklında bir tane var  
o da "Adelele" = ismi alınıyor.

Şekil 4.9 KİBS 2. soruya ilişkin kavramsal cevap örneği 3

Öğrencilerden elde edilen veriler analiz edildiğinde, eşittirin anlamına ilişkin 21 öğrenci kavramsal bilgiye sahip iken 13 öğrenci işlemsel bilgiye sahiptir. Ayrıca iki öğrencinin cevabı da diğer koduna dahil edilmiştir (Tablo 4.3).

Şekil 4.7, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9’de kavramsal olarak kodlanmış üç öğrenci cevabı görülmektedir. Kavramsal olarak kodlanan öğrenci cevapları, eşittirin iki tarafının aynı miktarı temsil ettiği fikrine uygun cevaplardan oluşmaktadır. Örneklerden görüldüğü üzere öğrenciler iki farklı miktarın birbirine eşit olma durumunu açıklamaya çalışmışlardır. Bu yüzden öğrencilerin kavramsal bilgiye sahip oldukları düşünülmüştür.

KİBS ikinci soru için 13 öğrencinin cevabı işlemsel olarak kodlanmıştır. İşlemsel olarak kodlanan öğrenci cevaplarından; eşitlik sembolünü “cevabı gösteren” ya da “işlem ile sonuçları ayıran sembol” olarak düşündükleri belirlenmiştir. Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de verilen cevaplardan, öğrencilerin eşitliğin kavramsal bilgisine sahip olmadıkları görülmektedir. Bu cevaplardan, öğrencinin işlemsel bilgiye sahip oldukları düşünülmüştür. Çünkü öğrenciler, eşittirin işlemsel anlamına uygun olarak eşitlik sembolünün "bir şeyler yap sinyali" olarak görmektedir. Ayrıca bu soruda bir öğrencinin cevabı diğer koduna dahil edilmiştir. Bu öğrenci soruyu boş bırakmıştır.



Şekil 4.10 KİBS 2. soruya ilişkin işlemsel cevap örneği 1

$$x+5=7$$

a) İşaretle gösterilen sembollerin adı nedir?

Cevap:

KİTANIT

b) Bu sembollerin anlamları nedir? Ne iş yapar?

Cevap:

Levbe göstermeden önce yapılır.

c) Bu sembol farklı anlamlara gelir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.

Cevap:

Bilmezim

Şekil 4.11 KİBS 2. soruya ilişkin işlemsel bilgi cevap örneği 2

### 4.1.3 KİBS Dördüncü ve Beşinci Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

$x - 5 = 20$  denkleminde  $x=25$  dir. Buna göre ;

$x - 5 + 40 = 20 + 40$  denkleminde  $x$  in ne olabileceğini denklem çözümü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Şekil 4.12 KİBS 4. soru

$$2n+15=31$$

$$2n+15-10=31-10$$

Yukarıda verilen iki denkleminde  $n$  değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebepini açıklayınız.

Şekil 4.13 KİBS 5. soru

KİBS 4. ve 5. (Şekil 4.12 ve Şekil 4.13) sorular kavramsal bilgiyi benzer şekilde ölçtüklerinden birlikte analiz edilmiştir. Sorularda öğrencilerin denklem çözümünde eşitliğin kavramsal anlamına uygun olarak işlem yapmaları beklenmiştir. Öğrencilerden elde edilen veriler analiz edildiğinde, üçer öğrencinin kavramsal anlamına uygun olarak cevap verdiği görülmektedir. Üçer öğrenci; denklemlerde eşitliğin kavramsal anlamına

uygun olarak sorunun çözümünde denklemin birbirine denk iki çokluktan oluştuğu ve eşitlik bozulmadan her iki tarafa bazı manipülasyonlar yapılabileceği fikrine uygun cevaplar üretmişlerdir. Bu soruda öğrencilerden denklem çözümü yapmadan fikir üretmeleri istenerek öğrencilerde bulunan kavramsal bilgi ortaya çıkartılmaya çalışılmıştır. Ayrıca bir öğrencinin cevabı işlemsel ve 32 öğrencinin cevabı diğer koduna dahil edilmiştir. Diğer koduna dahil edilen birçok öğrencinin soruda denklem çözümü yapılmaması istendiği için soruyu boş bıraktığı düşünülmektedir (Tablo 4.4). Sorunun amacı işlemsel bilgiyi ölçmekten ziyade kavramsal bilgiyi ortaya çıkarmak olduğundan yalnızca kavramsal cevaplar dikkate alınmıştır.

**Tablo 4.4** KİBS 4. ve 5. sorulardan elde edilen verilerin kodlara göre dağılımı

Kodlama	Kavramsal	İşlemsel	Diğer
4.soru	3	1	32
5.soru	3	1	32

$x - 5 = 20$  denkleminde  $x=25$  dir. İfade göre;  
 $x - 5 = 40 = 20 + 40$  denkleminde  $x$  in ne olduğunu bulup denklemin çözümünü yapmadan söyleyebiliriz mi? Açıklayınız.  
 Cevap: İki taraf çok böse ~~iki~~ iki tarafta 40 var orna  
 İki tarafta 20 çek tarafta var diğer tarafta  $x-5$  var bundan  
 20 çıkıp olacak bundan  $x=25$  dir

**Şekil 4.14** B151 kodlu öğrencinin KİBS 4. soruya verdiği cevap

31

$$n = 8$$

$$2n = 16$$

$$2n - 13 = 31$$

$$n = 8$$

$$2n = 16$$

$$2n - 13 = 16 - 13 = 31$$

Yukarıda verilen iki denkleminde n değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümü yapmadan karar veriniz. Sebepinizi açıklayınız.

Cevap: Eşittir çünkü her tarafta da 2n+15 var ve 31 var bundan n=8

Şekil 4.15 B151 kodlu öğrencinin KİBS 5. soruya verdiği cevap

B151 kodlu öğrencinin dört beşinci soruya verdiği cevaplar incelendiğinde (Şekil 4.14 ve Şekil 4.15) denklemin iki tarafında bulunan ifadeleri eşleştirerek eklenen veya çıkarılan sayının eşitliği bozmayacağı fikrine uygun cevap verdiği görülmektedir. Öğrenci KİBS 5. soruda “her iki tarafta da  $2n+15$  var” diyerek denklemin iki tarafındaki eş ifadeleri belirlemiş ve soruda verilen ikinci denkleminde şekil üzerinde -10’ları işaretleyerek her iki tarafın eşit olduğunu belirlemiştir. Öğrenci karşılıklı olarak eklenen veya çıkarılan sayıları eşleyerek kalanların birbirine eşit olacağını göstermektedir. Buradan hareketle eşitliğin bozulmayacağı ve çözümün değişmeyeceği fikrine ulaşmıştır.

#### 4.1.4 KİBS Altıncı Soruya İlişkin Elde Edilen Bulgular

Ahmet matematik dersinde bir denklem çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yapılan işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$2x - 5 = 11$$

$$2x + 5 - 5 = 11 + 5$$

$$2x = 16$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Şekil 4.16 KİBS 6. Soru

KİBS 6. soruda (Şekil 4.16) öğrencinin örnek görevi değerlendirmesi beklenmektedir. Bu soruda öğrenciye hatalı denklem çözme prosedürü verilmiş, hatanın nerede olduğu ve sebebini belirtmesi istenmiştir. Öğrencilerden, denklemlerin eşitliği

fikrine dayanarak denklemin iki tarafına yapılan farklı değerdeki işlemlerin eşitliği bozacağı fikrini kullanmaları beklenmiştir.

**Tablo 4.5** KİBS 6. sorudan elde edilen verilerin kodlara göre dağılımı

Kodlama	Kavramsal	İşlemsel	Diğer
6.soru	2	8	26

Bu sorunun analizinde; iki öğrencinin kavramsal bilgiye uygun özellik gösterdiği, sekiz öğrencinin ise işlemsel bilgiye uygun özellik gösterdiği belirlenmiştir. 26 öğrenci ise soruya anlamlı bir cevap getirememiştir (Tablo 4.5). 6.Soru, içerik olarak işlemsel ve kavramsal cevaplar verilebilecek şekilde oluşturulmuştur. Bir öğrenci, kavramsal bilginin ortaya çıkarılması hedeflenen dört ve beşinci sorulara kavramsal cevap vermesine rağmen altıncı soruda işlemsel bilgi özelliği gösteren cevap vermiştir. Bunun sebebinin öğrencilerin soru çözümünde işlemsel bilgiyi kullanmayı daha çok tercih etmeleri olduğu düşünülmektedir. Ayrıca dört ve beşinci sorulara cevap veremeyen yedi öğrencide bu soruda kavramsal bilgi kullanmaksızın işlemsel bilgi içeren cevaplar oluşturabilmişlerdir. 26 öğrenci ise soruya anlamlı bir cevap üretememiştir.

Alınan matematik dersinde bir denklemin çözümünde eşitliği işlemle yaramıyor. Yanlış işlemlerle hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve açıklama yapınız.

2x+5=11  
 2x+5-5=11-5  
 2x=16  
 $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$   
 x=8

her iki tarafı da (-5) ile çıkardık

**Şekil 4.17** B38 kodlu öğrencinin KİBS 6. soruya verdiği cevap

Soruya verdiği cevap Şekil 4.17’de verilen B38 kodlu öğrenci, “*her iki tarafa eksi beş toplamalıydı*” şeklinde açıklama yapmış ve denklemin her iki tarafına yapılan eş olmayan müdahalelerin eşitliği bozacağını anlatmıştır. Öğrenci kavramsal bilgisini kullanarak denklemin her iki tarafına eş olmayan işlem yapılarak eşitliğin bozulduğunu fark etmiş ve buna göre cevap vermiştir.

