



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN  
CAUCHY DAĞILIMINA UYUM İYİLİĞİ  
TESTLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN  
İNCELENMESİ

Ali SAĞLAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Temmuz-2025  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL VE ONAYI

Ali SAĞLAM tarafından hazırlanan “Parametre tahmin yöntemlerinin Cauchy dağılımına uyum iyiliği testleri üzerindeki etkilerinin incelenmesi” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Aşır GENÇ

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Ahmet PEKGÖR

.....

#### Üye

Doç. Dr. Kadir KARAKAYA

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Ali SAĞLAM

Tarih:07.07.2025

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN CAUCHY DAĞILIMINA UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN İNCELENMESİ

Ali SAĞLAM

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet PEKGÖR

2025, 110 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Ahmet PEKGÖR

Prof. Dr. Aşır GENÇ

Doç. Dr. Kadir KARAKAYA

İstatistiksel analizlerde, modelleme sürecinin temel aşamalarından biri, elde edilen verinin belirli bir teorik dağılıma ne ölçüde uyum sağladığının test edilmesidir. Bu bağlamda, uyum iyiliği testleri, parametrik yöntemlerin geçerliliğini değerlendirmede ve tahmin edici modellerin güvenilirliğini sağlamada önemli rol oynamaktadır. Ancak dağılımın ağır kuyruklu, simetrik ya da momentleri tanımsız olması durumunda, geleneksel tahmin yöntemleri ve klasik uyum testleri yetersiz kalabilmektedir. Özellikle, ortalama ve varyansı tanımsız olan Cauchy dağılımı, parametrik tahmin süreci açısından zorluklar barındırmakta; bu da uyum testlerinin performansını doğrudan etkilemektedir. Bu tez çalışmasında, Cauchy dağılımına ait parametrelerin farklı tahmin yöntemleriyle (En Çok Olabilirlik Tahmini, En Küçük Kareler, Robust Tahmin Yöntemleri) elde edilmesi ve bu tahminlerin uyum iyiliği testleri üzerindeki etkilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Cramér-von Mises, Zhang testleri ( $Z_A$ ,  $Z_C$ ,  $Z_K$ ), Uyarlanmış Anderson-Darling testi, Kullback-Leibler tabanlı testler, Gürtler-Henze ve Peggör testleri gibi çeşitli uyum iyiliği testleri teorik ve uygulamalı olarak değerlendirilmiştir. Tezde, parametrik ve parametrik olmayan tahmin yöntemlerinin, uyum testlerinin gücünü ve duyarlılığını nasıl etkilediği simülasyon yoluyla sistematik olarak incelenmiş; her bir testin farklı örneklem büyüklüklerinde ve tahmin yöntemi altında nasıl performans gösterdiği karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Elde edilen bulgular, Cauchy dağılımı gibi zorlu yapılar altında, klasik yöntemlerin yetersiz kaldığını ve robust tahmin edicilerin özellikle küçük örneklemelerde daha istikrarlı sonuçlar sunduğunu göstermektedir. Bu çalışma, hem teorik katkı sunmayı hem de uygulamalı istatistik analizlerde karar verme süreçlerine yön göstermeyi hedeflemektedir. Uyum iyiliği testlerinin güvenilirliğini artırmak amacıyla, dağılım özelliklerinin yanı sıra tahmin yönteminin de dikkatle seçilmesi gerektiği vurgulanmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Cauchy dağılımı, parametre tahmini, uyum iyiliği testleri.

## ABSTRACT

## MS THESIS

# THE EFFECTS OF PARAMETER ESTIMATION METHODS ON GOODNESS-OF-FIT TESTS FOR THE CAUCHY DISTRIBUTION

Ali SAĞLAM

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN STATISTICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet PEKGÖR  
2025, 110 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Ahmet PEKGÖR

Prof. Dr. Aşır GENÇ

Assoc. Prof. Dr. Kadir KARAKAYA

In statistical analysis, one of the fundamental stages of modeling is testing the extent to which the observed data conform to a specified theoretical distribution. In this context, goodness-of-fit tests play a crucial role in evaluating the validity of parametric methods and ensuring the reliability of predictive models. However, when the distribution is heavy-tailed, symmetric, or has undefined moments, traditional estimation methods and classical goodness-of-fit tests often prove insufficient. In particular, the Cauchy distribution, whose mean and variance are undefined, presents notable challenges for parameter estimation and significantly affects the performance of fit tests. This dissertation aims to investigate how different parameter estimation methods (Maximum Likelihood Estimation, Least Squares Estimation, and Robust Estimation Techniques) affect the performance of goodness-of-fit tests for the Cauchy distribution. Within this scope, various goodness-of-fit tests such as Kolmogorov Smirnov, Anderson Darling, Cramér von Mises, Zhang tests ( $Z_A$ ,  $Z_C$ ,  $Z_K$ ), the modified Anderson Darling test, Kullback Leibler divergence based tests, the Gürtler Henze and Pekgör test are examined both theoretically and through simulation studies. The study systematically evaluates the power and sensitivity of these tests under different estimation methods using simulated data, comparing their performances across varying sample sizes. Findings reveal that traditional methods fall short under the Cauchy distribution, while robust estimators produce more stable and consistent results, especially in small samples. This research aims to contribute to the theoretical literature while also providing practical guidance in statistical modeling. It emphasizes that, to improve the reliability of goodness of fit evaluations, both the characteristics of the distribution and the choice of estimation method must be considered carefully.

**Keywords:** Cauchy distribution, parameter estimation, goodness-of-fit tests.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, istatistiksel dağılım kuramı ve parametrik tahmin yöntemlerinin teorik ve uygulamalı yönlerinin birlikte ele alındığı bir sürecin ürünüdür. Cauchy dağılımı gibi teorik açıdan zorlayıcı, ancak birçok gerçek yaşam veri yapısında karşılaşılan bir dağılıma ilişkin gerçekleştirilen bu çalışma, yalnızca istatistiksel kuramı derinlemesine anlamayı değil, aynı zamanda farklı tahmin yöntemlerinin testler üzerindeki etkilerini de somutlaştırmayı hedeflemiştir.

Bu çalışmamın her aşamasında bilgi birikimi, akademik rehberliği ve yapıcı önerileriyle bana yol gösteren, hem teorik altyapının güçlendirilmesinde hem de uygulamalı süreçlerin sağlıklı ilerlemesinde büyük katkılar sunan değerli danışmanım Doç. Dr. Ahmet Pekgör'e en derin şükranlarımı sunarım. Kendisiyle bu süreçte çalışmak, yalnızca akademik anlamda değil, kişisel gelişimim açısından da son derece kıymetli ve ilham verici olmuştur.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca bilgi birikimleriyle yoluma ışık tutan tüm hocalarıma, tez sürecinde moral ve motivasyon kaynağım olan yol arkadaşım eşim, annem, babam ve ablamada gönülden teşekkür ederim.

Akademik hayatımda önemli bir dönüm noktası olan bu çalışmanın, istatistik bilimine katkı sağlamasını ve aynı alanda araştırma yapacaklara ilham vermesini temenni ederim.

Ali SAĞLAM  
KONYA-2025

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>KISALTMALAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ</b> .....	<b>11</b>
2.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi .....	13
2.2. En Küçük Kareler Tahmin Edicisi .....	17
2.3. Robust Tahmin Edicileri .....	19
<b>4. CAUCHY DAĞILIMINA UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ</b> .....	<b>29</b>
4.1. Kolmogorov Smirnov Testi .....	35
4.2. Anderson-Darling Testi .....	37
4.3. Uyarlanmış Anderson-Darling Testi.....	38
4.4. Cramér-von Mises Kriteri .....	39
4.5. Kullback-Leibler Testleri.....	40
4.6. Zhang $Z_A$ , $Z_C$ ve $Z_K$ Testleri .....	42
4.7. Gürtler ve Henze Testi .....	44
4.8. Pekgör Testleri .....	44
<b>5. SİMÜLASYON</b> .....	<b>46</b>
5.1. Araştırmanın Amacı.....	46
5.2. Araştırmanın Önemi .....	46
5.3. Güç Karşılaştırmaları .....	46
<b>6. SONUÇ</b> .....	<b>96</b>
<b>7. KAYNAKLAR</b> .....	<b>97</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

## KISALTMALAR

GOF	: Goodness-of-fit test (Uyum iyiliği testi)
KS	: Kolmogorov Smirnov Testi
CVM	: Cramer-von Mises Testi
AD	: Anderson Darling Testi
MAD	: Uyarlanmış Anderson Darling Testi
$Z_A$	: Zhang'ın $Z_A$ Testi
$Z_C$	: Zhang'ın $Z_C$ Testi
$Z_K$	: Zhang'ın $Z_K$ Testi
KL	: Kullback Leibler Uzaklığı
GH	: Gürtler ve Henze
AP <sub>P</sub>	: Ahmet Pekkör Testi
EKK	: En Küçük Kareler
EÇO	: En ok Olabilirlik
MLE	: Maximum Likelihood Estimation
MOM	: Momentler
LSE	: Least Squares Estimation
IQR	: Interquartile Range (eyrek sapma)
n	: Gözlem sayısı

## 1. GİRİŞ

İstatistik bilimi, bazı kaynaklara göre kökenini Latince “status” (durum, hâl) sözcüğünden, bazı kaynaklara göre ise İtalyanca “statista” (devlet adamı) kelimesinden alan; yakın çağda ise verinin sistematik biçimde toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması yoluyla karar verme süreçlerinde önemli bir rol oynayan disiplinlerden biri hâline gelmiştir.

Belirsizlik içeren durumlarda sistematik karar verme ihtiyacı, istatistik disiplininin doğuşunda ve gelişiminde temel etken olmuştur. Günümüzde sosyal bilimlerden mühendisliğe, tıptan ekonomiye kadar çok çeşitli alanlarda kullanılan bilim dalıdır (Anderson, Sweeney, ve Williams, 2020). İstatistiğin temel amacı, verilerden anlamlı ve güvenilir sonuçlar çıkarmak; bu sonuçlara dayanarak geleceğe yönelik çıkarımlar ve tahminler yapmaktır (Montgomery ve Runger, 2019). Hem teorik temelleri hem de uygulamalı yönleriyle istatistik, modern bilimin ve teknolojinin vazgeçilmez bir parçası hâline gelmiştir.

İstatistik biliminin temel amacı, gerçek dünyadaki karmaşık olayları sistematik biçimde analiz edebilmek için uygun matematiksel ve istatistiksel yöntemleri kullanarak verilerden bilgi üretmek ve bu bilgileri yorumlayarak karar süreçlerini desteklemektir. Bu sürecin ilk ve en kritik aşaması, veri kavramının doğru biçimde anlaşılması ve yapılandırılmasıdır. Çünkü istatistiksel çözümler, doğrudan veri yapısına ve türüne bağlı olarak şekillenir (Montgomery, Peck, ve Vining, 2012).

Veri; nesnelere, bireyler veya olaylara ilişkin gözlem, ölçüm ya da sayım süreçleri sonucunda elde edilen bilgileri ifade eder. (Field, 2017). Ancak her veri, aynı yapıya sahip değildir. Bu nedenle veriler genel olarak nitel (kategorik) ve nicel (sayısal) olmak üzere iki temel kategoriye ayrılır. Bu ayrım yalnızca kavramsal değil, aynı zamanda uygulanacak istatistiksel tekniklerin belirlenmesinde yönlendirici bir işleve sahiptir (Upton ve Cook, 2008).

Nitel veri, analiz birimlerinin belirli bir kategoriye aitlik durumunu tanımlar ve genellikle sınıflama ya da sıralama düzeyinde ölçülür. Bu tür veriler, çoğunlukla isimlendirme (nominal) veya sıralama (ordinal) düzeyindedir. Örneğin, bireylerin cinsiyeti (kadın/erkek), kan grubu (A, B, AB, 0) veya medeni durumu (bekâr, evli, boşanmış) gibi değişkenler nitel veri sınıfına girer. Nominal veriler arasında sıralama yapılamazken, ordinal veriler belirli bir öncelik ve hiyerarşi içerir (Triola, 2018).

Buna karşılık, nicel veriler belirli bir ölçüm sürecine dayanır ve sayısal büyüklükleri temsil eder. Bu veriler, gözlemlenen olayların büyüklüğü, miktarı veya derecesi hakkında bilgi sunar. Nicel veriler, kesikli ve sürekli olmak üzere ikiye ayrılır. Kesikli veriler, sayılabilir ve genellikle tam sayı değerleri alır (örneğin, çocuk sayısı, kitap sayısı). Sürekli veriler ise belirli bir aralıkta sonsuz sayıda değer alabilir ve genellikle ölçme araçlarıyla elde edilir (örneğin, boy uzunluğu, ağırlık, sıcaklık) (Weiss, 2016).

Veri türlerinin doğru sınıflandırılması, uygulanacak analiz yöntemlerinin seçiminde temel belirleyicidir. Örneğin, nitel verilerde sıklık tabloları, çapraz tablolar ve ki-kare testleri gibi kategorik analiz teknikleri kullanılırken; nicel verilerde tanımlayıcı istatistiklerden parametrik testler, regresyon analizlerinden zaman serilerine kadar geniş bir analiz yelpazesi uygulanabilir (Moore, McCabe, Craig, ve Alwan, 2016).

Verilerin ölçüm düzeyi, yalnızca analiz tekniğini değil aynı zamanda görselleştirme biçimini, hipotez testinin türünü ve çıkarım gücünü de belirlemektedir. Bu nedenle istatistiksel bir çalışmada, veri toplama sürecinden önce hangi tür veriye ihtiyaç duyulduğu ve bu verinin nasıl yapılandırılacağı net biçimde belirlenmelidir (Field, 2017).

İstatistiksel analizlerin temel yapı taşlarından biri, üzerinde çalışılan kitle (evren) kavramıdır. Kitle, istatistiksel olarak incelenmek istenen tüm birey, nesne veya olayların oluşturduğu teorik veya gerçek topluluktur. Tanım gereği kitle, belirli bir özellik bakımından tüm birimleri kapsar. Örneğin, bir ülke sınırları içerisindeki tüm lise öğrencileri, belirli bir yıldaki tüm kamu çalışanları ya da bir üretim bandındaki tüm ürünler, birer kitle örneğidir (Keller, 2018).

Ancak çoğu zaman, kitlenin tümüne ulaşmak maliyet, zaman ve erişim kısıtları nedeniyle mümkün olamamaktadır. Bu durumda, kitlenin temsil edici bir alt kümesi olan örneklem üzerinde çalışılır. Örneklem, istatistiksel çıkarımların temelini oluşturur ve amacı, kitleye ilişkin genellemeler yapabilecek kadar temsili bilgi sağlamaktır (Cochran, 1977). Nitelikli bir örneklem, sistematik hataları minimize edecek biçimde, belirli örnekleme yöntemleri ile seçilir. Bu yöntemler arasında basit rastgele örnekleme, tabakalı örnekleme, küme örnekleme ve sistematik örnekleme gibi çeşitli yaklaşımlar yer alır.

Kitlenin belirli özelliklerini tanımlamak için kullanılan sayısal ölçülere parametre adı verilir. Örneğin, bir kitlenin gerçek ortalama değeri ( $\mu$ ) ya da varyansı ( $\sigma^2$ ), o kitleye ait parametrelerdir ve genellikle bilinemezler. Bu nedenle çıkarımsal istatistikte, parametreler doğrudan değil; örneklemden elde edilen değerler aracılığıyla dolaylı olarak tahmin edilir (Casella ve Berger, 2002).

Buna karşılık, örneklemin kendisine ait sayısal özelliklerine istatistik denir. Örneklem ortalaması ( $\bar{x}$ ), örneklem varyansı ( $s^2$ ) veya oranı gibi ölçüler, kitle parametrelerinin tahmininde kullanılır. Örneklemden hesaplanan istatistikler, belirli dağılımsal varsayımlar altında kitle hakkında tahmin üretmek için temel araçtır. Bu süreç, çıkarımsal istatistik alanının temelini oluşturur (Hogg, McKean, ve Craig, 2019).

Kitle, örneklem, parametre ve istatistik kavramları arasındaki bu ilişkiler, istatistik biliminin hem teorik hem de uygulamalı yönlerinde kritik bir rol oynamakta; özellikle örnekleme dağılımları, güven aralıkları ve hipotez testleri gibi konuların anlaşılmasında temel bir çerçeveye sunmaktadır.

İstatistik bilimi, temel olarak iki ana yöntemsel yaklaşıma ayrılır: betimsel istatistik ve çıkarımsal istatistik. Bu iki yaklaşım, verilerle yapılan analizlerin kapsamı ve amacı açısından birbirinden ayrılmakta; ancak uygulamada birbirini tamamlayıcı biçimde işlev görmektedir (Moore, McCabe, Craig, ve Alwan, 2016).

Betimsel istatistik, elde edilen veri setinin temel özelliklerini özetlemeye, sınıflandırmaya ve uygun biçimlerde sunmaya yönelik yöntemleri içerir. Bu yöntemler, verilerin merkezi eğilimini tanımlayan ortalama, medyan ve mod gibi ölçülerle; değişkenliğini tanımlayan standart sapma, varyans ve değişim katsayısı gibi yayılma ölçüleriyle ifade edilir. Ayrıca, dağılımın biçimini açıklamak için kullanılan çarpıklık ve basıklık gibi ölçüler de betimsel istatistik kapsamında ele alınır (Triola, 2018).

Betimsel istatistik aynı zamanda görselleştirme tekniklerini de kapsar. Elde edilen verilerin daha anlaşılır ve yorumlanabilir hale gelmesini sağlamak için histogramlar, kutu grafikleri, çubuk grafikler, dağılım diyagramları gibi grafiksel sunum araçları kullanılır. Bu görseller, veri setinin yapısını sezgisel olarak kavramayı kolaylaştırır ve veri analizine zemin hazırlar (Field, 2017).

Buna karşın, çıkarımsal istatistik, örneklem verilerinden yola çıkarak kitle hakkında genel geçer yargılara ulaşmayı amaçlayan yöntemler bütünüdür. Gerçek hayatta çoğu zaman tüm kitleye ulaşmak mümkün olmadığından, uygun yöntemlerle seçilmiş örneklem üzerinden yapılan analizlerle, kitleye dair güvenilir tahminler yapılması hedeflenir. Bu süreç, örneklemden elde edilen istatistikler aracılığıyla kitle parametrelerinin tahmin edilmesini sağlar (Hogg, McKean, ve Craig, 2019).

