



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN
İNCELENMESİ

Zeynep AYTUFAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Zeynep AYTUFAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2022, 37 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu tez çalışmasında, ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerde; Cauchy problemlerinin yaklaşık çözümlerinde kullanılan bazı metotlar araştırılmıştır. Bu çalışma kapsamında, diferensiyel dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu, modifiye edilmiş Adomian metodu ve parçalı analitik metot incelenmiş ve örnekler çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrıştırma metodu, Cauchy problemi, Diferensiyel dönüşüm metodu, İkinci mertebeden diferensiyel denklemler, Modifiye Adomian metot, Parçalı analitik metot.

ABSTRACT

MS THESIS

**INVESTIGATION OF APPROXIMATE SOLUTION METHODS FOR SECOND
ORDER CAUCHY PROBLEMS**

Zeynep AYTUFAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS**

Advisor: Assist. Prof. Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2022, 37 Pages

Jury

Assist. Prof. Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

In this thesis, some methods used in approximate solutions of Cauchy problems in second order ordinary differential equations have been investigated. In the scope of this work, differential transformation method, Adomian decomposition method, modified Adomian method and piecewise analytical method have been examined and examples were solved.

Keywords: Adomian decomposition method, Cauchy problem, Differential transformation method, Modification of Adomian decomposition method, Piecewise analytic method, Second order differential equations.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN yönetiminde yapılarak, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Çalışmamı büyük bir özenle yöneten sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN' a teşekkürlerimi sunarım. Çalışmam boyunca maddi ve manevi desteğini hissettiğim aileme çok teşekkür ederim.

Zeynep AYTUFAN

KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	2
3. KAYNAK ARAŞTIRMASI	6
4. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
4.1. Diferensiyel Dönüşüm Metodu.....	9
4.2. Adomian Ayrıştırma Metodu	16
4.3. Modifiye Adomian Ayrışım Metodu	23
4.4. Parçalı Analitik Metot.....	28
5. SONUÇLAR.....	32
6. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	37

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1. Diferensiyel dönüşüm fonksiyonları

Tablo 4.2. Bazı lineer olmayan polinomlar ve bunların Adomian polinomları

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A_n : Adomian Polinomları

L : Diferensiyel Operatör

L^{-1} : İntegral Operatörü

Nu : Lineer Olmayan Terim

Kısaltmalar

ADM : Adomian Ayrıştırma Metodu

DTM : Diferensiyel Dönüşüm Metodu

MADM : Modifiye Adomian Ayrıştırma Metodu

PAM : Parçalı Analitik Metot

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematik dalında birçok problem ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Dolayısıyla ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü oldukça önemlidir. Karşımıza çıkan adi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak genellikle zordur. Bir diferensiyel denklemin çözümünün varlığı bilinse de analitik çözümler çoğu zaman bulunamayabilir. Bu durumda yaklaşık çözüm metotlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

$x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere; ikinci mertebeden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0 \quad (1.1)$$

Cauchy problemini ele alalım. (1.1) denkleminin verilen ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin çözümü genellikle birinci mertebeden diferensiyel denklemlere dönüştürülerek elde edilmektedir (Han ve ark., 2009). Literatürde (1.1) ile verilen Cauchy probleminin nümerik çözümünün elde edilmesi için genellikle Runge-Kutta yöntemleri kullanılmaktadır (Butcher, 2000; Pandey ve Jabobb, 2012). Bu tez çalışmasında (1.1) Cauchy problemlerinin çözümleri için literatürde bulunan klasik Euler, Runge-Kutta gibi yöntemlerden farklı bazı yaklaşık çözüm yöntemlerinin incelenmesi hedeflenmiştir.

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde önbilgiler ve 3. bölümde kaynak araştırması yer almaktadır. 4. bölümde ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin yaklaşık çözümleri için incelenen yaklaşık çözüm yöntemlerine yer verilmiştir. 5. bölümde ise gözlemlenen sonuçlar ele alınmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinde kullanılan metotları ele almadan önce bazı kavramları verelim.

Tanım 2.1. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun, x bağımsız değişkeni, y bağımlı değişkeni ve onun $y', y'', \dots, y^{(n)}$ türevlerini içeren bağıntıya diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklemler genellikle,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ veya } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Bir diferensiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferensiyel denklemin mertebesi; en yüksek mertebeli türevin derecesine de diferensiyel denklemin derecesi denir (Finney ve Ostberg, 1976; Güngör, 2010).

Tanım 2.2. $y = f(x)$ fonksiyonu tek değişkenli bir fonksiyon ise denkleme adi diferensiyel denklem denir. İki ya da daha çok değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ile bu fonksiyonun değişkenlerine göre türevlerini içeren denklemlere kısmi türevli diferensiyel denklemler denir. n bağımsız değişkene sahip bir kısmi diferensiyel denklemin genel formu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = y(x)$ olmak üzere;

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_{x_1}, \dots, y_{x_n}, y_{x_1x_1}, y_{x_1x_2}, \dots) = 0$$

şeklinde gösterilir (Finney ve Ostberg, 1976; Koca 2008).

Tanım 2.3. Eğer bir diferensiyel denklem bağımlı değişken y 'nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetlerini içeriyorsa, y ve y 'nin türevlerinin çarpımlarını içeriyorsa bu diferensiyel denkleme lineer olmayan diferensiyel denklem denir. n . mertebeden bir adi diferensiyel denklem

$$b_0(x) \frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x) = R(x)$$

şeklinde yazılabiliyorsa lineer olarak isimlendirilir (Finney ve Ostberg, 1976; Koca, 2008).

Tanım 2.4. n . mertebeden,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

formundaki diferensiyel denklem ve $x = x_0$ noktasında $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ başlangıç şartları verilmişse probleme başlangıç değer problemi veya Cauchy problemi denir (Finney ve Ostberg, 1976; Koca, 2008).

Tanım 2.5. (Lipschitz Şartı). $D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bölgesi üzerinde birinci mertebeden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

Cauchy problemini ele alalım. $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ olmak üzere,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sabiti varsa $f(x, y)$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlar denir. Burada L ye Lipschitz sabiti denir (Han ve ark., 2009; Güngör, 2010).

Teorem 2.1. (Picard- Lindelöf Teoremi). $D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bölgesi üzerinde (2.1) Cauchy problemini ele alalım. Eğer $f(x, y)$, D bölgesi üzerinde sürekli ise ve bu bölgede Lipschitz şartını sağlıyorsa bu taktirde (x_0, y_0) noktasını içine alan bir alt bölgede (2.1) Cuchy probleminin çözümü var ve tektir. Bu bölge

$$\max_{(\zeta, \tau) \in D} |f(\zeta, \tau)| \leq M, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

olmak üzere;

$$D_0 = \{(x, y): |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$$

dir (Gear, 1971; Brock ve Malliaris, 1989; Keller, 1992).

Tanım 2.6. $Y = (y_j(x))$, $Y_0 = (y_{j0})$; $y_{j0} = y_j(x_0)$, $F(x, Y) = (f_j)$;

$f_j = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$ ve $F \in C^m([x_0, T] \times \mathbb{R}^N)$, $Y(x), Y_0, b = (b_j) \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere $D = \{(x, Y): x \in [x_0, T], |y_j - y_{j0}| \leq b_j\}$ bölgesi üzerinde

$$Y'(x) = F(x, Y), Y(x_0) = Y_0 \quad (2.2)$$

Cauchy problemini ele alalım. Herhangi $(x, Y_1), (x, Y_2) \in D$ için,

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| \leq L\|Y_1 - Y_2\|$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $F(x, Y(x))$ vektör fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar denir. Burada L ye Lipschitz sabiti denir. Eğer $F(x, Y)$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde Lipschitz şartını sağlarsa bu bölgede (2.2) Cauchy probleminin bir tek $Y(x)$ çözümü vardır (Gear, 1971; Shampine ve ark., 1996).

Tanım 2.6. nin doğal sonucu olarak $p(x), q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0$$

Cauchy problemi $[a, b]$ aralığında tek çözüme sahip olduğu görülmektedir.

