



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI VE  
BİNOMİAL ÖZELLİKLERİ**

**Musa YASAGAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2020  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Musa YASAGAN tarafından hazırlanan “Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Binomial Özellikleri” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ..... Anabilim Dalı’nda YÜKSEK

ul edil

### Dikkat!

Tezin ilk tesliminde boş bırakınız.  
Tez savunması yapıp, jüri tarafından kabul edildikten sonra tez savunması tarihini yazınız.  
Bu bilgi notunu çıktı almadan önce siliniz

### Dikkat!

Tez savunması yapıp, jüri tarafından kabul edildikten sonra birini siliniz.  
Bu bilgi notunu çıktı almadan önce siliniz

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Unvanı Adı SOYADI

#### Danışman

Unvanı Adı SOYADI

#### Üye

Unvanı Adı SOYADI

#### Üye

Unvanı Adı SOYADI

#### Üye

Unvanı Adı SOYADI

### İmza

.....

### Dikkat!

Tezin ilk tesliminde jüri üyeleri yazılmamalıdır.  
Jüri üyesi Yüksek Lisans için 3 doktora için ise 5 kişidir. Uygun şekilde düzenleyiniz  
Bu bilgi notunu çıktı almadan

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Musa YASAGAN

Tarih: 25.06.2020

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI VE BİNOMİAL ÖZELLİKLERİ

**Musa YASAGAN**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin GÜLEÇ**

**2020, 60 Sayfa**

**Jüri**

**Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin GÜLEÇ  
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER  
Doç. Dr. Necati TAŞKARA**

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili tanımlar verilmiş ve bu sayıların binomial özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, Fibonacci sayılarının tarihçesinden bahsedilmiş, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili yapılmış olan çalışmaların literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde, binom ve Pascal üçgeninin tarihçesinden kısaca bahsedilmiş ve bunlarla ilgili özellikler ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, altın oran ve üreteç fonksiyonundan bahsedilip, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili özdeşlikler ve binomial özellikleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarının sağladığı yeni binomial özellikleri elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Altın oran, Binom, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Pascal üçgeni

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS AND THEIR  
BINOMIAL PROPERTIES**

**Musa YASAGAN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Hasan Hüseyin GÜLEÇ**

**2020, 60 Pages**

**Jury**

**Asst. Prof. Dr. Hasan Hüseyin GÜLEÇ  
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER  
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA**

In this study, definitions related to Fibonacci and Lucas numbers are given and binomial properties of these numbers are examined.

In the first chapter, the history of the Fibonacci numbers is mentioned and the literature summary of the studies on the Fibonacci and Lucas numbers is given.

In the second part, the history of the binomial and Pascal triangle is briefly mentioned and the properties and theorems related to them are given.

In the third section, the golden ratio and generating function are mentioned and the identities and binomial properties of Fibonacci and Lucas numbers are emphasized.

In the fourth section, new binomial properties provided by Fibonacci and Lucas numbers were obtained.

**Keywords:** Golden ratio, Binomial, Fibonacci numbers, Lucas numbers, Pascal's triangle

## ÖNSÖZ

Bu çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin GÜLEÇ'e teşekkürlerimi sunarım.

Musa YASAGAN  
KONYA-2020



# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
2.1. Binom Katsayıları ve Özellikleri .....	5
2.2. Pascal Üçgeni.....	9
3. FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ.....	12
3.1. Altın Oran .....	12
3.2. Üreteç Fonksiyonu .....	13
3.3. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri .....	15
3.4. Lockwood Özdeşliği .....	30
3.5. Tek İndisli Fibonacci Sayıları ve Pascal Üçgeni .....	33
3.6. Lucas Sayıları ve Pascal Üçgeni .....	35
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	37
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	48
6. KAYNAKLAR .....	49
ÖZGEÇMİŞ .....	52

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\mathbb{N}$  : Doğal sayılar

$\mathbb{Z}$  : Tam sayılar

$F_n$  :  $n$ . Fibonacci sayısı

$L_n$  :  $n$ . Lucas sayısı

$\Sigma$  : Toplam sembolü

! : Faktöryel sembolü

## 1. GİRİŞ

Fibonacci orta çağ Avrupa'sının en seçkin matematikçilerinden biridir. Matematiksel yazılarında verdiği bazı gerçekler haricinde hayatı hakkında çok az şey bilinmektedir. Fibonacci, 1170 yılında İtalya'nın Pisa kentinde doğduğundan kendisine Pisalı Leonardo da denir. (Fibonacci, Bonacci'nin oğlu anlamına gelen "Filius Bonacci" nin kısaltmasıdır.) Babası Guglielmo karşı sahildeki Müslümanlarla ticaret yapan ve oğlunun ticaretini takip etmesini isteyen başarılı bir tüccardır. Daha sonra babası Pisalı tüccarların yaşadığı Kuzey Afrika'da bugünkü Cezayir'de Bugia liman kentine gümrük toplayıcısı olarak atanır. Babası oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Araplarla olan bu ilgi ve derslerden, Harizmi'nin büyük kolaylıklar sağlayan rakamlarını, Arapçayı ve hesaplarını burada öğrenir.

Fibonacci, yaklaşık 1200 yılında 30 yaşındayken Pisa'ya geri döner. 1202 yılında öncü çalışması olan "Liber Abaci" (Abaküs Kitabı) isimli kitabını yayımlar. Leonardo Fibonacci'nin en büyük hizmeti, Harizmi'nin matematiği ile, çok kullanışlı olan Hint ve Arap karışımı sayılarını batıya tanıtmak olmuştur.  $x$ ,  $y$  ve  $z$  sayıları birer tamsayı olmak koşuluyla, daha çok bilinmeyen bulunan Diophantus'un  $x^n + y^n = z^n$  genel denklemlerinin çözümü üzerine de çalışmaları vardır. Leonardo, Hint sayılarının kullanılmasını artırmanın yanında, matematiğe çok şey katmıştır. Günümüz matematikçileri onu, Liber Abaci kitabında yazdığı ve indirgemeli dizilerin ilk misali olan Fibonacci sayılarıyla hatırlarlar. Fibonacci şu problemi ortaya atar:

Bir adam her yanı kapalı bir yere bir çift tavşan koymuş. Eğer bir çift tavşan her ay yeni bir çift tavşan meydana getirirse ve dünyaya gelen her yeni çift sonraki ay üretken olursa, bir yıl sonunda tavşan sayısı ne olur?

Fibonacci hesaplamalarının sonucu olarak 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 sayı dizisini bulmuştur. Sayı dizisindeki her terim, kendinden evvelki iki terimin toplamını verir. Bu sayı dizisi, 1600'lerin başlangıcında cebirsel gösterimin ilerlemesinden sonra, 1634 yılında Fransız kökenli Felemenkli matematikçi Albert Girard aracılığıyla,  $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$  biçiminde formüleleştirilmiştir. Bu eşitlikteki  $U$ , sayıyı aşağıdaki indis ise, sayının sıralamasını verir. Onun bu buluşu bu kadarla da bitmemiştir. 1753 yılında Glasgow Üniversitesi'nden bilim adamı Robert Simson, sayı dizisi arttıkça, ardarda gelen iki sayının oranının da tedricen, klasik sanatta mühim bir yeri olan altın oranı gösteren 1,6180... ya da  $(1 + \sqrt{5})/2$  sayısına yaklaştığını belirlemiştir.

On dokuzuncu yüzyılda ise, Fransız matematikçi Eduard Lucas, Fibonacci sayılarının bitki bilimi bakımından dikkat çekici nitelikler bulundurduğunu, mesela papatya filizlerinin ortasında bulunan helezonların adetlerinin art arda gelen iki Fibonacci sayısını verdiğini tespit etmiştir. 1962 yılında California’da, Fibonacci sayılarıyla ilgili konular üzerinde araştırmaları desteklemek amacıyla Fibonacci derneği kurulmuştur.

Özellikle botanik ve genetik üzerine araştırmalar yapanlar bu konuyu çok iyi uygulamaktadırlar. Son yıllarda bu konuda ciltlerce kitaplar yazılarak bilimsel yayınlar yapılmıştır. Bu amaçla özel bir matematik bile geliştirilmiştir. Son yıllarda dergilerde botanik ve genetikle ilgili bu matematik üzerinde çok sayıda ve ileri matematik bilgisi isteyen yayınlar yapılmıştır. Halen bu konu botanikçilerin en moda bilimsel çalışma alanlarından biri olma özelliğini sürdürmektedir (Dönmez 2005).

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Son yıllarda Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır.

Azarian (2012 (a)), Fibonacci sayıları ile ilgili özdeşliklerin sayısal değerlerinin hızlı bir şekilde hesaplanması için binomial toplamlar üretmiştir.

Ayrıca Azarian (2012 (b)), önce Lucas sayılarının ilgili özelliklerinin sonra da, Fibonacci ve Lucas sayılarını kullanarak oluşan özdeşliklerin sayısal değerlerinin hızlı bir şekilde hesaplanması için binomial toplamlar vermiştir.