Ahmet matematik dersinde bir denklemin çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmıştır. Yazdığı işlemlerin tabii var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$\begin{aligned}2x+5 &= 11 \\2x+5-5 &= 11+5 \\2x &= 16 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{16}{2} \\x &= 8\end{aligned}$$

Önemli! 5'i 11'in yanına atmalıyız ve  
 $x=3$

Şekil 4.18 B151 kodlu öğrencinin KİBS 6. soruya verdiği cevap

Daha önceki sorulara kavramsal bilgi içerikli sorular üreten A151 kodlu öğrenci ise KİBS'deki 6. soruda algoritmaya dayalı yöntemi kullanarak işlemsel bilgiye uygun cevap vermiştir ( Şekil 4.18). Öğrenci denklemin her iki tarafına yapılan eş olmayan müdahaleleri anlatmak yerine denklemin çözümünde karşıya atma algoritmasına dayanarak "5'i 11'in yanına atmalıyız" şeklinde açıklama yapmıştır.

KİBS'den elde edilen verilerin genel analizi sonucunda kavramsal bilgiye sahip olduğu düşünülen 3 öğrenci ve işlemsel bilgiye sahip olduğu düşünülen 3 öğrenci belirlenmeye çalışılmıştır. Belirlenen öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların kodlara göre dağılımı Tablo 4.6'de verilmiştir.

Tablo 4.6 KİBS' ten elde edilen verilere göre seçilen öğrencilerin cevaplarının kodlara göre dağılımı

Öğrenci	1.Soru	2.Soru	4.Soru	5.Soru	6.Soru
A1	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal
A3	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Kavramsal	İşlemsel
A55	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Diğer	İşlemsel
A63	İşlemsel	İşlemsel	Diğer	Diğer	İşlemsel
B38	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal
B151	İşlemsel	Kavramsal	Kavramsal	Kavramsal	İşlemsel

## 4.2 Öğrencilerin Kullandıkları Kanıt Şemaları

Verilerin toplanmasının ikinci aşamasında; öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmış, bu amaçla öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler

yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler, KİBS'ten elde edilen verilere göre kavramsal ve işlemsel bilgiye sahip olduğu düşünülen üçer öğrenciye uygulanmıştır. Her öğrenciye üçer adet denklem çözme problemi sunulmuş ve üç soruya verilen cevaplara göre sınıflandırma yapılmıştır. Mülakatlar sonucunda, öğrencilerin tamamının dışsal kanıt şemalarını kullandıkları görülmüştür (Tablo 4.7).

**Tablo 4.7** Kanıt şemaları belirleme mülakatlarına göre öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları

Öğrenci	Kanıt Şeması
A1	Dışsal-Otoriter-Aalışkanlık Edinilmiş
A3	Dışsal-Otoriter
A55	Dışsal-Otoriter
A63	Dışsal-Otoriter
B38	Dışsal-Otoriter-Sembolik
B151	Dışsal-Otoriter

Elde edilen verilere göre; altı öğrenci dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını, ayrıca bir öğrenci alışkanlık edinilmiş kanıt şemasını ve bir öğrencide sembolik kanıt şemasını kullanmıştır. Otoriter kanıt şemasını kullanan öğrenciler genelde kanıtlarını öğretmenlerine dayandırmışlar, alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını kullanan öğrenciler cevaplarında işlemlerin anlamını düşünmeksizin alışkanlık edindikleri yöntemleri kullanmışlardır. Sembolik kanıt şemasını kullanan öğrenciler ise sembollerin altında yatan anlamalara bakmaksızın kullanmışlardır. Bu kesimde her bir öğrenciden elde edilen bulgular sunulacaktır.

#### 4.2.1 A1 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

A1 kodlu öğrenci KİBS' ten elde edilen verilere göre, denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olduğu düşünülmektedir. A1 Kodlu Öğrencinin yarı yapılandırılmış mülakatlarda verdikleri cevaplara göre kullandığı kanıt şeması, otoriter ve alışkanlık edinilmiş kanıt şeması olarak belirlenmiştir. A1 Kodlu Öğrencinin kanıtlama sürecinde alışkanlık olarak edindiği işlemleri öne sürmüştür. İşlemlerin anlamlarını düşünmeksizin daha önceden öğrendiği süreçleri işe koşturmuştur. Öğrenci işlemlerinden emindir, fakat doğruluğunu daha önce öğrendiği süreçlere bağlamaktadır.

Ö: Sonucun nasıl doğru olduğunu az önce gösterdin. Peki işlemlerinin doğru olduğunu bize kanıtlayabilir misin? ispatlayabilir misin?

A1: İşlemlerin doğru olduğunu... nasıl yani? İşlemlerim doğru.

Ö: Yani bu işlemleri nasıl biliyorsun neden böyle yapıyorsun? Sen burada a yı karşıya attın beşi diğer taraf attın, negatif olarak gönderdin sonra ikisini de böldün bu işlemlerin doğru olduğunu nerden biliyorsun?

A1: Yani karşı tarafa işaret değiştirerek gittiği için yaptım. Eksi olsaydı artı diye karşıya atacaktım. Ama o artı olduğu için eksi diye karşıya attım.

Ö: Yani bunun doğru olduğunu nerden biliyorsun? Karşıya niye eksi diye geçiyor? Yani bu doğru mu? Belki de bunu yanlış biliyorsun.

A1: (Sessizce) Küçüklüğümde beri böyle öğrendim.

Ö: Sesli konuşabilirsin.

A1: Küçüklüğümde beri böyle öğrendim. Yani hep böyle yaptım ilk okulda da böyle yapıyorduk. Küçüktüm fazla karmaşık değildi ama yine böyle oluyordu.

Ö: Karşıya attığımızda eksi diye gitmesi gerekiyor. Perki neden eksi diye gider bi işaret karşı tarafa atınca?

A1: Eksi diye gitcek diye bişey yok. İşaret değişecek.

Ö: İşaret niye değişir o zaman? Şöyle sorayım o zaman neden bi sayı karşıya geçince işareti değişir?

A1: Çünkü eşitlemek için olabilir.

Ö: Yani?

A1: Mesela biz bunu eksi değil de artı diye yapsaydık işlem doğru çıkmayabilirdi.

Öğrenci sonucunun doğruluğunu açıklarken denklem çözmede karşı tarafa atma metodunu kullanmış fakat anlamına dikkat etmemiştir. İşaretin karşıya geçerken niye değiştiği sorulduğunda öğrenci küçüklüğünden beri böyle öğrendiğini söylemiş fakat yaptığı işlemlerden anlamına daha önce dikkat etmediği görülmektedir. Bir diğer açıklamasında da “böyle yapmasaydık işlem doğru çıkmayabilir” şeklinde cevap vermiştir.

#### 4.2.2 A3 kodlu öğrencinin kullandığı kanıt şeması

A3 kodlu öğrencinin, KİBS' ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olduğu düşünülmektedir. Akademik başarısı yüksek ve özgüvenli bir öğrencidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlar esnasında da rahat davranmıştır. Mülakatlarda denklemlerin çözümünde bulduğu sonuçları ve yaptığı işlemlerin doğruluğunu kanıtlamakta zorlanmış ve çoğunlukla cevapsız bırakmıştır. Yani öğrenci yaptığı işlemlerin üzerine daha önce düşünmemiş, otoriteden öğrendiği işlemleri aynen ezberlemiştir. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

*Ö: Doğru olduğunu nasıl anlarsın bunların?*

*A3: Bunu karşı tarafa attıktan sonra  $2x$  eşittir  $20$  eksi  $10$  oluyo oda her iki tarafı ikiye böldüğümüzde beş sonucunu veriyor.*

*Ö: Karşı tarafa atma işlemi bana anlatır mısın? Karşı tarafa atmak demek ne demek ?*

*A3: Karşı tarafa atmak.... Yani şurada ki sayının yalnız bırakmamız için eee önünde bilinmeyen olmayan bi sayı, şey karşı tarafa aynı şeye atmak, koymak*

*Ö: Anlamadım bir daha söyler misin ?*

*A3: Birbirleri içinde birbirine benzerlik gösteren sayıları bir araya getirmek.*

*Ö: Tamam. Neden böyle bir şey yapıyoruz ?*

*A3: Neden. Böyle birsey yapıyoruz ? (Düşünüyor)*

*Ö: Böyle birsey yapmayı nereden öğrendin?*

*A3: Böyle bir şey yapmayı ... (Düşünüyor)*

*Ö: Cevabın yok sanırım?*

*A3: Yok aynen.*

A3 kodlu öğrenci; birinci soru için bulduğu sonucun gerekçesini açıklarken önce daha önce yaptığı işlemleri tekrarlamış, daha sonrasında ise işlemleri için başka bir gerekçe sunamamıştır. A3 kodlu öğrencinin; denklem çözme yöntemini algoritma olarak öğrendiği, fakat işlemlerin anlamları üzerine düşünmediği görülmektedir.

A3: Başka nasıl yapabiliriz bilinenleri bi tarafa bilinmeyenler, bi tarafa attığımız zamanda bunun cevabı çıktığı için ordanda anlayabiliriz aslında.

Ö: Peki ben şunu sorayım. Burda ki a yı karşıya attın peki bunun eksi a diye karşıya gidecek olması demek ne demek? Ve sen bunun doğru bir işlem olduğunu nereden biliyorsun? a karşıya niye eksi diye gider veya beş karşıya niye eksi diye gider?

A3: Çünkü işlemde yeri değişiyor. Sayıların yerleri değişiyor. Hem bilinen hem bilinmeyenlerin yeri değiştiği için işaret değişiyor.

A3 kodlu öğrenci ikinci soruya verdiği cevapta da aynı özelliği göstermiş sadece algoritmayı ezberinden uygulayarak sonucunun doğruluğunu göstermeye çalışmıştır.

#### 4.2.3 A63 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

A63 kodlu öğrenci, orta düzeyde akademik başarıya sahip bir öğrencidir. KİBS’ ten elde edilen veriler sonucunda, denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olduğu belirlenmiştir. Mülakatlar esnasında heyecanlı davranmıştır. Öğrenci mülakatlar esnasında yaptığı işlemlere ve sonuçların doğruluğundan emin olmak için yeterli gerekçelendirmeler yapamamıştır. Ayrıca sonuçların doğruluğunu öğretmenin anlattıklarına bağlamış “Öğretmenim anlattıysa doğrudur” şeklinde açıklama yapmıştır. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

Ö: Tamam sonucu anladım peki ben şunu soruyorum aradaki işlemlerin doğruluğundan nasıl emin oluyorsun?