Çıkarımsal istatistik kapsamında kullanılan temel teknikler arasında güven aralıkları, hipotez testleri (örneğin t-testi, ki-kare testi, ANOVA) ve regresyon analizleri (doğrusal, çoklu, lojistik) yer alır. Örneğin, bir ilaç firmasının, geliştirdiği yeni bir ilacın etkinliğini test etmek amacıyla rastgele seçilmiş bir hasta grubu üzerinde yaptığı

çalışmadan elde edilen sonuçları genelleyerek, tüm hasta kitlesi için geçerli bir çıkarımda bulunması çıkarımsal istatistiksel yaklaşımın uygulamasına örnek teşkil eder (Kutner, Nachtsheim, ve Neter, 2004).

Çıkarımsal istatistik, yalnızca gözlemlerle sınırlı kalmayıp, elde edilen sonuçların istatistiksel güvenilirliğini değerlendirir. Bu yönüyle, belirsizlik altında karar verme sürecinde önemli bir aracı temsil eder. Örneklemden elde edilen bulguların genellenebilirliğini sağlam temellere oturtmak için varsayımlar, test gücü, örneklem büyüklüğü ve etki büyüklüğü gibi unsurlar dikkatle değerlendirilmelidir (Montgomery, Peck, ve Vining, 2012).

İstatistiksel analizlerde temel amaçlardan biri, bir dağılımın ya da modelin bilinmeyen parametrelerini gözlem verilerine dayanarak en doğru ve güvenilir biçimde tahmin etmektir. Bu amaç doğrultusunda geliştirilmiş olan parametre tahmin yöntemleri, istatistiksel modelleme sürecinin en kritik adımlarından birini oluşturur. Parametre tahminine ilişkin yöntemler, genellikle olabilirlik temelli, moment temelli, hata enküçüklemesine dayalı ya da robustluk(sağlamlık) ilkesine göre yapılandırılmış olabilir. Her yöntemin dayandığı teorik çerçeve, uygulanabilirlik koşulları, avantajları ve sınırlılıkları farklıdır. Bu nedenle, veri yapısı, model tipi ve örneklem büyüklüğü gibi unsurlar tahmin yöntemi seçiminde belirleyici rol oynar (Casella ve Berger, 2002; Hogg, McKean, ve Craig, 2019).

Bu yöntemler içerisinde en yaygın kullanılanlardan biri En Çok Olabilirlik (MLE, EÇO) yöntemidir. MLE, gözlemlenen verilerin belirli bir parametre seti altında gerçekleşme olasılığını ifade eden olabilirlik fonksiyonunu enbüyüklemeyi esas alır. Yöntemin amacı, örneklem verilerine en uygun parametre değerlerini belirlemektir. MLE'nin avantajı, büyük örneklerde asimptotik olarak etkin, tutarlı ve yansız tahminler üretmesidir (Myung, 2003; Casella ve Berger, 2002). Ancak, çoğu durumda olabilirlik denklemleri kapalı formda çözülemediğinden, tahminler genellikle iteratif sayısal yöntemler (örneğin Newton-Raphson) kullanılarak elde edilir. MLE, normal dağılım gibi parametrik yapıların yanı sıra karmaşık ve çok parametrelili modellerde de güçlü bir yöntem olarak öne çıkar.

Bir diğer temel yöntem olan En Küçük Kareler (LSE, EKK) yöntemi özellikle regresyon modellerinde tercih edilen ve teorik olarak Gauss-Markov teoremi ile temellendirilen bir yaklaşımdır. EKK, modelin tahmin ettiği değerlerle gözlenen değerler arasındaki farkların karelerinin toplamını minimize eden parametre değerlerini bulmayı amaçlar (Kutner, Nachtsheim, ve Neter, 2004). Doğrusal modellerde EKK ile kapalı

formda çözümler elde edilebilirken, doğrusal olmayan modellerde iteratif çözümler gereklidir. EKK tahmin edicileri, doğrusal regresyon modelleri için en iyi lineer yansız tahmin edici özelliğine sahiptir (Greene, 2018).

Daha sezgisel ve hesaplaması kolay bir alternatif olan momentler yöntemi (Method of Moments - MoM), parametreleri tahmin etmek için örneklem momentlerini kitle momentleriyle eşitlemeyi esas alır. Örneğin, bir dağılımın birinci ve ikinci momentleri (yani ortalama ve varyans) örneklem değerleriyle eşitlenerek ilgili parametreler bulunabilir (Hogg, McKean, ve Craig, 2019). MoM, teorik olarak sağlam bir zemin sunmasına rağmen, özellikle küçük örneklerde verimsiz tahminler üretebilir ve genellikle MLE kadar hassas değildir (Casella ve Berger, 2002).

Özellikle ağırlıklı sapmalar, uç değerler veya veri yapısında bozucu etkilerin bulunduğu durumlarda, klasik tahmin yöntemleri duyarlılığını yitirir. Bu tür durumlar için geliştirilen robust (sağlam) tahmin yöntemleri, model varsayımlarından sapma olduğunda bile güvenilir tahminler üretmeyi amaçlar (Huber, 1981). Robust yöntemler, MLE gibi yöntemlerin zayıflık gösterdiği durumlarda daha düşük varyanslı ve sapmadan uzak tahminler sunabilir. Özellikle Hampel'in etki fonksiyonu yaklaşımı ile geliştirilen robust tahmin ediciler, veri setinde uç değerlerin varlığında parametre tahminlerinin bozulmasını engelleyen yöntemler sunar (Maronna, Martin, ve Yohai, 2006).

Uyum iyiliği testleri, istatistiksel veri analizinde önemli bir yer tutmakta ve bir veri setinin belirli bir teorik dağılıma uygunluk düzeyini değerlendirmek için kullanılan temel yöntemlerden biri olarak öne çıkmaktadır. Bu testler, özellikle parametrik modellerin geçerliliğini sınamak, model varsayımlarını doğrulamak ve dağılımsal yapıların analizini yapmak amacıyla sıklıkla kullanılmaktadır (D'Agostino ve Stephens, 1986). Uyum iyiliği testlerinin uygulanmasında, dağılıma ilişkin parametrelerin tahmini süreci kritik bir rol oynamakta; çünkü test istatistiklerinin hesaplanması doğrudan tahmin edilen parametre değerlerine dayanmaktadır. Bu durum, özellikle Cauchy dağılımı gibi ortalaması ve varyansı tanımsız, ağır kuyruklu dağılımlar söz konusu olduğunda daha da belirgin hale gelmektedir. Bu tür dağılımlarda, kullanılan parametre tahmin yöntemlerinin türü, testlerin performansını ciddi şekilde etkileyebilmektedir (Huber ve Ronchetti, 2009).

Uyum iyiliği testlerinin kökeni, 20. yüzyılın başlarına dayanmaktadır. Karl Pearson'ın (1900) geliştirdiği ki-kare uyum iyiliği testi, bu alandaki öncül çalışmalardan biridir. Pearson, gözlemlenen frekanslarla beklenen frekanslar arasındaki farkları

değerlendirmek amacıyla geliştirdiği test ile, özellikle kategorik veri yapılarında önemli bir metodolojik açılım sağlamıştır.

Sürekli dağılımlara yönelik ilk parametrik olmayan testlerden biri ise Kolmogorov-Smirnov (KS) testi olmuştur. Andrey Kolmogorov (1933) ve daha sonra Nikolai Smirnov tarafından geliştirilen bu test, ampirik dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkı temel alarak örneklemin teorik dağılıma uygunluğunu değerlendirir. KS testi, özellikle küçük ve orta büyüklükteki örneklem için uygunluğu ve parametrik varsayımlara duyarsızlığı ile öne çıkmaktadır (Stephens, 1974).

Uyum iyiliği testleri, zaman içinde hem teorik kapsamaları genişletilmiş hem de çeşitli sapmaları daha hassas biçimde yakalayabilecek biçimde evrilmiştir. Bu kapsamda, AD testi gibi ağırlıklı testler geliştirilmiş, bu testin uç değerlerdeki farklılıklara olan duyarlılığı artırılmıştır (Anderson ve Darling, 1952). Benzer şekilde, Cramér-von Mises testi, ortalama karesel farklara dayalı yapısıyla tüm dağılım boyunca dengeli bir duyarlılık sunmaktadır (Thode, 2002).

Son yıllarda, uyum iyiliği analizinde daha yüksek duyarlılık arayışları, yeni testlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu bağlamda, özellikle simetrik ve ağır kuyruklu yapılar için önerilen Zhang ( $Z_A, Z_C, Z_K$ ) ve  $AP_P$  testleri dikkat çekmektedir. Zhang tarafından geliştirilen bu testler, teorik dağılım ile ampirik dağılım arasındaki farklılıkları daha ayrıntılı biçimde değerlendirebilmekte ve klasik testlerin yetersiz kaldığı durumlarda alternatif bir yol sunmaktadır.

Bunlara ek olarak, dağılım uygunluğunu değerlendirmede bilgi kuramı temelli yaklaşımlar da kullanılmış ve bu doğrultuda Kullback-Leibler ayrışımı gibi ölçütler, deneysel ve teorik dağılımlar arasındaki bilgi kaybını hesaplamak üzere kullanılmıştır (Kullback ve Leibler, 1951).

Tez kapsamında kullanılan testler arasında ayrıca, parametrik olmayan ve çok değişkenli yapılarla uyumlu Gürtler-Henze testi ile parametrik yapıya dayalı Uyarlanmış Anderson-Darling testi de yer almaktadır. Her bir testin güçlü ve zayıf yönleri, uygulanan parametre tahmin yöntemine (örneğin MLE, EKK, robust tahminler) ve veri yapısına bağlı olarak farklılaşmaktadır. Bu nedenle, uyum iyiliği testlerinin performansı yalnızca dağılım varsayımına değil, aynı zamanda seçilen tahmin yöntemine ve örneklem büyüklüğüne de bağlıdır (D'Agostino ve Stephens, 1986; Maronna, Martin ve Yohai, 2006).

Ağır kuyruklu yapısı ve tanımsız momentleri nedeniyle, Cauchy dağılımı, istatistiksel analiz açısından hem teorik hem de uygulamalı olarak zorlu bir dağılım türü olarak öne çıkmaktadır. Bu dağılıma ilişkin parametrik analizlerde en büyük güçlük, geleneksel tahmin yöntemlerinin güvenilirliğinin zayıflaması ve dolayısıyla yapılan uyum iyiliği testlerinin performansının bozulmasıdır (Nolan, 2001). Özellikle parametre tahmin yöntemlerinin seçimi, test sonuçlarını doğrudan etkileyebilecek bir faktördür. Çünkü uyum testlerinin istatistikleri genellikle dağılımın parametrelerine bağlıdır ve bu parametreler örneklemden tahmin edilir (D'Agostino ve Stephens, 1986).

Örneğin, MLE yöntemi, teorik olarak tutarlı ve asimptotik olarak etkin tahminler sağlamasına rağmen, Cauchy dağılımı gibi uç değerlere karşı duyarlı dağılımlarda performansı tartışmalıdır. Küçük örneklemlerde, MLE yönteminin daha düşük varyanslı ve asimptotik olarak etkin tahminler sunduğu, dolayısıyla test gücünü artırdığı vurgulanmaktadır. Ayrıca, serbestlik derecelerinin tahmin edilen parametre sayısına göre düzeltilmesi gerektiği, aksi takdirde testin nominal anlamlılık düzeyinin sapabileceği belirtilmiştir (Akdi ve ark., 2006). MLE, küçük örneklemlerde ve uç değerlerin etkili olduğu durumlarda yüksek varyanslı tahminler üretme eğilimindedir (Lange, Little, ve Taylor, 1989). Aynı şekilde, EKK de, varyansın tanımsız olduğu Cauchy dağılımında güvenilir sonuçlar vermez, çünkü bu yöntem, hata karelere dayandığı için uç değerlerin etkisini büyütür (Casella ve Berger, 2002). Bu tür dağılımlar için robust tahmin yöntemleri tercih edilmekte, özellikle medyan temelli tahminler veya M-tahmin ediciler kullanılarak daha sabit sonuçlara ulaşılabilmektedir (Huber ve Ronchetti, 2009).

Uyum iyiliği testlerinin performansı, yalnızca parametre tahmin yöntemiyle değil, aynı zamanda dağılımın özelliklerine de bağlıdır. Cauchy dağılımı gibi ağır kuyruklu yapılarda, testlerin gücü (power) ve hassasiyeti (sensitivity) klasik dağılımlara kıyasla daha düşük olabilir. Bu bağlamda, farklı testlerin ağır kuyrukluluğa karşı olan duyarlılığı önemli hale gelmektedir. Örneğin, AD esti, dağılımın uç noktalarındaki sapmalara karşı daha hassas olduğu için, bu tür dağılımlarda KS veya ki-kare gibi daha genel testlere kıyasla daha uygun bir tercih olabilir (Anderson ve Darling, 1954; Thode, 2002).

Anderson ve Darling tarafından geliştirilen test, özellikle dağılımın kuyruk davranışını dikkate alan bir ağırlık fonksiyonu içerdiği için, Cauchy gibi uç değerlerin etkisinin belirgin olduğu dağılımlar için daha güçlüdür. Bu nedenle, teorik olarak momentlere dayanmayan ve uç değerlerin etkisini minimize eden testler, söz konusu dağılımlarda daha güvenilir sonuçlar sağlayabilmektedir (Stephens, 1974).

Sonuç olarak, Cauchy dağılımı gibi özel ve problemleri yapılarında yapılan uyum iyiliği analizlerinde, parametre tahmin yönteminin seçimi yalnızca teknik bir ayrıntı değil, testin bütün sonuçlarını etkileyen stratejik bir tercihtir. Bu nedenle, farklı tahmin yöntemlerinin uyum testleri üzerindeki etkilerinin sistematik biçimde incelenmesi, hem teorik istatistiksel yapıların anlaşılması hem de uygulamalı analizlerin geçerliliği açısından önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır (Maronna, Martin, ve Yohai, 2006; Huber ve Ronchetti, 2009).

Cauchy dağılımı, adını 19. yüzyılın önde gelen Fransız matematikçisi Augustin-Louis Cauchy'den (1789–1857) alır. Bu dağılım, Cauchy'nin 1846 yılında yayımladığı “Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée” başlıklı çalışmasında ortaya konmuştur (Cauchy, 1846). Cauchy, bu çalışmasında harmonik analiz ve kompleks integral hesaplamaları bağlamında bu dağılımın matematiksel özelliklerini incelemiştir.

Cauchy dağılımı, özellikle ağır kuyruklu yapısıyla dikkat çeker. Bu özelliği nedeniyle, varyans ve daha yüksek momentleri tanımsızdır; dolayısıyla klasik parametrik istatistiksel yaklaşımların birçoğu bu dağılıma doğrudan uygulanamaz (Johnson, Kotz, ve Balakrishnan, 1994). Bu yapısı, Cauchy dağılımını özellikle aykırı değerlerin yaygın olduğu veri setlerinde analiz için uygun kılar.

Cauchy dağılımı, robust istatistikte önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle robust tahmin yöntemlerinin geliştirilmesinde test dağılımı olarak sıkça kullanılmıştır. Bu dağılım, aykırı değerlere karşı duyarsız yöntemlerin geliştirilmesi açısından literatürde referans olarak kabul edilmektedir (Huber, 1981). Lange, Little ve Taylor (1989), Cauchy dağılımını kullanarak robust regresyon modellerinin performansını detaylı biçimde incelemişlerdir.

Uygulama açısından bakıldığında, Cauchy dağılımı fizik, mühendislik, finans ve sosyal bilimler gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Özellikle fizik alanında, rezonans fenomenlerinin modellenmesinde Cauchy dağılımı sıklıkla kullanılmakta ve bu bağlamda literatürde Lorentz dağılımı olarak da anılmaktadır (Lorentz, 1909). Finansal analizlerde ise, özellikle piyasa oynaklığının yüksek olduğu dönemlerde, normal dağılıma kıyasla daha gerçekçi modelleme sonuçları sunduğu kabul edilmektedir (Mandelbrot, 1963).

Ayrıca, Cauchy dağılımı, Bayesian istatistikte esnek bir önsel dağılım olarak da kullanılmaktadır. Belirsizliği yüksek olan parametreler için geniş bir olasılık aralığı sunduğundan, özellikle regresyon katsayılarının tahmininde öncel olarak tercih edilebilmektedir (Gelman, Carlin, Stern, ve Rubin).

Bu çalışmada Cauchy dağılımının tercih edilmesinin başlıca nedenleri şunlardır:

- i. Cauchy dağılımı ağır kuyruklu bir yapıya sahiptir; bu özellikle uç değerlerin bulunduğu veri setlerinde klasik dağılımların yetersiz kaldığı durumlarda daha doğru ve etkili sonuçlar elde edilmesini sağlar (Lange, Little, ve Taylor, 1989).
- ii. Bu dağılım, robust (sağlam) istatistiksel yöntemlerin geliştirilmesinde sıklıkla kullanılan bir referans dağılımdır. Aykırı değerlere karşı daha dayanıklı analiz tekniklerinin oluşturulmasına katkı sunar (Huber, 1981).
- iii. Cauchy dağılımı teorik olarak esnek bir yapıya sahiptir; bu özelliği sayesinde hem parametrik hem parametrik olmayan pek çok analizde kullanılabilir ve farklı uygulama alanlarına uyum sağlayabilir (Gelman, Carlin, Stern, ve Rubin, 2013).

Finansal uygulamalarda ise Cauchy dağılımı, özellikle piyasadaki aşırı dalgalanmaların ve uç değerlerin analizinde etkili bir modelleme aracı olarak öne çıkmaktadır. Mandelbrot'un (1963) öncülüğünü yaptığı çalışmalar, finansal zaman serilerinin klasik istatistiksel varsayımları (örneğin sonlu varyans varsayımı) çoğu zaman ihlal ettiğini göstermiştir. Mandelbrot, piyasada gözlemlenen ani fiyat sıçramaları ve alışılmadık büyüklükteki kaymaların, normal dağılımla modellenemeyecek kadar uç davranışlar sergilediğini belirtmiştir. Bu bağlamda Cauchy dağılımı, simetrik yapısı ve uç değerlere verdiği yüksek olasılık sayesinde, finansal verilerin analizinde daha uygun bir dağılım olarak değerlendirilmektedir. Bu dağılım sayesinde, finansal sistemlerin yüksek risk içeren ve öngörülemeyen yönleri daha doğru biçimde temsil edilebilmekte, dolayısıyla hem yatırım kararlarında hem de risk analizlerinde daha sağlıklı sonuçlara ulaşılabilmektedir.