Bulut (2017), Pascal üçgeninden faydalanarak Fibonacci dizisinin  $n$ . elemanını doğrudan bulabilen bir formül üretmiştir. Pascal üçgenine sol alttan sağ yukarı doğru diagonal düzlemdeki tüm elemanlar toplandığında Fibonacci dizisinin elemanları sırayla hesaplanabilmektedir. Bu düzlemde gizli olarak bulunan örüntü, matematikteki kombinasyon, tümevarım ve fonksiyon konularını modelleyerek yeni bir formül haline dönüştürmüştür.

Falcon ve Plaza (2009), binomial,  $k$ -binomial, artan ve azalan dönüşümleri  $k$ -Fibonacci dizisine uygulamıştır. Bu şekilde yeni diziler için birçok formül sunmuş ve kanıtlamıştır. Ayrıca daha önce elde edilen dizilerin ters dönüşümlerini tanımlamıştır.

Frontczak (2018), Balans ve Lucas-Balans sayılarını içeren genel hibrid konvolüsyon özdeşliklerini ifade etmiştir. Ayrıca binom katsayılarını ve Catalan, Fibonacci ve Lucas gibi sayı dizilerini içeren örneklerin farklı sınıflarını vermişlerdir.

Gulec ve Ark. (2013), geliştirilmiş Fibonacci sayılarını kullanarak, Fibonacci ve Lucas sayılarını elde etmişlerdir. Ayrıca, binom katsayılı geliştirilmiş Fibonacci sayılarının bazı yeni özelliklerinin yeni bir yolla yazılmasını araştırmışlardır.

Hetmaniok ve Ark. (2017), karmaşık çarpanlarla ölçeklendirilen Fibonacci sayılarının binomial transformasyon formülleri üzerinde durmuşlardır.

Hoggatt ve Lind (1968), Fibonacci sayıları ve binom katsayıları arasındaki bağlantıyı içeren bir dizi sonuç çıkarmışlardır.

Kocer ve Ark. (2009), Fibonacci ve Lucas  $p$ -sayılarının  $m$ -genişlemesini tanımlamışlar ve  $p$  ve  $m$ 'nin özel değerleri için sırasıyla;  $p=1$  ve  $m=1$  için bilinen Fibonacci ve Lucas sayılarını,  $p=1$  ve  $m=2$  için Pell ve Pell-Lucas sayılarını,  $m=1$  için Fibonacci ve Lucas  $p$ -sayılarını,  $p=1$  için Fibonacci  $m$ -sayılarını,  $m=2$  için Pell ve Pell-Lucas  $p$ -sayılarını elde etmişlerdir. Daha sonra genelleştirilmiş Binet formülünü kullanarak Fibonacci ve Lucas  $p$ -sayılarının  $m$ -genişlemesinin sürekli fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Oğlakkaya (2010), Fibonacci sayılarının özellikleri üzerinde durmuş, Fibonacci matrislerinin Pascal matrisi, Stirling matrisi ve Bell matrisi ile arasındaki bağlantıları incelemiştir. Ayrıca bu matrisler aracılığıyla bazı kombinyonel özdeşlikler ve eşitsizlikler üretmiştir.

Sun Zhi-Wei (2009), merkezi binom katsayıları ve Lucas sayı dizisini içeren bazı eşleşmeler elde etmiştir. Örneğin,  $\{F_n\}_{n \geq 0}$  Fibonacci dizisi ve  $p > 5$  asal sayı olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{F_k}{12^k} \binom{2k}{k} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & p \equiv \pm 1 \pmod{5} \\ 1 \pmod{p}, & p \equiv \pm 13 \pmod{30} \\ -1 \pmod{p}, & p \equiv \pm 7 \pmod{30} \end{cases}$$

eşitliğini elde etmiştir.

Taskara ve Ark. (2009), Lucas sayı dizilerini yeni bir yolla elde etmek için binom katsayılı Lucas sayılarının bazı yeni özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca, Fibonacci sayıları ile ilgili bazı önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

## 2.1. Binom Katsayıları ve Özellikleri

Binom katsayıları  $(x + y)^n$  nin binom açılımının gelişiminde merkezi bir rol oynamaktadır. Euclid  $n = 2$  için bu açılımı biliyordu ve bunu “*Elements*” isimli klasik çalışmasında milattan önce 300 yılı civarında gösterdi. Hintli matematikçi ve astronom Aryabhata (476-550)  $n = 2$  ve  $n = 3$  için bu açılımı yapabiliyordu. Pozitif tam sayılı üsteller için binom teoremi Fars şair ve matematikçi Ömer Hayyam (1048-1131) tarafından bulunmasına rağmen, İngiliz matematikçi ve fizikçi Isaac Newton (1642-1727) teoremin şimdiki halini keşfederek literatüre geçti (Koshy 2014).

**Tanım 2.1.1.**  $n$  ve  $k$  negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, binom katsayısı  $\binom{n}{k}$  aşağıdaki şekilde tanımlanır (Koshy 2018).

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

**Teorem 2.1.2.**  $r$  ve  $n$  negatif olmayan tam sayılar ve  $r \leq n$  olmak üzere,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Tanım 2.1.1’den

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

dir. ■

**Teorem 2.1.3.** (Pascal özdeşliği)  $n$  ve  $r$  pozitif tam sayılar ve  $r \leq n$  için,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Tanım 2.1.1. kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!r}{(r-1)!(n-r)!r} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r-1)!(n-r)} \\
 &= \frac{(n-1)!r + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 &= \binom{n}{r}
 \end{aligned}$$

olur. ■

**Sonuç 2.1.4.** (Toplam Özelliği)  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

dir (Nesin 2010).

**İspat:**

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$  olduğundan, sol taraf

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r}$$

toplamıdır. Birinci ve ikinci terimlerin toplamı, Pascal özdeşliğinden

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$$

denklemleriyle tek terime düşürelim. Bulduğumuz ifadenin ilk terimini yine Pascal özdeşliğinden,

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$$

denklemleriyle tek terime düşürelim. Bu biçimde sırasıyla işlem sürdürülürse terim sayısı teke indirilebilir ve

$$\begin{array}{c} \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \binom{n+2}{1} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \binom{n+3}{2} \\ \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \binom{n+r+1}{r} \end{array}$$

elde edilir. ■

**Sonuç 2.1.5.** (Newton Özdeşliği)  $r$ ,  $k$  ve  $n$  negatif olmayan tam sayılar ve  $r \leq k \leq n$  olmak üzere,

$$\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$$

ifadesi bulunur (Nesin 2010).

**İspat:** Tanım 2.1.1.'den

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{r! (k-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)! r! (k-r)!} \\
&= \frac{n! (n-r)!}{(n-r)! (n-k)! r! (k-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)! r!} \frac{(n-r)!}{(n-k)! (k-r)!} \\
&= \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}
\end{aligned}$$

dir. ■

Aşağıda binom ve toplamları ile ilgili bazı özellikler verilmiştir (Nesin 2010).

1.  $\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$ .
2.  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} = (n-k+1) \binom{n}{k-1}$ .
3.  $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k} \binom{m}{0} + \binom{n}{k-1} \binom{m}{1} + \binom{n}{k-2} \binom{m}{2} + \dots + \binom{n}{0} \binom{m}{k}$ .
4.  $\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k}$ .
5.  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ .
6.  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$ .
7.  $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{n}{k} = \binom{3n}{n}$ .
8.  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$ .
9.  $\sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{k-1}{r-1} = \binom{n+k-1}{k}$ .
10.  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .
11.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$ .
12.  $\sum_{m=0}^n \binom{2n+1}{2m+1} = 4^n$ .
13.  $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k$ .



Pascal üçgeninin ilginç özelliklerinden bazıları,

- Her satır 1 ile başlar ve 1 ile biter.
  - Teorem 2.1.2. den görüldüğü gibi, Pascal üçgeni ortadaki dikey hat boyunca simetriktir.
  - Her satırdaki herhangi bir iç sayı, bir önceki satırdaki hemen soluna ve sağına denk gelen sayıların toplamıdır.
  - $n$ . satırdaki sayıların toplamı  $2^n$  dir.
- şeklindedir.

**Teorem 2.2.1.** (Binom Teoremi)  $x$  ve  $y$  herhangi reel sayılar ve  $n$  negatif olmayan bir tam sayı olsun. Bu takdirde,

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

dir (Koshy 2014).

**İspat:**

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ tane}}$$

olduğunu biliyoruz. Açılımdaki her terim  $Cx^{n-r}y^r$  formundadır.  $0 \leq r \leq n$  olmak üzere,  $C$  sabiti  $x^{n-r}y^r$  nin açılımdaki meydana gelme sayısını sayar.  $x^{n-r}$  deki  $x$ , eşitliğin sağ tarafındaki  $n - r$  tane çarpanın herhangi birinden,  $y^r$  deki  $y$  de, kalan  $r$  çarpandan herhangi birinden seçilebilir. Böylece  $n - r$  tane  $x$ ,  $\binom{n}{n-r}$  farklı yolla ve  $r$  tane  $y$  de,  $\binom{n}{r}$  farklı yolla seçilebilir. Çarpma prensibine göre,  $C = \binom{n}{n-r} \binom{n}{r} = \binom{n}{r}$  olur. Bu her  $r$  için doğru olduğundan toplama ilkesine göre,

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

şeklinde elde edilir. ■

**Sonuç 2.2.2.**  $x$  herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$(1 + x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

$$(1 - x)^n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^r$$

olur (Koshy 2018).