A63: Matematik dersinde öğrendim

Ö: Peki matematik dersinde öğrendiğin bu işlemlerin doğru olduğunu nereden biliyorsun? Belki hoca sana yanlış öğretti bundan emin olabilir misin? Daha doğrusu nasıl emin olabilirsin?

A63: Emin olmam şu şekilde bu problemin cevabının yanlış olup olmadığını.....bi dakika... (düşünüyor). Şuan... onu düşünmedim hiç.

Ö: Öğretmen derste bişey anlattığında anlattığı şeyin doğru olup olmadığını düşünür müsün?

A63: Düşünmem.

Ö: Neden?

A63: Çünkü öğretmenim o benim. Öğretmenim eğitimini almış mesela okulunu okumuş benden de daha iyi bilgi sahibi olduğu için ona güvenirim.

A63 kodlu Öğrenci başka bir soruda da gerekçelendirmede yetersiz kalmış, sonucu yanlış bulduğunu hissetmiş, fakat sebebini açıklayamamıştır.

Ö: Neden pozitif düşündün negatif çıkamaz mı sonuç?

A63: Çıkabilir ama benim kafamda öyle bi yargı oluştu. Şu an bence sonucum yanlış.

Ö: Nasıl anlarsın sonucunun yanlış olup olmadığını?

A63: Bilmiyorum öğretmenim şu an.

#### 4.2.4 A55 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

A55 kodlu öğrenci mülakatlar esnasında oldukça heyecanlı davranmıştır. KİBS’ ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olduğu belirlenmiş, ancak mülakatlar esnasında denklemlerin çözümünde zorlandığı görülmüştür. Öğrenci; kanıt şemaları belirleme mülakatları boyunca yaptığı işlemleri ve bulduğu sonuçları gerekçelendirmede yetersiz kalmış, herhangi bir kanıt üretme çabasında bulunmamıştır. Bunun yerine gerekçe olarak öğretmenin ve kaynaklardan edindiği bilgileri aynen uyguladığını söylemiştir. Bu yüzden otoriter kanıt şemasına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö: Bu işlemlerinin doğru olduğuna emin misin veya nasıl emin olursun işlemlerinin doğru olduğundan?

A55: .... (Düşünüyor.) Doğru hocam bence doğru.

Ö: Nerden biliyorsun doğru olduğunu nasıl anlarsın?

A55: Hocam sizin anlattığınız gibi dediğinizi yaptım ama yani yanlışım da olabilir. Çünkü anlattığınızda tam anlamamıştım.

.

.

.

Ö: Şimdi ben şunu sorayım sen burada yaptığın işlemlerin doğru olduğunu nasıl anlarsın? İşte sayı attın negatif olarak geçirdin beşi attın negatif olarak geçirdin. Bu işlemlerin doğruluğu yanlışlığı hakkında ne düşünüyorsun? Doğru mu bu işlemler doğruluğunu nereden biliyorsun?

A55: Hocam ben sizin anlattığınız bütün her şeyi yaptım. Artı evde konu tekrarı yapıyorum tonguçtan. Testte çözüyorum bu yüzden doğru hocam.

Görüldüğü gibi öğrenci ‘‘Hocam ben sizin anlattığınız herşeyi yaptım’’ diyerek dış kaynaklardan edindiği bilgileri yeterli görmüş başka bir kanıtı ihtiyaç duymamıştır. Öğrencinin gerekçelendirmeleri otoriter kanıt şemalarının gereklerini karşılamaktadır.

#### 4.2.5 B38 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

B38 kodlu öğrenci KİBS’ ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olduğu düşünülmektedir. Öğrenci işlemlerinin doğruluğunu açıklarken sembollerin özellikleri bu işlemleri yapılmasını gerektiriyormuş gibi açıklama yapmış fakat altında yatan anlamlara dikkat etmemiştir. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması sembolik kanıt şeması olarak belirlenmiştir.

Ö: O zaman sonucunun değil de aradaki işlemlerin doğru olduğunu nasıl anlayabilirsin. Veya diyelim ki bir arkadaşın sen bu işlemleri gösterdiğinde niye karşıya atarken işaretini değiştireyim derse sana sen bun yöntemlerin doğru olduğunu ona nasıl ispatlarsın?

B38: Çünkü arada eşittir var. Artıda karşıya eksi olarak geçer. Çarpmanın da tam tersi bölmedir. Toplamının da tam tersi eksidir o yüzden eksi olarak gider.

Görüldüğü gibi öğrenci, gerekçelendirmesinde işlemleri kullanmış fakat sanki işlemler bunu gerektiriyormuşçasına açıklama yapmıştır. Örneğin öğrenci toplamının tersinin çıkarma olduğunu bilmekte fakat bunu niye burada kullandığına dair bir açıklama getirememektedir.

#### 4.2.6 B151 Kodlu Öğrencinin Kullandığı Kanıt Şeması

A151 kodlu öğrenci KİBS’ ten elde edilen verilere göre denklemlerde eşitlik bilgisine kavramsal olarak sahip olduğu düşünülmektedir. Yapılan görüşmeler esnasında yaptığı denklem çözümlerini gerekçelendirmekte zorlanmıştır. Gerekçelendirme yapmak yerine genelde çözümlerini tekrar etmektedir. Öğrendiği bilgilerin doğruluğunu ise öğretmenlerine bağlamıştır. Bu yüzden öğrencinin kanıt şeması otoriter olarak belirlenmiştir.

Ö: Tamam. Sonucunun nasıl doğru olduğunu az önce gösterdin bana onu anlayabiliyorsun. Peki şu aradaki işlemler doğru mu sence ya da bu işlemlerin doğru olduğunu nereden biliyorsun?

*Karşıya gönderirken eksi yapıyoruz. İşte artıysa eksi eksiyse artı yapıyoruz. Bu yöntemler doğru yöntemler mi sence nerden biliyorsun doğru olduğunu?*

*B151: Hocam bu yöntemler doğru olduğunu mesela matematikçimiz iki üç tane matematikçi değişti. Onlardan her birinin farklı kodlama yöntemi vardı. O kodlama yöntemlerini birleştirerek kendim bir kodlama yöntemi çıkarttum böyle. Bu küçük bilinmeyen elini öpmeye gidiyor diğeri kalabalık çıkarmasın diye diğerinin yanına gidiyo.*

*Ö: Bu yaptığın yöntem doğru mu sence belki de yanlış bir şey yapıyorsun?*

*B151: Daha değişik yöntemleri vardır da ben böyle kendi yöntemlerimle hocalarımın bana öğrettiği yöntemleri kısaltarak kendi yöntemlerimi ekleyerek ben böyle yapıyorum.*

*Ö: Kendi yöntemlerinden kastın burda kullandığın kodlamalardan bahsediyorsun değil mi?*

*B151: Evet hocam.*

Görüldüğü gibi öğrenci, öğretmenlerinin öğrettiği yöntemleri doğru saymış sebebi üzerine düşünmemiştir. Ayrıca öğrenci algoritmaları kodlama şekillerini ispat olarak değerlendirmekte ve geçerli bir ispat ortaya koyamamaktadır.

*B151: Hocam şimdi 20 eksi 2x eşittir 10 dediği için artılı bulcaz. Ondan 20'yi bu tarafa attığımız için eksi olarak geçer. Eksi 20 artı 10 daha eşittir eksi 10 yapar. Eksi2 miz vardı zaten hocam bunları 2'ye bölüyoruz. Eksi 2'ye daha doğrusu. Ondan sonra eksi 2 diye çıkıyo. Eksi 10 da eksi ye bölündü mü beş diye çıkıyo. Ondan cevabımız eşittir 5 çıkıyo.*

*Ö: İşleminin sonucunun doğru olduğunu nerden biliyorsun ? Nasıl anlarsın?*

*B151: Hocam kontrol ettiğimiz zaman yani hocamız bize böyle öğretti. 20'yi bu tarafa attığımız zaman eksi olur. Mesela burda x olsaydı onu küçük bilinmeyen büyük bilinmeyen elini öpmeye gidiyor diyoruz biz. Onu bu tarafa atıyoruz. Mesela onu attığımız zaman bu x olarak geçtiği için eksi 3x oluyo. Bunu da bu tarafa atıyoruz burda kalabalık yapmasın diye. Bu tarafa atcağımız zaman bu da eksi olarak geçiyor. Ondan olmadığı zaman bu 20'yi bu tarafa atıyoruz. Eksi 2x eşittir eksi 10 çıkıyo. Bunları da eksi 2 ye böldüğümüz için eşittir 5 çıkıyor.*

Öğrenci, başka bir soruya verdiği cevabı gerekçelendirirken yine kullandığı denklem çözüm yöntemini tekrarlamış ve ‘‘Hocam böyle öğretti’’ şeklinde açıklama getirmiştir.

İspat şemaları belirleme mülakatlarının yapıldığı 6 öğrenciden elde edilen bulgulara göre hepsinin dışsal kanıt şemalarını kullandığı görülmektedir. Öğrenciler işlemlerin anlamlarına dikkat etmeksizin yaptıkları bu işlemleri ispat olarak

düşünmüşler ve doğruluğunu kendi zihinsel süreçlerinden ziyade dışsal kaynaklara bağlamışlardır. Öğrencilerin dördü, yaptıkları işlemlerin doğruluğunu otorite olarak gördükleri öğretmenlerine bağlamışlardır. Bir öğrenci gerekçelendirmesini alışkanlık olarak tarif ederken bir öğrencide işlemleri anlamsız semboller gibi kullanmış ve bu işlemleri kanıt olarak kabul etmiştir.