Tanım 2.7. (Taylor Serisi). $f \in C^{n+1}[a, b]$ olmak üzere f fonksiyonunun $x_0 \in [a, b]$ noktasında Taylor serisi,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

olarak ifade edilir. Burada;

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(t - x_0)^n dt$$

kalan terimdir. $R_n(x)$ kalan terimi;

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada c_x ise x ile x_0 arasında bir noktadır (Adams ve Essex, 2006; Balcı, 2006; Nesin, 2011).

3. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerine çalışmaların geçmişi oldukça eskidir. Bu konuda pek çok metot geliştirilmiş olup bu metotlar çoğu zaman uygulamalı matematikçilerin ve disiplinler arası çalışan kişilerin yoğun ilgisini çekmekte ve sıklıkla kullanılmaktadır (Burden ve Faires, 2001).

Son yıllarda yaklaşık yöntemler üzerine yapılan araştırmalarda en çok kullanılan yöntemler arasında diferensiyel dönüşüm metodu (DTM) ve Adomian ayrıştırma metodu (ADM) yer almaktadır. Literatürde, bu iki yöntemin özellikle lineer olmayan problemler için oldukça pratik ve analitik çözüme yakın sonuçlar verdiği ifade edilmiştir.

Öncelikle literatürdeki DTM ile ilgili yapılan bazı çalışmalardan bahsedelim. Zhou (1986)'daki çalışmasında elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerine DTM'yi kapalı seri çözüm formlarını elde ederek uygulamıştır. Chen ve Ho (1996), çalışmalarında DTM'yi özdeğer problemlerine uygulayarak özdeğer fonksiyonlarının elde edilmesindeki sağladığı kolaylığı ifade etmişlerdir. Jang ve Chen (1997), çalışmalarında lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinde DTM'yi kullanarak çözüm yapmışlardır. Elde ettikleri sonuçları nümerik bir yöntem olan Runge-Kutta yöntemiyle karşılaştırarak DTM'nin daha hassas çalıştığına vurgu yapmışlardır. Chen ve Ho (1999), çalışmalarında kısmi türevli diferensiyel denklemler için iki boyutlu diferensiyel dönüşümü tanıtmışlardır. Jang ve ark. (2000), çalışmalarında DTM'yi başlangıç değer problemlerine uygulamışlardır. Ertürk (2010), çalışmasında DTM ile ikinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem sınıfı için bazı tam çözümleri başarılı bir şekilde elde etmiştir. Yöntemin bu türden problemlerin çözümü için kuvvetli bir yöntem olduğunu söylemiştir. Daha sonraki yıllarda bu yöntem üzerinde çalışmalar devam etmiştir. Ali (2017) makalesinde DTM'yi başlangıç değer problemlerine uygulamış, sonuçların etkili olduğunu vurgulamıştır. Jameel ve ark. (2018), çalışmalarında DTM'yi yüksek mertebeden Fuzzy başlangıç değer problemlerine ilk kez uygulamıştır ve sonuçların başarılı olduğunu belirtmişlerdir. Al-Ahmad ve ark. (2020) çalışmalarında DTM'yi fark denklemlerine uygulamıştır.

ADM, 1980'li yılların başlarında Amerikalı bilim adamı George Adomian tarafından tasarlanmış ve Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilmiştir (Cherruault ve Adomian, 1993). Belloma ve Sarafyan (1987), çalışmalarında ADM ile Picard ardışık yöntemini karşılaştırmış, Picard ardışık yönteminde hesaplamaların daha zor ve karmaşık olduğunu gördüklerini belirtmişlerdir. Literatürde ADM üzerine önemli çalışmalarda

bulunan diğ er bir isim Abdül-Mecid Wazwaz' dır. Wazwaz (1998) , çalışmasında ADM ile Taylor seri yöntemini karşılaştırmıştır. ADM' nin daha kullanışlı ve birkaç iterasyonla güvenilir sonuçlar elde ettiğini vurgulamıştır. Wazwaz (2000) , çalışmalarının devamında problemlerde lineer olmayan terimler için Taylor seri açılımından yararlanarak Adomian polinomlarını hesaplamıştır. Wazwaz (2002)' deki çalışmasında ADM' yi kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulayarak, sonuçların etkili olduğunu gözlemlemiştir. Abdelwahid (2003), makalesinde yüksek mertebeden Adomian polinomlarını daha kolay hesaplamak amacıyla bir model geliştirmiştir. İnç ve Cherruault (2005), çalışmalarında yöntemi KdV (Korteweg-de Vries) denkleminde uygulamışlar, diğ er klasik yöntemlere göre çok daha az hesaplama ile çözümlere çok daha hızlı yaklaştıldığını göstermişlerdir. Hossaini ve Nasabzadeh (2006), makalelerinde birinci ve ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler için ADM' nin yakınsaklığını incelemişler ve çözümlerin kararlı olduğu sonucuna varmışlardır. Fadugba ve ark. (2013)' te ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin çözümünde ADM' yi kullanmışlardır. Çatal (2014), çalışmasında parabolik ve hiperbolik kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için ADM' yi uygulamıştır. Bu yöntemin çözüme yakınsamada oldukça hızlı olduğunu söylemiştir. Hasan ve ark. (2021)' de ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin bazı lineer olan ve lineer olmayan sistemlerine ADM' yi uyguladıklarında bu sistemler için güvenilir bir teknik olduğunu belirtmişlerdir.

Son yıllarda ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemleri için karşılaşılan yöntemlerden biri de modifiye Adomian ayrıştırma metodudur (MADM). Wazwaz (1999), çalışmasında MADM' yi tanıtarak bu yöntemin daha kolay ve hızlı sonuçlar verdiğ ini göstermiştir. Hosseini ve Nasabzadeh (2007), makalelerinde ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik çözümünde MADM' yi kullanarak çözüme daha kolay ulaşıldığını karşılaştırmalı örneklerle göstermişlerdir. Hasan ve Zho (2008), çalışmalarında bazı lineer olan ve olmayan ikinci mertebeden diferensiyel denklemleri bu yöntemle çözmüşlerdir. Almazmumy ve ark. (2012), çalışmalarında diferensiyel denklemlerde Cauchy problemlerinin çözümünde farklı birkaç MADM' yi karşılaştırmalı olarak çözmüştür.

Yukarıda bahsedilen metotlar hariç ikinci mertebeden diferensiyel denklemler için, Fatunla (1991)' de blok metodunu tanıtmış, Van de Vyver (2007)' de Numerov metodunu ele almıştır. Mehdiyeva ve ark. (2013)' de birinci ve ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Hibrit metodunu kullanmışlardır. Se (2019), çalışmasında interpolasyon fonksiyonu üzerinden ikinci mertebeden diferensiyel

denklemlerin çözümü için nümerik bir teknik geliştirmiştir. Abassy (2012), çalışmasında parçalı analitik metodu (PAM) tanıtmış ve Runge-Kutta yöntemiyle karşılaştırmıştır. Pandey ve Jabobb (2012), çalışmalarında Cauchy probleminin nümerik çözümü için “Standart Olmayan Açık Metot” diye adlandırdıkları metodu tanıtmıştır.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen metotlardan DTM, ADM, MADM ve PAM ele alınmıştır. Metotların uygulanış biçimleri anlaşılır hale getirilmeye çalışılmış ve metotlar örneklendirilmiştir.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde (1.1) ikinci mertebeden Cauchy probleminin çözümünde kullanılan bazı yaklaşık çözüm metotlarını tanıtacağız.

4.1. Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin hesaplanmasında karşılaşılan zorluklar, lineer olmayan problemlerin varlığı, hesaplamaların çok zaman alması gibi sebepler bilim adamlarını daha kullanışlı, etkili, pratik ve bilgisayar programlamasına uygun metotlar bulmaya itmiştir. Bu nedenle birçok metot geliştirilmiştir. Geliştirilen metotlardan bir tanesi de diferensiyel dönüşüm metodu (DTM) dir. İlk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya atılan DTM' nin en önemli avantajlarından birisi, verilen bir adi diferensiyel denklemi sade ve basit bir dönüşüm yardımıyla cebirsel bir denkleme dönüştürüyor olmasıdır. Laplace ve Fourier gibi diğer yöntemlerde denklemin mertebesiyle ilgili olarak karmaşık integrallerle karşılaşılmaktadır. DTM de sadece türev ifadeleri olduğu için hem daha hızlı sonuç vermekte hem de çok daha basit hesaplamalar gerektirmektedir. Lineer olmayan denklemlere de rahatlıkla uygulanabilmektedir (Chen ve Ho, 1996; Jang ve Chen, 1997; Jang ve ark., 2000).