**Sonuç 2.2.3.**  $n$  negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere,

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

$$\sum_{r \text{ çift}} \binom{n}{r} = \sum_{r \text{ tek}} \binom{n}{r}$$

olur (Koshy 2018).

### 3. FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Her ne kadar Fibonacci sayıları ve onun tekrarlı formülasyonları İtalyan matematikçi Pisa'lı Leonardo'dan (yaklaşık 1170-1250) sonra adlandırılmış olsalar da Hindistan'da Fibonacci'den birkaç yüzyıl önce biliniyorlardı. Virahanka tarafından milattan sonra 600-800 yılları arasında, MS 1135'te Gopala tarafından ve MS 1150 civarında Acharya Hemachandra tarafından keşfedilmiştir. Ayrıca, Narayana Pandit (1340-1400) tarafından keşfedilen bir formülün özel bir hali olarak da ortaya çıkmaktadırlar (Koshy 2014).

Bu bölümde altın oranın tanımı, üreteç fonksiyonu, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin tanımları ve bu sayı dizilerinin Binet formülleri, karakteristik denklemleri ve bazı özellikleri verilecektir.

#### 3.1. Altın Oran

Altın oran öyle etkileyici bir sayıdır ki Fibonacci'den on altı yüzyıl önce eski Yunanlılar tarafından biliniyordu. Onlar bu sayıyı "Altın Bölüm" olarak isimlendirdiler.

Yunanlılardan önce, eski Mısırlılar büyük piramitlerinin inşasında kullandılar. Eski Yunan medeniyetinin varlığından yüzlerce yıl önce yazılmış ve şimdi İngiliz müzesinde bulunan Ahmes Papirüsü, MÖ 3070 civarında büyük piramit Giza'nın inşasında altın oranın nasıl kullanıldığına dair detaylı bir hesap içerir. Ahmes bu sayıdan "Kutsal Oran" olarak bahsetmektedir (Koshy 2018).

Geometrik olarak,  $AB$  doğru parçası üzerinde bir  $C$  noktası alalım öyle ki, daha büyük parçanın uzunluğu, tüm parçanın uzunluğu ve daha küçük parçanın uzunluğu ile orantılı olsun. Yani  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$  dir ki, burada  $|AB| \neq 0$ ,  $|AC| \neq 0$  ve  $|CB| \neq 0$ .



Şekil 3.1.1.

İlk önce  $\frac{|AB|}{|AC|}$  oranının pozitif değerini bulalım. Kolaylık olması için

$$x = \frac{|AB|}{|AC|} \quad (x > 0)$$

olsun. O zaman

$$x = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC + CB|}{|AC|} = 1 + \frac{|CB|}{|AC|} = 1 + \frac{1}{\frac{|AC|}{|CB|}} = 1 + \frac{1}{\frac{|AB|}{|AC|}} = 1 + \frac{1}{x}$$

olur.

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

denkleminde her iki taraf  $x$  ile çarpılarak,

$$x^2 = x + 1 \quad \text{ya da} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur. Burada  $\alpha$  altın orandır (Hoggatt 1969).

### 3.2. Üreteç Fonksiyonu

Üreteç fonksiyonları rekürans ve kombinyonel problemlerin çözümü için kuvvetli bir araçtır. Bu fonksiyonlar Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) tarafından keşfedilmiştir. Üreteç fonksiyonları temelde çeşitli katsayıları takip eden kuvvet serileridir. Başka bir deyişle “gösterim için sayı dizilerini astığımız çamaşır ipleridir” (Wilf 1994).

Matematiksel olarak  $a_0, a_1, a_2, \dots$  herhangi reel sayılar olmak üzere,

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

fonksiyonu,  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  dizisinin üreteç fonksiyonudur. Üreteç fonksiyonlarında serilerin yakınsamasıyla ilgilenmiyoruz.  $x^n$ ,  $a_n$  katsayıları için sadece bir yer göstericidir.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ve  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  üreteç fonksiyonları toplanabilir, çıkarılabilir ve çarpılabilirler.

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$  olmak üzere,  $\{c_n\}$  dizisi,  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  dizilerinin konvolüsyonudur ve üreteç fonksiyonu  $f(x) \cdot g(x)$  dir.

Özellikle,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = g(x)$  dir. Böylece her  $n$  için  $a_n = 1 = b_n$  dir. O zaman  $c_n = \sum_{i=0}^n 1 \cdot 1 = n + 1$  dir. Buradan her pozitif tamsayı 1'lerin dizisinin kendisiyle konvolüsyonu ile elde edilebilir. Yani,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olur. Farz edelim ki,  $a_n = n + 1$  ve  $b_n = 1$  olsun. Bu takdirde,

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n (i+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

olur ki, böylece  $t_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  üçgensel sayıları  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  ve

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  fonksiyonları tarafından üretilebilir (Koshy 2007) yani,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

dir (Koshy 2014).

**Örnek 3.2.1.** 1, 6, 35, 204, 1189, ... şeklinde devam eden sayı dizisinin üreteç fonksiyonunu bulalım (Koshy 2014).

**Çözüm:**

$g(x)$  üreteç fonksiyonu  $g(x) = x + 6x^2 + 35x^3 + 204x^4 + \dots + b_n x^n + \dots$  olsun.

$$6xg(x) = 6x^2 + 36x^3 + 210x^4 + \dots + 6b_{n-1}x^n + \dots$$

$$x^2g(x) = x^3 + 6x^4 + \dots + b_{n-2}x^n + \dots$$

$$(1 - 6x + x^2)g(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

dır.

$$\frac{x}{1 - 6x + x^2} = 1 + 6x + 35x^2 + 204x^3 + 1189x^4 + \dots$$

bu istenen üreteç fonksiyonudur.

### 3.3. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 3.3.1.**  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  ve  $n > 1$  olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ile tanımlanan  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir.

**Tanım 3.3.2.**  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  ve  $n > 1$  olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

ile tanımlanan  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir.

Her ne kadar Fibonacci ve Lucas sayıları genellikle sadelik için özylenelemeli olarak tanımlansa da,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  sayıları  $x^2 = x + 1$  ikinci dereceden denklemin kökleri olmak üzere, Binet formülü olarak adlandırılan

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde de, tanımlanabilirler (Koshy 2014).

Binet formülünü aşağıdaki şekilde elde edebiliriz. Buna göre,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

ikinci dereceden lineer homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümü için  $x_n = \lambda^n$  alarak,

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \\ \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - 1) &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \end{aligned}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri,

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha \text{ ve } \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta$$

olarak bulunur. Buradan

$$F_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n$$

denkleminde

$$\begin{aligned} n = 0 \text{ için } c_1 + c_2 &= 0 \\ n = 1 \text{ için } c_1\alpha + c_2\beta &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem çözülerek,

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Bu değerler yerine yazılırsa,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Fibonacci sayı dizisi için Binet formülü bulunmuş olur.

Şimdi, tamsayı dizilerinin terimlerini elde etmekte kullanılan üretic fonksiyonunu Fibonacci sayı dizisi için bulalım.

Farz edelim ki,

$$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots + F_nx^n + \dots$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2)F(x) &= F(x) - xF(x) - x^2F(x) \\ &= F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots \\ &\quad - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - \dots \\ &\quad - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - F_4x^6 - \dots \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2)F(x) &= F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \\ &\quad (F_4 - F_3 - F_2)x^4 + (F_5 - F_4 - F_3)x^5 + \dots + \end{aligned}$$

$$(F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})x^{n-1} + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \dots$$

elde edilir. Buradan Fibonacci sayılarının tanımını kullanarak,

$$(1 - x - x^2)F(x) = F_1x = x$$

bulunur. Buradan, Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde edilir (Horadam 1965).

Fibonacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonunu aşağıdaki şekilde de bulabiliriz. Üreteç fonksiyonuna  $F(x)$  dersek,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots$$

$$F(x) = F_1x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

$$F(x) = F_1x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})x^n$$

$$F(x) = F_1x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n$$

$$F(x) = F_1x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2} = F(x)$$

olduğundan

$$F(x) = F_1x + xF(x) + x^2F(x)$$

olur. Denklem düzenlenirse,

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = F_1x$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde Lucas sayı dizisi içinde üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

Fibonacci ve Lucas sayıları için çok sayıda özdeşlik vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir (Koshy 2018).

$$(1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_i = L_{2n}$$

$$(2) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} L_i = L_n$$

$$(3) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} F_{i+j} = (-1)^{j+1} F_{n-j}$$

$$(4) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} L_{i+j} = (-1)^j L_{n-j}$$

$$(5) 2^{n-1} F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} 5^i \quad (\text{Catalan, 1846})$$

$$(6) 2^{n-1} L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} 5^i \quad (\text{Catalan, 1846})$$

$$(7) \sum_{i=0}^{n-1} (-2)^i \binom{n}{i} F_i = \begin{cases} 2^i F_i - 2 \cdot 5^{(n-1)/2}, & n \text{ tek} \\ -2^i F_i, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (\text{Ferns 1964})$$

$$(8) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} L_{2i} = (-1)^n L_n \quad (\text{Gould 1963})$$

$$(9) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} F_{2i} = (-1)^n F_n \quad (\text{Gould 1963})$$

$$(10) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} F_{r+i} = F_{mn+r} \quad (\text{Vinson 1963})$$

$$(11) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} F_{k+2i} = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n+k}, & n \text{ tek} \\ 5^{n/2} F_{n+k}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$(12) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} L_{k+2i} = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_{n+k}, & n \text{ tek} \\ 5^{n/2} L_{n+k}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$(13) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} 2^{1-i} L_i = 5^n \quad (\text{Brown 1967})$$

$$(14) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} 2^{1-i} F_i = 0 \quad (\text{Brown 1967})$$

$$(15) \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} F_{4mk} = L_{2m}^n F_{2mn} \quad (\text{Hoggatt 1968})$$

$$(16) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} = F_{2n+j}$$

$$(17) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_{i+j} = L_{2n+j}$$

**Teorem 3.3.3.**  $k$  negatif olmayan tam sayı ve  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \alpha^{2n} = 5^{\frac{k}{2}} \cdot \alpha^k$$

dir (Carlitz, Ferns 1970).

**İspat:**  $k$  üzerinden iterasyon metodunu uygulayalım. O zaman

$$5^{\frac{0}{2}} \cdot \alpha^0 = \binom{0}{0} \alpha^0$$

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^1 = 2 + \alpha = 1 + \alpha^2 = \binom{1}{0} \alpha^0 + \binom{1}{1} \alpha^2$$

$$5^{\frac{2}{2}} \cdot \alpha^2 = 1 + 2\alpha^2 + \alpha^4 = \binom{2}{0} \alpha^0 + \binom{2}{1} \alpha^2 + \binom{2}{2} \alpha^4$$

olur. Bu şekilde işlem yapmaya devam edilirse,

$$5^{\frac{3}{2}} \cdot \alpha^3 = \binom{3}{0} \alpha^0 + \binom{3}{1} \alpha^2 + \binom{3}{2} \alpha^4 + \binom{3}{3} \alpha^6$$

$$5^{\frac{4}{2}} \cdot \alpha^4 = \binom{4}{0} \alpha^0 + \binom{4}{1} \alpha^2 + \binom{4}{2} \alpha^4 + \binom{4}{3} \alpha^6 + \binom{4}{4} \alpha^8$$

⋮



olur. Buradan da,

$$\begin{array}{c}
 \alpha^0 \\
 \alpha^2 \\
 \alpha^4 \\
 \alpha^6 \\
 \alpha^8 \\
 \vdots \\
 \alpha^{2k}
 \end{array}
 \left[
 \begin{array}{cccccc}
 5^{\frac{0}{2}} \cdot \alpha^0 & 5^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^1 & 5^{\frac{2}{2}} \cdot \alpha^2 & 5^{\frac{3}{2}} \cdot \alpha^3 & 5^{\frac{4}{2}} \cdot \alpha^4 & \dots & 5^{\frac{k}{2}} \cdot \alpha^k \\
 \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \dots & \binom{k}{0} \\
 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \dots & \binom{k}{1} \\
 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{k}{2} \\
 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \dots & \binom{k}{3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \dots & \binom{k}{4} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{k}
 \end{array}
 \right]$$

matrisi elde edilir. Bu matristen de görüldüğü gibi,

$$5^{\frac{k}{2}} \cdot \alpha^k = \binom{k}{0} \alpha^0 + \binom{k}{1} \alpha^2 + \binom{k}{2} \alpha^4 + \binom{k}{3} \alpha^6 + \dots + \binom{k}{k} \alpha^{2k}$$

dir. Böylece istenilen elde edilmiş olur. ■

**Teorem 3.3.4.**  $k$  pozitif tek tam sayı ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \beta^{2n} = -5^{\frac{k}{2}} \cdot \beta^k$$

dir (Carlitz, Ferns 1970).

**İspat:** Teorem 3.3.3. 'e benzer şekilde ispat yapılır. ■

**Teorem 3.3.5.**  $k$  pozitif çift tam sayı ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \beta^{2n} = 5^{\frac{k}{2}} \cdot \beta^k$$

dir (Carlitz, Ferns 1970).

**İspat:** Teorem 3.3.3. 'e benzer şekilde ispat yapılır. ■

**Sonuç 3.3.6.**  $k$  negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{2n} = \begin{cases} 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_k, & k \text{ çift ise} \\ 5^{\frac{k-1}{2}} \cdot L_k, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Fibonacci sayı dizisi için Binet formülünü kullanarak ispatlayalım.  
 $k$  negatif olmayan bir çift tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{2n} &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \frac{\alpha^{2n}}{\alpha - \beta} - \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \frac{\beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \alpha^{2n} - \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \beta^{2n} \right] \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.3. ve Teorem 3.3.5. 'e göre,

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_n L_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \left( 5^{\frac{k}{2}} \cdot \alpha^k - 5^{\frac{k}{2}} \cdot \beta^k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 5^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \\
&= 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_k
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$k$  pozitif tek tamsayısı için Teorem 3.3.3. ve Teorem 3.3.4. kullanılarak ispat benzer şekilde yapılır.

**Sonuç 3.3.7.**  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 = \begin{cases} 5^{\frac{n-1}{2}} F_n, & n \text{ tek ise} \\ 5^{\frac{n-2}{2}} L_n, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir (Hoggatt 1969).

**İspat:**  $n$  tek ise ve  $F_i$  için Fibonacci sayısının Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha^i - \beta^i)^2 \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [\alpha^{2i} + \beta^{2i} - 2(\alpha\beta)^i] \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [\alpha^{2i} + \beta^{2i} - 2(-1)^i] \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{2i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^{2i} - 2 \cdot 0
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.3. ve Teorem 3.3.4.'e göre,

$$\begin{aligned}
5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= 5^{n/2} \alpha^n - 5^{n/2} \beta^n \\
5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= 5^{n/2} (\alpha^n - \beta^n) \\
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= \frac{5^{n/2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 = 5^{\frac{n-1}{2}} F_n$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $n$  çift ise,

$$\begin{aligned} 5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha^i - \beta^i)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [\alpha^{2i} + \beta^{2i} - 2(\alpha\beta)^i] \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [\alpha^{2i} + \beta^{2i} - 2(-1)^i] \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{2i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^{2i} - 2 \cdot 0 \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.3. ve Teorem 3.3.5.'e göre,

$$\begin{aligned} 5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= 5^{n/2} \alpha^n + 5^{n/2} \beta^n \\ 5 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= 5^{n/2} (\alpha^n + \beta^n) \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= \frac{5^{n/2}}{5} (\alpha^n + \beta^n) \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i^2 &= 5^{n-2/2} L_n \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.3.8.** (Cassini Formülü)  $n \geq 1$  bir tam sayı olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Tümevarım yöntemi ile ispatlayalım.

$F_0F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = (-1)^1$  olduğundan, verilen sonuç  $n = 1$  için doğrudur.

Şimdi herhangi bir  $m$  pozitif tam sayısı için doğru olduğunu kabul edelim ve  $m + 1$  için doğruluğunu gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned}
 F_m F_{m+2} - F_{m+1}^2 &= (F_{m+1} - F_{m-1})(F_m + F_{m+1}) - F_{m+1}^2 \\
 &= F_m F_{m+1} - F_m F_{m-1} - [F_m^2 + (-1)^m] \\
 &= F_m F_{m+1} - F_m F_{m-1} - F_m^2 - (-1)^m \\
 &= F_m F_{m+1} - F_m (F_{m-1} + F_m) + (-1)^{m+1} \\
 &= F_m F_{m+1} - F_m F_{m+1} + (-1)^{m+1} \\
 &= (-1)^{m+1}
 \end{aligned}$$

olduğundan  $n = m + 1$  için de, verilen eşitlik doğrudur. ■

**Teorem 3.3.9.**

$$\sum_{i=0}^n F_{ki+j} = \frac{F_{nk+k+j} - (-1)^k F_{nk+j} - F_j - (-1)^j F_{k-j}}{L_k - (-1)^k - 1}$$

dır (Koshy 2018).