Cauchy dağılımı, yapay zeka ve makine öğrenmesi alanlarında çeşitli şekillerde kullanılmaktadır. Özellikle robust öğrenme yaklaşımlarında, klasik normal dağılımın yerine Cauchy dağılımının kullanılması, aykırı değerlere karşı daha toleranslı modellerin geliştirilmesini sağlamaktadır. Bu bağlamda, robust regresyon analizlerinde hata terimlerinin Cauchy dağılımına göre modellendiği örnekler mevcuttur (Huber ve Ronchetti, 2009).

Bunun yanı sıra, Bayesçi öğrenme yöntemlerinde Cauchy dağılımı, özellikle regresyon katsayıları için zayıf bilgi içeren önsel olarak önerilmektedir (Gelman, 2008). Bu yaklaşım, modelin genellenebilirliğini artırmakta ve aşırı öğrenme riskini azaltmaktadır.

Sonuç olarak, Cauchy dağılımı, doğrudan hedef değişkenin modeli olarak kullanılmasa da, yapay zeka sistemlerinin daha esnek, dayanıklı ve genellenebilir biçimde inşa edilmesine önemli katkılar sunan istatistiksel bir araç konumundadır. Bununla birlikte, Cauchy dağılımının fiziksel sistemlerdeki rezonans olaylarının modellenmesinde ve finansal piyasalardaki aşırı oynaklıkların analizinde sağladığı başarı, bu dağılımın yalnızca teorik bir yapı olmadığını; aynı zamanda fizik, finans ve yapay zeka gibi uygulamalı disiplinlerde de vazgeçilmez bir modelleme aracı olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

## 2. PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Parametre tahmini, istatistiksel modelleme sürecinin temel yapı taşlarından biridir ve teorik olasılık dağılımlarının gözlenen verilerle en uygun biçimde eşleştirilmesine olanak tanır. Bir dağılımın yapısı, genellikle belirli sayıda parametreye bağlıdır ve bu parametrelerin doğru şekilde tahmin edilmesi, modelin hem geçerliliği hem de güvenilirliği açısından kritik öneme sahiptir. Bu bağlamda parametre tahmini yalnızca modelin kurulmasında değil, aynı zamanda modelin öngörü gücünün değerlendirilmesi, hipotez testleri ve karar verme mekanizmalarının temellendirilmesinde de belirleyici rol üstlenmektedir (Lehmann ve Casella, 1998; Wasserman, 2004). Ayrıca, güvenilir parametre tahminleri sayesinde istatistiksel çıkarımlar daha sağlam temellere oturtulabilir ve varyans ile yanlılık gibi ölçütler üzerinde doğrudan etkili olunabilir (Hogg, McKean, ve Craig, 2019). Özellikle parametrik modelleme çerçevesinde, tahmin yöntemlerinin seçimi, verinin doğasına ve dağılımın biçimine göre modelin performansını doğrudan etkileyen stratejik bir karardır.

Parametre tahmininde kullanılan yöntemler genel olarak iki ana yaklaşım altında incelenebilir: frekansçı (klasik) ve bayes temelli yaklaşımlar. Frekansçı paradigma, parametrelerin sabit fakat bilinmeyen nicelikler olduğunu varsayarak, bu parametrelerin örnekleme dayalı tahmin edilmesini hedefler. Buna karşılık bayes temelli yaklaşım, parametreleri rassal değişkenler olarak kabul eder ve önsel bilgi ile gözlemsel verileri birleştirerek güncellenmiş olasılık dağılımları üzerinden çıkarımda bulunur (Gelman, Carlin, Stern, ve Rubin, 2013). Bu tez çalışmasında ise yalnızca klasik yaklaşım temelinde değerlendirilen yöntemlere odaklanılacaktır. Özellikle MLE, EKK ve Robust tahmin yöntemleri ayrıntılı biçimde ele alınacaktır.

Klasik parametre tahmin yöntemlerinden en yaygın kullanılanlardan biri olan MLE, parametre değerlerini, gözlenen veri kümesinin gerçekleşme olasılığını en üst düzeye çıkaracak biçimde belirlemeyi amaçlar (Fisher, 1922). MLE yönteminin tercih edilmesinin temel sebeplerinden bazıları; büyük örneklem hacminde tutarlı, etkin ve asimptotik olarak normal dağılıma sahip tahminler üretmesidir. Ancak bu yöntem, özellikle uç değerlerin varlığı ya da dağılımın ağır kuyruklu olması gibi durumlarda, veri setindeki aykırılıklara karşı oldukça hassas hale gelebilir (Huber ve Ronchetti, 2009). Bu tür koşullarda, tahminlerin tutarlı sonuçlar vermesi amacıyla daha robust tahmin yaklaşımlarının kullanılması gerekebilir.

Robust tahmin yöntemleri, klasik tahmin edicilerin hassasiyet gösterdiği durumlara karşı istatistiksel güvenilirliği artırmayı hedefler. Bu yöntemler, özellikle veri setinde bulunan aykırı gözlemler veya model varsayımlarındaki sapmalar gibi sorunlara karşı tahmin performansını koruyarak daha tutarlı sonuçlar sunar. Robust yaklaşımların temel amacı yalnızca uç değerlere karşı direnç göstermek değil, aynı zamanda dağılımın yapısında meydana gelebilecek bozulmalara karşı da istatistiksel tolerans sağlamaktır (Maronna, Martin, ve Yohai, 2019). Böylece, modelin genellenebilirliği ve güvenilirliği önemli ölçüde artırılmış olur.

Diğer yandan, EKK yöntemi, özellikle doğrusal regresyon analizlerinde sıklıkla tercih edilen bir tahmin yaklaşımıdır. Bu yöntem, gözlemler ile modelin öngördüğü değerler arasındaki farkların karelerinin toplamını en aza indirerek parametre tahmininde bulunur. EKK yönteminin öne çıkan avantajlarından biri, matematiksel olarak sade yapısı ve uygulama kolaylığıdır. Ancak, temel varsayımlar arasında yer alan hata terimlerinin normal dağılıma uymaması ya da veri setinde aykırı değerlerin bulunması gibi durumlarda, EKK tahminleri güvenilirliğini kaybedebilir ve ciddi sapmalar gösterebilir (Rousseeuw ve Leroy, 1987).

Cauchy dağılımı gibi ağır kuyruklu ve çarpık olmayan dağılımlarda, parametrik tahmin yöntemlerinin (MoM, EKK, MLE vb.) performansı oldukça değişkenlik gösterebilmektedir. Akdeniz (2004), istatistiksel modelleme süreçlerinde parametrik olmayan dağılımlarla çalışırken tahmin edicilerin yapısal tutarlılığına ve dağılımın karakteristiğine uyumuna dikkat edilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu görüşe göre, Cauchy dağılımı gibi ortalaması ve varyansı tanımlı olmayan dağılımlarda moment temelli yaklaşımların yerine medyan veya maksimum olabilirlik (MLE) gibi yöntemlerin tercih edilmesi daha anlamlı olacaktır.

Parametre tahmin yöntemlerinin seçiminde göz önünde bulundurulması gereken temel etkenlerden biri, analizde kullanılan veri setinin yapısal özellikleridir. Özellikle örneklem hacmi, tahmin edicilerin performansı üzerinde belirleyici rol oynamaktadır; zira bazı tahmin yöntemleri küçük örneklerde kararsız ve yanlı sonuçlar veririrken, büyük örneklerde asimptotik nitelikler ön plana çıkar. Bunun yanı sıra, dağılımın simetrik olup olmaması, varyansın homojenliği ve verinin uç değerlere duyarlılığı gibi faktörler de hangi tahmin yaklaşımının tercih edilmesi gerektiği konusunda önemli ölçüde yol gösterici olmaktadır (Lehmann ve Casella, 1998). Dolayısıyla, uygun bir tahmin yöntemi seçimi, yalnızca kuramsal özelliklere değil, aynı zamanda verinin istatistiksel doğasına da duyarlı bir değerlendirme gerektirir.

Parametre tahmini hem kuramsal istatistik hem de uygulamalı veri analizi açısından merkezi bir öneme sahiptir. Özellikle Cauchy dağılımı gibi ağır kuyruklu ve momentleri tanımsız dağılımlar söz konusu olduğunda, kullanılan tahmin yöntemlerinin özelliklerinin iyi anlaşılması ve uygun yöntemin seçimi daha da kritik hale gelmektedir. Bu tür dağılımlar, klasik yöntemlerin varsayımlarına meydan okuyan yapılarıyla tahmin sürecini güçleştirmekte; bu nedenle, tahmin edicilerin dayanıklılığı ve duyarlılığı özel önem taşımaktadır. Takip eden bölümde, üç temel tahmin yöntemi olan MLE, EKK ve robust tahmin yaklaşımları ayrıntılı olarak ele alınacak; bu yöntemlerin teorik temelleri, uygulama biçimleri ve literatürdeki yeri kapsamlı biçimde değerlendirilecektir.

## 2.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Parametrik istatistiksel modelleme kapsamında temel yaklaşımlardan biri olan MLE, 1922 yılında Ronald A. Fisher tarafından ortaya konulmuştur. Bu yöntem, gözlemlenen verilerin belirli bir olasılık dağılımına göre gerçekleşme ihtimalini en üst düzeye çıkaracak parametrelerin belirlenmesini amaçlar. Fisher, MLE'yi yalnızca pratik bir tahmin aracı olarak değil, aynı zamanda istatistiksel çıkarımın teorik temellerinden biri olarak konumlandırmıştır. Bu yaklaşım, parametrik modelleme süreçlerinde geniş bir uygulama alanı bulmakta olup, özellikle büyük örneklemle çalışıldığında tutarlılık, etkinlik ve asimptotik normallik gibi avantajları nedeniyle tercih edilmektedir (Casella ve Berger, 2002; Pawitan, 2001). Bununla birlikte, MLE'nin performansı dağılımın yapısına ve veri setindeki sapmalara bağlı olarak önemli ölçüde değişiklik gösterebilir; bu nedenle yöntem, ideal koşullardan sapma durumlarında dikkatle değerlendirilmelidir.

Bir olasılık modeline dayalı olarak gözlenen verilerin belirli parametre değerleri altında gerçekleşme olasılığını nicel olarak ifade eden yapıya olabilirlik fonksiyonu adı verilir. Parametresi  $(\mu, \sigma)$  ile tanımlanan bir dağılım altında, bağımsız ve özdeş dağılmış bir örneklem  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$   $(\mu, \sigma) \in \Theta \subset \mathbb{R}^P$  göz önünde bulundurulduğunda, olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L(\mu, \sigma | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i | \mu, \sigma)$$

Burada  $f(\mathbf{x}_i | \mu, \sigma)$  gösterimi,  $(\mu, \sigma)$  parametreleri altındaki olasılık (yoğunluk) fonksiyonunu ifade etmektedir. Bu fonksiyon, sabit gözlem kümesi  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  verildiğinde,  $(\mu, \sigma)$  parametrelerinin bu verilere ne derece uyum sağladığını ölçmek

amacıyla kullanılır. Diğer bir ifadeyle, olabilirlik fonksiyonu, gözlemlenen verilerin belirli parametreler altında ortaya çıkma olasılığını temsil eder. MLE yaklaşımında amaç, bu olabilirlik fonksiyonunu enbüyükleyecek parametre değerlerinin belirlenmesidir (Lehmann ve Casella, 1998). Bu nedenle, MLE istatistiksel modelleme sürecinde sadece parametre tahmini için değil, aynı zamanda modelin uygunluğunu değerlendirme ve çıkarıma dayalı karar süreçleri için de temel bir araç konumundadır.

Olasılık temelli modellerde, olabilirlik fonksiyonunun analizini kolaylaştırmak amacıyla genellikle bu fonksiyonun logaritması alınır. Böylece, log-olabilirlik fonksiyonu elde edilir:

$$\ell(\mu, \sigma) = \log(L(\mu, \sigma | \mathbf{x}))$$

Tahmin sürecinde,  $\ell(\mu, \sigma)$ 'nin sırasıyla parametrelerine  $(\mu, \sigma)$  göre türevi alınır ve bu türevin sıfıra eşit olduğu noktalar MLE olarak kabul edilir. Analitik çözümler genellikle mümkün olmadığından sayısal yöntemler tercih edilir. MLE'nin varyansı Fisher bilgi matrisi ile ilişkilidir:

$$I(\mu, \sigma) = -E[\partial^2 \ell(\mu, \sigma) / \partial(\mu, \sigma)^2]$$

Bu matrise bağlı olarak, tahmin edicinin standart hataları ve güven aralıkları hesaplanabilir. MLE'nin önemli özellikleri arasında tutarlılık, asimptotik normallik ve etkinlik yer alır. Büyük örneklerde:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta))$$

$\theta$  : Gerçek parametre değeri,

$\hat{\theta}_{MLE}$  :  $\theta$ 'nın Ençok olabilirlik tahmini,

$n$  : Örneklem büyüklüğü,

$\xrightarrow{d}$  : Dağılımsal yakınsama (asimptotik dağılım),

$N(0, I^{-1}(\theta))$  : Ortalaması 0 (Sıfır), varyansı  $I^{-1}(\theta)$  Fisher bilgi matrisinin tersi olan normal dağılım,

$I(\theta)$  : Fisher bilgi matrisi:  $I(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X; \theta) \right]$ ,

şeklinde normal dağılıma yakınsar. Bu asimptotik özellikler, MLE'yi büyük örneklem

boyutlarında istatistiksel analizlerde yaygın olarak tercih edilen bir yöntem haline getirmektedir (Casella ve Berger, 2002; Pawitan, 2001).

MLE, yalnızca geleneksel parametrik modellerle sınırlı kalmamakta, aynı zamanda modern istatistiksel öğrenme yöntemleri ve veri bilimi uygulamalarında da geniş bir kullanım alanı bulmaktadır. Özellikle Genelleştirilmiş Lineer Modeller (GLM) çerçevesinde, MLE, parametre tahmini için temel yaklaşımdır. Örneğin, lojistik regresyonda başarı/başarısızlık gibi ikili sonuçların modellenmesinde, Bernoulli dağılımına dayalı log-olabilirlik fonksiyonu MLE ile enbüyüklenir.

Eksik verili problemlerde ise Beklenti-En Büyükleme (EM) algoritması, MLE'nin yinelemeli bir uzantısı olarak işlev görür. EM algoritması, tam veri üzerinden olabilirlik fonksiyonunun enbüyüklenmesini sağlar ve özellikle normal karışım modelleri gibi eksik gözlem içeren yapılar için oldukça etkilidir (Dempster, Laird, ve Rubin, 1977).

MLE ayrıca Gizli Markov Modelleri gibi zamana bağlı ve gözlemlenemeyen durum değişkenleri içeren modellerde de temel tahmin yöntemi olarak kullanılır. Örneğin, konuşma tanıma, biyoinformatik ve doğal dil işleme uygulamalarında, gözlemlenen çıktılar üzerinden geçiş ve emisyon olasılıkları MLE veya EM algoritması yardımıyla tahmin edilir.

Makine öğrenmesi bağlamında, birçok denetimli öğrenme algoritmasının temelinde yatan kayıp fonksiyonları, örtük olarak MLE ilkesine dayanmaktadır. Özellikle sınıflandırma problemlerinde sıklıkla tercih edilen negatif log-olabilirlik ya da çapraz kaybı, MLE yaklaşımının logaritmik biçimde ifade edilmiş halidir. Derin öğrenme modellerinde, sinir ağlarının çıkış katmanında kullanılan softmax fonksiyonu ile birlikte uygulanan çapraz entropi kaybı da, MLE yönteminin doğal bir devamı olarak değerlendirilebilir.

MLE, aynı zamanda Gaussian Naive Bayes, Doğrusal Diskriminant Analizi ve multinomial regresyon gibi yöntemlerin parametre tahmini aşamasında doğrudan uygulanır. Tüm bu alanlarda MLE'nin esnekliği ve teorik sağlamlığı, onu çok çeşitli istatistiksel ve hesaplamalı çerçevelerde vazgeçilmez bir araç haline getirmiştir (Bishop, 2006; Hastie, Tibshirani, ve Friedman, 2009).

Her ne kadar MLE güçlü asimptotik özelliklere sahip olsa da, bazı önemli sınırlılıkları da beraberinde getirir. Özellikle uç değerler ve veri setindeki aykırılıklar karşısında duyarlılığı oldukça yüksektir. Ayrıca, log-olabilirlik fonksiyonunun birden fazla yerel maksimum içerebilmesi, sayısal optimizasyon süreçlerinde başlangıç değerlerine duyarlı hale gelmesine neden olur. MLE'nin bir diğer zayıf noktası da küçük

örneklem hacimlerinde ortaya çıkar. Örneklem büyüklüğü azaldıkça, tahmin edicinin varyansı artabilir ve sapma görülebilir. Asimptotik güvenilirlik varsayımlarının geçerli olmaması, küçük örneklerde MLE'yi güvenilir kılabilir. Bu tür sınırlılıklar özellikle ağır kuyruklu dağılımlar (örneğin Cauchy dağılımı gibi momentleri tanımsız yapılar) söz konusu olduğunda daha da belirgin hâle gelir (Huber ve Ronchetti, 2009; Hampel ve ark., 1986). Bu nedenle, bu tür durumlar için daha robust tahmin yöntemlerinin tercih edilmesi gerekebilir.

MLE yönteminin sınırlılıklarının en belirgin şekilde ortaya çıktığı dağılımlardan biri Cauchy dağılımıdır. Cauchy dağılımı, yapısı nedeniyle klasik parametrik yöntemlerin zorlandığı bir olasılık modelidir. Bu dağılımın ne beklenen değeri ne de varyansı tanımlıdır. Bu sebeple, parametre tahmini için genellikle log-olabilirlik fonksiyonu tercih edilir:

$$\ell(\mu, \sigma) = \log(L(\mu, \sigma | \mathbf{x})) = -n * \log(\pi\sigma) - \sum_{i=1}^n -\log\left(1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Bu fonksiyonun yapısı genellikle konkav değildir, yani tek bir global maksimuma sahip olmayabilir. Aksine, çoklu yerel maksimum içerebilir ve bu da sayısal çözüm yöntemlerini kaçınılmaz kılar. Ayrıca, başlangıç değerlerine yüksek duyarlılık göstermesi nedeniyle, optimizasyon sürecinde dikkatli parametre seçimi gerekir.