#### 4.3 Kanıt Şemalarının Matematiksel Bilginin Türü Açısından İncelenmesi

Bu bölümde “Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili sahip oldukları matematiksel bilginin türü, buldukları sonuçları doğrulamak için kullandıkları kanıt şemalarını etkiler mi?” alt problemine ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

Öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları ve matematiksel bilginin türü arasındaki ilişkiyi incelemek için altı öğrenci seçilmiş ve bu altı öğrenciye ait bulgular Tablo 4.8’de özetlenmiştir.

**Tablo 4.8** Nihai katılımcıların kullandıkları matematiksel bilgi türleri ve kanıt şemaları

Öğrenci	Matematiksel Bilgi	İspat Şeması
A1	Kavramsal	Dışsal-Otoriter-Alişkanlık Edinilmiş
A3	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
A55	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
A63	İşlemsel	Dışsal-Otoriter
B38	Kavramsal	Dışsal-Otoriter-Sembolik
B151	Kavramsal	Dışsal-Otoriter

Tablo 4.8’ de öğrencilerin tamamı matematiksel bilgilerinin türüne göre değişmeksizin dışsal kanıt şemalarına sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca iki öğrencinin ikinci şema olarak sembolik ve alışkanlık edinilmiş kanıt şeması kullandığı görülmektedir. İkinci bir kanıt şeması kullanan iki öğrenci kavramsal bilgiye sahipken işlemsel bilgiye sahip öğrenciler ikinci bir kanıt şeması kullanmamışlardır.

## BÖLÜM 5

### 5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, elde edilen bulgular ve bu bulguların olası yorumları; önceki yapılan araştırmalar ışığında tartışılacak, ardından çalışmadan elde edilen sonuç ve öneriler sunulacaktır.

#### 5.1 Tartışma

Bu araştırmada; veriler iki aşamada toplanmış ve analiz edilmiş, elde edilen bulgular betimlenerek kanıt şemaları ve matematiksel bilginin türü arasında bir ilişki bulunmaya çalışılmıştır.

Birinci aşamada; “Sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramıyla ilgili sahip oldukları bilginin türü nedir?” alt problemine cevap aranırken, öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları bilgileri kavramsal ve işlemsel olarak ayrılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin denklemlerde eşitlik bilgisinin kullanımına ilişkin bilgiye işlemsel olarak sahip olup olmadıklarını tespit etmek için hazırlanan KİBS 1’den elde edilen bulgular incelendiğinde; öğrencilerin 17 tanesi verilen işlemi doğru çözerken, 19 tanesi denklemin çözümü için geçerli bir yanıt verememiştir. Bu verilere göre, öğrencilerin çoğunun denklem çözümünü algoritma düzeyinde dahi yapamadığı görülmektedir. Ayrıca soruya doğru cevap veren öğrencilerin tamamı denklem çözümünde karşıya atma algoritması kullanmıştır. Buda öğrencilerin denklem çözümünde kavramsal bilgilerini kullanmaktan ziyade ezber algoritmaları uyguladıklarını göstermektedir. Elde edilen bulgur, öğrencilerin cebir problemlerini çözmeye zorlandığını ve cebir problem çözme performansları ile kavramsal anlayışlarının birbirini etkilediğini gösteren; Steinberg vd. (1991), Knuth vd., (2005); Knuth vd., (2006) ve; Alibali vd., (2007) çalışmaları ile tutarlıdır.

Öğrencilerin eşittir sembolüne ilişkin edindikleri işlemsel ve kavramsal bilgileri ortaya çıkarmayı amaçlayan KİBS 2. sorudan elde edilen bulgulara göre; 21 öğrencinin cevabı kavramsal bilgi olarak sınıflandırılırken, 14 öğrencinin cevabı ise işlemsel olarak belirlenmiştir. Ayrıca bir öğrenci soruya yanıt vermemiştir. Bu bulgulara göre, öğrencilerinin çoğunun eşittir sembolünün açık kavramsal bilgisine sahip olduğunu göstermektedir. 14 öğrenci ise eşittir sembolünü, cevabı gösteren ya da işlemleri ve

sonuçları ayıran bir sembol olarak belirtmiştir. Elde edilen bu bulgular önceki araştırmalar ile tutarlıdır. Knuth vd. (2007) çalışmalarında; birçok sekizinci sınıf öğrencisinin zayıf kavramsal anlayışa sahip olduklarını belirtmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin birçoğunun eşittirin anlamına ilişkin verdikleri cevaplarda Alibali vd. (2007) çalışması ile benzerlik göstermektedir. Knuth vd. (2005) çalışmasında da benzer sonuçlara yer verilirken öğrencilerin birçoğunun sınıf seviyesi yükselse de kavramsal anlayış geliştiremediklerini belirtmişlerdir. Bunun sebeplerinden biri olarak eğitim ortamlarında küçük yaşlardan itibaren eşittirin anlamına çok az vurgu yapılması gösterilmiştir. Yine Knuth vd. (2006) çalışmasında da benzer sonuçlar elde edilmiştir.

KİBS 2. sorudan, eşittirin açık kavramsal bilgisini belirlemeye çalışırken dördüncü ve beşinci sorular kavramsal bilgiyi uygulamada ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bu sorularda, öğrencinin kendinde bulunan kavramsal anlayışını işe koşması beklenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, sadece üçer öğrenci eşittirin kavramsal anlamına uygun cevaplar verebilmiştir. Diğer öğrenciler ise soruyu ya boş bırakmış ya da soruda istenmeyen cevaplar vermişlerdir. Bu sorulara ilişkin verilen cevaplardaki en dikkat çekici nokta; ikinci soruda 21 öğrenci eşittir sembolünün (literatürde bu şekilde kullanılmış örneğin Ertekin, 2017) kavramsal bilgisine sahipken dördüncü ve beşinci sorularda yalnızca üçer öğrenci kavramsal bilgiyi içeren cevaplar üretebilmişlerdir. Bunun sebebi olarak, öğrenciler eşittirin sembol bilgisine sahip olsalar da bilgilerini işe koşmakta zorlanmaları gösterilebilir. Ayrıca ikinci soru açık kavram bilgisini ölçerken, dördüncü ve beşinci sorular örtük kavram bilgisini ortaya çıkarmaya yöneliktir. Örtük kavram bilgisi, tanımlarda kendini göstermeyen ancak öğrencinin zihninde var olan bilgilerdir. Örtük kavramsal bilgiyi ortaya çıkarmak için öğrencinin aşına olmadığı problemler kullanılır ve öğrencinin ezber işlem bilgilerini kullanmadan cevap üretmeleri beklenir. Bu yüzden örtük kavramsal bilginin ölçülmesi daha zordur (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015; Crooks ve Alibali, 2014). Bu sebeplerden öğrenciler kavramsal bilgiye sahip gibi görünse de aslında kavramsal bilgiyi zihinlerinde yeterince oluşturamadıkları veya kullanamadıkları söylenebilir. Bu sonuçlar benzer veri toplama araçlarının kullanıldığı Knuth vd. (2005) ve Knuth vd. (2006) yaptıkları çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile benzerlik göstermektedir. Belirtilen bu çalışmalarda da öğrencilerin çoğu, eşittir işaretinin anlamını bilse de çok azının eşittirin anlamına uygun işlem yapabildiği bulgusuna ulaşılmıştır.

KİBS 6. soru, öğrencilerin verilen örneği değerlendirmelerini gerektiren bir sorudur. Bu soruda; öğrenciye yanlış işlem yapılan bir örnek verilmiş ve öğrencinin yanlışın sebebini açıklaması beklenmiştir. Altıncı soruya; dört ve beşinci sorularda elde edilen verilerle uygun olarak iki öğrenci kavramsal bilgisine dayalı cevap verirken, sekiz öğrenci ise cevaplarırken işlemsel bilgi kullanmıştır. Diğer 26 öğrenci ise geçerli bir cevap verememiştir. Elde edilen bulgulara göre kavramsal bilgiye çok az öğrencinin sahip olduğu görülmektedir. Bu bulgu, dört ve beşinci sorularda elde edilen bulgularla paraleldir. Ancak dört ve beşinci sorulara kavramsal cevap oluşturabilen bir öğrencinin bu soruda işlemsel cevap verdiği belirlenmiştir. Bunun sebebi olarak öğrencilerin, gerekmedikçe kavramsal bilgilerini kullanmadıkları ve işlemsel bilgiyi kullanmanın kavramsal bilgiyi kullanmaya göre daha kolay olması söylenebilir. Bu bulgu; Fyfe vd., (2020)'deki çalışmasındaki cebirde kavramsal bilgiye sahip olan bazı öğrencilerin işlemsel bilgi sunması bulgusuyla paralellik göstermektedir. Ayrıca işlemsel bilginin kullanılması rutin problemlerin çözümünü kolaylaştırmaktadır. Bu yorum Ngu vd. (2015) ile Ngu ve Phan (2016) çalışmalarında elde edilen bulgularla uyumludur. Sekiz öğrenci ise altıncı soruya işlemsel cevap üretmişlerdir. Bu da bazı öğrencilerin kavramsal olarak cevap üretmese de işlemsel bilgilerine dayalı doğru cevaplar verebildiklerini göstermektedir. Bu bulgu, birinci soruda elde edilen bulgular ile uyumludur. Ancak 16 öğrenci geçerli bir cevap üretmemiştir. Bu bulgudan hareketle, çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğunun denklem çözme performanslarının düşük olduğu söylenebilir.