**İspat:**

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5} \sum_{i=0}^n F_{ki+j} &= \sum_{i=0}^n (\alpha^{ki+j} - \beta^{ki+j}) \\
 &= \alpha^j \sum_{i=0}^n \alpha^{ki} - \beta^j \sum_{i=0}^n \beta^{ki} \\
 &= \alpha^j \cdot \frac{\alpha^{nk+k} - 1}{\alpha^k - 1} - \beta^j \cdot \frac{\beta^{nk+k} - 1}{\beta^k - 1} \\
 &= \frac{(\alpha^{nk+k+j} - \alpha^j)(\beta^k - 1) - (\beta^{nk+k+j} - \beta^j)(\alpha^k - 1)}{(\alpha\beta)^k - (\alpha^k + \beta^k) + 1}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n F_{ki+j} = \frac{-F_{nk+k+j} + (-1)^k F_{nk+j} + F_j - (\alpha^k \beta^j - \alpha^j \beta^k)/\sqrt{5}}{(-1)^k - L_k + 1}$$

olup,

$$\alpha^k \beta^j - \alpha^j \beta^k = (\alpha\beta)^j (\alpha^{k-j} - \beta^{k-j}) = (-1)^j \sqrt{5} F_{k-j}$$

elde edilir ki, istenendir. ■

**Teorem 3.3.10.** (Catalan özdeşliği)  $k$  pozitif bir tam sayı ve  $n \geq k$  olmak üzere,

$$F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Binet formülü ve  $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n$  özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} 5(F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2) &= (\alpha^{n+k} - \beta^{n+k})(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) - (\alpha^n - \beta^n)^2 \\ &= -(\alpha\beta)^n (\alpha^k \beta^{-k} + \alpha^{-k} \beta^k) + 2(\alpha\beta)^n \\ &= -(-1)^n (\alpha^k \beta^{-k} + \alpha^{-k} \beta^k) + 2(-1)^n \\ &= 2(-1)^n - (-1)^{n+k} (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) \\ &= 2(-1)^n + (-1)^{n+k+1} [5F_k^2 + 2(-1)^k] \\ &= 5(-1)^{n+k+1} F_k^2 + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1} \\ &= 5(-1)^{n+k+1} F_k^2 \end{aligned}$$

$$F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2$$

olur ki, istenilen elde edilir. ■

**Teorem 3.3.11.** (Lucas)  $n \geq 0$  için,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:**  $\alpha^2 = \alpha + 1$  ve  $\beta^2 = \beta + 1$  olduğundan Binet formülüne göre,

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha^i - \beta^i) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \end{aligned}$$

sonuç 2.2.2.'den

$$\begin{aligned} &= (1 + \alpha)^n - (1 + \beta)^n \\ &= \alpha^{2n} - \beta^{2n} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$$

olur. ■

Benzer şekilde  $n \geq 0$  için,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_i = L_{2n}$$

denklemini de ispatlanabilir.

Örneğin,

$$\sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} L_i = \binom{4}{0} L_0 + \binom{4}{1} L_1 + \binom{4}{2} L_2 + \binom{4}{3} L_3 + \binom{4}{4} L_4$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + 4 + 18 + 16 + 7 = 47 \\
&= L_8.
\end{aligned}$$

**Teorem 3.3.12.**  $n \geq 0$  için,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i = F_n$$

dir (Koshy 2018).

**İspat:** Binet formülüne göre,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n (-1)^{1+i} \binom{n}{i} \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \\
(\alpha - \beta) \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n (-1)^{1+i} \binom{n}{i} (\alpha^i - \beta^i) \\
&= - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (\alpha^i - \beta^i) \\
&= - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ((-1)^i \alpha^i - (-1)^i \beta^i) \\
&= - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [(-\alpha)^i - (-\beta)^i]
\end{aligned}$$

olur. Sonuç 2.2.2. 'yi kullanarak,

$$(\alpha - \beta) \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i = - [(1 - \alpha)^n - (1 - \beta)^n]$$

bulunur.  $\alpha + \beta = 1$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta) \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i &= \alpha^n - \beta^n \\
\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} F_i &= F_n
\end{aligned}$$

olur. ■

Benzer şekilde  $n \geq 0$  için,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} L_i = L_n$$

denklemini de ispatlanabilir.

Örneğin,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 (-1)^{i+1} \binom{5}{i} F_i &= -\binom{5}{0} F_0 + \binom{5}{1} F_1 - \binom{5}{2} F_2 + \binom{5}{3} F_3 - \binom{5}{4} F_4 + \binom{5}{5} F_5 \\ &= 0 + 5 - 10 + 20 - 15 + 5 = 5 \\ &= F_5. \end{aligned}$$

### 3.4. Lockwood Özdeşliği

$x$  ve  $y$  herhangi reel sayılar olsun. Binom teoremine göre,

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y) \\ x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3(xy)(x + y) \\ x^4 + y^4 &= (x + y)^4 - 4(xy)(x + y)^2 + 2(xy)^2 \\ x^5 + y^5 &= (x + y)^5 - 5(xy)(x + y)^3 + 5(xy)^2(x + y) \end{aligned}$$

olur. Her bir durumda  $x^n + y^n$  ifadesi  $[n/2] + 1$  adet  $xy$ 'li ve  $x+y$  'li terimlerden oluşur (Koshy 2014).

Daha genel olarak, sıradaki özdeşlik E.H. Lockwood tarafından 1967'de geliştirilmiştir (Benjamin 2010).

**Teorem 3.4.1.**  $n \geq 1$  tam sayıları için,

$$x^n + y^n = (x + y)^n + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \left[ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x + y)^{n-2k}$$

dir (Koshy 2014).

**İspat:**

$n = 1$  için,

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y)^1 + \sum_{k=1}^0 (-1)^k \left[ \binom{1-k}{k} + \binom{0-k}{k-1} \right] (xy)^k (x + y)^{1-2k} \\ &= (x + y) + 0 \\ &= x + y \end{aligned}$$

$n = 2$  için,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 + \sum_{k=1}^1 (-1)^k \left[ \binom{2-k}{k} + \binom{1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x + y)^{2-2k} \\ &= (x + y)^2 - \left[ \binom{1}{1} + \binom{0}{0} \right] (xy)(x + y)^0 \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

olur. Şimdi  $n > 2$  tam sayıları için,

$$(x + y)^n = x^n + y^n - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \left[ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x + y)^{n-2k}$$

denkleminin sağlandığını varsayalım. O zaman,

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + x^n y + x y^n - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \left[ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{n+1-2k}$$

olur.

$n$  çift tam sayı olsun ve  $n = 2m$  diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (x + y)^{2m+1} &= x^{2m+1} + y^{2m+1} + x^{2m}y + xy^{2m} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m (-1)^k \left[ \binom{2m-k}{k} + \binom{2m-1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\ &= x^{2m+1} + y^{2m+1} + x^{2m}y + xy^{2m} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m (-1)^k \left[ \binom{2m-k}{k} + \binom{2m-1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\ &\quad - (xy)(x+y)^{2m-1} + (xy)(x+y)^{2m-1} \\ &= x^{2m+1} + y^{2m+1} - \sum_{k=1}^m (-1)^k \left[ \binom{2m-k}{k} + \binom{2m-1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left[ \binom{2m-1-k}{k} + \binom{2m-2-k}{k-1} \right] (xy)^{k+1} (x+y)^{2m-1-2k} \\ &\quad + (xy)(x+y)^{2m-1} \\ &= x^{2m+1} + y^{2m+1} + \left[ \binom{2m-1}{1} + \binom{2m-2}{0} + 1 \right] (xy)(x+y)^{2m-1} \\ &\quad - \sum_{k=2}^m (-1)^k \left[ \binom{2m-k}{k} + \binom{2m-1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\ &\quad - \sum_{k=2}^m (-1)^k \left[ \binom{2m-k}{k-1} + \binom{2m-1-k}{k-2} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\ &= x^{2m+1} + y^{2m+1} + \left[ \binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0} \right] (xy)(x+y)^{2m-1} \\ &\quad - \sum_{k=2}^m (-1)^k \left\{ \left[ \binom{2m-k}{k} + \binom{2m-k}{k-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \binom{2m-1-k}{k-1} + \binom{2m-1-k}{k-2} \right] \right\} (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{2m+1} + y^{2m+1} + \left[ \binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0} \right] (xy)(x+y)^{2m-1} \\
&\quad - \sum_{k=2}^m (-1)^k \left[ \binom{2m+1-k}{k} + \binom{2m-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\
&= x^{2m+1} + y^{2m+1} - \sum_{k=1}^m (-1)^k \left[ \binom{2m+1-k}{k} + \binom{2m-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2m+1-2k} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} - \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^k \left[ \binom{n+1-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{n+1-2k}
\end{aligned}$$

olur. Böylece verilen eşitlik  $n$  çift olduğunda  $n+1$  için doğrudur.

Benzer şekilde  $n$  tek tam sayı olduğunda da, verilen eşitliğin doğru olduğu gösterilebilir. O halde, özdeşlik tüm pozitif  $n$  tam sayıları için doğrudur. ■

Lockwood özdeşliği,

$$x^n + y^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \left[ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{n-2k} \quad (3.4.1)$$

şeklinde de yazılabilir ki, burada  $\binom{r}{-1} = 0$  dır. Örneğin,

$$x^7 + y^7 = (x+y)^7 - 7(xy)(x+y)^5 + 14(xy)^2(x+y)^3 - 7(xy)^3(x+y)$$

olur (Koshy 2014).