Bu tür optimizasyon problemlerinde, Newton-Raphson, Broyden – Fletcher - Goldfarb - Shanno ve Nelder - Mead gibi sayısal yöntemler sıklıkla tercih edilmektedir (Pawitan, 2001). Bu algoritmaların her biri, türev bilgisi gereksinimi, hesaplama yükü ve kararlılık açısından farklı avantajlar sunar. Özellikle Cauchy dağılımı gibi yapısı itibarıyla problemler için, doğru yöntem ve başlangıç noktalarının seçimi, tahminlerin kalitesini doğrudan etkilemektedir.

MLE'nin Cauchy dağılımı altındaki performansını değerlendirmek için simülasyon çalışmaları oldukça faydalı bir araçtır. Bu tür çalışmalar, farklı örneklem büyüklükleri ve parametre değerleri altında tahmin edicilerin sapma, hata kareler ortalaması(MSE) ve varyans gibi ölçütler açısından değerlendirilmesine olanak tanır. Özellikle küçük örneklerde MLE'nin tahmin gücünde belirgin düşüşler görülebilir.

MLE yöntemi sağlam teorik temellere sahip olsa da, momentleri tanımsız ve ağır kuyruk davranışı gösteren Cauchy gibi dağılımlar söz konusu olduğunda, bu yöntemin

uygulanmasında dikkatli olunması gerekmektedir. Bu tez kapsamında, MLE yönteminin Cauchy dağılımı altındaki parametre tahmin performansı simülasyonlar aracılığıyla ele alınacak ve bu tahminlerin uyum iyiliği testleri üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenecektir.

## 2.2. En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Parametre tahmininde yaygın olarak başvurulan yöntemlerden biri olan EKK yöntemi, özellikle doğrusal regresyon analizlerinde temel bir araç olarak kabul edilmektedir. Bu yöntemin öne çıkmasının başlıca nedenleri, hem matematiksel olarak sade ve kolay uygulanabilir bir yapıya sahip olması hem de hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında doğrusal, yansız, minimum varyanslı tahminler üretmesidir. Ancak, EKK yönteminin güçlü yönlerine karşın, özellikle ağır kuyruklu dağılımlar söz konusu olduğunda belirgin bazı sınırlılıkları ortaya çıkmaktadır. Örneğin, Cauchy dağılımı gibi momentleri tanımsız dağılımlar altında, EKK tahminleri oldukça sapmalı, dengesiz ve çoğu zaman istatistiksel açıdan anlamsız sonuçlar verebilmektedir (Rousseeuw ve Leroy, 1987).

Bu bağlamda, tez kapsamında yürütülen simülasyon çalışmalarında EKK yöntemine yer verilmemiştir. Çünkü Cauchy dağılımı altında elde edilen EKK tahminleri, hem parametrik anlamda güvenilirlikten uzak sonuçlar üretmiş hem de oluşturulan özet istatistikler ve tablo değerleri, yöntem açısından geçersiz veya yorumlanamaz nitelikte bulunmuştur. Dolayısıyla, bu tezde EKK yöntemi kuramsal olarak tanıtılacak; ancak parametrik performans değerlendirmesi, yalnızca MLE ve robust tahmin yaklaşımları çerçevesinde ele alınacaktır.

Deneysel olasılık değerleri:

$$p_i = \frac{i-0.3}{n+0.4}, i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } \xi_{p_i}^C = \mu + \sigma \tan(\pi(p - 0.5))$$

Cauchy dağılımı ters olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere amaç fonksiyonu;

$$\text{Enk} \left( \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \xi_{p_i}^C)^2 \right)$$

EKK yönteminin temel varsayımları arasında, hata terimlerinin ortalamasının sıfır olması, sabit varyansa sahip olması ve normal dağılım göstermesi yer alır. Bu varsayımlar sağlandığında, elde edilen tahmin ediciler doğrusal, yansız ve minimum varyanslı olurlar; bu da onları BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) olarak tanımlar (Montgomery, Peck, ve Vining, 2012). Ancak bu varsayımların ihlal edilmesi durumunda, özellikle dağılımın simetrik olmaması ya da uç değerlerin bulunması gibi durumlar, tahmin edicilerin performansını önemli ölçüde olumsuz etkileyebilir.

EKK'nin en zayıf yönlerinden biri, uç değerlere karşı yüksek duyarlılığıdır. Çünkü bu yöntem, tüm gözlemlerin hata karelerini eşit derecede enküçüklemeyi hedefler. Bu durum, tek bir aykırı değer bile regresyon doğrusunu ciddi şekilde çarpıtmasına neden olabilir. Bu zaaf, EKK'nin kırılma noktasının sıfıra yakın olmasıyla ve etki fonksiyonunun sınırsız olmasıyla açıklanır. Kırılma noktası, bir tahmin yönteminin verideki bozulmalara karşı dayanıklılığını gösterirken; sınırsız etki fonksiyonu, uç bir gözlemin tahminler üzerindeki etkisinin kontrol edilemediği anlamına gelir (Hampel ve ark., 1986). Bu bağlamda, özellikle uç değerlerin bulunduğu ya da dağılımın simetrik ve homojen olmadığı veri setlerinde EKK yönteminin kullanımı dikkatle değerlendirilmelidir.

Cauchy dağılımı altında yürütülen çeşitli simülasyon çalışmaları, EKK tahmin edicisinin ciddi performans sorunlarıyla karşı karşıya olduğunu ortaya koymaktadır. EKK yöntemi, hata terimlerinin ortalamasının sıfır ve varyansının sabit olduğu varsayımı altında etkili sonuçlar verirken, Cauchy dağılımının bu varsayımları doğrudan ihlal eden yapısı nedeniyle teorik temelleri geçersiz hale gelmektedir. Özellikle, Cauchy dağılımının ne ortalama ne de varyans gibi momentleri tanımlı olmadığından, EKK'nin moment temelli yapısı dağılımın yapısal özellikleriyle çelişmektedir. Bu uyumsuzluk, EKK'nin Cauchy dağılımı altında yüksek varyans, MSE ve belirgin sapmalar göstermesiyle sonuçlanır. Simülasyon çıktıları, EKK tahminlerinin hem doğruluk hem de tutarlılık açısından istatistiksel açıdan güvenilirlikten uzaklaştığını göstermektedir. Bunun temel nedeni, EKK'nin uç değerlere karşı yüksek duyarlılığı ve sınırsız etki fonksiyonudur; bu da ağır kuyruklu bir yapıya sahip olan Cauchy dağılımı altında regresyon doğrusunun uç bir gözlem tarafından bozulmasına neden olur (Rousseeuw ve Leroy, 1987).

Bu bağlamda, medyan, medyan mutlak sapma, L1 regresyon, LMS (Least Median of Squares) ve MM tahmin edicileri gibi robust yöntemler, Cauchy dağılımı gibi uç değer barındıran yapılarda çok daha güvenilir sonuçlar sunmaktadır. Bu tür yöntemlerin, EKK'ye kıyasla daha yüksek kırılma noktalarına ve sınırlı etki fonksiyonlarına sahip

olmaları, onları Cauchy gibi ekstrem dağılımlara karşı daha dayanıklı kılmaktadır (Maronna ve ark., 2019).

EKK yöntemi varsayımların eksiksiz sağlandığı ideal veri yapılarında oldukça verimli ve analitik olarak elverişli bir yöntem olsa da, Cauchy dağılımı gibi ağır kuyruklu ve aykırı değer içeren yapılarda güvenilirliğini kaybetmektedir. Bu nedenle, bu tez çalışmasında EKK yöntemi yalnızca kuramsal çerçevede ele alınmış; Cauchy dağılımı altında yapılan simülasyon analizlerinde ise kullanılmamıştır. Zira EKK'nin bu dağılım altında ürettiği parametrik tahminler istatistiksel olarak yorumlanabilir olmaktan uzaktır. Tez kapsamında, EKK'nin Cauchy dağılımına uygunluğu simülasyon sonuçlarında değerlendirildiğinde, bu tahmin edicinin Cauchy dağılımında güvenilirlik sağlamadığı görülmüş ve analiz dışında bırakılmıştır.

### 2.3. Robust Tahmin Edicileri

Klasik parametrik istatistiksel yöntemler, varsayımların sağlandığı durumlarda etkin ve geçerli sonuçlar üretmektedir. Ancak özellikle dağılımların simetrik olmaması, varyansın tanımsız olması veya aykırı değerlerin varlığı gibi durumlar, bu yöntemlerin güvenilirliğini azaltmaktadır. Bu bağlamda geliştirilen robust tahmin ediciler, standart varsayımlardan sapmalar karşısında daha dirençli tahminler üretmeyi hedeflemektedir.

Robust istatistik, uç değerlerin veya dağılım sapmalarının analiz sonuçları üzerindeki olumsuz etkilerini azaltmayı amaçlayan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımda kullanılan tahmin yöntemleri, klasik tahmin edicilerin (örneğin ortalama) kırılma yapısına alternatif olarak geliştirilmiştir. Robust tahmin yöntemleri, özellikle ağır kuyruklu dağılımlarla çalışılan durumlarda daha güvenilir sonuçlar üretir.

Bir tahmin edicinin sağlamlığını değerlendirmede başlıca iki temel ölçüt öne çıkar: kırılma noktası ve etki fonksiyonu. Kırılma noktası, bir tahmin edicinin tamamen bozulmasına yol açabilecek maksimum veri bozulma oranını ifade eder. Örneğin, medyanın kırılma noktası %50 olup, bu oran teorik olarak ulaşılabilecek en yüksek robustluk düzeyini temsil eder. Etki fonksiyonu ise bir gözlem biriminin tahmin üzerindeki etkisini nicel olarak ölçer. Robust tahmin edicilerin etki fonksiyonlarının sınırlı olması beklenir; bu durum, aykırı bir gözlemin tahmini sonsuz düzeyde bozmasının önüne geçilmesini sağlar (Hampel, 1974).

İstatistiksel analizlerde merkezi eğilim ve yayılma ölçütleri, veri setinin temel yapısını özetlemede kritik öneme sahiptir. Özellikle simetrik olmayan, aykırı değer içeren ya da klasik varsayımları karşılamayan veri yapılarında, robust istatistiklerin kullanımı

gereklilik hâline gelmektedir. Bu bağlamda, medyan ve çeyrek sapma, geleneksel ortalama ve standart sapma ölçütlerine sağlam alternatifler olarak öne çıkar. Her iki ölçüt de aykırı değerlerin etkisinden büyük ölçüde bağımsızdır ve bu yönüyle özellikle ağır kuyruklu dağılımlarda tercih edilmektedir (Huber ve Ronchetti, 2009).

Bu istatistiklerden medyan, bir veri kümesinin ortanca değeridir; veriler küçükten büyüğe sıralandığında tam ortada kalan gözlemi temsil eder. Sayı adedi tek ise doğrudan ortanca değer, çift ise ortadaki iki değer aritmetik ortalaması alınır. Medyan, ortalama göre daha robust bir merkezi eğilim ölçüsüdür çünkü yalnızca gözlemlerin sırasına duyarlıdır, büyüklüklerine değil (Wilcox, 2012). Bu nedenle, medyan, özellikle Cauchy dağılımı gibi varyansı tanımsız olan dağılımlarda, konum parametresinin tahmini için tercih edilen yöntemlerden biridir (Rousseeuw ve Leroy, 1987). Ayrıca parametrik olmayan testlerde ve sıralama temelli yöntemlerde de temel rol oynar (Moore, McCabe, Craig, ve Alwan, 2016). Matematiksel olarak medyan,

$$Medyan = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & , n \text{ tek için} \\ \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & , n \text{ çift için} \end{cases}$$

Çeyrek Sapma bir veri setinin merkezi dağılımını ve değişkenliğini ölçen bir yayılım ölçüsüdür. Veri setindeki orta %50'lik kısmın yayılımını gösterir ve üst çeyrek ( $Q_3$ ) ile alt çeyrek ( $Q_1$ ) arasındaki farkın yarısı olarak tanımlanır.

$$\text{Çeyrek Sapma} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Bu ölçüm, standart sapmanın aksine veri setinin ortadaki %50'lik kısmının genişliğini yansıtarak, uç değerlerden etkilenmeden dağılımın yayılımını temsil eder (Huber, 1981). Cauchy dağılımı gibi aşırı uç değerlere sahip dağılımlarda, standart sapma yerine çeyrek sapmalara (interquartile range, IQR) kullanımı, parametre tahminlerinin güvenilirliğini artırmaktadır. Özellikle, konum parametresi olarak medyanın; ölçek parametresi olarak ise IQR'nin kullanılması, robust tahmin literatüründe yaygın bir yaklaşımdır (Rousseeuw ve Croux, 1993).

Gerçek hayatta elde edilen veri setlerinde, çoğu zaman dağılımın normal olduğu varsayımı geçerliliğini yitirir. Özellikle uç değerlerin varlığı, parametre tahminlerinin

güvenilirliğini olumsuz etkileyerek klasik yöntemlerle yapılan analizlerin doğruluğunu azaltabilir. Bu nedenle, böyle durumlarda robust tahmin yöntemlerine başvurulması, modelin istatistiksel tutarlılığını ve güvenilirliğini artırmada ön plana çıkarmaktadır (Genç, 2022).

Çeyrek sapmaya dayalı tahmin yöntemleri, aynı zamanda Cauchy dağılımına yönelik uyum iyiliği testlerinin gücünü ve duyarlılığını doğrudan etkileyebilir. Çünkü parametre tahminlerindeki sapmalar, teorik ve ampirik dağılımlar arasındaki karşılaştırmaları bozar. Bu nedenle, özellikle parametre tahminine dayalı uyum testlerinde, robust tahmin edicilerin tercih edilmesi testin geçerliliği açısından kritik öneme sahiptir (Maronna ve ark., 2006).

Cauchy dağılımı, ağır kuyrukları ve tanımsız momentleri nedeniyle klasik tahmin yöntemlerinin başarısız olduğu bir dağılımdır. Bu tür dağılımlarda MLE ve EKK gibi yöntemler büyük sapmalar gösterebilir. Robust tahmin ediciler ise bu dağılımda stabil ve güvenilir sonuçlar üretme potansiyeline sahiptir. Bu nedenle Cauchy dağılımı, robust tahmin yöntemlerinin performansını değerlendirmek için sıklıkla tercih edilen bir test ortamı olarak kullanılmaktadır.

Medyan ve çeyrek sapma, özellikle parametrik olmayan analizler, robust regresyon, uyum iyiliği testleri, ve çizgisel olmayan modelleme gibi alanlarda birlikte kullanılmaktadır. Bu iki ölçüt bir araya geldiğinde, veri setinin merkezi konumu ve orta kısmındaki yayılım hakkında güçlü ve aykırı değerlere karşı dirençli bir özet sunar.

### 3. HİPOTEZ TESTLERİ

İstatistiksel çıkarımın temel taşlarından biri olan hipotez testleri, gözlemsel veriler üzerinden belirli bir hipotezin doğruluğunu sınamak amacıyla geliştirilmiş yöntemler bütünüdür. Bu testler, özellikle parametrik veya parametrik olmayan modeller altında, verilerin belirli bir dağılıma veya yapıya uygun olup olmadığını değerlendirmek için yaygın biçimde kullanılmaktadır (Casella ve Berger, 2002). Hipotez testleri temel olarak, “sıfır hipotezi” olarak adlandırılan  $H_0$  ile “alternatif hipotez” olarak adlandırılan  $H_1$  olmak üzere iki karşıt iddia üzerine kuruludur.

Sıfır hipotezi ( $H_0$ ), genellikle mevcut durumun veya varsayılan yapının geçerli olduğunu öne sürerken; alternatif hipotez ( $H_1$ ), bu durumun reddedilmesi gerektiğini savunur. Örneğin, bir dağılımın Normal dağılıma uyup uymadığını test eden bir çalışmada, sıfır hipotezi " $H_0$ : Örneklemin geldiği kitlenin dağılımı, Normal dağılıma uygundur." alternatif hipotez " $H_1$ : Örneklemin geldiği kitlenin dağılımı, Normal dağılıma uygun değildir." şeklinde tanımlanır.

Hipotez testlerinin uygulanması sürecinde, test istatistiği değeri hesaplanır. Bu değer, örneklem verileri kullanılarak hesaplanan ve belirli bir teorik dağılıma sahip olan bir ölçüdür. Elde edilen test istatistiği değeri ile teorik dağılım altında belirlenen kritik değerler karşılaştırılarak karar verilir. Eğer test istatistiği kritik bölgeye düşerse, sıfır hipotezi ( $H_0$ ) reddedilir (Lehmann ve Romano, 2005).

Bu çerçevede, test sürecinde yapılan hatalar iki kategoriye ayrılır: I. tip hata, gerçekte doğru olan  $H_0$ 'ın yanlışlıkla reddedilmesi; II. tip hata ise, gerçekte yanlış olan  $H_0$ 'ın reddedilememesidir. I. tip hata olasılığı genellikle “anlamlılık düzeyi” ( $\alpha$ ) ile ifade edilir ve bu değer çoğunlukla %1 veya %5 gibi standart düzeylerde seçilir. II. tip hata olasılığı ise genellikle “anlamlılık düzeyi” ( $\beta$ ) ile ifade edilir ve bu değer çoğunlukla %10 veya %20 gibi standart düzeylerde seçilir.

Buna ek olarak, modern istatistiksel testlerde p-değeri önemli bir rol oynamaktadır. Elde edilen p-değeri anlamlılık düzeyinden küçükse,  $H_0$  reddedilir. Bu bağlamda p-değeri, testin sonucuna ilişkin karar verme sürecinde nicel bir temel sağlar (Wasserman, 2004).

Hipotez testleri yalnızca parametrik dağılımlara değil, aynı zamanda parametrik olmayan yapılar için de kullanılabilen; özellikle uyum iyiliği testlerinde, dağılımın genel yapısına uygunluk test edilmekte ve bu durum geniş ölçüde hipotez testlerinin

teorik altyapısı ile şekillenmektedir. Bu nedenle, Cauchy dağılımı gibi momentleri tanımsız ve klasik test varsayımlarına uymayan dağılımlar söz konusu olduğunda, hipotez testlerinin dayandığı temel kavramları anlamak, uygun test seçiminde ve yorumlamada kritik bir öneme sahiptir. Bu bağlamda, hipotez testlerinin uygulanabilirliğini ve geçerliliğini değerlendirebilmek için, parametrik ve parametrik olmayan test yaklaşımlarının yapısal farklarını kavramak gerekmektedir. İstatistiksel testler, genellikle iki ana kategori altında sınıflandırılmaktadır: parametrik testler ve parametrik olmayan testler. Bu sınıflandırma, testlerin dayandığı varsayımlar ve kullanılan dağılımsal bilgiler açısından temel farklar içermektedir (Gibbons ve Chakraborti, 2010).