Eşitlik anlayışına ilişkin önceki yapılan araştırmaların benzer sonuçları göz önüne alındığında öğrencilerin eşittir işaretine ilişkin işlemsel bir görüşe sahip olmaları şaşırtıcı değildir. Kieran (1981) ve Rittle-Johnson ve Alibali (1999) makalelerinde öğrencilerin çoğunun bilgisinin işlemsel düzeyde oldukları belirtilmiştir. Öğrencilerin neredeyse yarısı eşittir sembolüne ilişkin kavramsal bir anlam geliştirebilse de hala birçok öğrenci işlemsel anlayışı devam ettirmektedir. Eşitlik bilgisi, geleneksel olarak öğrencilerin ilk okuldan itibaren karşılaştıkları bir kavramdır. Ancak sonraki sınıf düzeylerinde müfredat ve öğretmen tarafından eşitlik kavramı üzerine çok az zaman harcanmaktadır. Eşittir işareti, tüm matematik müfredatında bulunmasına rağmen öğrencilerin eş değerlik anlayışları kötü müfredatlar yüzünden yeterince gelişmemektedir. Buda öğrencilerin işlemsel anlayışlar geliştirmesine sebep olabilir (Knuth vd., 2005). Denklem çözümünü doğru gerçekleştiren öğrencilerin tamamı; eşittir

sembolünün anlamına ilişkin kavramsal cevaplar verebilmiş, ayrıca rutin olmayan problemlere doğru cevap üreten öğrencilerde bu gruptan çıkmıştır. Elde edilen bu bulgular, denklem çözme performansı ile eşittirin sembol bilgisi arasında ilişki olduğunu gösterebilir. Fyfe vd., (2020) çalışmalarında da; cebir problem çözme performansları ile eşittir işaretinin kavramsal bilgisi arasında ilişki olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Knuth vd. (2006) ve Fischer vd. (2019) benzer sonuçlara ulaşmışlardır. Ertekin (2017) çalışmasında, eşittirin ilişkisel bir sembol olarak anlaşılmasının cebirsel denklem çözmeyi öğrenmede önemli bir rol oynadığını belirtmiştir. Bu sonuçlar araştırmamız ile paralellik göstermektedir. Bütün bunlarla birlikte; Kieran (1992)'daki çalışmasında, öğrencilerin eşittir işaretine ilişkin kavramsal görüşlerinin denklemleri anlamlı şekilde yorumlamanın yanında denklemler üzerinde anlamlı işlem yapabilmesi içinde gerekli olduğunu belirtmiştir. Çalışmamızda KİBS'deki dört, beş ve altıncı sorulara verilen cevaplar; bu sonuçları destekler niteliktedir. Elde ettiğimiz bulgulara göre, birçok öğrenci denklem çözümünü işlemsel olarak yapabilse de anlamını tam olarak bilememekte ve rutin olmayan problemlere anlamlı cevaplar üretememektedir.

Araştırmanın ikinci bölümünde; “8.sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik ile ilgili problemleri çözerken buldukları sonucu doğrulamak için hangi kanıt şemalarını kullanmaktadır?” alt problemine cevap aranmıştır. Bunun için öğrencilerle yapılandırılmış görüşmeler yapılarak kullandıkları kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır. Elde edilen bulgular, yapılan bu araştırmanın da kavramsal çerçevesini oluşturan Harel ve Sowder'in (1998) çalışmasında elde edilen sınıflandırmalarla uyumlu gözükmektedir. Öğrencilerin tamamının; bu sınıflandırmalara göre dışsal şema ve alt şemalarını kullandıkları gözlemlenirken, diğer şemaların kullanıldığına dair bulgu elde edilememiştir. Bunun sebebi olarak; örneklemin küçük olması ve öğrencilerin ispat anlayışları gibi nedenler olduğu düşünülmektedir. Ancak bu bulguların Harel ve Sowder (2007)'deki ve Flores (2002) 'deki çalışmalarında belirtilen; öğrencilerin çoğunlukla dışsal ve deneysel şemaları kullandığı bulgusuyla uyumlu olduğu söylenebilir. Öğrencilerin dışsal kanıt şemalarını kullanmalarının sebeplerinden birisi olarak, sınıf ortamında işlemlerin altında yatan anlamların verilmesi yerine doğrudan algoritmaların ezberletildiği öğretim yöntemlerine maruz kalmaları gösterilebilir. Bu çalışmada birçok öğrenci işlemlerin doğruluğunu kontrol ederken; öncelikle işlemlerini tekrar anlatmayı ve algoritmayı doğru yapıp yapmadıklarını kontrol etmeyi tercih etmişlerdir. Bu

yöntem, sınıf ortamında klasik olarak uygulanan bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak önemli olan, işlemlerin kontrol etmekten ziyade işlemler altında yatan anlamların fark edilmesi olmalıdır.

Bu araştırmada öğrenciler dışsal kanıt şemalarından otoriter şemaları daha fazla kullanmışlardır. Bu şemayı kullanan öğrenciler, işlemlerinin doğruluğunu öğretmen ve kitap gibi otorite olarak gördüğü dış etkenlere bağlamışlardır (Flores, 2006; Harel, 2001). Otoriter şemayı kullanan öğrencilere işlemlerinin doğruluğunu nerden anladıkları sorulduğunda; genelde öğretmenin anlattıklarına bağladıkları ve sorgulamadan kabullendikleri görülmüştür. Öğrenciler problemin çözümünü gerçekleştirirken; kendi çözümlerini üretmek yerine öğretmen veya başka bir kaynaktan ezberledikleri yöntemleri kullanmayı tercih etmektedirler. Bu durum, öğretim ortamında otoriter anlayışın hâkim olmasından ve öğrenciye anlamlarını göstermeksizin algoritmaları ezberlenecek kurallar olarak gösterilmesinden dolayı ortaya çıkmış olabilir. Öğrenciler araştırmaksızın ve keşfetmeksizin kuralları ezberlediğinden, kendi bilgilerine olan güvenleri de yetersiz kalmış olabilir.

Öğrenciler çalışmada verilen problemlerin cevaplarının ve işlemlerinin doğruluğunu kanıtlamak için kullandıkları gerekçelendirmelerin otoriter şemaya uygun olmasının bir diğer sebebi de kavramın kendisiyle ilgili olabilir. Harel ve Sowder (2007) çalışmalarında, konunun yapısının da öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarını etkilediğini belirtmişlerdir. Bu bulgunun daha açık şekilde belirlenebilmesi için daha fazla çalışmaya ihtiyaç vardır. Ayrıca öğrenciler bir problemin cevap ve işlemlerini gerekçelendirmede yetersiz kaldıklarında, dışsal şemalara uygun olarak cevaplarını otoriteye dayandırıyor olabilirler.

Yalnızca A1 ve A38 kodlu öğrencilerin gerekçelendirmelerinde, alışkanlık edinilmiş ve sembolik şemaları kullandıkları tespit edilmiştir. Öğrenciler bu şemaların yanında otoriter şemayı da kullanmışlardır. Bu bulgu, öğrenci gerekçelendirme yapabilse de ikincil bir gerekçe olarak otoriteleri gösterdikleri diğer çalışmalarla uyumludur (İskenderoğlu, 2010; Flores 2002). A1 kodlu öğrenci görüşmeler esnasında alışkanlık edinilmiş şemalara uygun gerekçelendirmeler yapmıştır. Öğrenci; gerekçelendirmelerini öncelikle kendi alışkanlıklarına bağlamış, daha sonra ise bu alışkanlıklarını otoriteden elde ettiğini belirtmiştir. B38 kodlu öğrenci ise gerekçelendirmelerini, sanki işlemler bunu gerektiriyormuş gibi anlatmış ve

sonuçlarının doğruluğunu sembolik manipülasyonlara bağlamıştır. Sembolik şemada öğrenciler, işlemlerin altında yatan anlamalara bakmaksızın sembolleri gerekçe olarak kullanmaktadır. Flores (2006) çalışmasında da birçok öğrencinin sembolik gerekçeler sunduğu belirlenmiş ve bu öğrencilerin durumların niceliksel ilişkilerine odaklanmaktan çok gerekçe olarak işlemsel adımları vermişlerdir. Bunu yaparken, sembolik manipülasyonlar hakkında ne yaptıklarını bilmelerine rağmen yapılanın anlamları hakkında açıklama yapamamışlardır. Kavramsal bilgiye sahip olan öğrencilerin kanıtlarını kavramsal bilgiye dayandırmadığı bulgusuna ulaşılan Flores'in (2006) çalışmasındaki bulguları, bu çalışmanın bulgularını destekler niteliktedir. Öğrencinin kavramsal bilgisini işe koşamamasının sebeplerinden birisi, öğretim sürecinden kaynaklanıyor olabilir. Öğrenci işlemlerin altında yatan anlamalara dikkat edilmeden sadece sembol manipülasyonlarının yapıldığı derslerden dolayı bu şemayı geliştirmiş olabilir. Ancak bu şema, öğrenci işlemlerin altında yatan anlamları dikkate aldığı anda aksiyomatik şemalarına dahil olacağından olumlu sonuçlar doğurabilir. Uygun öğretim verildiğinde sembolik kanıt şemasını kullanan öğrenciler aksiyomatik kanıt şemalarına geçiş yapabilirler.

## 5.2 Sonuç

Bu tez çalışması, öğrencilerin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip olduğu matematiksel bilginin türü ve kullandıkları kanıt şemalarını nasıl değiştirdiğini incelemeyi amaçlamıştır. Bu kesimde kullanılan matematiksel bilginin türüne ilişkin sonuçlar, kanıt şemalarına ilişkin sonuçlar ve aralarındaki ilişkiler verilecektir.

Çalışmada elde edilen bulgular, birçok sekizinci sınıf öğrencisinin denklem çözme kazanımına ilişkin problem yaşadığı ve işlemsel düzeyde dahil yeterli seviyede olmadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin birçoğunun sıradan bir denklem çözme problemini beklenen düzeyde çözemediği ve yeterli bilgiye sahip olmadıkları görülmüştür. Öğrencilerin işlemsel ve kavramsal düzeylerinin belirlenmesinin ötesinde öğrenciler çoğunlukla yeterli bilgiye sahip değillerdir.

Öğrenciler eşitlik sembolünün açık kavramsal bilgisine sahip olsalar da bu sembolün anlamına uygun olarak işlem yapamamaktadırlar. Eşitlik sembolü bilgisine sahip olan 21 öğrenciden sadece üçünün matematiksel eşitliğin anlamına uygun işlem yapabilmesi eşitlik sembol bilgisine sahip olmakla buna uygun işlem yapılabilme

arasında doğrudan ilişki olmadığını göstermektedir. Ancak, “matematiksel eşitlik bilgisine uygun işlem yapabilen öğrencilerin aynı zamanda sembol bilgisine de kavramsal olarak sahip olması” bu iki durum arasında ön şart ilişkisi olabileceğini düşündürmektedir.