### 3.5. Tek İndisli Fibonacci Sayıları ve Pascal Üçgeni

Tek indisli Fibonacci sayıları Pascal üçgeni kullanılarak farklı bir yolla hesaplanabilir. Bu amaçla (3.4.1) denkleminde  $n$  tek tam sayı olmak üzere  $y$ ,  $-y$  ile değiştirilirse,

$$x^n - y^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r \left[ \binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} \right] (-xy)^r (x-y)^{n-2r}$$

olur.  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,  $x = \alpha$  ve  $y = \beta$  denirse,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \rightarrow \alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)F_n$$

$$(-\alpha\beta)^r = (-(-1))^r = 1^r = 1$$

olduğundan,

$$(\alpha - \beta)F_n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r \left[ \binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} \right] (\alpha - \beta)^{n-2r}$$

$$F_n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r \left[ \binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} \right] 5^{(n-2r-1)/2}$$

$$= \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 5^{(n-2r-1)/2}$$

olur (Koshy 2014).

Örneğin,

$$F_7 = \sum_{r=0}^3 (-1)^r \left[ \binom{7-r}{r} + \binom{6-r}{r-1} \right] 5^{3-r}$$

$$= \left[ \binom{7}{0} + \binom{6}{-1} \right] 5^3 - \left[ \binom{6}{1} + \binom{5}{0} \right] 5^2 + \left[ \binom{5}{2} + \binom{4}{1} \right] 5^1 - \left[ \binom{4}{3} + \binom{3}{2} \right] 5^0$$

$$= (1 + 0) \cdot 5^3 - (6 + 1) \cdot 5^2 + (10 + 4) \cdot 5^1 - (4 + 3) \cdot 5^0$$

$$= 13$$

bulunur (Koshy 2014).

### 3.6. Lucas Sayıları ve Pascal Üçgeni

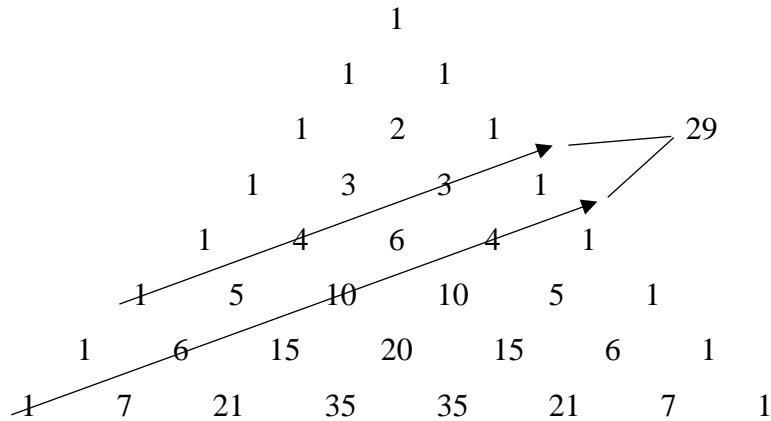
Lockwood özdeşliği birkaç ilginç çıkarım sağlar. İlk olarak Pascal üçgeninden Lucas sayılarını çıkarabiliriz. (3.4.1) özdeşliğinde  $x = \alpha$  ve  $y = \beta$  alınırsa,

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \left[ \binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} \right] (-1)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} \right] \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

olur. Sonuç olarak,  $L_n$  birbirini izleyen yükselen iki köşegen boyunca sayıları toplayarak hesaplanabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} L_7 &= \sum_{r=0}^3 \left[ \binom{7-r}{r} + \binom{6-r}{r-1} \right] \\ &= \left[ \binom{7}{0} + \binom{6}{-1} \right] + \left[ \binom{6}{1} + \binom{5}{0} \right] + \left[ \binom{5}{2} + \binom{4}{1} \right] + \left[ \binom{4}{3} + \binom{3}{2} \right] \\ &= (1 + 0) + (6 + 1) + (10 + 4) + (4 + 3) \\ &= 29 \end{aligned}$$

olur.



Şekil 3.6.1

(3.4.1) eşitliği aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$x^n + y^n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} (xy)^r (x+y)^{n-2r}$$

Sonuç olarak,

$$L_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r}$$

dir.

Örneğin,

$$\begin{aligned} L_7 &= \sum_{r=0}^3 \frac{7}{7-r} \binom{7-r}{r} = \frac{7}{7} \binom{7}{0} + \frac{7}{6} \binom{6}{1} + \frac{7}{5} \binom{5}{2} + \frac{7}{4} \binom{4}{3} \\ &= 1 + 7 + 14 + 7 = 29 \end{aligned}$$

olur (Koshy 2014).

#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin bazı genel ve binomial özellikleri verilmiştir.

**Teorem 4.1.**  $n \geq 1$  tam sayı olmak üzere,

$$F_{n+4} = 3F_{n+2} - F_n \quad (4.1)$$

dir.

**İspat:** Fibonacci rekürans formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} \\ &= F_{n+2} + F_{n+1} + F_{n+2} \\ &= 2(F_{n+2}) + (F_{n+2} - F_n) \\ &= 3F_{n+2} - F_n \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. ■

**Teorem 4.2.**  $n \geq 0$  tam sayı olmak üzere,

$$F_{n+10} = 11F_{n+5} + F_n \quad (4.3)$$

$$L_{n+10} = 11L_{n+5} + L_n \quad (4.4)$$

dir.

**İspat:** Tümevarım metodunu kullanarak ispatını yapalım.

$n = 0$  için,

$$F_{10} = 11F_5 + F_0 = 11 \cdot 5 + 0 = 55$$

ve Fibonacci rekürans denkleminde,

$$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$$

olur. O halde  $n = 0$  için denklem sağlanır.

$n = k$  için,

$$F_{k+10} = 11F_{k+5} + F_k \quad (4.5)$$

denklemini doğru olsun.

$n = k + 1$  için,

$$F_{(k+1)+10} = 11F_{(k+1)+5} + F_{k+1}$$

denkleminin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{k+11} &= 11F_{k+6} + F_{k+1} \\ &= 11(F_{k+5} + F_{k+4}) + (F_k + F_{k-1}) \\ &= 11F_{k+5} + 11F_{k+4} + F_k + F_{k-1} \\ &= (11F_{k+5} + F_k) + (11F_{k+4} + F_{k-1}) \end{aligned}$$

olur. (4.5) denkleminde,

$$F_{k+11} = F_{k+10} + F_{k+9}$$

elde edilir ki, Fibonacci rekürans denkleminde göre,  $n = k + 1$  için (4.3) denklemini sağlanır.

(4.4) denklemini de benzer şekilde ispatlanır. ■

**Teorem 4.3.**  $n \geq 2$  tam sayı olmak üzere,

$$F_{5n+5} = 5 \cdot 11^n + \sum_{i=1}^{n-1} 11^{n-1-i} \cdot F_{5i}$$

dir.

**İspat:** Tümevarım metodunu kullanarak ispatlayalım.

$n = 2$  için,

$$F_{15} = 5 \cdot 11^2 + \sum_{i=1}^1 11^{1-i} \cdot F_{5i} = 5 \cdot 11^2 + F_5 = 605 + 5 = 610$$

olur.

$n = m - 1$  için, doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$F_{5m} = 5 \cdot 11^{m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} 11^{m-2-i} \cdot F_{5i}$$

doğru olsun.

$n = m$  için, doğru olduğunu gösterelim. Buradan,

$$\begin{aligned} F_{5m+5} &= 5 \cdot 11^m + \sum_{i=1}^{m-1} 11^{m-1-i} \cdot F_{5i} \\ &= 5 \cdot 11^m + \left( \sum_{i=1}^{m-2} 11^{m-1-i} \cdot F_{5i} \right) + F_{5(m-1)} \\ \frac{1}{11} \cdot F_{5m+5} &= 5 \cdot 11^{m-1} + \left( \sum_{i=1}^{m-2} 11^{m-2-i} \cdot F_{5i} \right) + \frac{1}{11} \cdot F_{5m-5} \\ \frac{1}{11} \cdot F_{5m+5} &= F_{5m} + \frac{1}{11} \cdot F_{5m-5} \\ F_{5m+5} &= 11 \cdot F_{5m} + F_{5m-5} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.2 den sonuç doğrudur. ■

**Teorem 4.4.**  $n \geq 0$  tam sayı olmak üzere,

$$L_{n+6} = 4L_{n+3} + L_n \quad (4.6)$$

dir.