Parametrik testler, belirli bir dağılım varsayımı altında çalışan ve genellikle kitle parametrelerine ilişkin çıkarım yapmayı hedefleyen testlerdir. Bu testler, normal dağılım, varyans homojenliği ve bağımsızlık gibi bazı ön koşulların sağlandığını varsayar. Örneğin, Student t-testi, ANOVA ve regresyon analizleri bu gruba dahildir. Parametrik testlerin avantajı, örneklem büyüklüğü yeterli olduğunda güçlü sonuçlar vermeleri ve daha yüksek test gücüne sahip olmalarıdır. Ancak varsayımlar ihlal edildiğinde sonuçların güvenilirliği azalabilir (Montgomery, 2013).

Parametrik olmayan testler ise, dağılım varsayımlarına bağlı olmadan çalışan testlerdir ve genellikle sıralı verilerle veya küçük örneklemlemlerle daha iyi performans gösterir. Bu testler, örneklemin geldiği kitlenin belirli bir dağılıma uymasını gerektirmez ve bu yönüyle esneklik sağlar. Wilcoxon testleri, Mann-Whitney U testi, Kruskal-Wallis testi ve Kolmogorov-Smirnov testi bu gruba örnek olarak verilebilir (Conover, 1999).

Uyum iyiliği testleri kapsamında değerlendirildiğinde, parametrik testler verilerin belirli bir teorik dağılıma uygun olup olmadığını sınarken, parametrik olmayan testler daha genel dağılımsal özellikler üzerinden değerlendirme yapar. Cauchy dağılımı gibi geleneksel moment temelli yöntemlerle tanımlanamayan dağılımlar söz konusu olduğunda, parametrik olmayan testler tercih edilmekte ve daha güvenilir sonuçlar sunmaktadır. Özellikle Kolmogorov-Smirnov ve Anderson-Darling testleri gibi testler, parametrik olmayan yaklaşımlar sayesinde bu tür dağılımlar için önemli araçlar haline gelmiştir.

Bu çerçevede, parametrik ve parametrik olmayan testler arasında yapılacak seçim, hem örneklemin geldiği kitlenin yapısı hem de analiz amacı doğrultusunda dikkatle ele alınmalıdır. Varsayımların geçerli olduğu durumlarda parametrik testler daha güçlü sonuçlar verirken, varsayımların sağlanmadığı durumlarda parametrik olmayan testler güvenilirlik açısından ön plana çıkmaktadır. Ancak testlerin uygunluğunu

değerlendirirken yalnızca varsayımlara odaklanmak yeterli değildir; aynı zamanda bu testlerin sahip olduğu istatistiksel performansın, özellikle de karar verme gücünün dikkate alınması gerekmektedir. İstatistiksel testlerin değerlendirilmesinde sadece anlamlılık düzeyi yeterli değildir; testin sahip olduğu istatistiksel güç de en az anlamlılık düzeyi kadar önemlidir. Güç, bir testin yanlış bir sıfır hipotezini reddetme olasılığı olarak tanımlanır. Yani bir testin, gerçek bir farkı veya etkiyi tespit edebilme yeteneğini ifade eder (Cohen, 1988).

Bir testin gücü; örneklem büyüklüğü, anlamlılık düzeyi, varyans, etki büyüklüğü ve testin yapısına bağlı olarak değişkenlik gösterebilir. Güç analizi, bu faktörlerin dengelenmesiyle optimal test koşullarının belirlenmesinde kullanılır. Özellikle simülasyon temelli çalışmalarda, farklı testlerin belirli koşullar altında sahip oldukları güç değerleri karşılaştırılarak en uygun testin seçimi yapılabilmektedir (Lenth, 2001).

Etkinlik kavramı ise, iki veya daha fazla istatistiksel testin performanslarının karşılaştırılması amacıyla kullanılan ölçütlerden biridir. Bir testin etkinliği, alternatif bir teste kıyasla benzer güç düzeyine ulaşmak için ne kadar daha az gözleme ihtiyaç duyduğuna bağlı olarak tanımlanır. Özellikle parametrik olmayan testler ile parametrik testler arasında etkinlik karşılaştırmaları sıkça yapılmakta ve birçok durumda parametrik olmayan testlerin asimptotik etkinliğinin daha düşük olduğu görülmektedir. Ancak bu testler, dağılım varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda daha istikrarlı sonuçlar sunabilir (Lehmann, 2006).

Cauchy dağılımı gibi ağır kuyruklu ve momentleri tanımsız dağılımlar söz konusu olduğunda, klasik testlerin gücü azalabilir. Bu nedenle, testlerin gücünün dağılımın yapısına uygunluk gösterip göstermediği ve parametre tahmin yöntemlerinin bu gücü nasıl etkilediği önemlidir. Simülasyon çalışmaları, farklı tahmin yöntemlerinin ve uyum iyiliği testlerinin bu dağılım altındaki göreceli güçlerini değerlendirmek için etkili bir yöntem sunmaktadır.

Bu nedenle test seçimi yapılırken yalnızca anlamlılık düzeyine odaklanmak yeterli değildir; aynı zamanda testin istatistiksel güç ve etkinlik düzeyi, elde edilen sonuçların hem güvenilirliğini hem de bilimsel geçerliliğini doğrudan etkileyen kritik unsurlar arasında yer alır. Bu çerçevede, güç analizi ve etkinlik karşılaştırmaları, özellikle uygulamalı analizlerde uygun testin belirlenmesinde vazgeçilmez yöntemler olarak öne çıkmaktadır. İstatistiksel testlerin performansına ilişkin bu tür ölçütler dikkate alındığında, uyum iyiliği testleri ayrı bir önem kazanır. Zira bu testler, istatistiksel hipotez testlerinin özel bir alt sınıfını oluşturarak, gözlemlenen verilerin belirli bir teorik dağılıma

ne ölçüde uyum sağladığını analiz etmeyi hedefler. Genellikle bir sıfır hipotezi ( $H_0$ ) ile bir alternatif hipotez ( $H_1$ ) üzerinden yürütülen bu testlerde,  $H_0$  hipotezi verinin örneğin Cauchy dağılımından geldiğini,  $H_1$  hipotezi ise bu dağılıma uymadığını ifade eder (D'Agostino ve Stephens, 1986). Bu yönüyle uyum iyiliği testleri, yalnızca teorik model uyumunu değerlendirmekle kalmaz; aynı zamanda kullanılan testin gücü ve etkinliği doğrultusunda doğru karar verme kapasitesini de yansıtarak istatistiksel analiz sürecine çok boyutlu katkı sağlar.

Uyum iyiliği testlerinde hipotezlerin formülasyonu şu şekilde yapılır:

$H_0$ : Örneklemin geldiği kitlenin dağılımı belirli bir teorik dağılıma uygundur.

$H_1$ : Örneklemin geldiği kitlenin dağılımı belirli bir teorik dağılıma uygun değildir.

Bu tür testlerde kullanılan test istatistikleri, gözlemlenen frekanslarla beklenen frekanslar arasındaki farkları ölçerek uygunluk derecesini sayısal olarak ifade eder. En yaygın kullanılan uyum iyiliği testlerinden bazıları; Pearson'un ki-kare testi, Kolmogorov-Smirnov testi, Anderson-Darling testi ve Cramér-von Mises testidir. Bu testlerin çoğu, asimptotik olarak bilinen bir dağılım altında test istatistiğinin kritik değerlerini kullanarak karar verir (Thode, 2002).

Kolmogorov-Smirnov testi gibi parametrik olmayan testlerde, örnek dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki en büyük mutlak fark temel alınarak bir test istatistiği elde edilir. Bu istatistik, önceden belirlenmiş bir kritik değerle karşılaştırılır. Eğer test istatistiği bu kritik değeri aşarsa, sıfır hipotezi reddedilir.

Test sonucunun değerlendirilmesinde p-değeri önemli bir rol oynar. P-değeri, sıfır hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında, elde edilen test istatistiğine eşit ya da daha uç bir değerin elde edilme olasılığıdır. p-değerinin anlamlılık düzeyinden ( $\alpha$ ) küçük olması durumunda sıfır hipotezi reddedilir.

Uyum iyiliği testlerinin hipotez testi perspektifiyle ele alınması, özellikle simülasyon temelli karşılaştırmalar söz konusu olduğunda ayrı bir önem kazanmaktadır. Farklı parametre tahmin yöntemleriyle elde edilen dağılım parametrelerinin test istatistiği üzerindeki etkisi, hipotez testinin hem gücünü hem de güvenilirliğini doğrudan etkileyebilir. Bu nedenle, özellikle parametrik olmayan testlerle birlikte uygulandığında, hipotez testinin istatistiksel geçerliliği dikkatle değerlendirilmelidir. Bu bağlamda, test istatistiklerinin dağılımını doğru bir şekilde belirleyebilmek ve güvenilir sonuçlar elde

edebilmek için kullanılan yöntemlerin yapısı büyük önem taşır. Nitekim, istatistiksel testlerin uygulanmasında tercih edilen yaklaşımlar genel olarak iki temel kategoriye ayrılmaktadır: asimptotik test yöntemleri ve simülasyon tabanlı test yöntemleri. Bu iki yaklaşım, test istatistiklerinin dağılımsal özelliklerini belirlemede ve kritik değerlerin hesaplanmasında farklı stratejiler izlemekte olup, analiz sonuçlarının doğruluğu üzerinde belirleyici rol oynamaktadır (Efron ve Tibshirani, 1993).

Asimptotik test yöntemleri, büyük örneklem hacimlerinde test istatistiklerinin limit dağılımlarına dayanarak karar verme prensibiyle çalışır. Bu yaklaşımda, örneklem büyüklüğü arttıkça test istatistiğinin belirli bir teorik dağılıma (örneğin normal, ki-kare, t, F) yakınsadığı varsayılır. Asimptotik testler özellikle teorik olarak güçlü ve hesaplama açısından etkin oldukları için tercih edilmektedir. Ancak küçük örneklerde veya dağılım varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda asimptotik varsayımlar geçerliliğini yitirebilir (Lehmann ve Romano, 2005).

Simülasyon tabanlı test yöntemleri ise, test istatistiğinin dağılımını deneysel olarak tahmin etmek için veri üretimine dayanır. Bu yaklaşımlar arasında Monte Carlo simülasyonu ve bootstrap yöntemleri öne çıkmaktadır. Monte Carlo yöntemi, teorik dağılım altında birçok yapay veri seti üretip her birine test uygulanarak kritik değer veya p-değeri elde edilmesini sağlar. Bootstrap yöntemi ise örneklem verisinden tekrar tekrar örnek alarak test istatistiği dağılımına yakınsar (Davison ve Hinkley, 1997).

Asimptotik ve simülasyon tabanlı test yaklaşımları arasında tercih yapılırken, örneklem büyüklüğü, dağılımın özellikleri ve hesaplama olanakları dikkatle değerlendirilmelidir. Özellikle simülasyon temelli yöntemlerin, artan bilgi işlem kapasitesi sayesinde daha erişilebilir hâle gelmesi, bu yaklaşımların karmaşık dağılımsal yapılarda ve küçük örneklerde daha sık tercih edilmesine olanak tanımaktadır. Ancak testin hangi yöntemle yürütüldüğünden bağımsız olarak, istatistiksel sonuçların güvenilirliğini belirleyen temel unsurlardan biri, testin sahip olduğu istatistiksel güç düzeyidir. İstatistiksel testlerin değerlendirilmesinde yalnızca anlamlılık düzeyine odaklanmak yetersiz kalabilir; çünkü güç, bir testin yanlış bir sıfır hipotezini reddetme olasılığı olarak tanımlanmakta ve testin gerçek bir farkı ya da etkiyi ortaya koyabilme kapasitesini yansıtmaktadır (Cohen, 1988).

İstatistiksel testlerin seçiminde yalnızca anlamlılık düzeyine odaklanmak, güvenilir ve geçerli sonuçlara ulaşmak açısından yeterli değildir. Testin sahip olduğu istatistiksel güç ve etkinlik düzeyi, analizlerin doğruluğunu ve bilimsel geçerliliğini doğrudan etkileyen temel unsurlar arasında yer alır. Bu doğrultuda, güç analizi ve etkinlik

karşılaştırmaları, hem uygulamalı çalışmalarda hem de teorik yöntem geliştirmelerinde test seçiminin kritik bileşenleri olarak değerlendirilmektedir. Ancak bir testin güçlü olması kadar, uygulandığı veri yapısına uygunluk göstermesi de büyük önem taşır. Özellikle klasik varsayımların geçerli olmadığı durumlarda, geleneksel istatistiksel yöntemlerin yetersiz kaldığı görülmektedir. Bu bağlamda, Cauchy dağılımı gibi özel yapıya sahip dağılımlar öne çıkar. Simetrik olmasına rağmen ağır kuyruklu yapısı ve tanımsız momentleri (örneğin ortalama ve varyans) nedeniyle Cauchy dağılımı, klasik parametrik varsayımları önemli ölçüde ihlal eder. Bu durum, hem teorik hem de uygulamalı düzeyde standart testlerin yetersizliğine yol açmakta ve bu dağılıma özgü hipotez testlerinin geliştirilmesini zorunlu kılmaktadır (Bryson, 1974).

Cauchy dağılımına ilişkin hipotez testleri, genellikle uyum iyiliği testleri çerçevesinde değerlendirilmektedir. Bu kapsamda, gözlem verilerinin Cauchy dağılımına uygunluğu test edilirken, kullanılan test istatistikleri de bu dağılımın ayırt edici özelliklerini dikkate alacak şekilde tasarlanmaktadır. Özellikle Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling ve Cramér-von Mises gibi parametrik olmayan testler, Cauchy dağılımına karşı yapılan uygunluk analizlerinde sıkça tercih edilmektedir. Ancak bu testlerin performansı, büyük ölçüde kullanılan parametre tahmin yöntemine bağlı olarak değişmekte; dolayısıyla doğru test sonuçlarına ulaşmak için tahmin sürecinin dikkatle planlanması gerekmektedir (Pekgör, 2023).

Cauchy dağılımının parametrik yapısına uygun hipotez testlerinin geliştirilmesi, hem parametrik hem de parametrik olmayan yöntemlerin sınırlarını göstermesi açısından önemlidir. Örneğin, parametre tahmininde medyan veya en küçük mutlak sapma gibi robust yöntemler kullanıldığında, hipotez testlerinin gücü önemli ölçüde artabilmektedir. Bu bağlamda, parametre tahmin yöntemlerinin seçimi, test istatistiklerinin dağılımı ve gücü üzerinde belirleyici bir rol oynar.

Simülasyon tabanlı test yaklaşımları, Cauchy dağılımı gibi standart dışı yapılar için önemli bir çözüm sunmaktadır. Özellikle parametre tahmininden kaynaklı belirsizliklerin etkisini minimize etmek amacıyla Monte Carlo veya bootstrap yöntemleriyle uygun kritik değerler elde edilebilir. Bu da testin I. tip hata oranını kontrol altında tutarken test gücünü artırır (Stephens, 1986). Cauchy dağılımına özgü özellikler dikkate alındığında, klasik hipotez testlerinden saparak özel olarak tasarlanmış test istatistiklerinin ve uygun parametre tahmin yöntemlerinin tercih edilmesi, analiz sonuçlarının doğruluğu ve güvenilirliği açısından kritik öneme sahiptir. Bu durum,

istatistiksel testlerin dağılımsal esneklik ve dayanıklılık açısından yeniden değerlendirilmesini gerektirir.

#### 4. CAUCHY DAĞILIMINA UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ

Cauchy dağılımı, istatistik kuramı içinde sıradışı özellikleriyle dikkat çeken ve teorik olarak oldukça zengin bir yapıya sahip sürekli olasılık dağılımlarından biridir. Bu dağılım, adını Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy'den almaktadır. 19. yüzyılın ortalarında yapılan çalışmalar sonucunda tanımlanan bu dağılım, hem matematiksel olarak hem de fiziksel süreçlerde gözlemlenen bazı doğa olaylarını modellemedeki başarısıyla öne çıkmıştır.

Cauchy dağılımı ilk olarak 1853 yılında Augustin-Louis Cauchy tarafından kaleme alınan 'Note sur la transmission de la chaleur' (Isı iletimi üzerine not) adlı kısa bilimsel makalede tanımlanmıştır (Cauchy, 1853). Bu çalışma kapsamında, Cauchy ışığın geçirgenliği, kırılması ve özellikle rezonans eğrilerinin matematiksel modellenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Rezonans fenomeninde gözlemlenen simetrik, sivri uçlu ve kalın kuyruklu yapıların matematiksel temsili için kullanılan yoğunluk fonksiyonu, bugün "Cauchy dağılımı" olarak bilinen fonksiyondur.

Cauchy dağılımı, bu bağlamda yalnızca soyut bir matematiksel tanım olmakla kalmamış; aynı zamanda fiziksel sistemlerde gözlenen somut davranışların modellenmesine de hizmet etmiştir. Bu nedenle, dağılımın ortaya çıkışı saf matematik ile uygulamalı bilimler arasında önemli bir kesişimi temsil eder.

Cauchy dağılımı, fizik literatüründe sıklıkla 'Lorentz dağılımı' veya 'Lorentzian distribution' adıyla da anılmaktadır. Bu isimlendirme, dağılımın 20. yüzyıl başlarında elektromanyetik rezonans teorileri üzerinde çalışan Hollandalı fizikçi Hendrik Antoon Lorentz tarafından kullanılmasıyla yaygınlık kazanmıştır (Lorentz, 1909). Özellikle spektroskopide, rezonans frekanslarının yayılım yoğunluklarının modellenmesinde Cauchy dağılımı formuna sahip fonksiyonlar kullanılmıştır.