Elde edilen bulgular, araştırmaya katılan sekizinci sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramını iyi anlamadığını ve matematiksel eşitlik bilgisine kavramsal düzeyde sahip olmadığını göstermektedir. Öğrencilerin çoğu; verilen denklem çözme problemlerinde işlemsel bilgiye dayalı cevaplar vermiş, işlemsel bilgiyi kullanamadıkları durumlarda ise soruyu cevapsız bırakmışlardır. Buna bağlı sonuçlar göstermektedir ki, öğrenciler denklem çözümünü algoritma olarak bilseler bile altında yatan anlama dikkat etmemektedir. Bu da öğrencilerin kavramsal anlayışlarının zayıf olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmanın diğer bir önemli sonucu, öğrencilerin eşitlik sembolünü denklem çözme prosedürünün bir paçası olarak görmeleridir. Öğrenciler denklem çözümünü; benzer terimleri gruplamak, sayıları ve bilinmeyenleri birbirinden ayırmak, gerekli algoritmaları sırasıyla uygulama olarak düşünmektedirler. Bu araştırma da göstermektedir ki, denklemlerde eşitlik bilgisine işlemsel düzeyde sahip olan öğrenciler problemlere alternatif cevaplar üretememektedir. Kavramsal bilgiye sahip olan öğrenciler esnek olarak bu bilgilerini yeni durumlara uyarlayarak çözümler üretebilmişlerdir.

Ayrıca çalışmanın bir önemi, öğrencilerin matematiksel eşitliğe ilişkin kavramsal anlayışlarını belirlemek için araç geliştirilmesine yardımcı olmasıdır. KİBS aracı sınıf ortamında uygulanarak öğrencilerin kavramsal anlayışları belirlenebilir ve gerekli müdahaleler yapılabilir. Ayrıca testi uygulamak ve değerlendirmek zor değildir ve standart ölçüm testlerine göre daha fazla bilgi verebilir. KİBS aracını oluşturan sorular daha önce kullanılarak geçerli olduğu belirtilen sorulardan derlenmiş ayrıca bir soru araştırmacı ve bir uzman tarafından eklenmiştir. KİBS’ ten elde edilen verilerin analizinden elde edilen sonuçlar benzer çalışmalardan elde edilen veriler ile paralellik göstermektedir (Knuth vd., 2006; Alibali vd., 2007; Knuth vd., 2011; Baratta, 2011). Ayrıca iki uzman KİBS aracının geçerli bir araç olduğu görüşünü bildirmişlerdir.

Ek olarak araştırmada, öğrencilerin denklem çözümlerinde kullandıkları kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır. Kanıt şemaları görüşmeleri yapılan öğrencilerin tamamı, gerekçelerini açıklamakta dışsal kanıt şemalarını kullanmışlardır. Bu öğrenciler buldukları sonuçları ve işlemleri gerekçelendirirken dışsal bir kaynağa güvenmişlerdir. Çalışmaya katılan öğrenciler için; matematiksel eşitlik içeren bir problemin sonucunun doğruluğuna ikna olmak için öğretmenden veya kitaptan öğrendikleri bilgiler ya da işlemlerin şekli yeterli olmaktadır. Dışsal kanıt şemasına sahip öğrenciler, bilgiyi dış kaynaklardan doğrudan alarak kullanmışlar ve bir akıl yürütme sürecinden geçirerek öğrendiklerinin doğruluğunu düşünmemişlerdir. Bunun sebebi olarak öğretmenlerin bilgiyi doğrudan aktarması düşünülebilir.

Nihai olarak Öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları ve matematiksel bilginin türü arasındaki ilişkiyi incelemek için altı öğrenci seçilmiş ve bu altı öğrenciye ait bulgular Tablo 4.8’de özetlenmiştir.

Tablo 4.8 incelendiğinde öğrencilerin tamamının kullandığı kanıt şemaları kavramsal veya işlemsel bilgiye göre değişmeksizin dışsal kanıt şemaları olarak belirlenmiştir. Matematiksel eşitlik bilgisine işlemsel olarak sahip olan öğrenciler denklemlere yaptıkları çözümleri ve işlemleri gerekçelendirmekte yetersiz kalmaktadırlar. Bu öğrenciler, denklem çözümlerini gerçekleştirirken algoritmaları sıkı sıkıya uygulama eğiliminde olmakta ve farklı durumlarla karşılaştıklarında cevap üretememektedirler. Aynı durum kanıt şemaları için de geçerli olmaktadır. İşlemsel bilgiye sahip öğrenciler gerekçelendirme için öğrendiği sembol manipülasyonlarını tekrar etmekte ve doğruluğunu sadece otoriteye dayandırmaktadır. İşlemsel bilgiye sahip öğrencilerin denklem çözerken de zorlandıkları görülmüştür.

Bir diğer sonuç ise araştırmada beklenenin aksine kavramsal bilgiye sahip olan öğrencilerin de gerekçelendirmelerinde dışsal kanıt şemalarını kullanmalarındır. Kavramsal bilgiye sahip öğrenciler problem çözümünde gerektiğinde kavramsal bilgilerine dayanarak çözümler üretebilse de aynı başarıyı gerekçelendirmelerinde gösterememişlerdir. Kavramsal bilgiye sahip olan öğrencilerin, işlemlerinin altında yatan anlamlara dayanarak yaptıkları işlemlere dönüşümsel gerekçeler sunmaları beklense de bu öğrenciler gerekçelerinde; otoriteye, alışkanlıklarına ve anlamsız sembol manipülasyonlarına güvenmişlerdir. Buradan hareketle öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarının matematiksel bilginin türünü doğrudan etkilemediği söylenebilir.

Kavramsal bilgiye sahip öğrencilerin verdiği yanıtlar yapılan her iki değerlendirme için karşılaştırıldığında, kavramsal ve işlemsel bilgi belirleme sorularında öğrenciler kavramsal bilgilerine dayanarak gerekçe sunabilmişlerdir. Ancak mülakatlar esnasında yaptıkları işlemlerin gerekçeleri sorulduğunda yeterli cevaplar verememişlerdir. Öğrenciler kavramsal bilgiye sahip olsalar da bu bilgilerini gerekçelendirme yapmak için kullanmayı tercih etmemektedirler.

### 5.3 Öneriler

Yapılan bu çalışma sonucunda öğrencilerin matematiksel eşitliğe ilişkin kavramsal bilgilerinin yeterli olmadığı görülmektedir. Öğrencilerin öğretim ortamlarında düşüncelerini açıklamalarını teşvik etmek ve buldukları sonuçları doğrulamalarını istemek; onların hem kavramsal anlayışlarını geliştirebilir hem de yaptıkları işlemlerin altında yatan anlamları fark etmelerine olanak sağlayabilir. Öğretmenler, öğrencilerin yaptıkları işlemlere gerekçelendirme yapabilecekleri öğretim ortamları hazırlamalı, neyin geçerli bir kanıt olabileceğine ilişkin eğitim vermeli ve öğrencilerin matematiksel ifadeleri anlamlı şekilde kullanmalarını sağlanmalıdır. Çünkü bu süreç öğrencilerin formal kanıtlamalara geçiş yapabilmelerine zemin hazırlayacaktır.

Eşitliği, sadece denklem çözme prosedürlerinin bir parçası olarak görmek yetersiz bir anlayıştır. Öğrencilerin denklem çözümede kavramsal anlayışa ulaştıklarından emin olmak gerekmektedir. Öğrencilerin kavramsal anlayışlarının geliştirilebilmesi için gerekli öğretim uygulamalarının geliştirilmesi ve rutin olmayan problemler üzerinde kavramsal cevaplar bulmaya yönlendirilmesi bir çözüm olabilir.

Öğrencilerin kendi zihinsel yapılarını oluşturmaları için fırsatlar tanınması ve öğretim ortamlarının oluşturulması, öğrencilerin kanıt şemalarını geliştirmelerine yardımcı olabilir. Öğrencilere; sadece yapılan problem çözümlerinde sonuçlarının doğruluğunun sorulması yerine, yaptığı işlemleri ve elde ettiği sonuçları neden ve nasıl bulduğu irdelenerek öğrencilerin işlem ve çözümleri üzerine düşünmeleri sağlanmalıdır.

Kanıt şemaları belirleme çalışmalarına katılan tüm öğrenciler, dışsal şemalardan otoriter kanıt şemalarını kullanmışlardır. Bu sonuç, öğretmenlerin eğitim ortamlarında mutlak otorite olarak görülmesinden kaynaklanıyor olabilir. Bu öğrenciler öğretmenlerinin her zaman doğruyu bildiğini ve her zaman onlara güvendiklerini belirtmişlerdir. Her zaman doğruyu söyleyen kişinin ise doğruluğunun araştırılmasına

gerek yoktur. Bu durumun önlenmesi için öğretmenlerin mutlak otorite konumundan rehberlik edici ve yön gösterici konuma geçmesi gerekmektedir.

Matematiksel eşitliğe ilişkin kavramsal bilgiye sahip olan öğrenciler, beklenenin aksine bilgilerini dönüşümsel kanıtlar yapmak için kullanamamışlardır. Bunun sebebi olarak, öğrencinin gerekçelendirme üzerine yeterince düşünmediği ve öğretim ortamlarında öğrenciye gerekçelendirme ve kanıt üzerine eğitim verilmemesi gösterilebilir. Öğrencilerin, hem kavramsal anlayışlarını geliştirmek, hem de geçerli kanıtlar ortaya koyabilmelerini sağlamak için eğitim programlarına kanıtlama ve gerekçelendirme yapmalarını gerektirecek kazanımlar eklenebilir. Aynı bağlamda ders kitapları da öğrencilerin kendi keşiflerini yapabilecekleri ve öğretim sürecinde elde ettikleri matematiksel bilgilerini gerekçelendirebilecekleri şekilde düzenlenebilir.