**İspat:** Lucas sayı dizisi için rekürans formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} L_{n+6} &= L_{n+5} + L_{n+4} \\ &= L_{n+4} + L_{n+3} + L_{n+4} \\ &= 2L_{n+4} + L_{n+3} \\ &= 2(L_{n+3} + L_{n+2}) + L_{n+3} \\ &= 3L_{n+3} + 2L_{n+2} \\ &= 3L_{n+3} + 2(L_{n+3} - L_{n+1}) \\ &= 4L_{n+3} + L_{n+3} - 2L_{n+1} \\ &= 4L_{n+3} + L_{n+2} + L_{n+1} - 2L_{n+1} \\ &= 4L_{n+3} + L_{n+2} - L_{n+1} \\ &= 4L_{n+3} + L_n \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.5.**  $n \geq 3$  tek tam sayı olmak üzere,

$$F_{3n} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-i}{n-2i} 2^{2n-1-4i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-2-i}{n-2-2i} 2^{2n-5-4i} \quad (4.7)$$

dir.

**İspat:** İspatı iterasyon yoluyla yapalım.

$$F_9 = \binom{3}{3} 2^5 + \binom{2}{1} 2^1 - \binom{1}{1} 2^1$$

$$F_{15} = \binom{5}{5} 2^9 + \binom{4}{3} 2^5 + \binom{3}{1} 2^1 - \left[ \binom{3}{3} 2^5 + \binom{2}{1} 2^1 \right]$$

$$F_{21} = \binom{7}{7} 2^{13} + \binom{6}{5} 2^9 + \binom{5}{3} 2^5 + \binom{4}{1} 2^1 - \left[ \binom{5}{5} 2^9 + \binom{4}{3} 2^5 + \binom{3}{1} 2^1 \right]$$

$$\vdots$$

olur. Bu şekilde iterasyona devam edilirse,

$$F_{3n} = \binom{n}{n} 2^{2n-1} + \binom{n-1}{n-2} 2^{2n-5} + \binom{n-2}{n-4} 2^{2n-9} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{1}{1}} 2^1$$

$$- \left[ \binom{n-2}{n-2} 2^{2n-5} + \binom{n-3}{n-4} 2^{2n-9} + \binom{n-4}{n-6} 2^{2n-13} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{1}{1}} 2^1 \right]$$

bulunur. Bu eşitlik toplam sembolü kullanılarak tekrar yazılırsa,

$$F_{3n} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-i}{n-2i} 2^{2n-1-4i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-2-i}{n-2-2i} 2^{2n-5-4i}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.6.**  $k \geq 0$  tam sayı ve  $m$  pozitif tek tam sayı olmak üzere,

$$F_{mk} = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{n+(m-2)k}$$

dir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{n+(m-2)k} &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (\alpha^{n+(m-2)k} - \beta^{n+(m-2)k}) \\ &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \alpha^{n+(m-2)k} - \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \beta^{n+(m-2)k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \binom{k}{0} \alpha^{(m-2)k} + \binom{k}{1} \alpha^{1+(m-2)k} + \dots + \binom{k}{k} \alpha^{k+(m-2)k} \right] \\
&\quad - \left[ \binom{k}{0} \beta^{(m-2)k} + \binom{k}{1} \beta^{1+(m-2)k} + \dots + \binom{k}{k} \beta^{k+(m-2)k} \right] \\
&= \alpha^{(m-2)k} \left[ \binom{k}{0} \alpha^0 + \binom{k}{1} \alpha^1 + \dots + \binom{k}{k} \alpha^k \right] \\
&\quad - \beta^{(m-2)k} \left[ \binom{k}{0} \beta^0 + \binom{k}{1} \beta^1 + \dots + \binom{k}{k} \beta^k \right] \\
&= \alpha^{(m-2)k} (1 + \alpha)^k - \beta^{(m-2)k} (1 + \beta)^k \\
&= \alpha^{(m-2)k} \alpha^{2k} - \beta^{(m-2)k} \beta^{2k} \\
&= \alpha^{mk} - \beta^{mk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{n+(m-2)k} &= \frac{\alpha^{mk} - \beta^{mk}}{\alpha - \beta} \\
\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} F_{n+(m-2)k} &= F_{mk}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

**Teorem 4.7.**  $k \geq 0$  tam sayı ve  $m$  pozitif tek tam sayı olmak üzere,

$$L_{mk} = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} L_{n+(m-2)k}$$

dir.

**İspat:** Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} L_{n+(m-2)k} &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (\alpha^{n+(m-2)k} + \beta^{n+(m-2)k}) \\
&= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \alpha^{n+(m-2)k} + \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \beta^{n+(m-2)k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \binom{k}{0} \alpha^{(m-2)k} + \binom{k}{1} \alpha^{1+(m-2)k} + \dots + \binom{k}{k} \alpha^{k+(m-2)k} \right] \\
&\quad + \left[ \binom{k}{0} \beta^{(m-2)k} + \binom{k}{1} \beta^{1+(m-2)k} + \dots + \binom{k}{k} \beta^{k+(m-2)k} \right] \\
&= \alpha^{(m-2)k} \left[ \binom{k}{0} \alpha^0 + \binom{k}{1} \alpha^1 + \dots + \binom{k}{k} \alpha^k \right] \\
&\quad + \beta^{(m-2)k} \left[ \binom{k}{0} \beta^0 + \binom{k}{1} \beta^1 + \dots + \binom{k}{k} \beta^k \right] \\
&= \alpha^{(m-2)k} (1 + \alpha)^k + \beta^{(m-2)k} (1 + \beta)^k \\
&= \alpha^{(m-2)k} \alpha^{2k} + \beta^{(m-2)k} \beta^{2k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} L_{n+(m-2)k} &= \alpha^{mk} + \beta^{mk} \\
\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} L_{n+(m-2)k} &= L_{mk}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

**Teorem 4.8.**  $n \geq 1$  tam sayı olmak üzere,

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (F_{3i+2}^2 - F_{3i+1} \cdot F_{3i}) = F_{3n+1} F_{3n} - F_{3n}^2$$

dir.

**İspat:**

$n = 1$  için,

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{i=0}^{1-1} (F_{3i+2}^2 - F_{3i+1} \cdot F_{3i}) &= F_{3+1} \cdot F_3 - F_3^2 \\
2 \cdot (F_2^2 - F_1 \cdot F_0) &= F_4 \cdot F_3 - F_3^2 \\
2 \cdot (1^2 - 1 \cdot 0) &= 3 \cdot 2 - 2^2 \\
2 &= 2
\end{aligned}$$

$n = k$  için, eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (F_{3i+2}^2 - F_{3i+1} \cdot F_{3i}) = F_{3k+1} \cdot F_{3k} - F_{3k}^2 \quad (4.9)$$

doğru olsun.

$n = k + 1$  için, eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$2 \cdot \sum_{i=0}^k (F_{3i+2}^2 - F_{3i+1} \cdot F_{3i}) = F_{3(k+1)+1} \cdot F_{3(k+1)} - F_{3(k+1)}^2$$

sol taraftaki toplam  $i = k$  için, ayrıca yazılarak toplamdan ayrılırsa,

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (F_{3i+2}^2 - F_{3i+1} \cdot F_{3i}) + 2 \cdot (F_{3k+2}^2 - F_{3k+1} \cdot F_{3k}) = F_{3k+4} \cdot F_{3k+3} - F_{3k+3}^2$$

olur. Burada, (4.9) denklemini kullanarak,

$$F_{3k+1} \cdot F_{3k} - F_{3k}^2 + 2 \cdot F_{3k+2}^2 - 2 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} = F_{3k+4} \cdot F_{3k+3} - F_{3k+3}^2$$

elde edilir. Gereken işlemler yapılarak,

$$-F_{3k}^2 + 2 \cdot F_{3k+2}^2 - F_{3k+1} \cdot F_{3k} = F_{3k+4} \cdot F_{3k+3} - F_{3k+3}^2$$

bulunur. Son eşitlikte, Fibonacci sayı dizisinin rekürans formülü  $F_{3k+2}$  ve  $F_{3k+4}$  için uygulanarak,

$$\begin{aligned} -F_{3k}^2 + 2 \cdot (F_{3k+1} + F_{3k})^2 - F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= (F_{3k+3} + F_{3k+2}) \cdot F_{3k+3} - F_{3k+3}^2 \\ -F_{3k}^2 + 2 \cdot F_{3k+1}^2 + 2 \cdot F_{3k}^2 + 3 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= F_{3k+3}^2 + F_{3k+3} \cdot F_{3k+2} - F_{3k+3}^2 \\ 2 \cdot F_{3k+1}^2 + F_{3k}^2 + 3 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= F_{3k+3} \cdot F_{3k+2} \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde,  $F_{3k+3}$  ve  $F_{3k+2}$  için de Fibonacci sayı dizisinin rekürans formülü uygulanarak gerekli işlemler yapılsa,

$$\begin{aligned}
2 \cdot F_{3k+1}^2 + F_{3k}^2 + 3 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= (F_{3k+2} + F_{3k+1}) \cdot (F_{3k+1} + F_{3k}) \\
2 \cdot F_{3k+1}^2 + F_{3k}^2 + 3 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= F_{3k+2} \cdot F_{3k+1} + F_{3k+1}^2 + F_{3k+2} \cdot F_{3k} + F_{3k+1} \cdot F_{3k} \\
F_{3k+1}^2 + F_{3k}^2 + 2 \cdot F_{3k+1} \cdot F_{3k} &= F_{3k+2} \cdot F_{3k+1} + F_{3k+2} \cdot F_{3k} \\
(F_{3k+1} + F_{3k})^2 &= F_{3k+2} \cdot (F_{3k+1} + F_{3k}) \\
F_{3k+1} + F_{3k} &= F_{3k+2}
\end{aligned}$$

elde edilir ki, ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 4.9.**  $m, n \geq 0$  tam sayılar olmak üzere,

$$F_{4n+m}L_{4n+m} \equiv F_mL_m \pmod{3}$$

dir.