Cauchy dağılımı, matematiksel olarak ağır kuyruklu ve simetrik bir dağılımdır. En temel haliyle, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve hazard fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma \left(1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)}, x \in \mathbb{R}$$

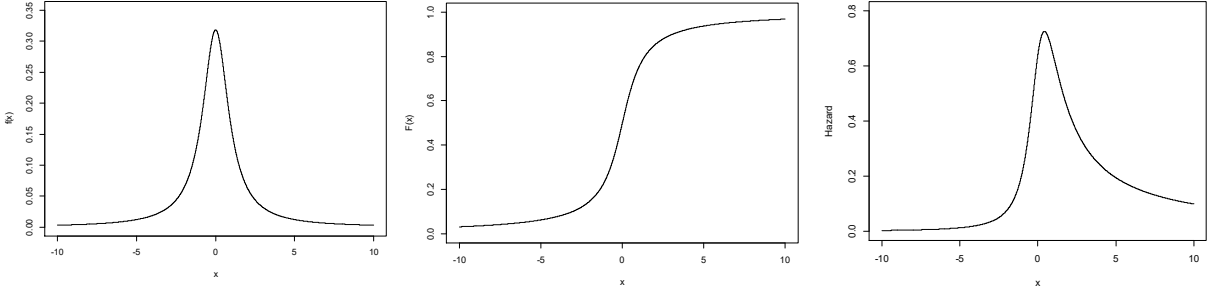
Dağılım fonksiyonu;

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right), x \in \mathbb{R}$$

Hazard Fonksiyonu;

$$h(x) = \frac{1}{(1+x^2)(0,5 - \arctan x)}, x \in \mathbb{R}$$

olmak üzere standart normal Cauchy dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve hazard fonksiyonuna ait grafikler şekil 4.1’de verilmiştir.



**Şekil 4.1** Cauchy dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve hazard fonksiyonuna ait grafikler

Dağılım fonksiyonunda,  $(\mu, \sigma)$  etrafında simetrik olup, uçlarda yavaş azalan kuyruklara sahiptir. Bu yapı, dağılımın tanımsız momentlere sahip olmasına yol açar. Beklenen değer ve varyans gibi temel ölçülerin bu dağılımda tanımlı olmaması, onu özellikle parametrik istatistik yöntemleri açısından problemlili hale getirir. Ancak bu özellikler, aynı zamanda Cauchy dağılımını robust yöntemlerin sınanmasında ideal bir dağılım yapmaktadır (Feller, 1971; Huber, 1981).

Cauchy dağılımı, merkezi limit teoremi açısından önemli bir istisna teşkil eder. Çünkü bu dağılımın momentleri tanımsız olduğundan, örnek ortalaması kitle ortalamasına yakınsamaz. Bu özellik, Cauchy dağılımını istatistiksel kuramda "patolojik" dağılımların başında gelen bir örnek haline getirir (Rao, 2001).

Bu yönüyle Cauchy dağılımı, istatistiksel yöntemlerin dayanıklılığını test etmede kullanılır. Özellikle klasik yöntemlerin başarısız olduğu durumları göstermede literatürde sıklıkla başvurulan bir araçtır. Ayrıca, karakteristik fonksiyona dayalı uyum iyiliği testlerinde de bu dağılımın özelliklerinden faydalanılmıştır.

Cauchy dağılımı, istatistiksel dağılımlar içerisinde özellikle aykırı özellikleri ve klasik yöntemlerle uyumsuzluğu ile bilinen sıra dışı bir dağılımdır. Matematiksel olarak tanımını son derece basit olmasına karşın, sahip olduğu özellikler bakımından birçok istatistiksel teoremin sınırlarını zorlayan bir örnektir. Bu yönüyle, Cauchy dağılımı hem teorik çalışmalarda hem de uygulamalı istatistikte önemli bir referans noktasıdır.

Cauchy dağılımının medyanı, modu ve konum parametresi aynıdır. Bu özellik, dağılımın simetrik doğasıyla ilişkilidir. Ortalaması tanımlı olmadığından, merkezi eğilim ölçüsü olarak medyanın kullanılması önerilir. Cauchy dağılımından rasgele sayı üretimi, ters dönüşüm yöntemiyle kolaylıkla gerçekleştirilebilir:

Cauchy dağılımı, istatistiksel özellikleri itibarıyla klasik dağılımlardan belirgin biçimde ayrılır. Özellikle tanımsız momentleri, uç değerlere karşı yüksek duyarlılığı ve örnek ortalamasının kullanılamaz oluşu, dağılımı istatistiksel analizler açısından benzersiz ve dikkat çekici bir konuma yerleştirir.

Cauchy dağılımı, ağır kuyruklu bir yapıya sahiptir. Bu durum, uç değerlerin oldukça yüksek frekansta gözlenmesine neden olur. Ancak bu özelliği, klasik istatistiksel yöntemler için ciddi zorluklar doğurur. Özellikle örnek ortalamasının uç değerlerce kolayca bozulması nedeniyle dayanıklı tahmin yöntemleri tercih edilir (Huber, 1981).

Cauchy dağılımında iki temel parametre bulunur: konum ve ölçek. Moment temelli tahmin yöntemleri burada kullanılamaz. Bunun yerine MLE, medyan temelli tahmin yöntemleri ve medyan mutlak sapma gibi robust tahmin ediciler kullanılır.

Konum parametresi:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mu)}{\sigma^2 + (x_i - \mu)^2},$$

ölçek parametresi:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mu)^2}{\sigma(\sigma^2 + (x_i - \mu)^2)}$$

şeklinde ifade edilir.

Cauchy dağılımı, robust istatistiklerin etkinliğini sınamak için sıklıkla kullanılan bir test senaryosudur. Dağılımın uç değerli yapısı, dayanıklı olmayan yöntemlerin başarısızlığını net biçimde ortaya koyar.

Cauchy dağılımı, şekil olarak normal dağılıma benzer olsa da, özellikle Q-Q grafikleri yardımıyla kolayca ayırt edilebilir. Normal dağılıma karşı oluşturulan Q-Q grafiğinde uçlar Cauchy dağılımında daha uzak sapmalar gösterir (Wilk ve Gnanadesikan, 1968).

Cauchy dağılımı, uygulamalı analizlerde genellikle veri setinde aşırı uç değerlerin bulunduğu veya beklenen değerin tanımlı olmadığı varsayımların geçerli olduğu durumlarda kullanılır. Pekkör (2023) çalışmasında, Cauchy dağılımı altında klasik uyum iyiliği testlerinin yetersiz kaldığı ve karakteristik fonksiyona dayalı bir testin daha güçlü sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Uyum iyiliği testleri, gözlenen verinin belirli bir teorik dağılıma uygunluğunu ölçmeye yarayan temel istatistiksel araçlardır. Ancak bu testler, çoğu zaman dağılımın momentleri, merkezi eğilim ölçüleri ve varyansı gibi niceliklerin tanımlı olduğu varsayımına dayanır. Bu bağlamda Cauchy dağılımı, istisnai özellikleri nedeniyle klasik uyum iyiliği testlerinin sınırlarını zorlayan bir örnek olarak öne çıkar.

Uyum iyiliği testleri genellikle bilinen parametrelerle uygulandığında teorik olarak doğru çalışır. Ancak Cauchy dağılımının parametreleri özellikle konum ve ölçek örneklemden tahmin edilmek zorundadır. Parametre tahmini ise test istatistiklerinin dağılımını değiştirir ve özellikle küçük örneklemlerde test gücünü düşürebilir (Stephens, 1974).

Pek çok klasik uyum iyiliği testi, dağılımın momentlerine dayanarak hesaplanan istatistiklere bağlıdır. Ancak Cauchy dağılımının beklenen değeri ve varyansı tanımsız olduğundan, bu tür testler doğrudan uygulanamaz ya da önemli sapmalara yol açar. Cauchy dağılımı, sıkça uç değer üretme eğilimindedir. Bu durum, özellikle Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling ve Cramér-von Mises gibi testlerin I. tip hata oranlarını artırabilir. Pekkör (2023) çalışmasında yapılan simülasyonlar, bu testlerin Cauchy dağılımı altında nominal %5 hata düzeyinin çok üzerinde reddetme eğiliminde olduğunu göstermektedir.

Bu sorunlar karşısında, özellikle Cauchy dağılımına özgü testlerin geliştirilmesi büyük önem kazanmıştır. Pekkör (2023), karakteristik fonksiyonun mutlak değerine dayanan yeni bir test önermiş ve bu testin, klasik testlere kıyasla daha yüksek doğruluk ve tutarlılık sunduğunu raporlamıştır.

Cauchy dağılımı, kendine özgü istatistiksel yapısı nedeniyle klasik uyum iyiliği testleri açısından ciddi zorluklar oluşturur. Bu nedenle Cauchy dağılımına özel test yaklaşımlarının geliştirilmesi, istatistiksel modelleme açısından kritik öneme sahiptir.

Uyum iyiliği testleri, belirli bir teorik dağılımın bir veri kümesine uygunluğunu değerlendirmek için kullanılan istatistiksel araçlardır. Cauchy dağılımı gibi uç değer duyarlılığı yüksek, tanımsız momentli ve ağır kuyruk yapısına sahip dağılımlar için klasik uyum testlerinin doğrudan uygulanması çoğu zaman yetersiz kalmaktadır.

Kolmogorov-Smirnov testi, dağılım fonksiyonlarının maksimum mutlak farkına dayalı klasik bir uyum testidir. Ancak bu test, özellikle parametre tahmininin örneklemden yapılması durumunda Cauchy dağılımı altında güvenilirliğini kaybeder (Stephens, 1974).

Karakteristik fonksiyonlara dayalı testler, özellikle momentleri tanımsız olan dağılımlarda avantaj sağlar. Pekgör (2023) tarafından geliştirilen test, Cauchy dağılımına özgü yapıları dikkate alarak karakteristik fonksiyonun mutlak değeri üzerinden bir test istatistiği tanımlar. Bu test, klasik testlerle kıyaslandığında daha yüksek doğruluk ve tutarlılık sunmaktadır.

Anderson-Darling ve Cramér-von Mises testleri, uç değerlere daha duyarlıdır ancak Cauchy dağılımı gibi uç değere sahip dağılımlar için bu durum yanıltıcı sonuçlar doğurabilir. Literatürde, Cauchy dağılımına karşı çeşitli uyum testlerinin performansını karşılaştıran birçok simülasyon çalışması yapılmıştır. Genel olarak klasik testler nominal seviyeden saparken, karakteristik fonksiyon tabanlı testler daha dengeli sonuçlar vermektedir.

İstatistiksel analizlerin en temel adımlarından biri, elde edilen gözlem verilerinin belirli bir teorik dağılım modeline ne ölçüde uyduğunu değerlendirmektir. Bu doğrultuda geliştirilen uyum iyiliği testleri, veri setinin belirli bir dağılıma uygunluk düzeyini ölçen ve böylece modelleme sürecinin ilk aşamasında kritik bilgiler sağlayan istatistiksel araçlardır. Özellikle parametrik analizlerde, dağılım varsayımının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek, sonraki adımlarda yapılacak tahmin ve çıkarımların geçerliliği açısından büyük önem taşır. Zira varsayımlara dayalı analizlerde, dağılımın uygunluğu sağlanmadığında tahminlerin yanlı veya tutarsız olma riski artar. Bu nedenle, uyum iyiliği testleri sadece dağılım uygunluğunu test etmekle kalmaz, aynı zamanda model seçimi, parametre tahmini ve hipotez testlerinin doğruluğunu güvence altına alan önemli bir ön değerlendirme aracıdır.

Uyum iyiliği testleri, temel olarak gözlemlenen örneklem verisinin belirli bir dağılım fonksiyonuna (örneğin normal, Cauchy vb.) ait olup olmadığını test eder. Bu testler, örneklem dağılımının, teorik olarak belirlenen bir dağılım ile ne derece benzeştiğini değerlendirmek amacıyla kullanılır. Gözlemler, örnekleme dayalı bir

dağılım fonksiyonu aracılığıyla temsil edilirken, karşılaştırılan teorik dağılım genellikle modelin varsayımı doğrultusunda belirlenir.

Bu testlerin uygulanmasında amaçlanan, veri ile model arasındaki farkın yalnızca tesadüfi mi, yoksa sistematik mi olduğunun anlaşılmasıdır. Eğer gözlemler ile teorik dağılım arasında anlamlı bir farklılık bulunursa, bu durum analiz edilen modelin hatalı varsayımlara dayandığını ve elde edilen sonuçların güvenilirliğinin zayıf olabileceğini gösterir. Bu bağlamda, uyum iyiliği testleri; istatistiksel güvenilirliği artırmak, model geçerliliğini sağlamak ve veri setindeki olası anomalileri tespit etmek açısından hayati bir rol üstlenir. Ayrıca bu testler, parametre tahminlerinin doğruluğunu etkileyebilecek sapmaların önceden belirlenmesine yardımcı olurken, modelleme sürecinde daha sağlam kararlar alınmasını da mümkün kılar.

Uyum iyiliği testleri, istatistiksel modellemenin temel aşamalarında yer almasının yanı sıra, parametrik olmayan istatistiklerde de önemli bir yere sahiptir. Özellikle uç değerlerin, veri asimetrisinin veya dağılımın yapısal bozulmalarının analiz edilmesinde bu testlerin gücü ön plana çıkar. Kimi testler, dağılımın merkez bölgesindeki sapmalara daha duyarlı iken, bazıları özellikle uç noktadaki farklılıkları tespit etmede daha etkilidir. Bu nedenle, kullanılacak testin seçiminde hem veri setinin yapısı hem de analizde öncelikli olarak incelenmek istenen dağılım özellikleri dikkate alınmalıdır. Uyum iyiliği testinin yanlış seçilmesi, dağılımdan sapmaların gözden kaçmasına ya da yanlış alarm verilmesine yol açabilir. Dolayısıyla, test seçimi istatistiksel analiz sürecinin başarısını doğrudan etkileyen kritik bir karardır.

Uyum iyiliği testleri istatistiksel analizlerin vazgeçilmez bir parçası olup, analiz edilen modelin geçerliliğini sağlamak açısından kritik bir rol oynar. Özellikle tez kapsamında ele alınan dağılımlar gibi ağır kuyruklu, simetrik olmayan ve klasik varsayımları sıklıkla ihlal eden yapılarda, bu testlerin dikkatli ve özenli bir şekilde uygulanması gerekmektedir. Teorik dağılımla gözlemler arasındaki farkın sistematik olup olmadığını değerlendirmek, sadece modelin uygunluğunu test etmekle kalmaz; aynı zamanda parametre tahminlerinin güvenilirliği, hipotez testlerinin geçerliliği ve genel modelleme sürecinin bilimsel sağlamlığı açısından da hayati önem taşır. Bu bağlamda, uyum iyiliği testlerinin bilinçli seçimi ve doğru yorumlanması, istatistiksel sonuçların güvenilirliğini artıran temel unsurlar arasında yer almaktadır.

Bu çalışmada kullanılacak başlıca uyum iyiliği (GOF) testleri şu şekilde:

- Kolmogorov Smirnov Testi
- Anderson Darling Testi
- Uyarlanmış Anderson Darling Testi
- Cramér–von Mises Kriteri
- Kullback-Leibler Uzaklığı
- Zhang-Wu  $Z_A$ ,  $Z_C$  ve  $Z_K$  Testleri
- Gürtler ve Henze Testi
- AP<sub>P</sub> Testi

Bu test istatistiklerinde:

$n$ : örneklem büyüklüğü,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ : gözlemler,

$F_n(X_{(i)}) = F_n(X_{(i)}; \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ : teorik dağılım fonksiyonunu,

$S_n(X_{(i)}) = \frac{i-1}{n}$ : deneysel dağılım fonksiyonudur. (Öztürk ve Özbek,2015; Pekkör ve ark., 2018).

#### 4.1. Kolmogorov Smirnov Testi

İstatistiksel modelleme ve veri analizi süreçlerinde, elde edilen gözlem verisinin belirli bir teorik dağılım fonksiyonuna uygun olup olmadığının test edilmesi, model doğruluğu ve geçerliliği açısından oldukça önemlidir. Bu amaçla geliştirilen uyum iyiliği testleri, özellikle dağılım varsayımlarının kontrol edilmesinde temel araçlar olarak kullanılmaktadır. Söz konusu testler arasında Kolmogorov-Smirnov (KS) testi, parametrik olmayan yapısı, uygulama kolaylığı ve teorik sağlamlığı ile öne çıkmaktadır.

KS testinin temelleri, Sovyet matematikçi Andrey Kolmogorov'un 1933 yılında yayımladığı çalışmaya dayanmaktadır. Bu çalışmada Kolmogorov, ampirik dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkı değerlendiren bir metrik önererek, bu farkın maksimum mutlak değerini bir test istatistiği olarak önermiştir. Daha

sonra Nikolai Smirnov, 1939 tarihli çalışmasında bu yaklaşımı iki örneklem arasındaki farkları test edebilecek şekilde genişletmiş ve bu katkılar literatürde birleşerek KS testi adını almıştır. KS testi, bir örneklemin belirli bir sürekli teorik dağılıma uyup uymadığını test etmek için kullanılır. Testin temel dayanağı, gözlem verilerine dayalı olarak oluşturulan ampirik dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki maksimum sapmanın ölçülmesidir. Deneysel dağılım fonksiyonu tahmincisi  $S_n(X_{(i)})$ , örneklemin kümülatif dağılımını gösterir ve şu şekilde tanımlanır:

$$S_n(X_{(i)}) = \frac{i-1}{n}$$

ve  $F(x)$ ;

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right), x \in \mathbb{R}$$

teorik birikimli dağılım fonksiyonu olmak üzere; KS test istatistiği ise aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$D_n = \sup_x |S_n(X_{(i)}) - F(x)|$$

$$KS = \max_{i=1,2,\dots,n} \left[ \max \left( \frac{i}{n} - F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}), F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - \frac{i-1}{n} \right) \right]$$

KS testi, çok sayıda disiplinde yaygın biçimde kullanılmaktadır. Başta ekonomi, psikoloji, biyoloji, mühendislik ve veri bilimi gibi alanlarda, dağılım varsayımının kontrolü, model uygunluğu ve istatistiksel karar verme süreçlerinde etkin biçimde uygulanmaktadır.

Kolmogorov-Smirnov testinin bazı temel avantajları şunlardır:

- i. Parametrik varsayım içermez.
- ii. Ampirik ve teorik dağılımlar arasında görsel karşılaştırma sağlar.
- iii. Basit, anlaşılır ve yorumlaması kolaydır.
- iv. Küçük örneklem büyüklüklerinde bile uygulanabilir.

Ancak, parametrelerin veriden tahmin edildiği durumlarda orijinal test geçerliliğini kaybeder. Yani, test çok değişkenli veriler ya da ayrık dağılımlar (örneğin binom dağılımı) için doğrudan uygulanamaz. Bu durumda Lilliefors gibi modifiye

versiyonlar kullanılmalıdır. Test sadece tek değişkenli ve sürekli dağılımlar için geçerlidir.