Yapılan bu tez çalışmasından elde edilen sonuçların genellenebilir olması için daha fazla veriye ihtiyaç vardır. Yapılacak çalışmalarda daha geniş gruplarda kanıt şemaları matematiksel bilginin türü açısından incelenebilir. Ayrıca hem kanıt şemalarının hem de matematiksel bilgi türlerinin öznel yapısı ölçülmesini zorlaştırmaktadır. Bu yüzden bu kavramların geçerli ve güvenilir şekilde ölçülebilmesi için daha fazla çalışmaya ihtiyaç vardır.

## KAYNAKÇA

- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M. ve Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and learning*, 9(3), 221-247. <https://doi.org/10.1080/10986060701360902>
- Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). Farklı Sınıf Düzeylerindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri, Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu
- Baratta, W. (2011). Linear equations: Equivalence= Success. *Australian Mathematics Teacher*, 67(4), 6-11. <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.591443069101671>
- Birgin, O. ve Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22 (2), 529-550. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/uefad/issue/16690/173458>
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2017). Bilimsel Araştırma Yöntemleri. *Pegem Atıf İndeksi*, 1-360.
- CadwalladerOlsker, T. (2007). *Proof Schemes And Proof Writing*. Doktora Tezi, Claremont Graduate University, California, USA.
- Ceylan, T. (2012). Geogebra Yazılımı Ortamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Geometrik İspat Biçimlerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Crooks, N. M. ve Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001>
- Çontay, E. G. ve Paksu, A. D. (2017). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları, Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Denizli.

- Çontay, E. ve Duatepe Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(1), 59-100. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.397109>
- Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. Erhan Bingölbali, Mehmet Fatih Özmantar, İsmail Özgür Zenbat, Hakan Şandır, Ali Delice (Ed.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar*, 15-33, Pegem
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: a theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4 (2), 47-71. <http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.52880>.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 0 (44), 467-498. <https://doi.org/10.21764/maeuefd.305605>
- Eldekci, S. (2018). Matematik eğitimi öğretmen adaylarının kanıt şemalarının ortaya çıkarılması. *Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 9 (2), 119-136. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/aduefebder/issue/41071/467856>
- Ertekin, E. (2017). Predicting eight grade students' equation solving performances via concepts of variable and equality. *Online Submission*, 8 (21), 74-80.
- Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B. ve Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, 34(2), 439-456. <https://doi.org/10.1007/s10212-018-0384-y>
- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-274. Retrieved March 8, 2020, from [www.jstor.org/stable/41199537](http://www.jstor.org/stable/41199537)

- Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?, *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x>
- Fyfe, E. R. ve Brown, S. A. (2018). Feedback influences children's reasoning about math equivalence: A meta-analytic review. *Thinking and Reasoning*, 24(2), 157-178. <https://doi.org/10.1080/13546783.2017.1359208>
- Fyfe, E. R., Matthews, P. G. ve Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 65-85. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09947-2>
- Gholamazad, S., Liljedahl, P. ve Zaskis, R. (2004). What counts as proof? investigation of preservice elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 640-647
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for dnr-based instruction. in S. Campbell and R. Zaskis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*, *Journal of Mathematical Behavior*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation, 185-212.
- Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues In Mathematics Education*, 7, 234-283.
- Harel, G. ve Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective of proof. Lester F. (Ed.). *Handbook Of Research On Teaching And Learning Mathematics*, 2, 805-842.
- Haverhals, N. J. (2011). *Student's development in proof: A longitudinal study*, Doktora Tezi, The University of Montana, Missoula.
- Heinze, A. ve Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence., *CERME 3 Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*

- Hiebert, J., ve Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. in J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. 1–27. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Housman, D. ve Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158. <https://doi.org/10.1023/A:1025541416693>
- İskenderoglu, T., Baki, A. ve İskenderoglu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 531–536.  
<https://doi.org/10.1016/J.SBSPRO.2010.12.192>
- İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve Kanıt Şemaları, Erhan Bingölbali, Selahattin Arslan, İ.Özgür Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler*. 65-82: Pegem Akademi.
- Joffrion, H. K. (2007). *Conceptual and procedural understanding of algebra concepts in the middle grades*, Doktora Tezi, Texas And M University.
- Karakuş, F, Erşen, Z ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10 (-ERTE Özel Sayısı) , 245-266.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3), 317-326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. ve Findel, B. (2001). Adding + it up helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. ve Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence

and variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.  
<https://doi.org/10.1007/BF02655899>

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. ve Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.  
<https://doi.org/10.2307/30034852>

Koichu, B. (2009). What can pre-service teachers learn from interviewing high school students on proof and proving?. *ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 2, Taipei, Taiwan.

Liu, Y. ve Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes, *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40.  
<https://doi.org/10.1080/24727466.2013.11790328>

Marrades, R. ve Gutierrez, A. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics*. 44. 87-125. 10.1023/A:1012785106627.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0>

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shiple, H. ve Matthews, J. M. (2019). Improving children's understanding of mathematical equivalence via an intervention that goes beyond nontraditional arithmetic practice. *Journal of Educational Psychology*, 111(6), 10-23. <https://doi.org/10.1037/edu0000337>

Matematik Dersi Öğretim Programı-MDÖP. (2018), İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar. *MEB yayınları*.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of proof for the sum of two even numbers. *In PME conference*. 3, 3-353.

- Mohammed, A. A. (2016). Conceptual and procedural understanding of students' algebra concepts in secondary school mathematics. In *Society for Information Technology and Teacher Education International Conference*, 2539-2543. Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. 47(8)
- Nelson, L. J. ve Fyfe, E. R. (2019). Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition and Learning*, 14(2), 167-187. <https://doi.org/10.1007/s11409-019-09203-w>
- Ngu, B. H., ve Phan, H. P. (2016). Comparing balance and inverse methods on learning conceptual and procedural knowledge in equation solving: a cognitive load perspective. *Pedagogies: An International Journal*, 11 (1), 63-83. <https://doi.org/10.1080/1554480X.2015.1047836>
- Ngu, B. H., Chung, S. F. ve Yeung, A. S. (2015). Cognitive load in algebra: element interactivity in solving equations. *Educational Psychology*, 35 (3), 271-293. <https://doi.org/10.1080/01443410.2013.878019>
- Noelle M. Crooks, ve Martha W. Alibali. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics, *Developmental Review*, 34(4), 344-377, ISSN 0273-2297, <https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001>.
- Oflaz, G, Bulut, N ve Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152. <http://dx.doi.org/10.14689/ejer.2016.63.8>
- Ören, D. (2007). Onuncu Sınıf Öğrencilerinin Geometrideki İspat Şemalarının Bilişsel Stilleri ve Cinsiyetlerine Göre İncelenmesine Yönelik Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik*

*Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12 (2), 136-166.  
<https://doi.org/10.17522/balikesirnef.506425>

Pektaş, O. ve Bilgici, G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusunda kullandıkları kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre incelenmesi. *Kastamonu Education Journal*, 27(3), 1347-1358.  
<https://doi.org/10.24106/kefdergi.3164>

Plaxco, D. B. (2011). *Relationship between students' proof schemes and justifications*. Yüksek Lisans Tezi. Virginia Polytechnic Institute and State University

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary school journal*, 112 (4), 627-648. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/hunefd/issue/7812/102550>

Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative development of conceptual and procedural knowledge in mathematics learning and instruction. In J. Dunlosky & K. A. Rawson (Eds.), *The Cambridge handbook of cognition and education*. 124–147. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108235631.007>

Rittle-Johnson, B., ve Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford Handbook of Numerical Cognition*, 1118 – 1134.

Rittle-Johnson, B. ve Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101 (3), 529.  
<https://doi.org/10.1037/a0014224>

Rittle-Johnson, B. ve Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of educational psychology*, 91(1), 175-189. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. ve Loehr, A. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: the impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology*. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>

- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., ve Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27 (4), 587-597. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x>
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. ve Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, 93 (2), 346. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Sarı, M, Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: a case study. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (2), 295-319. [https://doi.org/10.1501/Egifak\\_0000000181](https://doi.org/10.1501/Egifak_0000000181)
- Schneider, M. ve Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178. <https://doi.org/10.1037/a0016701>
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B. ve Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525. <https://doi.org/10.1037/a0024997>
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26 (3), 9-15. Retrieved July 16, 2021, from <http://www.jstor.org/stable/41187667>
- Soucy Mccrone, S. M. ve Martin, T. S. (2004, Ekim). The impact of teacher actions on student proof schemes in geometry, *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 593-603
- Soylu, Y. ve Aydın, S. (2006). A study on importance of the conceptual and operational knowledge are balanced in mathematics lessons. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8 (2), 83-95. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/pub/erziefd/issue/5996/79804>

- Star, J. R. (2000). "Re-conceptualizing" procedural knowledge in mathematics. In *Proceedings of the twenty-second annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 219-223.
- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. ve Ktorza, D. (1991). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for research in mathematics education*, 22(2), 112-121. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.2.0112>
- Stylinou, D., Chae, N. ve Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions, *Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico.
- Tanişlı, D., Yavuzsoy Köse, N. ve Camci, F. (2017). Matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genelleme ve doğrulama bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - Journal of Qualitative Research in Education*, 5(3), 195-222. [www.enadonline.com](http://www.enadonline.com) DOI: 10.14689/issn.2148-2624.1.5c3s9m
- Türkçe Sözlük. (2011). Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(3), 234-243.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., ve Bay-Williams, J. M. (2012). Elementary and middle school mathematics. Pearson Education
- Warren, E. ve Cooper, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, 17(1), 58-72.
- Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof, *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306-336. <https://doi.org/10.1080/10986065.2010.495468>
- Yanık, H. B. (2016) Kavramsal ve işlemsel anlama, Erhan Bingölbali, Selahattin Arslan, İ.Özgür Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler*. 101-116. Pegem Akademi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (11. Baskı), Seçkin Yayıncılık.