Adi diferensiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümünde *bir boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu* kullanılır.

Bu metodu incelerken yararlanacağımız diferensiyel operatörünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\frac{d}{dx}(h(x) \pm \alpha g(x)) = \frac{d}{dx}h(x) \pm \alpha \frac{d}{dx}g(x)$ (α keyfi sabit)
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}h(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}h(x)$
3. $\frac{d^n}{dx^n}(h(x)g(x)) = g(x)\frac{d^n}{dx^n}h(x) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}h(x) + \dots +$
 $\binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}g(x)\frac{d}{dx}h(x) + h(x)\frac{d^n}{dx^n}g(x)$

Aşağıdaki şekilde verilen $Y(k)$, $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu gösterebilirsin.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=x_0} \quad (4.1)$$

$Y(k)$ ' nın ters diferensiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (x - x_0)^k \quad (4.2)$$

olmak üzere; (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitliği diferensiyel dönüşüm kavramının Taylor seri açılımından türediğini gösterir (Chen ve Ho; 1996). Buna göre, (1.1) probleminin $y(x)$ çözümü yaklaşık olarak

$$y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{k=0}^N Y(k) (x - x_0)^k$$

şeklinde elde edilir. Burada, N metodun mertebesidir (Chen ve Ho, 1996; Ünal, 2010). Diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarından bazıları Tablo 4.1 de gösterilmiştir. İspatları için (İşcan, 2010) bakınız.

İkinci mertebeden Cauchy problemlerinin çözümünde DTM' yi uygulamak için aşağıdaki adımlar izlenir.

1. Adım: Verilen problemde diferensiyel dönüşüm fonksiyonları yerine yazılarak dönüşüm formülü elde edilir.

2. Adım: Elde edilen $Y(k+n)$ çözüm fonksiyonunda $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $Y(k)$ değerleri hesaplanır.

3. Adım: $y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{k=0}^N Y(k) x^k$ yaklaşık çözümü elde edilir.

	Fonksiyon	Dönüşüm fonksiyonu
(1)	$y(x) = cg(x)$	$Y(k) = cG(k)$
(2)	$y(x) = g(x) \mp h(x)$	$Y(k) = G(k) \mp H(k)$
(3)	$y(x) = \frac{d}{dx}g(x)$	$Y(k) = (k+1)G(k+1)$
(4)	$y(x) = \frac{d^n}{dx^n}g(x)$	$Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!}G(k+n)$
(5)	$y(x) = g(x)h(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r)$
(6)	$y(x) = x^r$	$Y(k) = \delta(k-r) = \begin{cases} 1, & k=r \\ 0, & k \neq r \end{cases}$
(7)	$y(x) = e^{cx}$	$Y(k) = \frac{c^k}{k!}$
(8)	$y(x) = (1+x)^m$	$Y(k) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$
(9)	$y(x) = \sin(wx + \alpha)$	$Y(k) = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
(10)	$y(x) = \cos(wx + \alpha)$	$Y(k) = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
(11)	$y(x) = a^{\lambda x}$	$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!} (\ln a)^k$
(12)	$y(x) = \frac{d}{dx}g(x) \frac{d}{dx}h(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)G(r+1)H(k-r+1)$
(13)	$y(x) = g(x)h(x)f(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} G(r)H(t)F(k-r-t)$
(14)	$y(x) = g(x)h(x) \frac{d^2}{dx^2}f(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+1)(k-r-t+2)G(r)H(t)F(k-r-t-2)$

Tablo 4.1. Diferensiyel dönüşüm fonksiyonları

Şimdi, DTM için birkaç örnek verelim:

Örnek 4.1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 24$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 0$ Cauchy probleminin çözümüne beşinci mertebeden DTM ile bir yaklaşım elde edelim (Khatib, 2016).

1. Adım: Diferensiyel dönüşüm fonksiyonları:

$\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü için; Tablo 4.1. (4)' te $g(x) = y(x)$ ve $n = 2$ alınırsa,

$$Y(k) = (k + 1)(k + 2)Y(k + 2)$$

olarak bulunur.

$\frac{d}{dx}y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü için; Tablo 4.1. (3)' te $g(x) = y(x)$ alınırsa,

$$Y(k) = (k + 1)Y(k + 1)$$

elde edilir.

$y(x) = 24 = 24x^0$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü Tablo 4.1. (6) dan $r = 0$ olup,

$$Y(k) = \delta(k - r) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Yani, $\delta(0) = 1$, $\delta(1) = \delta(2) = \delta(3) = 0$ olarak elde edilir.

Böylece problemin dönüşüm formülü,

$$(k + 1)(k + 2)Y(k + 2) + 3(k + 1)Y(k + 1) + 2Y(k) = 24\delta(k)$$

$$\Rightarrow Y(k + 2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} (-3(k + 1)Y(k + 1) - 2Y(k) + 24\delta(k))$$

olur.

2. Adım: $k = 0, 1, 2, 3$ için $Y(k)$ değerleri:

$$k = 0 \text{ için } Y(2) = \frac{1}{2.1}(-3.1.Y(1) - 2Y(0) + 24\delta(0)) = 2$$

$$k = 1 \text{ için } Y(3) = \frac{1}{2.3}(-3.2.Y(2) - 2Y(1) + 24\delta(1)) = -2$$

$$k = 2 \text{ için } Y(4) = \frac{1}{3.4}(-3.3.Y(3) - 2Y(2) + 24\delta(2)) = \frac{7}{6}$$

$$k = 3 \text{ için } Y(5) = \frac{1}{4.5}(-3.4.Y(4) - 2Y(3) + 24\delta(3)) = -\frac{1}{2}$$

3. Adım: $\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k$ yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned} \hat{y}(x) &= \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k = 10x^0 + 0x^1 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^5 \\ &= 10 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^5 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y(x) = a^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ Cauchy probleminin çözümüne beşinci mertebeden DTM ile bir yaklaşım elde edelim (Kazeem Iyanda, 2012).

1. Adım: Diferensiyel dönüşüm fonksiyonları:

$\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ ve $\frac{d}{dx}y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını Örnek 4.1.' te elde edilmişti. Şimdi a^{2x} fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

$y(x) = a^{\lambda x}$ ve $Y(k)$ verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere; Tablo 4.1. (11)' de $\lambda = 2$ alınırsa, dönüşüm fonksiyonu;

$$Y(k) = \frac{2^k}{k!} (\ln a)^k$$

olarak bulunur.

Böylece problemin dönüşüm formülü,

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) - (k+1)Y(k+1) - 6Y(k) = \frac{2^k}{k!} (\ln a)^k$$

$$\Rightarrow Y(k+2) = \frac{[(k+1)Y(k+1) + 6Y(k) + \frac{2^k}{k!} (\ln a)^k]}{(k+2)(k+1)}$$

olur.

2. Adım: $k = 0, 1, 2, 3$ için $Y(k)$ değerleri:

$$k = 0 \text{ için } Y(2) = \frac{1.Y(1) + 6.Y(0) + \frac{2^0}{1}}{2.1} = \frac{5}{2}$$

$$k = 1 \text{ için } Y(3) = \frac{2.Y(2) + 6.Y(1) + \frac{2^1(\ln a)}{1}}{3.2} = \frac{-7 + 2\ln a}{6}$$

$$k = 2 \text{ için } Y(4) = \frac{3.Y(3) + 6.Y(2) + \frac{2^2(\ln a)^2}{2!}}{4.3} = \frac{4(\ln a)^2 + 2\ln a + 23}{24}$$

$$k = 3 \text{ için } Y(5) = \frac{4.Y(4) + 6.Y(3) + \frac{2^3(\ln a)^3}{3!}}{5.4} = \frac{8(\ln a)^3 + 4(\ln a)^2 + 14\ln a - 19}{120}$$

3. Adım: $\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k$ yaklaşık çözümü;

$$\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k = 1x^0 - 2x^1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{2\ln a - 7}{6}x^3 + \frac{4(\ln a)^2 + 2\ln a + 23}{24}x^4 + \frac{8(\ln a)^3 + 4(\ln a)^2 + 14\ln a - 19}{120}x^5$$

$$= 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{2\ln a - 7}{6}x^3 + \frac{4(\ln a)^2 + 2\ln a + 23}{24}x^4 + \frac{8(\ln a)^3 + 4(\ln a)^2 + 14\ln a - 19}{120}x^5$$

elde edilir.