KS testi, istatistiksel modellemenin temel yapı taşlarından biri olan dağılım uygunluğu testlerinde önemli bir araç olarak yerini almıştır. Bu tez kapsamında da KS testi, farklı parametre tahmin yöntemleri ile elde edilen sonuçların Cauchy dağılımına uyumunun değerlendirilmesinde temel yöntemlerden biri olarak kullanılacaktır.

#### 4.2. Anderson-Darling Testi

İstatistiksel modelleme sürecinde, bir veri setinin belirli bir teorik dağılıma uygun olup olmadığını değerlendirmek, hem modelin geçerliliğini sağlamak hem de analiz sonuçlarının güvenilirliğini artırmak açısından son derece önemlidir. Bu bağlamda geliştirilen uyum iyiliği testleri, gözlemsel (ampirik) dağılım fonksiyonu ile varsayımsal (teorik) dağılım fonksiyonu arasındaki farkları ölçmeyi amaçlayan yöntemler sunar.

Bu testlerden biri olan Anderson-Darling (AD) testi, özellikle uç noktalarda meydana gelen sapmalara karşı daha duyarlı olması nedeniyle literatürde öne çıkmaktadır. AD testi, KS testinden türetilmiş olup, 1952 yılında Theodore W. Anderson ve Donald A. Darling tarafından geliştirilmiştir (Anderson ve Darling, 1952). Bu test, teorik ve gözlemsel dağılımlar arasındaki farkları belirlemek amacıyla ağırlıklı bir integral yapısı kullanır. Böylece özellikle uç değerlerin daha önemli olduğu durumlarda KS testine kıyasla daha yüksek bir ayırt edici güce sahiptir (Stephens, 1974).

AD test istatistiği şu formülle hesaplanır:

$$AD = -n - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{2i-1}{2} \right) \log \left( F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \right) + \left( \frac{2(n-i)+1}{2} \right) \log \left( 1 - F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \right) \right]$$

Bu testin temel avantajları arasında uç değerlerdeki sapmalara karşı daha hassas olması, küçük örneklerde güçlü sonuçlar vermesi ve normalite testleri için alternatif bir yöntem sunması sayılabilir (Razali ve Wah, 2011). Buna karşılık, parametre tahminlerinin test istatistiğine etkisini telafi edebilmek için özel uyarlanmış kritik değerlere ihtiyaç duyması, el ile hesaplamaya uygun olmaması ve kullanılacak teorik dağılıma göre tabloların gerekli olması gibi sınırlılıkları da mevcuttur (D'Agostino ve Stephens, 1986).

AD testi, normalite analizlerinden finansal risk modellemelerine, güvenilirlik çalışmalarından simülasyon sonuçlarının doğrulanmasına kadar birçok alanda kullanılmaktadır. Ayrıca, testin matematiksel yapısı gereği elle uygulanması oldukça güçtür; dolayısıyla hesaplamaların doğru ve pratik biçimde yapılabilmesi için istatistiksel yazılımların kullanımı zorunlu hâle gelmektedir. Bu tez kapsamında da, Cauchy dağılımına yönelik modelleme çalışmalarında AD testi güçlü bir değerlendirme aracı olarak kullanılacaktır.

### 4.3. Uyarlanmış Anderson-Darling Testi

Uyum iyiliği testleri, istatistiksel analizlerde elde edilen örneklem verilerinin belirli bir teorik dağılıma uygunluğunu değerlendirmede temel araçlar arasında yer almaktadır. Bu testlerin uygulanmasında karşılaşılan en önemli sorunlardan biri, teorik dağılımın parametrelerinin bilinirliğidir. Pratikte çoğu dağılıma ait parametreler örneğin ortalama, medyan veya konum-parametresi doğrudan örneklem verileri üzerinden tahmin edilmektedir. Ancak bu durum, test istatistiklerinin dağılımını ve dolayısıyla testin anlamlılık düzeylerini etkilemektedir (Stephens, 1976; D'Agostino ve Stephens, 1986).

Klasik AD testi, teorik dağılımın tüm parametrelerinin önceden bilindiği varsayımıyla geliştirilmiştir (Anderson ve Darling, 1952). Bu varsayım altında test istatistiğinin teorik dağılımı ve buna bağlı olarak anlamlılık düzeyleri güvenilir şekilde belirlenebilmektedir. Ne var ki, uygulamalı çalışmaların büyük bir kısmında bu varsayım geçerli değildir. Dağılım parametreleri genellikle örnekleme dayalı tahminlerle elde edildiğinden, klasik testin kullanımı bu koşullarda yanlış anlamlılık sonuçlarına yol açabilir. Bu problemi gidermek üzere geliştirilen MAD testi, klasik testin parametre tahmini içeren senaryolara uyarlanmış versiyonudur. Uyarlama, orijinal test istatistiğine bir düzeltme katsayısı eklenerek gerçekleştirilir.

Parametrelerin örneklem verilerinden tahmin edilmesi durumunda bu istatistik, aşağıdaki düzeltme formülüyle uyarlanır (Stephens, 1976):

$$MAD = AD \left( 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right)$$

Uyarlanan testin anlamlılık düzeylerine karşılık gelen kritik değerleri, genellikle simülasyon temelli çalışmalarla veya literatürde sunulan tablolar aracılığıyla elde

edilmektedir (D'Agostino ve Stephens, 1986). Bu yönüyle test, dağılıma özel yapılar ve parametrik tahminlerin türüne göre yeniden kalibre edilmelidir.

MAD testinin kullanım alanları arasında, parametre tahmini yapılan dağılımlarda uyum testi uygulamaları, küçük örneklerle çalışılan senaryolarda daha güvenilir sonuçlara ulaşılması ve uç değerlerin önemli olduğu dağılımlarda test duyarlılığının artırılması yer almaktadır.

MAD testi, özellikle parametre tahminlerinin modelleme sürecine dâhil olduğu durumlarda güvenilir bir uyum iyiliği değerlendirmesi sunmaktadır. Bu tez çalışması kapsamında da ağır kuyruklu yapıya sahip olan Cauchy dağılımının parametre tahminlerinin etkinliği, MAD testi aracılığıyla değerlendirilecektir.

#### 4.4. Cramér-von Mises Kriteri

İstatistiksel modelleme ve çıkarım süreçlerinde, gözlem verilerinin belirli bir teorik dağılıma uygunluğunun test edilmesi, modelin geçerliliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Bu değerlendirme çoğunlukla, gözlemsel (ampirik) dağılım fonksiyonu ile varsayımsal (teorik) dağılım fonksiyonu arasındaki farkları ölçen uyum iyiliği testleri aracılığıyla gerçekleştirilir. Bu testlerden biri olan Cramér–von Mises (CVM) kriteri, tüm dağılım aralığında ortalama farklara duyarlı yapısıyla öne çıkmaktadır.

CVM kriteri, ilk olarak Harald Cramér (1928) tarafından önerilmiş, ardından Richard von Mises tarafından geliştirilmiş ve sistematik hâle getirilmiştir. Testin istatistiksel hipotez testi çerçevesine yerleştirilmiş modern formülasyonu ise 1950'li yıllarda Watson ve arkadaşlarının katkılarıyla oluşturulmuştur (Anderson, 1962; Stephens, 1974).

Bu testin temel amacı, örneklem verilerinden elde edilen ampirik dağılım fonksiyonu  $S(x)$  ile teorik dağılım fonksiyonu  $F(x)$  arasındaki farkları ölçmektir. CVM test istatistiği,

$$CVM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [F_n(X_{(i)}) - S_n(X_{(i)})]^2 \text{ 'dir (Pekgör ve ark., 2018).}$$

CVM testi, dağılım uygunluğunu değerlendirmek amacıyla çeşitli uygulama alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu alanlar arasında normallik testleri, regresyon analizlerinde artık terimlerin dağılım kontrolleri, simülasyon sonrası model

doğrulama süreçleri ve ömür dağılım analizleri (örneğin Weibull, log-normal dağılımları) yer almaktadır (Razali ve Wah, 2011; Thode, 2002).

CVM kriteri, teorik dağılımla ampirik dağılım arasındaki farkı yalnızca belirli noktalarda değil, dağılımın tamamı boyunca değerlendirerek istatistiksel uyumun bütüncül bir analizini sunar. Bu özelliği sayesinde, normallik testlerinden simülasyon değerlendirmelerine kadar çok çeşitli istatistiksel çalışmalar için güçlü bir araç olarak kabul edilmektedir.

#### 4.5. Kullback-Leibler Testleri

İstatistiksel modelleme ve çıkarım süreçlerinde, bir olasılık dağılımının başka bir dağılıma ne derece benzediğini ya da ondan ne ölçüde sapma gösterdiğini belirlemek, özellikle model geçerliliğini sağlamak açısından önemli bir metodolojik adımdır. Bu amaçla kullanılan bilgi kuramına dayalı ölçütlerden biri olan Kullback-Leibler (KL) ayrışımı, dağılımlar arası farkı asimetrik biçimde ölçen güçlü ve teorik temeli sağlam bir yaklaşımdır (Kullback ve Leibler, 1951).

KL ayrışımı, iki olasılık dağılımı olan bilgi kaybını ölçmek üzere geliştirilmiştir. Bu bağlamda, aşağıdaki formül seti, KL ayrışımına dayalı uyum iyiliği test istatistiklerini temsil etmektedir:

$$D_i = \exp\left(-H_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(f(X_{(j)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}))\right), i = 1, 2, \dots, 7$$

Buradaki  $H_i$ 'ler

$$H_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{2m} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right)$$

$$H_2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right)\right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \log\left(\frac{n+1}{m} (X_{(i+m)} - X_{(i)})\right) + \sum_{i=m}^n \frac{1}{i} - \log\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$H_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{n}{d_i m} (Y_{(i+m)} - Y_{(i-m)}) \right)$$

$$H_5 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} ((X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})(j-i))}{n \sum_{j=i-m}^{i+m} ((X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})^2)} \right)$$

$$H_6 = \sum_{i=1}^n \left[ \log \left( \frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_y(X_{(i-m)})} \right) \times \left( \frac{\hat{F}_y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_y(X_{(i-m)})}{\sum_{j=1}^n (\hat{F}_y(X_{(j+m)}) - \hat{F}_y(X_{(j-m)}))} \right) \right]$$

$$H_7 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{\frac{1}{nh} \left( \sum_{j=1}^n K \left( \frac{X_{(i+m)} - X_j}{h} \right) - \sum_{j=1}^n K \left( \frac{X_{(i-m)} - X_j}{h} \right) \right)}{2} \right)$$

Burada;

$$d_i = \begin{cases} 1 + \frac{i+1}{m} - \frac{i}{m^2}, & 1 \leq i \leq m \\ \frac{2}{2}, & m+1 \leq i \leq n-m \\ 1 + \frac{n-i}{m+1}, & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} Y_{(i-m)} = a + \frac{i-1}{m} (X_{(1)} - a), & 1 \leq i \leq m \\ Y_{(i)} = X_{(i)}, & m+1 \leq i \leq n-m \\ Y_{(i+m)} = b - \frac{n-i}{m} (b - X_{(n)}), & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$a = \bar{x} - ks, \quad b = \bar{x} + ks, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\bar{X}_{(i)} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=i-m}^{i+m} X_{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{F}_y(X_{(i)}) = \frac{n-1}{n(n+1)} \left( i + \frac{1}{n-1} + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right)$$

$$\hat{F}_y(X_{(1)}) = 1 - \hat{F}_y(X_{(n)}) = \frac{1}{n+1}$$

KL ayrışımı doğrudan klasik anlamda bir uyum iyiliği testi istatistiği olmamakla birlikte, model uygunluğunu değerlendirme amacıyla dolaylı yollarla kullanılmaktadır. Özellikle bilgi kriterleri (örneğin AIC – Akaike Information Criterion), temelini KL ayrışımına dayandırarak modellerin karşılaştırılmasına olanak tanır (Burnham ve Anderson, 2002). Bununla birlikte, bazı özel uygulamalarda KL ayrışımı simülasyon veya bootstrap yöntemleriyle bir test istatistiğine dönüştürülebilmekte ve bu sayede anlamlılık düzeyleri (p-değeri) hesaplanabilmektedir (Lin, 1991).

KL ayrışımı ve ona dayalı ölçütler, yalnızca uyum iyiliği testlerinde değil; aynı zamanda model karşılaştırmaları, veri bilimi, makine öğrenmesi, Bayeşçi çıkarım ve bilgi kuramı temelli model seçim süreçlerinde de yaygın olarak kullanılmaktadır (MacKay, 2003; Bishop, 2006).

KL ayrışımı doğrudan bir test istatistiği olmasa da, özellikle parametrik modellere dayalı analizlerde, bilgi kaybı temelli değerlendirmeler yapılmasına olanak tanıyan güçlü bir araçtır. Bu tez kapsamında da, Cauchy dağılımı ile oluşturulan modellerin parametre tahmin performansları, KL ayrışımı temelinde değerlendirilerek karşılaştırmalı analizler gerçekleştirilecektir.

#### 4.6. Zhang $Z_A$ , $Z_C$ ve $Z_K$ Testleri

Uyum iyiliği testleri, bir örneklem dağılımının belirli bir teorik dağılıma ne ölçüde uyduğunu değerlendirmek amacıyla kullanılan temel istatistiksel araçlardır. Bu testler, modelleme süreçlerinin güvenilirliğini sağlamak ve elde edilen sonuçların geçerliliğini değerlendirmek açısından önemli bir yer tutar. Geleneksel olarak kullanılan KS, AD ve CVM gibi testler, örneklem ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkları çeşitli duyarlılık düzeyleri ve varsayımlar doğrultusunda ölçmektedir (D'Agostino ve Stephens, 1986).

Ancak bu klasik yöntemlerin sınırlılıklarını aşmak amacıyla Zhang, klasik ampirik dağılım fonksiyonu temelli testleri genelleyerek üç yeni test önermiştir:  $Z_A$ ,  $Z_C$  ve  $Z_K$ . Bu testler, gözlemler ile teorik dağılım arasındaki farkları daha sistematik bir şekilde değerlendirerek, hem dağılımın merkezinde hem de kuyruk bölgelerinde güçlü ayırt edicilik sunmayı hedefler.

$$Z_A = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\log \left( F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \right)}{n - i + 0,5} + \frac{\log \left( 1 - F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \right)}{i - 0,5} \right)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^n \left( \log \left( \frac{1/F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - 1}{(n - 0,5)/(i - 0,75) - 1} \right) \right)^2$$

$$Z_K = \max_{i=1,2,\dots,n} \left( (i - 0,5) \log \left( \frac{i - 0,5}{nF(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma})} \right) + (n - i + 0,5) \log \left( \frac{n - i + 0,5}{n(1 - F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}))} \right) \right)$$

Zhang testleri, özellikle küçük örneklem büyüklüklerinde dahi yüksek performans göstermesiyle dikkat çeker.  $Z_A$  testi uç değerlerdeki sapmalara karşı oldukça hassastır;  $Z_C$  testi ise genel dağılım farklarına odaklanır.  $Z_K$  testi ise en büyük mutlak sapma üzerinden model uygunluğunu değerlendirir. Bu testlerin özellikle simülasyon temelli analizlerde güçlü sonuçlar verdiği belirtilmiştir (Zhang, 2002).

Zhang tarafından geliştirilen  $Z_A$ ,  $Z_C$  ve  $Z_K$  testleri, klasik ampirik dağılım fonksiyonu tabanlı testlerin tamamlayıcısı niteliğindedir. Bu testler, özellikle ağır kuyruklu dağılımlar altında, parametre tahmin yöntemlerinin uygunluk başarısını değerlendirmek amacıyla kullanılabilecek etkili araçlar sunmaktadır. Tez kapsamında da bu testlerin Cauchy dağılımına olan uyum performansı analiz edilecektir.

#### 4.7. Gürtler ve Henze Testi

Uyum iyiliği testleri, istatistiksel analizlerin temel yapı taşlarından biri olup, bir veri setinin belirli bir teorik dağılıma ne ölçüde uyduğunu test etmek amacıyla kullanılır. Özellikle parametrik testlerin varsayımlarını sağlamadığı ya da çok boyutlu dağılımlar söz konusu olduğunda, klasik testlerin (örneğin Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk) yetersiz kaldığı durumlar ortaya çıkabilir. Bu tür sınırlılıkları aşmak amacıyla geliştirilen GH testi, parametrik olmayan, kernel tabanlı güçlü bir uyum iyiliği testi olarak literatüre kazandırılmıştır (Gürtler ve Henze, 2000).

GH testi, özellikle çok boyutlu normallik testlerinde yaygın biçimde kullanılmakla birlikte, tek boyutlu uygulamalarda da esnekliğini korur. Testin temelinde, iki dağılım fonksiyonu arasındaki uzaklığın pozitif belirli bir çekirdek (kernel) fonksiyonu kullanılarak ölçülmesi yatmaktadır. Bu yaklaşım, dağılımlar arasındaki farkları bütünleştirilebilir ve sürekli pozitif fonksiyonlar aracılığıyla değerlendirmeye olanak tanır. GH test istatistiği genel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$GH = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left( \frac{x_j - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} - \frac{x_k - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^2} - 4 \sum_{j=1}^n \frac{1 + \lambda}{(1 + \lambda)^2 + \left( \frac{x_j - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^2} + \frac{2n}{2 + \lambda}$$

GH testi, klasik uyum iyiliği testlerinin sınırlılıklarını aşan, esnek ve güçlü bir alternatif olarak öne çıkmaktadır. Bu testin parametrik olmayan yapısı, çok boyutlu dağılımlara uygulanabilirliği ve kernel temelli ölçüm gücü sayesinde modern istatistiksel modelleme yaklaşımlarında etkili biçimde kullanılmaktadır. Tez kapsamında da, klasik testlerin yanı sıra GH testinin uygulanması ile, farklı parametre tahmin yöntemleriyle elde edilen dağılımların teorik Cauchy dağılımına uygunluğu karşılaştırmalı olarak değerlendirilecektir.

#### 4.8. Pekkör Testleri

Son yıllarda, Cauchy dağılımına özel olarak geliştirilen uyum iyiliği testlerine olan ilgi artmıştır. Bu çerçevede, Pekkör (2023) tarafından önerilen yeni bir test istatistiği, literatüre özgün ve güçlü bir katkı sunmaktadır. Söz konusu çalışmada, Cauchy dağılımının kuyruk yapısına duyarlı bir kuantil oranı indeksi kullanılarak tanımlanan yeni bir test istatistiği (AP<sub>P</sub>) önerilmiştir. Testin dayandığı temel fikir, dört farklı kuantilin kullanılmasıyla oluşturulan oran ifadesinin, Cauchy dağılımı için konum ve ölçek

parametrelerinden bağımsız olarak sabit bir değer almasıdır. Bu özellik, testin simetrik dağılımlar karşısında oldukça kararlı olmasını sağlamaktadır.