**İspat:**

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ olmak üzere, } \alpha^4 = 3\alpha^2 - 1 \text{ ve } \beta^4 = 3\beta^2 - 1$$

olduğundan, Binet formülü ve binom teoremine göre,

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}F_{4n+m} &= \alpha^{4n+m} - \beta^{4n+m} \\
&= \alpha^m(3\alpha^2 - 1)^n - \beta^m(3\beta^2 - 1)^n \\
\sqrt{5}F_{4n+m} &= \alpha^m \left[ \binom{n}{0} (3\alpha^2)^0 (-1)^n + \binom{n}{1} (3\alpha^2)^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{2} (3\alpha^2)^2 (-1)^{n-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n} (3\alpha^2)^n (-1)^0 \right] \\
&\quad - \beta^m \left[ \binom{n}{0} (3\beta^2)^0 (-1)^n + \binom{n}{1} (3\beta^2)^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{2} (3\beta^2)^2 (-1)^{n-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n} (3\beta^2)^n (-1)^0 \right] \\
&= \alpha^m \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} \alpha^{2r} - \beta^m \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} \beta^{2r} \\
&= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} (\alpha^{2r+m} - \beta^{2r+m})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{4n+m} &= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} F_{2r+m} \\
&= (-1)^n 3^0 \binom{n}{0} F_m + (-1)^{n-1} 3 \binom{n}{1} F_{2+m} + (-1)^{n-2} 3^2 \binom{n}{2} F_{4+m} + \dots \\
&\quad + (-1)^0 3^n \binom{n}{n} F_{2n+m}
\end{aligned}$$

açılımdan görüldüğü gibi ilk terim hariç diğer terimler 3 ile tam bölünür. Yani (mod 3)'e göre sıfıra eşittir. Dolayısıyla,

$$F_{4n+m} \equiv (-1)^n F_m \pmod{3}$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
L_{4n+m} &= \alpha^{4n+m} + \beta^{4n+m} \\
&= \alpha^m (3\alpha^2 - 1)^n + \beta^m (3\beta^2 - 1)^n \\
L_{4n+m} &= \alpha^m \left[ \binom{n}{0} (3\alpha^2)^0 (-1)^n + \binom{n}{1} (3\alpha^2)^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{2} (3\alpha^2)^2 (-1)^{n-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n} (3\alpha^2)^n (-1)^0 \right] \\
&\quad + \beta^m \left[ \binom{n}{0} (3\beta^2)^0 (-1)^n + \binom{n}{1} (3\beta^2)^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{2} (3\beta^2)^2 (-1)^{n-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n} (3\beta^2)^n (-1)^0 \right] \\
&= \alpha^m \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} \alpha^{2r} + \beta^m \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} \beta^{2r} \\
&= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} (\alpha^{2r+m} + \beta^{2r+m}) \\
&= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} 3^r \binom{n}{r} L_{2r+m} \\
&= (-1)^n 3^0 \binom{n}{0} L_m + (-1)^{n-1} 3 \binom{n}{1} L_{2+m} + (-1)^{n-2} 3^2 \binom{n}{2} L_{4+m} + \dots \\
&\quad + (-1)^0 3^n \binom{n}{n} L_{2n+m}
\end{aligned}$$

açılımdan görüldüğü gibi ilk terim hariç diğer terimler 3 ile tam bölünür. Yani (mod 3)'e göre sıfıra eşittir. Dolayısıyla,

$$L_{4n+m} \equiv (-1)^n L_m \pmod{3}$$

olur. Böylece,

$$F_{4n+m} L_{4n+m} \equiv F_m L_m \pmod{3}$$

elde edilmiş olur. ■



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak binom, Pascal üçgeni , altın oranın tanımları ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri üzerinde durulmuş ve bu sayı dizilerinin bazı genel ve binomial özdeşlikleri incelenmiştir.

Farklı sayı dizilerinin de sağladığı özellikler üzerine çalışmalar yapılabilir ve binomial özdeşlikleri incelenebilir.



## 6. KAYNAKLAR

- Azarian M.K., 2012 (a), Fibonacci Identities as Binomial Sums, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7 (38), 1871-1876.
- Azarian M.K., 2012 (b), Identities Involving Lucas or Fibonacci and Lucas Numbers as Binomial Sums, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7 (45), 2221-2227.
- Benjamin A.T. et al, 2010, Combinatorial Trigonometry with Chebyshev Polynomials, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 2157-2160.
- Brown J.L., Jr., 1967, Solution to Problem H-71, *Fibonacci Quarterly*, 5, 166-167.
- Bulut F., 2017, Pascal Üçgeni, Kombinasyon ve Tümevarım Kullanılarak Fibonacci Dizisinin n. Elemanını Bulma, *El-Cezeri Journal of Science and Engineering*, 4 (3), 429-435.
- Dönmez A., 2005, Matematikğin Öyküsü ve Serüveni, *Toplumsal Dönüşüm Yayınları*, 10, 15-41, 280.
- Falcon S. Ve Plaza A., 2009, Binomial Transforms of The  $k$ -Fibonacci Sequences, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (11-12), 1527-1538.
- Ferns H.H., 1964, Problem B-48, *Fibonacci Quarterly*, 2, 232.
- Frontczak R., 2018, A Note on Hybrid Convolutions Involving Balancing and Lucas-Balancing Numbers, *Applied Mathematical Sciences*, 12 (25), 1201-1208.
- Gould H.W., 1963, General Functions for Products of Powers of Fibonacci Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 1(2), 1-16.
- Gulec H. H. and Taskara N., 2009, On The Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4 (25), 1251-1256.

- Gulec H. H., Taskara N. and Uslu K., 2013, A New Approach to Generalized Fibonacci and Lucas Numbers with Binomial Coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 220, 482-486.
- Hetmaniok E., Piatek B. And Witula R., 2017, Binomials Transformation Formulae for Scaled Fibonacci Numbers, *Open Mathematics*, 15, 477-485.
- Hoggatt V.E., Jr., 1968, Problem H-88, *Fibonacci Quarterly*, 6, 253-254.
- Hoggatt V.E., JR., Lind D.A., 1968, Fibonacci and Binomial Properties of Weighted Compositions, *Journal of Combinatorial Theory*, 4, 121-124.
- Hoggatt V.E., JR., 1969, Fibonacci and Lucas Numbers, *Houghton Mifflin Company*, 9.
- Horadam A.F., 1965, Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, *Duke Math. J.*, 32, 437-446.
- Kocer E.G., Tuglu N. and Stakhov A., 2009, On the  $m$ -extension of the Fibonacci and Lucas  $p$ -numbers, *Science Direct*, 40, 1890-1906.
- Koshy T., 2007, Elementary Number Theory with Applications, *Academic Press*, 2nd edition, Burlington, MA.
- Koshy T., 2014, Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, *Springer Science+Business Media*, New York.
- Koshy T., 2018, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *John Wiley and Sons*, New Jersey.
- Carlitz L., Ferns H.H., 1970, Some Fibonacci and Lucas Identities, *Fibonacci Quarterly*, 8, 61-73.
- Nesin A., 2010, Sayma, *Nesin Matematik Köyü*, İstanbul.

Oğlakkaya F.S., 2010, Bazı Özel Matrisler ve Kombinasyonel Özdeşlikler, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Sun Zhi-Wei, 2009, Congruences Involving Binomial Coefficients and Lucas Sequences, *Preprint*, arXiv:0912.1280.

Taskara N., Uslu K. and Gulec H. H., 2009, On The Properties of Lucas Numbers with Binomial Coefficients, *Applied Mathematics Letters*, 23 (2010), 68-72.

Vinson J., 1963, The Relation of the Period Modulo  $m$  to the Rank of Appartition of  $m$  in the Fibonacci Sequence, *Fibonacci Quarterly*, 1(2), 37-45.

Wilf H.S., 1994, Generatingfunctionology 2nd edition, *Academic Press*, San Diego, California.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Musa YASAGAN  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : KONYA 1980  
**Telefon** : 05534838693  
**Faks** :  
**e-mail** : musayasagan@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı	İlçe	İl	Bitirme Yılı
Lise	: Dumlupınar	Selçuklu	KONYA	1998
Üniversite	: Dumlupınar		KÜTAHYA	2003
Yüksek Lisans	:			
Doktora	:			

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2009-2011	Gümrük Müsteşarlığı	Gümrük Muh. Memuru
2011-	MEB	Matematik Öğretmeni

### UZMANLIK ALANI

**YABANCI DİLLER** : İngilizce