Örnek 4.3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Cauchy probleminin çözümüne beşinci mertebeden DTM ile bir yaklaşım elde edelim (Khatib, 2016).

1. Adım: Diferensiyel dönüşüm fonksiyonları:

$\frac{d^2}{dx^2} y(x)$ ve $\frac{d}{dx} y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını Örnek

4.1.' te elde edilmişti. Şimdi $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

$y(x) = g(x)h(x)$ ve $Y(k)$, $G(k)$, $H(k)$ sırasıyla verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere; Tablo 4.1. (5) dikkate alınırsa,

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k G(r) H(k-r)$$

elde edilir.

$$y(x) = \frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} h(x) \text{ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;}$$

$$G(k) = (k+1)G(k+1)$$

$$H(k) = (k+1)H(k+1)$$

$$y(x) = g(x)h(x) \text{ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;}$$

$Y(k) = \sum_{r=0}^k G(r) H(k-r)$ olarak elde edilmişti. Burada;

$$G(r) = (r+1)G(r+1)$$

$$H(k-r) = (k-r+1)H(k-r+1)$$

şeklinde olur. Bu eşitlikler; $Y(k) = \sum_{r=0}^k G(r) H(k-r)$ eşitliğinde yerine yazılırsa, Tablo 4.1. (12)' den yararlanarak;

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1) G(r+1)H(k-r+1)$$

olarak bulunur.

Böylece problemin dönüşüm formülü,

$$Y(k+2) = \frac{-1}{(k+2).(k+1)} \{2 \sum_{r=0}^k [(r+1)(k-r+1).Y(r+1)Y(k-r+1)] - 8Y(k)\}$$

elde edilir.

2. Adım: $k = 0, 1, 2, 3$ için $Y(k)$ değerleri:

$$\begin{aligned} k = 0 \text{ için } Y(2) &= \frac{-1}{2.1} \{2 \sum_{r=0}^0 [(r+1)(k-r+1).Y(r+1)Y(k-r+1)] - 8Y(0)\} \\ &= \frac{-1}{2.1} (2.1 - 8.0) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1 \text{ için } Y(3) &= \frac{-1}{3.2} \{2 \sum_{r=0}^1 [(r+1)(k-r+1).Y(r+1)Y(k-r+1)] - 8Y(1)\} \\ &= \frac{-1}{3.2} \{2[1.2.Y(1)Y(2) + 2.1.Y(2).Y(1)] - 8Y(1)\} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 2 \text{ için } Y(4) &= \frac{-1}{4.3} \{2 \sum_{r=0}^2 [(r+1)(k-r+1).Y(r+1)Y(k-r+1)] - 8Y(2)\} \\
&= \frac{-1}{4.3} \{2[1.3.Y(1)Y(3) + 2.2.Y(2).Y(2) + 3.1.Y(3)Y(1)] - 8Y(2)\} = -6 \\
k = 3 \text{ için } Y(5) &= \frac{-1}{5.4} \{2 \sum_{r=0}^3 [(r+1)(k-r+1).Y(r+1)Y(k-r+1)] - 8Y(3)\} \\
&= \frac{-1}{5.4} \{2[1.4.Y(1)Y(4) + 2.3.Y(2).Y(3) + 3.2.Y(3)Y(2) + 4.1.Y(4)Y(1)] - 8Y(3)\} \\
&= -\frac{136}{5}
\end{aligned}$$

3. Adım: $\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k$ yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned}
\hat{y}(x) &= \sum_{k=0}^5 Y(k)x^k = 0x^0 + 1x^1 - 1x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^4 - \frac{136}{5}x^5 \\
&= x - x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^4 - \frac{136}{5}x^5
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu (ADM), son yıllarda ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri için geliştirilen metotlardan biridir. ADM de, DTM gibi Taylor seri açılımına dayanmaktadır, çözümlerin seri formda elde edilmesine olanak sağlar. Bu metodun en önemli avantajları; çözüme hızlı yakınsıyor olması ve lineerleştirme, pertürbasyon gibi yöntemler kullanmadan çözümün elde edilmesidir. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde, literatürde bilinen klasik çözüm yöntemleriyle veya özel dönüşüm yöntemleriyle çözüm elde edilirken çok fazla sayısal işlemlerle karşılaşmaktadır. Literatürde ADM ile ilgili yapılan çalışmalarda ADM' nin işlemleri en aza indirerek; yüksek doğrulukta, etkili, açık bir çözüm ürettiği belirtilmiştir. Bu sebeple son yıllarda birçok araştırmacı yöntem üzerine dikkat çekerek güvenilir bir yöntem olduğunu gösteren çalışmalar yapmıştır (Wazwaz, 1998; Wazwaz, 2002; İnç ve Cherruault 2005; Hossaini ve Nasabzadeh, 2006).

ADM, kısmi ve adi diferensiyel denklemlere, integral denklemlere, cebirsel denklemlere uygulanabilen bir metottur. Biz bu çalışmada, ADM' yi ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin çözümleri için ele aldık.

Bu yöntemde verilen problem, lineer olan ve lineer olmayan kısımlara ayrıştırılır. Lineer olmayan terimler için Adomian polinomları tanımlanarak çözüm elde edilir (Adomian, 1990).

(1.1) Cauchy problemini F , lineer olmayan bir adi diferensiyel operatör ve g verilen fonksiyon olmak üzere, $Fy = g$ olacak şekilde yazalım. $Fy = g$ diferensiyel denklemi için yöntem, F operatörünün,

L : kolayca tersi alınabilen bir operatör,

Ry : kalan kısım,

Ny : lineer olmayan kısım

olmak üzere $Fy = (L + R + N)y$ olacak şekilde ayrıştırılmasına dayanır (Adomian, 1988; Ünal, 2010; Yılmaz, 2013).

L operatörü genellikle n . mertebeden türev operatörü olarak seçilmektedir. Buna göre L ' nin tersi, L^{-1} n - katlı integrali ifade eder. Bu tez çalışmasında ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin çözümü ele alınacağından; L operatörünün ikinci mertebeden olduğunu kabul edelim. Buna göre;

$$L(.) = \frac{d^2}{dx^2} (.) \quad \text{ve} \quad L^{-1} (.) = \iint_0^x (.) dx dx$$

şeklindedir.

$$Fy = g \Rightarrow (L + R + N)y = g \Rightarrow Ly = g - Ry - Ny$$

$$\Rightarrow L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (4.4)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L^{-1}Ly &= \int_{t=a}^x \int_{s=a}^t d^2y(s) ds dt \\ &= \int_a^x \left(\int_a^t d(dy(s)) ds \right) dt \\ &= \int_a^x dy(t) dt - \int_a^x y'(a) dt \\ &= y(x) - y(a) - y'(a)(x - a) \\ \Rightarrow L^{-1}Ly &= y(x) - y_0 - (x - a)y_0' \end{aligned}$$

olduğu (4.4) denkleminde yazılırsa;

$$y = y_0 + (x - a)y'_0 + L^{-1}g(x) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} R y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} N y_n \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) denkleminde $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olduğunu varsayalım. Buna göre (4.5) eşitliği

$$y = y_0 + (x - a)y'_0 + L^{-1}g(x) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} R u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} N u_n \quad (4.6)$$

şeklinde olur. (1.1) Cauchy problemlerinin çözümü için (4.6)' dan ADM,

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 + (x - a)y'_0 + L^{-1}g(x) \\ u_{n+1} &= -L^{-1}R u_n - L^{-1}N u_n \end{aligned} \quad (4.7)$$

iterasyon formülü ile verilir. (1.1) Cauchy probleminin çözümü, N metodun mertebesi olmak üzere $y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x)$ olarak elde edilir (Adomian, 1988; Khatib, 2016).

Eğer (4.7) eşitliğinde lineer olmayan Ny terimleri mevcutsa A_n , Adomian polinomları olmak üzere

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde hesaplanır. Adomian, lineer olmayan bütün denklemler için, her A_n polinomu $n > 0$ olmak üzere $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı olacak şekilde formül geliştirmiştir (Adomian, 1990). Adomian polinomlarını elde etmek için farklı yöntemler kullanılabilir. Taylor seri açılımı yöntemiyle elde edilişi aşağıdaki gibidir (Wazwaz, 2000).