Zeybek Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7.Sınıf Öğrencilerinin Dörtgenler Konusundaki İspat Seviyelerinin İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13 (1), 196-216.  
<https://doi.org/10.17522/balikesirnef.541576>



## EKLER

EK-1



T.C.  
AFYONKARAHİSAR VALİLİĞİ  
İl Millî Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-49809782-605.01-21578904  
Konu : Arayışma İleri

03.05.2021

### NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE (Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi: a) Valilik Makamı/res-82/03/2021 tarihli ve 21557016 sayılı Oluru,  
b) İlla tarihli ve E/20787 sayılı yazısı.

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematiği Eğitimi Tuzlu Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Barış KARAKAYA'nın "K.Serif Öğrencilerin Devletlerinde Eğitim Kavramına İlişkin Sahip Oldukları Matematiksel Bilgi Türleri ve Kullanımları Kavramlarının Arayışma İleri" konulu 1 tez çalışmasını kullanarak önce 2020-2021 Öğretim Yılı içinde Mükemmeliyetle bağlı İlgi (b) yazısında belirtilen okullarda öğrenim gören öğrencilere araştırma çalışması yapabilmeleri dair İlgi (b) talebinde bulunulmuştur.

Mükemmeliyet AR-GE Hattı üzerinden "Millî Eğitim Bakanlığı Yeterlik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü" 21/01/2020 tarihli ve B1570613-18.06.02-E.1563890 sayılı yazısı ile yayımlanan 2020/2 Nolu Gençlik doğrultusunda inceleme olup İlgi (a) "Valilik Oluru" ve sonuçlarını veri toplama anızi ekte gönderilmektedir.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Merin YALÇIN  
İl Millî Eğitim Müdürü

Not: 1- Akları çalışmalarında Mükemmeliyetle tarafından araştırma (yönlendirme) veri toplama araştırmaları yapıldıkça kullanılması arz edilmiştir.

2- Çalışmalar tamamlandıktan sonra araştırmaları birer dosyası ile Millî Eğitim Müdürlüğüne teslim edilmesi arz edilmiştir.

#### EKLER:

- Makam Oluru,
- Sonuçlarını Veri Toplama Anızi.



Bu belge güvenli elektronik imza ile onaylanmıştır.

Adres: TL, Milli Eğitim Bakanlığı An-Gen. Kararları 1/1  
Makamı: AFYONKARAHİSAR  
Tarih: 03.05.2021  
E-Posta: afyonkarahisar@meb.gov.tr  
Sayı: 2021/21578904

İmza: TOLUN FİDANÇAN  
E-Posta: Tolun.FIDANCAN@meb.gov.tr  
Tarih: 03.05.2021

Bu belge güvenli elektronik imza ile onaylanmıştır. İmza: Tolun.FIDANCAN@meb.gov.tr, Tarih: 03.05.2021, Sayı: 2021/21578904



**Denklemlerde Eşitlik Kavramına İlişkin 8. Sınıf Öğrencilerinin Kullandıkları İpot Şemalar ve Belirli Yanı Yapılandırılmış Mülakat Soruları**

- Siz Burhan KIRAKAYA tarafından yürütülen "8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEMLERDE ÇİFTLİK KAVRAMINA İLİŞKİN SAHİP OLDUKLARI MATEMATİKSEL BİLGİ TÜRLERİ VE KULLANDIKLARI KANIT ŞEMALARI ARASINDAKİ İLİŞKİ" başlıklı araştırmaya davet ediyorum. Bu araştırmanın amacı 8. sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları matematiksel bilgi türleri ve kullandıkları kanıt şemaları arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Araştırmada sizden tahminen 15 dakika ayırmanız istenmektedir.
- Bu çalışmaya katılmak tamamen **GÖNÜLLÜLÜK** esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacına ulaşması için sizden beklenen, bütün sorulara, kimserin başka veya farklı vaktinde etmesin, size en uygun gelen cevapları içtenlikle vermenizdir. **Bu formu okuyup onayladıktan sonra araştırmaya katılmaya kabul ettiğinizi söylemeye sözlersiniz.** Ancak, çalışmaya katılmama veya katıldikten sonra **herhangi bir anda çalışmaya katılmama hakkınıza** da sahipsiniz.
- Bu çalışmadan elde edilecek bilgiler tamamen araştırma amacı ile kullanılacak olup **KİŞSEL BİLGİLERİNİZ GİZLİ TUTULACAKTIR**; ancak verileriniz yayın amacı ile kullanılabilir.
- Eğer araştırmamızın amacı ile ilgili verdiğiniz bilgiler dışında, şimdi veya sonra daha fazla bilgiye ihtiyacımız olursa, araştırmamıza şimdi sorabilir veya ilişkin bilgilerinizden ulaşabiliriz.

**SORULAR**

1)

$20 - 2x = 10$  denklemini çözünüz.



20

$$3x + 5 = x - 13$$

denkleminin çözümü.

20

$12 - 3x = -5x + 9$  denkleminin çözümü.



Not: Aşağıdaki sorular araştırmacıda bulunacak ve puan yapılandırılması görüşmeler sonrasında öğrencilerle sitede olarak yönetilecektir.

- a. Sonuca nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?
- b. Bulduğun sonucu doğru bulduğunu nereden biliyorsun?
- c. Bulduğun sonucu doğruluğuna her zaman böyle mi gösterirsin?
- d. Bulduğun sonucu doğruluğuna beklentilerini nasıl ifade edersin?



**Denklemlerde Eşitlik Kavramına İlgili 8. Sınıf Öğrencilerinin Kavramsal ve İşlemsel Bilgilerini Belirleme Anketi Soruları**

- Siz İbrahim KARAKAYA tarafından yürütülen "8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEMLERDE EŞİTLİK KAVRAMINA İLİŞKİN SAHİP OLDUKLARI MATEMATİKSEL BİLGİ TÜRLERİ VE KULLANDIKLARI KANIT ŞEMALARI ARASINDAKİ İLİŞKİ" başlıklı araştırmaya davet edilmisiniz. Bu araştırmamız ancak 8. sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları matematiksel bilgi türleri ve kullandıkları kanıt şemaları arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Araştırmada sizden tahminen 20 dakika ayırmanızı istenmektedir.
- Bu çalışmaya katılmak tamamen **GÖNÜLLÜLÜK** esasında dayanmaktadır.
- Çalışmamız amacına ulaşması için sizden beklenen, bütün sorulara, kısmenli doğru veya yanlış olarak olmasın, size en uygun gelen cevapları içsallikle vermenizdir. **Bu forma olumsuz yanıtlarınız, araştırmaya katılmaya kabul edilmiş olduğunuz anlamına gelmemektedir.** Ancak, çalışmaya katılmama veya katıldıktan sonra **herhangi bir anda tamamen istediğiniz haklarınızı da saklıdır.**
- Bu çalışmadan elde edilecek bilgiler tamamen araştırma amacı ile kullanılacak olma üzere, **BİLGİLERİNİZ GİZLİ TUTULACAKTIR**; ancak verileriniz yayın amacı ile kullanılabilir.
- Eğer araştırmamızın amacı ile ilgili verdiğiniz bilgiler dışında, yineli veya sonra daha fazla bilgiye ihtiyacımız olursa, araştırmamıza yineli sorabilir veya ihtiyacımız olan bilgilerden alabiliriz.

**SORULAR**

1)

$$3x - 9 = 2x + 6$$

Yukarıdaki denklemleri çözünüz.



2)

$$x + 5 = 7$$

a) İşaretle gösterilen sembolün adı nedir?  
Cevap:

b) Bu sembolün anlamı nedir? Ne işe yarar?  
Cevap:

c) Bu sembol farklı anlamlara gelebilir mi? Varsa bu anlamları nelerdir? Açıklayınız.  
Cevap:

3)

$x + y = y + x$  ifadesi doğru mudur? Sebepini açıklayınız.

Cevap:



4)

$x - 5 = 20$  denkleminde  $x=25$  dir. Buna göre ;

$x - 5 + 40 = 20 + 40$  denkleminde  $x$  in ne olabileceğini denklemleri çözümlü yapmadan söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Cevap:

5)

$$2x + 15 = 31$$

$$2x + 15 - 10 = 31 - 10$$

Yukarıda verilen iki denkleminde  $x$  değerleri birbirine eşit midir? Denklem çözümlü yapmadan karar veriniz. Sebabini açıklayınız.

Cevap:



9)

Alınan matematik dersinde bir denklemin çözümünde aşağıdaki işlemleri yapmış. Yapılan işlemlerde hata var mıdır? Varsa gösteriniz ve sebebini açıklayınız.

$$\begin{aligned}2x + 5 &= 11 \\2x + 5 - 5 &= 11 + 5 \\2x &= 16 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{16}{2} \\x &= 8\end{aligned}$$

Cevap:





**NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ**  
**SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMALAR ETİK KURULU**  
**BASKANLIĞI**  
**ETİK KURUL KARARI**

<b>Etik Karar Toplantı Tarihi/Sayısı ve Karar No</b>	<b>Tarih:</b> 15/01/2021	<b>Toplantı Sayısı:</b> 01	<b>Karar No:</b> 2021/18
<b>Araştırmanın Başlığı</b>	İ-Sınıf Öğrencilerinin Denklemlerde Eşitlik Kavramına İlişkin Sahip Oldukları Matematisel Bilgi Türleri Ve Kullanıldıkları Kayıt Soruları (Anonimleştirilmiştir)		
<b>Sorumlu Araştırmacı</b>	Dr. Öğr. Üyesi Ahmet CHANGIR		
<b>Yardımcı Araştırmacılar</b>	Burhan KARAKAYA		
<b>Etik Karar Kararı</b>	Oy Çoğunluğu <input type="checkbox"/>		Oy Birliği <input checked="" type="checkbox"/>
	Uygun <input checked="" type="checkbox"/>	Uygun Değil <input type="checkbox"/>	Düzeltilir* <input type="checkbox"/> Gereksizlik** <input type="checkbox"/>
<b>Diğerleme ile görüşmeleri *</b>			
<b>Gereksizlik ile görüşmeleri**</b>			

ASLI GİBİDİR  
21/01/2021