$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olmak üzere, lineer olmayan bir $f(y)$ terimi y_0 ' da Taylor serisine açılırsa;

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0)(y - y_0)^k \quad (4.8)$$

şeklinde olur. Burada,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

olduğu dikkate alınır ve (4.8) denkleminde yerine yazılırsa;

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0) (\sum_{n=1}^{\infty} u_n)^k \quad (4.9)$$

elde edilir. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)^k$ terimlerinin açılımları (4.9) denkleminde yerine yazılır ve $f(y)$ düzenlenirse;

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y_1) + f'(y_0)(y_2) + f'(y_0)(y_3) + \frac{1}{2!} f''(y_0)(y_1)^2 + \frac{1}{2!} f''(y_0)(y_2)^2 + \frac{1}{3!} f'''(y_0)(y_2)^3 + \frac{1}{3!} f'''(y_0) 3(y_1)^2 y_3 + \dots \quad (4.10)$$

denklemini elde edilir. (4.10) den Adomian polinomları;

$$\begin{aligned} A_0 &= f(y_0) \\ A_1 &= (y_1) f'(y_0) \\ A_2 &= (y_2) f'(y_0) + \frac{1}{2!} (y_1)^2 f''(y_0) \\ A_3 &= (y_3) f'(y_0) + (y_1)(y_2) f''(y_0) + \frac{1}{3!} (y_1)^3 f'''(y_0) \\ A_4 &= (y_4) f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} (y_2)^2 + (y_1)(y_3) \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} (y_1)^2 (y_2) \right) f'''(y_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{4!} (y_1)^4 \right) f^{(4)}(y_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanmıştır (Adomian, 1990).

$\lambda \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ fonksiyonunun çözümü; $y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ ve lineer olmayan $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ terimi, parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ noktasında $f(y)$ fonksiyonu analitik olmak şartıyla Adomian polinomları;

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f(\sum_{k=0}^n \lambda^k y_k) \right]_{\lambda=0}, n \geq 0$$

formülünden elde edilebilir (Wazwaz, 2002). Tablo 4.2. de bazı lineer olmayan polinomlar ve bunların Adomian polinomları verilmiştir (Wazwaz, 2000).

$f(y)$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
y^2	y_0^2	$2 \cdot y_0 \cdot y_1$	$2 \cdot y_0 \cdot y_2 + y_1^2$	$2 \cdot y_0 \cdot y_3 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2$	$2 \cdot y_0 \cdot y_4 + 2 \cdot y_1 \cdot y_3 + y_2^2$
y^3	y_0^3	$3 \cdot y_0^2 \cdot y_1$	$3 \cdot y_0^2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_0 \cdot y_1^2$	$3 \cdot y_0^2 \cdot y_3 + 6 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1^3$	$3 \cdot y_0^2 \cdot y_4 + 3 \cdot y_1^2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_0 \cdot y_2^2 + 6 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot y_3$
$\sin y$	$\sin y_0$	$y \cdot \cos y_0$	$y_2 \cdot \cos y_0 - \frac{1}{2!} \cdot y_1^2 \cdot \sin y_0$	$y_3 \cdot \cos y_0 - y_1 \cdot y_2 \cdot \sin y_0 \cdot y_1^3 - \frac{1}{3!} \cdot y_1^3 \cdot \cos y_0$	$u_4 \cdot \cos u_0 - \left(\frac{1}{2!} \cdot y_2^2 \cdot y_1 \cdot y_3 \right) \cdot \sin y_0 - \frac{1}{2!} \cdot y_1^2 \cdot \cos y_0 - \frac{1}{4!} \cdot y_1^4 \cdot \sin y_0$
$\sinh y$	$\sinh y_0$	$y_1 \cdot \cosh y_0$	$y_2 \cdot \cosh y_0 - \frac{1}{2!} \cdot y_1^2 \cdot \sin y_0$	$y_3 \cdot \cosh y_0 - y_1 \cdot y_2 \cdot \sinh y_0 \cdot y_1^3 - \frac{1}{3!} \cdot y_1^3 \cdot \cosh y_0$	$y_4 \cdot \cosh y_0 - \left(\frac{1}{2!} \cdot y_2^2 \cdot y_1 \cdot y_3 \right) \cdot \sinh y_0 - \frac{1}{2!} \cdot y_1^2 \cdot \cosh y_0 - \frac{1}{4!} \cdot y_1^4 \cdot \sinh y_0$
e^y	e^{y_0}	$y_1 \cdot e^{y_0}$	$\left(\frac{1}{2!} \cdot y_1^2 + y_2 \right) e^{y_0}$	$\left(\frac{1}{3!} \cdot y_1^3 + y_1 \cdot y_2 + y_3 \right) e^{y_0}$	$\left(y_4 + \frac{1}{2!} \cdot y_2^2 + y_1 \cdot y_3 + \frac{1}{2!} \cdot y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} \cdot y_1^4 \right) e^{y_0}$
$\ln y$	$\ln y_0$	$\frac{y_1}{y_0}$	$\frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}$	$\frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}$	$\frac{y_4}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1 y_3}{y_0^2} + \frac{y_1^2 y_2}{y_0^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{y_0^4}$

Tablo 4.2. Bazı lineer olmayan polinomlar ve bunların Adomian polinomları

Eğer ele alınan problem lineer ise, yani Ny terimi içermiyorsa, bu takdirde (4.7) eşitliği

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

olarak karşımıza çıkar ve yaklaşık çözüm,

$$u_0 = y_0 + (x - a)y_0' + L^{-1}g(x)$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n$$

İterasyon formülü ile hesaplanır.

(1.1) Cauchy problemlerinin çözümü için ADM' nin adımları aşağıdaki gibidir:

1. adım: Denklem operatör formda yazılır.

2. adım: Denklemin her iki tarafına ters operatör uygulanır.

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülü elde edilir.

4. adım: $y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{n=0}^N u_n$ yaklaşık çözümü elde edilir.

Şimdi, ADM için birkaç örnek verelim.

Örnek 4.4. $y''(x) - xy(x) = 0$ ve $y(0) = 1, y'(0) = 1$ Cauchy problemini ele alalım. İkinci mertebeden ADM ile bir yaklaşım elde edelim.

1. adım: Denklemi operatör formda yazalım.

$L(.) = \frac{d^2}{dx^2}(.), L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx, Ry = -xy, Ny = 0, g(x) = 0$ olduğu dikkate alınırsa;

$$Ly = -Ry$$

elde edilir.

2. adım: Denklemin her iki tarafına ters operatör uygulayalım.

$$L^{-1}(Ly) = -L^{-1}Ry$$

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülü elde edilir.

$$L^{-1}Ly = y(x) - [y(0) + xy'(0)] = y(x) - (1 + x) \text{ ve } L^{-1}g(x) = 0 \text{ olup,}$$

$$u_0 = 1 + x + L^{-1}g(x) = 1 + x,$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}(xu_n), n \geq 0$$

elde edilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}(xu_0) \\ &= -\int_{t=0}^x \int_{s=0}^t s(1+s) ds dt \end{aligned}$$

$$= - \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) dt = - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -L^{-1}(xu_1) \\ &= -L^{-1} \left(x \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right] \right) \\ &= L^{-1} \left(\frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{12} \right) \\ &= \int_{t=0}^x \int_{s=0}^t \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{12} \right) ds dt \\ &= \int_{t=0}^x \left(\frac{t^5}{30} + \frac{t^6}{60} \right) dt = \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{420} \end{aligned}$$

4. adım: $\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^2 u_n$ yaklaşık çözümü,

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^2 u_n = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{420}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.5. $y'' + \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) y' = -2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Cauchy problemini ele alalım. Üçüncü mertebeden ADM ile bir yaklaşım elde edelim (Hossaini ve Nasabzadeh, 2007).

1. adım: Denklem operatör formda yazılır.

$$L(.) = \frac{d^2}{dx^2}(.), L^{-1}(.) = \iint_0^x (.) dx dx, Ry = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) y', Ny = 0, g(x) = -2\cos x$$

olduğunu dikkate alalım. Denklem operatör formda yazılırsa;

$$Ly = g(x) - Ry$$

elde edilir.

2. adım: Denklemin her iki tarafına da L^{-1} uygulanırsa;

$$L^{-1}Ly = -L^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)y' + L^{-1}(-2\cos x)$$

elde edilir.

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülünü elde edelim.

$$L^{-1}Ly = y(x) - [y(0) + xy'(0)] = y(x) - 1 \quad \text{ve} \quad L^{-1}g(x) = L^{-1}(-2\cos x) = 2\cos x - 2 \text{ olup,}$$

$$u_0 = 1 + L^{-1}(-2\cos x) = 1 + \iint_0^x (-2\cos x) dx dx = 2\cos x - 1$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)y_n', \quad n \geq 0$$

iterasyon formülü elde edilir. Buna göre, üçüncü mertebeden ADM ile

$$\begin{aligned} u_1 &= -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(u_0')\right) dx dx = -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(-2\sin x)\right) dx dx = \iint_0^x (2\cos x) dx dx \\ &= 2(\cos x - \cos 0) = -2\cos x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(u_1')\right) dx dx = -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(2\sin x)\right) dx dx = -\iint_0^x (2\cos x) dx dx \\ &= 2\cos x - 2 \end{aligned}$$

$$u_3 = -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(u_2')\right) dx dx = -\iint_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x}(-2\sin x)\right) dx dx = -2\cos x + 2$$

elde edilir.

4. adım: $\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n$ yaklaşık çözümü,

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n = 2\cos x - 1 - 2\cos x + 2 + 2\cos x - 2 - 2\cos x + 2 = 1$$

elde edilir.

4.3. Modifiye Adomian Ayrışım Metodu

ADM' nin uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar devam ederken Wazwaz (1999) çalışmasında modifiye Adomian ayrışım metodunu (MADM) tanıtmıştır. Bu

metodun bazı lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünde standart ADM' ye göre hesap yükü az ve daha az iterasyonla çözüme daha hızlı yakınsayan bir uygulamaya sahip olduğunu belirtmiştir. Şimdi Wazwaz'ın (1999) daki çalışmasında verilen MADM' yi tanıtalım. ADM' de olduğu gibi, $Fy = g$ diferensiyel denklemini;

$$y = f - L^{-1}R(y) - L^{-1}N(y) \quad (4.11)$$

şeklinde yazalım. Burada f , $L^{-1}Ly$ ve $L^{-1}g$ işlemlerinden ortaya çıkan terimleri ifade eder. ADM' de olduğu gibi L operatörü ikinci mertebeden türev operatörü seçilebileceği gibi farklı şekilde de seçilebilir. $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ çözümünü ele alalım. ADM' nin amacı $y \geq 0$ iken u_n bileşenlerini belirlemektir. Bu amaca ulaşmak için $u_0 = f$ olmak üzere (4.7) iterasyon formülü kullanılır.

Standart ADM' de $f = u_0 = f_0$ olarak tek bir terim seçilirken, MADM' de $f = f_0 + f_1$ olacak şekilde seçilmesi gerekir. Bu seçim ADM' ye göre çözüm adımlarını azaltmaya yarar. f_0 ve f_1 fonksiyonlarını doğru seçmek, modifiye metodu kullanmayla ilgili önemli noktalardan birisidir. Eğer f sadece bir terimden oluşuyorsa bu durumda standart ADM kullanılmalıdır.

f fonksiyonu f_0 ve f_1 olmak üzere iki fonksiyonun toplamı şeklinde tanımlansın, yani;

$$f = f_0 + f_1$$

olsun. MADM için iterasyon formülü;

$$\begin{aligned} u_0 &= f_0 \\ u_1 &= f_1 - L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(Nu_0) \\ u_{k+2} &= -L^{-1}(Ru_{k+1}) - L^{-1}(Nu_{k+1}), k \geq 0 \end{aligned}$$

iterasyon formülü elde edilir (Wazwaz, 1999).

İkinci mertebeden Cauchy problemlerinin çözümü için MADM' nin adımları aşağıdaki gibidir.

- 1. adım:** Uygun operatör seçilip, denklem operatör formda yazılır.
- 2. adım:** Denklemin her iki tarafına ters operatör uygulanır.

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülü elde edilir.

4. adım: İterasyon formülüyle elde edilen bileşenler $y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{n=0}^N u_n$ toplam formunda yazılarak çözüm elde edilir. Burada N metodun mertebesidir.

Örnek 4.6. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 6 + 12x + x^2 + x^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ Cauchy problemini ele alalım. Üçüncü mertebeden MADM ile bir yaklaşım elde edelim (Hasan and Zhou, 2008).

1. adım: Denklem operatör formda yazılır.

L operatörünü türev operatörü olarak seçelim.

$L(.) = \frac{d^2}{dx^2}(.), L^{-1}(.) = \iint_0^x(.)dx dx$, $g(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3$, $Ry = \frac{2}{x}y' + y$, $Ny = 0$ olup denklem

$$Ly = g(x) - Ry$$

şeklinde olur.

2. adım: Denklemin her iki tarafına ters operatör uygulayalım.

$$L^{-1}L(y) = -L^{-1}\left(\frac{2}{x}y' + y\right) + L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3)$$

elde edilir.

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülünü elde edelim.

$L^{-1}L(y) = y(x) - [y(0) + xy'(0)] = y(x)$ ve $L^{-1}g(x) = L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3) = 3x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}$ olup $f = 3x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}$ elde edilir. $f_0 = 3x^2 + 2x^3$ ve $f_1 = \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}$ seçilsin. Buna göre; $u_0 = f_0 = 3x^2 + 2x^3$ olur.

$$Ru_0 = \frac{2}{x}u_0' + u_0 = \frac{2}{x}(6x + 6x^2) + 3x^2 + 2x^3 = 12 + 12x + 3x^2 + 2x^3$$

$$\Rightarrow L^{-1}Ru_0 = \iint Ru_0 dx dx = 6x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}$$

$$\Rightarrow u_1 = f_1 - L^{-1} R u_0 = \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} - 6x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}$$

$$u_1 = -6x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{20}$$

olur. İterasyon formülü:

$$u_0 = 3x^2 + 2x^3$$

$$u_1 = -6x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{20}$$

$$u_{k+2} = -L^{-1} R(u_{k+1}), k \geq 0$$

şeklinde elde edilir.

$$R u_1 = \frac{2}{x} u_1' + u_1 = \frac{2}{x} \left(-12x - 6x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) - 6x^2 - 2x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{20}x^5$$

$$\Rightarrow u_2 = -L^{-1} R u_1 = -L^{-1} \left(-24 - 12x - \frac{22}{3}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{20}x^5 \right)$$

$$\Rightarrow u_2 = 12x^2 + 2x^3 + \frac{11}{18}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{840}x^7$$

$$R u_2 = \frac{2}{x} u_2' + u_2 = \frac{2}{x} \left(24x + 6x^2 + \frac{22}{9}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{120}x^6 \right) + 12x^2 + 2x^3 + \frac{11}{18}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{840}x^7$$

$$\Rightarrow u_3 = -L^{-1} R u_2 = -L^{-1} \left(48 + 12x + \frac{152}{9}x^2 + \frac{13}{4}x^3 + \frac{61}{90}x^4 + \frac{17}{120}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{840}x^7 \right)$$

$$\Rightarrow u_3 = -24x^2 - 2x^3 - \frac{38}{27}x^4 - \frac{13}{80}x^5 - \frac{61}{2700}x^6 - \frac{17}{5040}x^7 - \frac{1}{7560}x^8 - \frac{1}{62640}x^9$$

4. adım: $\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n$ yaklaşık çözümü,

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n = -15x^2 - \frac{26}{27}x^4 - \frac{3}{80}x^5 - \frac{23}{1350}x^6 - \frac{11}{5040}x^7 - \frac{1}{7560}x^8 - \frac{1}{62640}x^9$$

elde edilir.

Örnek 4.6.'yı farklı bir operatör seçimi ile yeniden ele alalım. Üçüncü mertebeden MADM ile bir yaklaşım elde edelim.

1. adım: Denklem operatör formda yazılır.

Uygun bir operatör bulalım.

$(x^2y')' = x^2y'' + 2xy'$ ve $\frac{1}{x^2}(x^2y')' = y'' + \frac{2}{x}y'$ olduğundan L operatörünü $L = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d(\cdot)}{dx} \right)$ şeklinde seçelim. Buna göre; $L^{-1} = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{d(\cdot)}{dx} \right) dx$, $Ry = 0$, $Ny = 0$ ve $g(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3$ olmak üzere;

$$Ly = -Ry + g(x)$$

elde edilir.

2. adım: Denklemin her iki tarafına ters operatör uygulanırsa.

$$L^{-1}L(y) = -L^{-1}Ry + L^{-1}g(x)$$

olur.

3. adım: Çözüm için gerekli iterasyon formülünü elde edelim.

$$L^{-1}L(y) = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_0^x \frac{1}{x^2} \left(x^2 \frac{dy}{dx} - 0 \cdot y'(0) \right) dx = \int_0^x dy = y(x) - y(0) = y(x)$$

$$L^{-1}g(x) = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{dg(x)}{dx} \right) dx = \int_0^x g'(x) dx = g(x) - g(0) = 12x + x^2 + x^3 \text{ olup}$$

$f = 12x + x^2 + x^3$ elde edilir. $f_0 = 12x$ ve $f_1 = x^2 + x^3$ seçilsin. Buna göre; $u_0 = f_0 = 12x$ olur.

$$L^{-1}Ru_0 = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{d(12x)}{dx} \right) dx = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{d(12x^2)}{dx} \right) = 12x$$

$$\Rightarrow u_1 = f_1 - L^{-1}Ru_0 = u_1 = x^2 + x^3 - 12x$$

olur. İterasyon formülü:

$$u_0 = 12x$$

$$u_1 = x^2 + x^3 - 12x$$

$$u_{k+2} = -L^{-1}R(u_{k+1}), k \geq 0$$

şeklinde elde edilir.

$$L^{-1}Ru_1 = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{d}{dx} (x^2 + x^3 - 12x) \right) dx = x^2 + x^3 - 12x$$

$$u_2 = L^{-1}Ru_1 = -x^3 - x^2 + 12x$$

$$L^{-1}Ru_2 = \int_0^x \frac{1}{x^2} \int_0^x d \left(x^2 \frac{d}{dx} (-x^3 - x^2 + 12x) \right) dx = -x^3 - x^2 + 12x$$

$$u_3 = x^3 + x^2 - 12x$$

4. adım: $\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n$ yaklaşık çözümü,

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=0}^3 u_n = 12x + x^2 + x^3 - 12x - x^3 - x^2 + 12x + x^3 + x^2 - 12x = x^2 + x^3$$

elde edilir.

4.4. Parçalı Analitik Metot

Literatürde yüksek mertebeden Cauchy problemlerinin yaklaşık çözümünde kullanılan yöntemler arasında Parçalı Analitik Metot (PAM) da bulunmaktadır. Abassy (2012) ve Abassy (2021) çalışmalarında PAM' ı ele almıştır.

$$\begin{cases} \frac{d^n u(t)}{dt^n} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \\ u(t_0) = c_0, u'(t_0) = c_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

Cauchy probleminin PAM ile çözümünde aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Adım: h , adım genişliği ve $t_m = t_0 + mh$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, çözüm aralığı h uzunluğunda aralıklara bölünür. Metodun mertebesi s belirlenir.

2. Adım: Her bir $t \in [t_m, t_{m+1}]$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) aralığı için,

$$2.1. K_{m,0} = C_{m,0} = U_{m-1}(t_m)$$

$$U_{-1}(t_0) = c_0$$

$$2.2. K_{m,1} = C_{m,1} = \frac{dU_{m-1}}{dt}(t_m)$$

$$\frac{dU_{-1}}{dt}(t_0) = c_1$$

⋮

$$2.n. K_{m,n-1} = \frac{c_{m,n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}U_{m-1}}{dt^{n-1}}(t_m)$$

$$\frac{d^{n-1}U_{-1}}{dt^{n-1}}(t_0) = c_{n-1}$$

değerleri hesaplanır.

3. Adım: $t \in [t_m, t_{m+1}]$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$) aralığı için,

$$\frac{d^n U_m(t)}{dt^n} = f(t, U_m, U'_m, \dots, U_m^{(n-1)})$$

$$U_m(t_m) = c_{m,0}, \frac{dU_m}{dt}(t_m) = c_{m,1}, \dots, \frac{d^{n-1}U_m}{dt^{n-1}}(t_m) = c_{m,n-1}$$

olmak üzere;

$$U_{m(t)} \approx \hat{U}(t) = \sum_{i=0}^s K_{m,i} (t - t_m)^i = g(t, t_m, K_{m,0}, K_{m,1}, \dots, K_{m,n-1})$$

şeklinde genel bir yaklaşık çözüm bulunur.

İkinci mertebeden Cauchy problemlerinin çözümü için PAM' 1,

$$U'' = \phi(t, U_m, U'_m), U_m(t_m) = f_{m,0}, \frac{dU_m}{dt}(t_m) = f_{m,1} \text{ olmak üzere;}$$

$t \in [t_m, t_{m+1}]$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n-1$) için

$$\hat{U}(t) = \sum_{i=0}^s K_{m,i} (t - t_m)^i$$

şeklinde uygulayabiliriz.

Örnek 4.7. $\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\theta = 0$, $\theta(t_0) = f_0 = 0,5$, $\frac{d\theta}{dt}(t_0) = f_1 = 0$ Cauchy problemini $t \in [0, 2]$ aralığında ele alalım. Dördüncü mertebeden PAM ile bir yaklaşım elde edelim (Abassy, 2021).

1. Adım: Adım genişliği $h = 0,01$, metodun mertebesi $s = 4$ alınsın. Verilen problem sarkaç denklemi olup $\frac{g}{l} = 5$, sarkacın sönümsüz olma durumu $b = 0$ alınsın.

2. Adım: Her bir $t \in [t_m, t_{m+1}]$ aralığı için ($m = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$) olmak üzere $K_{m,n}$ değerlerini hesaplayalım. $t \in [0, 2]$ aralığında, $h = 0,01$ alındığında toplamda 200 tane $[t_m, t_{m+1}]$ aralığı oluşmaktadır. El ile hesaplamanın zorluğundan dolayı $[t_0, t_1]$ ve $[t_1, t_2]$ aralığında hesaplama yapacağız. Hesaplamaları virgülden sonra altı dijite göre kesme hatası ile yapalım. Buna göre,

$m = 0$ için

$$K_{0,0} = U_0(t_0) = f_0 = 0,5$$

$$K_{0,1} = \frac{dU_0}{dt}(t_0) = f_1 = 0$$

$$K_{0,2} = -\frac{2K_{0,0}g + bK_{0,1}l}{4l} = f_2 = -\frac{5}{4}$$

$$K_{0,3} = -\frac{-2bgK_{0,0} - (b^2l - 4g)K_{0,1}}{24l} = f_3 = 0$$

$$K_{0,4} = -\frac{(2b^2gl - 8g^2)K_{0,0} - (8bgl - b^3t^2)K_{0,1}}{192l^2} = f_4 = -\frac{25}{48}$$

değerleri elde edilir.

$m = 1$ için

$$K_{1,0} = U_1(t_0) = f_0 \cong 0,499874$$

$$K_{1,1} = \frac{dU_1}{dt}(t_0) = f_1 \cong 0,624685$$

$$K_{1,2} = -\frac{2K_{1,0}g + bK_{1,1}l}{4l} = f_2 \cong -1,249685$$

$$K_{1,3} = -\frac{-2bgK_{1,0} - (b^2l - 4g)K_{1,1}}{24l} = f_3 \cong -0,520570$$

$$K_{1,4} = -\frac{(2b^2gl - 8g^2)K_{1,0} - (8bgl - b^3t^2)K_{1,1}}{192l^2} = f_4 \cong -0,520702$$

değerleri elde edilir.

3. Adım: $\widehat{U}(t) = \sum_{i=0}^s K_{m,i}(t - t_m)^i$ şeklinde genel bir yaklaşık çözüm bulunur.

$$\widehat{U}_0(t) = \sum_{i=0}^{s=4} K_{0,i}(t - t_0)^i = 0,5 \cdot 0,01^0 + 0 \cdot 0,01^1 - \frac{5}{4} \cdot 0,01^2 + 0 \cdot 0,01^3 - \frac{25}{48} \cdot 0,01^4 = 0,499874$$

$$\widehat{U}_1(t) = \sum_{i=0}^{s=4} K_{1,i}(t - t_1)^i = 0,499874 \cdot 0,01^0 + 0,624685 \cdot 0,01^1 - 1,249685 \cdot 0,01^2 - 0,520570 \cdot 0,01^3 - 0,520702 \cdot 0,01^4 = 0,4974$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

(1.1) denkleminle verilen ikinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik çözümleri genellikle birinci mertebeden denklemlere dönüştürülerek elde edilmektedir. Literatürde, birinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik çözümleri için birçok metot olması ile birlikte ikinci mertebeden Cauchy problemlerine doğrudan uygulanacak metot daha azdır. İkinci mertebeden Cauchy problemlerinin yaklaşık çözümü için literatürde en çok karşılaşılan metotların bazılarını bir arada derlemenin yararlı olduğu düşüncesi ile bu çalışmada; diferensiyel dönüşüm metodu (DTM), Adomian ayrıştırma metodu (ADM), modifiye Adomian ayrıştırma metodu ve parçalı analitik metot ele alınmıştır. Metotların nasıl uygulanacağı anlaşılır hale getirilmeye çalışılmıştır. Mümkün olduğunca işlemler detaylandırılarak örnekler verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Abassy, T. A., 2012, Introduction to piecewise analytic method, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 10, 1-19.
- Abassy, T. A., 2021, Solving 2nd order nonlinear differential equations using piecewise analytic method (pendulum equations), *International Journal of Applied Mathematical Research*, 10(1), 10-17.
- Abdelwahid, F., 2003, A mathematical model of Adomian polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 141, 447-453.
- Adams, A.R. and Essex C., 2006, Calculus A Complete Course, Sixth Edition, *Pearson Addison Wesley*, Toronto.
- Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135, 501-544.
- Adomian, G., 1990, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 13, 17-43.
- Al-Ahmad, S., Mamat M. and Alahmad R., 2020, Finding differential transform using difference equations, *International Journal of Applied Mathematics*, 50(1), 1-19.
- Ali, A.H., 2017, Applications of differential transform method to initial value problems, *American Journal of Engineering Research*, 6(12), 365-371.
- Almazmumy, M., Hendi F. A., Bakodah H. O. and Alzumi H., 2012, Recent modifications of Adomian decomposition method for initial value problem in ordinary differential equations, *American Journal of Computational Mathematics*, 2, 228-234.
- Balcı, M., 2006, Genel Matematik, *Ertem Basım Ltd.Şti.*, Balcı Yayınları.
- Bellomo, N. and Sarafyan, D., 1987, On Adomian's decomposition method and some comparisons with Picard's iterative scheme, *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 123, 389-400.
- Brock W.A. and Malliaris A.G., 1989, Differential equations stability and chaos in dynamic economics, *Elsevier b.v. Science Publishers*, Amsterdam.
- Burden, R.L. and Faires, J.D., 2001, Numerical Analysis, 7th ed., *Brooks Cole*, USA.
- Butcher, J.C., 2000, Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125, 1-29.
- Chen, C.K. and Ho S.H., 1996, Application of differential transformation to eigen-value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 79, 173-188.

- Chen, C.K. and Ho S.H., 1999, Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106, 171-179.
- Cherruault, Y. and Adomian, G., 1993, Decomposition methods: a new proof of convergence, *Mathematical and Computer Modelling*, 18, 103–106.
- Çatal S., 2014, Results on adomian decomposition method, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 2, 1-9.
- Ertürk, V.S., 2010, İkinci mertebeden bir diferensiyel denklem sınıfı için başlangıç değer probleminin diferensiyel dönüşüm yöntemi ile tam çözümleri, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 3(2), 199-206.
- Fadugba, S. E., Zelibe S. C. and Edoqbanya O. H., 2013, On the Adomian decomposition method for the solution of second order ordinary differential equations, *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 2, 20-29.
- Fatunla, S.O., 1991, Block methods for second-order IVPs, *International Journal of Computer Mathematics*, 41(9), 55–63.
- Finney, R.L. and Ostberg D. R., 1976, Elementary diferential equations with linear algebra, *Addison-Wesley Publishing Compony*, Canada.
- Gear, W., 1971, Numerical initial value problems in ordinary differantial equations, *Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs*, New Jersey.
- Güngör, F., 2010, Diferensiyel denklemler, *İTÜ Vakfi Yayınları*, İstanbul.
- Han, W., Atkinson, K. and Stewart, D., 2009, Numerical solution of ordinary differential equations, *A John Wiley-Sons Inc.*, Publication.
- Hasan, Y.Q. and Zhu, L.M., 2008, Modified Adomian decomposition method for singular initial value problems in the second order ordinary differential equations, *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3, 183-193.
- Hasan, Y.Q., Dabwan, N.M., Alaqel, S.A., Othman, S.G. and Al-rabahı, Z. A., 2021, Using Adomian decomposition method for solving systems of second order ordinary differential equations, *Journal Mathematics Computer Science*, 11(2), 2204-2217.
- Hosseini, M.M. and Nasabzadeh, H., 2006, On the convergence of Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 182, 536–543.
- Hosseini, M.M. and Nasabzadeh, H., 2007, Modified Adomian decomposition method for specific second order ordinary differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 186, 117-123.
- İnç, M. and Cherruault, Y., 2005, A reliable approach to the Korteweg-de Vries equation. *Kybernetes*, 34, 951-959.

- İşcan, F., 2010, Onsager diferensiyel denkleminin nümerik çözümü üzerine yeni yaklaşımlar, Yüksek Lisans Tezi, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- Jameel M. A., Anakira, A. F., Rashidi, N. R., Alomari, M. M., Saaban, A. and Shakhathreh, A.K., 2018, Differential transformation method for solving high order fuzzy initial value problems, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 39, 194-208.
- Jang, M. J. and Chen, C. L., 1997, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 88, 137-151.
- Jang, M. J. and Chen C. L. and Liu, Y.C., 2000, On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 115, 145-160.
- Kazeem Iyanda, F., 2012, Numerical solution of second-order differential equations, by differential transformation method, *International Journal of Science and Research*, ISSN: 2319-7064.
- Keller, H.B., 1992, Numerical methods for two-point boundary-value problems, *Pover publications Inc.*, New York, 1-3:191-209.
- Khatib, A., 2016, Differential transform method for differential equations, Yüksek Lisans Tezi, *Palestine Polytechnic University Deanship of Graduate Studies and Scientific Research Master Program of Mathematics*.
- Koca, K., 2008, Kısmi türevli denklemler, *Gündüz Eğitim ve Yayıncılık*, Ankara.
- Mehdiyeva, G., Imanova, M. and Ibrahimov, V., 2013, General hybrid method in the numerical solution for ODE of first and second order, *International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods in Engineering*.
- Nesin, A., 2011, Analiz-1, *Nesin Yayıncılık Ltd. Sti.*, Nesin Matematik Köyü.
- Pandey, P.K. and Jabobb S.S.A., 2012, Explicit method in solving ordinary differential equations of the second order, *International journal of pure and applied mathematics*, 2, 233-239.
- Se, F., 2019, Numerical technique *via* interpolating function for solving second order equations with oscillating solutions, *International Journal of Computer Mathematics*, 53, 1339–1348.
- Shampine, L.F., Allen, R.C. and Pruess, S., 1996, Fundamentals of numerical computing, *John Wiley&Sons Inc*, New York.

- Ünal, D., 2010, Singüler başlangıç veya sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri: diferensiyel dönüşüm ve Adomian ayrıştırma metotları, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- Van de Vyver H., 2007, An explicit Numerov-type method for second-order differential ordinary differential equations, *Journal of Mathematics and Statistics Research*, 53, 1339–1348.
- Wazwaz, A.M., 1998, A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions, *Applied Mathematics and Computation*, 97, 37-44.
- Wazwaz, A.M., 1999, A reliable modification of Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 102, 77- 86.
- Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 111, 53-69.
- Wazwaz, A.M., 2002, Partial differential equations, *A.A. Balkema Publishers*, Tokyo.
- Yılmaz, B.M., 2013, Sayısal analizde yaklaşık çözüm yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- Zhou, J.K., 1986, Differential transformation and its applications for electrical circuits, *Huazhong University Press*, Wuhan, China.