Önerilen  $AP_{\mathbf{p}}$  test istatistiği, farklı kuantil kombinasyonlarına göre çeşitli versiyonlar ( $AP_{p_1}$ ,  $AP_{p_2}$ , ...,  $AP_{p_6}$ ) şeklinde türetilmiş ve her biri için Monte Carlo simülasyonları yoluyla anlamlılık düzeylerine karşılık gelen kritik değerler hesaplanmıştır. Ayrıca testin asimptotik dağılımı elde edilerek teorik geçerliliği sağlanmıştır.  $AP_{\mathbf{p}}$  testinin performansı, KS, AD, CVM gibi klasik testler ve bilgi kuramı temelli yaklaşımlarla (KL ayrışımına dayalı testler,  $D_1$ – $D_7$ ) karşılaştırılmıştır.

$AP_{\mathbf{p}}$  test istatistiği  $\mathbf{p}$ 'ye bağlı olarak

$$AP_{\mathbf{p}} = \frac{\xi_{p_3}^x - \xi_{p_2}^x}{\xi_{p_4}^x - \xi_{p_1}^x},$$

ifade edilir. Burada  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  olmak üzere Cauchy dağılımı için optimal  $\mathbf{p}$  vektörü  $\mathbf{p} = (0.02217468, 0.25, 0.75, 0.97782532)$  dir.

Gerçekleştirilen geniş çaplı simülasyon analizleri,  $AP_{\mathbf{p}}$  testinin özellikle hafif kuyruklu alternatif dağılımlara karşı yüksek test gücü sergilediğini göstermektedir. Buna karşılık, Cauchy'den daha ağır kuyruklu dağılımlara karşı test gücünün diğer testler gibi azaldığı, ancak örneklem büyüklüğünün artmasıyla bu farkın azaldığı rapor edilmiştir. Özellikle küçük örneklem için  $AP_{p_1}$  ve  $AP_{p_2}$  versiyonlarının, büyük örneklem içinse  $AP_{p_5}$  ve  $AP_{p_6}$  versiyonlarının daha etkili olduğu belirtilmiştir. Ayrıca çalışmada, Almanya borsa endeksine (DAX) ait kapanış verileri üzerinde uygulama yapılarak, önerilen testin pratik geçerliliği de ortaya konmuştur.

Pekgör'ün (2023) çalışması, ağır kuyruklu dağılımlar için geliştirilen testler literatürüne önemli bir katkı sunmakta; parametrik olmayan yapısı, kuantil temelli yaklaşımı ve R kodları ile uygulamaya elverişliliği açısından dikkat çekmektedir. Bu testin özellikle parametre tahmin yöntemlerinin etkisini değerlendirmeye yönelik analizlerde kullanılabilirliği oldukça yüksektir.

## 5. SİMÜLASYON

Çalışmada, ilk olarak literatürde yer alan Cauchy dağılımına uyum iyiliği testleri ve parametre tahmin yöntemlerinden yararlanarak R programıyla (R Core Team, 2024) kodlanacak olan Monte-Carlo simülasyonu (Metropolis ve Ulam, 1949) ile kritik tablo değerleri ve alternatif dağılımlara karşı güçler hesaplanacaktır. Sonrasında ortaya çıkan sonuçlara göre her bir test istatistiğinin her alternatif dağılım karşısındaki parametre tahmin yöntemlerine bağlı olarak güçleri test edilerek grafikleriyle birlikte yorumlanacaktır.

### 5.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada Cauchy dağılımına GOF testlerinde parametre tahmin yöntemlerinin güç bakımından GOF testleri üzerine etkileri incelenecektir.

### 5.2. Araştırmanın Önemi

Veri setinin belirli bir dağılıma uygunluğunu belirlemek amacıyla birçok uyum iyiliği testinden yararlanılmaktadır. Uyum iyiliği testlerinden hangisinin ya da hangilerinin daha iyi sonuçlar verdiğinin Monte Carlo simülasyonu kullanılarak belirlenmesinin Cauchy dağılımına sahip veri setlerinde kullanılacak uyum iyiliği testlerinin seçiminde, gelecek araştırmacılara yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

### 5.3. Güç Karşılaştırmaları

Monte-Carlo simülasyonundan yararlanarak 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 örneklem büyüklükleri için 100000'lik denemeler yoluyla  $\alpha = 0,05$  düzeyinde anlamlı I. tip hata bakımından kritik tablolar elde edilmiştir. Sonrasında uyum iyiliği testlerinin kıyaslanabilmesi için Cauchy dağılımına alternatif dağılımlardan türetilen örneklemelerin uyum iyiliği test istatistiklerinin değerleri hesaplanılmıştır. Bu çalışmada Cauchy dağılımına alternatif olarak Beta, Üstel, Gamma, Normal, t ve Weibull dağılımlarından yararlanılmıştır. Çalışmada yer alan dağılımlar:

- i. Beta ( $\alpha, \beta$ ): (0,1) tanım aralığında yer alan dağılımlardan Beta dağılımında  $\alpha$  ve  $\beta$  şekil parametreleri ve

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 \leq x \leq 1$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere simülasyonlarda ( $\alpha, \beta$ ) parametreleri (1,1), (1,2) ve (2,1) dağılımlarından yararlanılmıştır.

ii. Üstel dağılımı ( $\lambda$ ): Üstel dağılımında  $\lambda$  oran parametresi ve

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere (1) dağılımından yararlanılmıştır.

iii. Gamma dağılımı ( $\alpha, \sigma$ ):  $(0, \infty)$  tanım aralığında yer alan dağılımlardan Gamma dağılımında  $\alpha$  ve  $\sigma$  sırasıyla şekil ve ölçek parametreleri ve

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\sigma}, \quad x \geq 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere (0.5,1), (2,1) ve (5,1) dağılımlarından yararlanılmıştır.

iv. Normal dağılım ( $\mu, \sigma$ ):  $(-\infty, \infty)$  tanım aralığında yer alan dağılımlardan Normal dağılımında  $\mu$  ortalama,  $\sigma$  standart sapma ve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere (0,1), (0,10) ve (0,100) dağılımlarından yararlanılmıştır.

v. t dağılımı ( $r$ ):  $(-\infty, \infty)$  tanım aralığında yer alan dağılımlardan t dağılımında  $r$  serbestlik derecesi

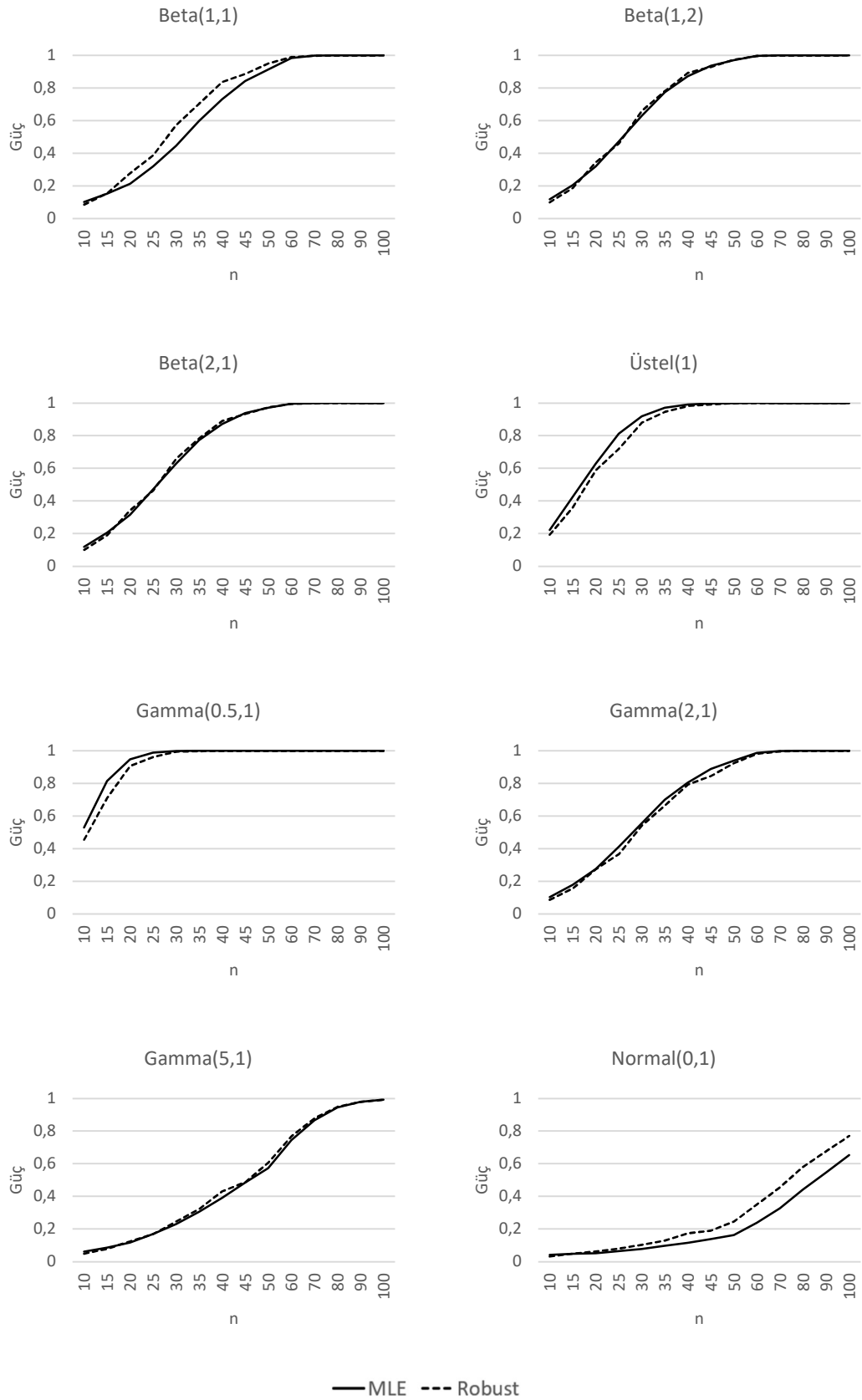
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere (2), (5) ve (10) serbestlik dereceli dağılımlarından yararlanılmıştır.

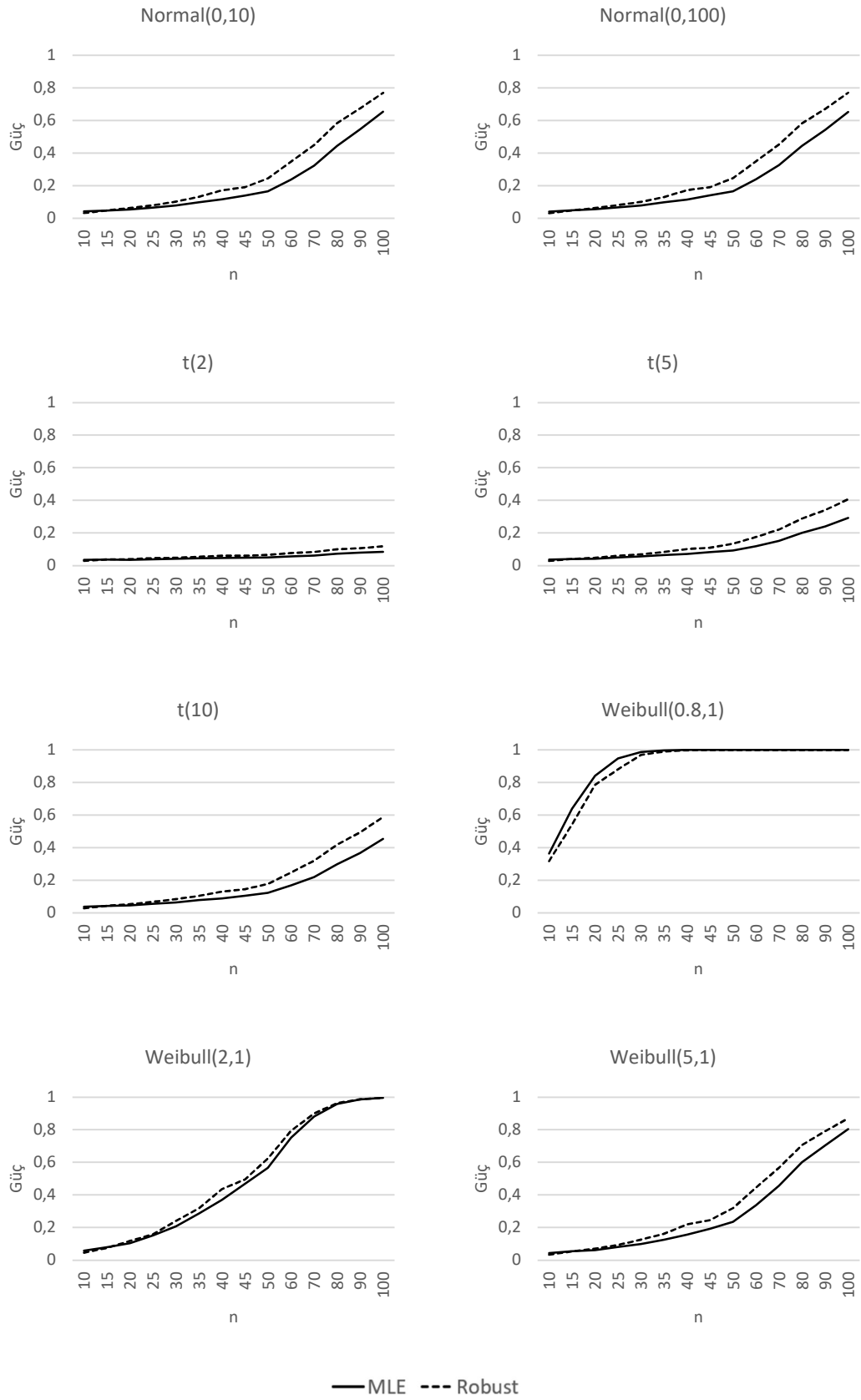
vi. Weibull dağılımı ( $\alpha, \beta$ ):  $(-\infty, \infty)$  tanım aralığında yer alan dağılımlardan Weibull dağılımında  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla şekil ve ölçek parametreleri ve

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, \quad x \geq 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere simülasyonlarda ( $\alpha, \beta$ ) parametreleri (0.8,1), (2,1) ve (5,1) dağılımlarından yararlanılmıştır. (R Core Team, 2024).



**Şekil 5.1.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen KS Test gücü değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

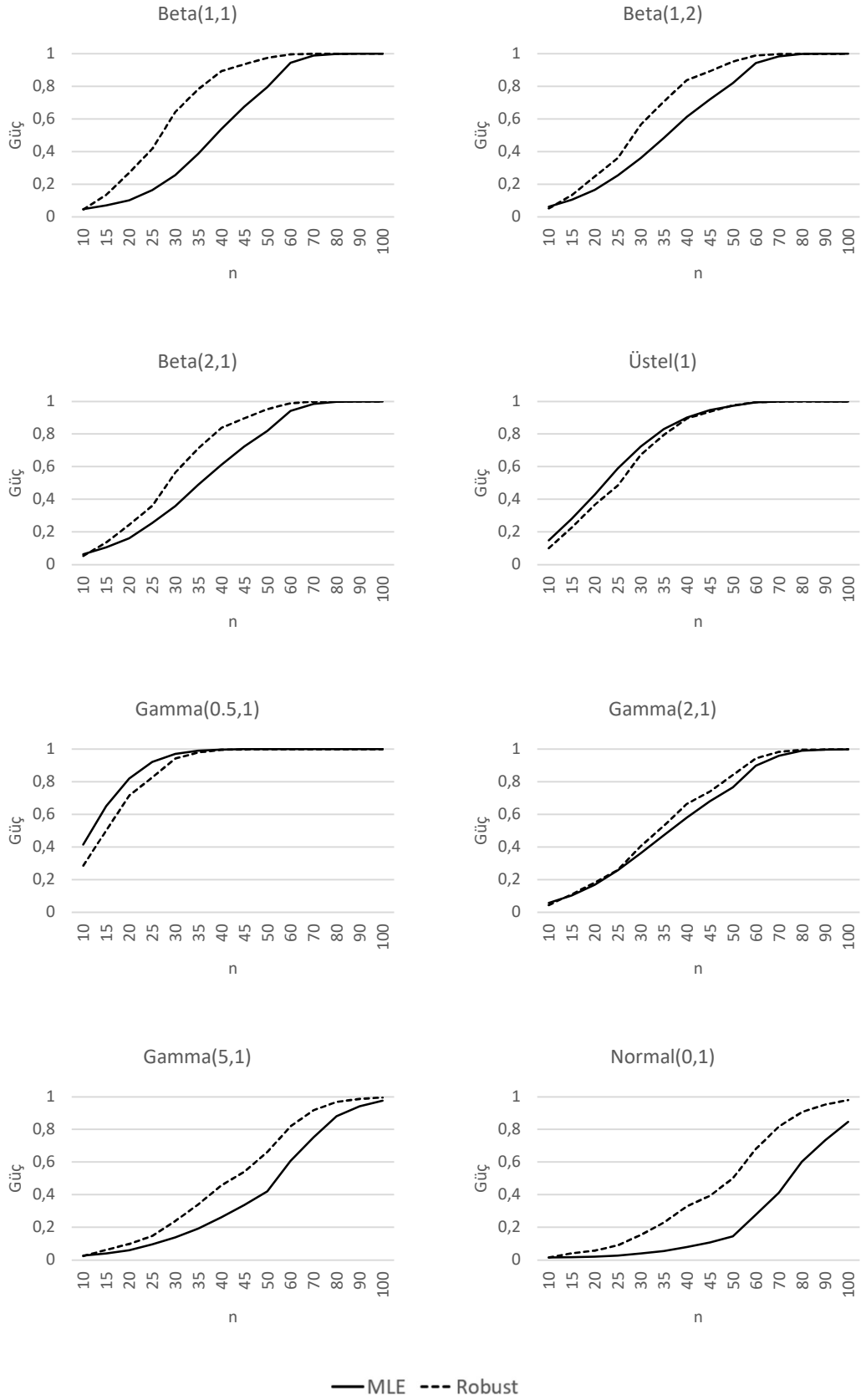


**Şekil 5.2.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen KS Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

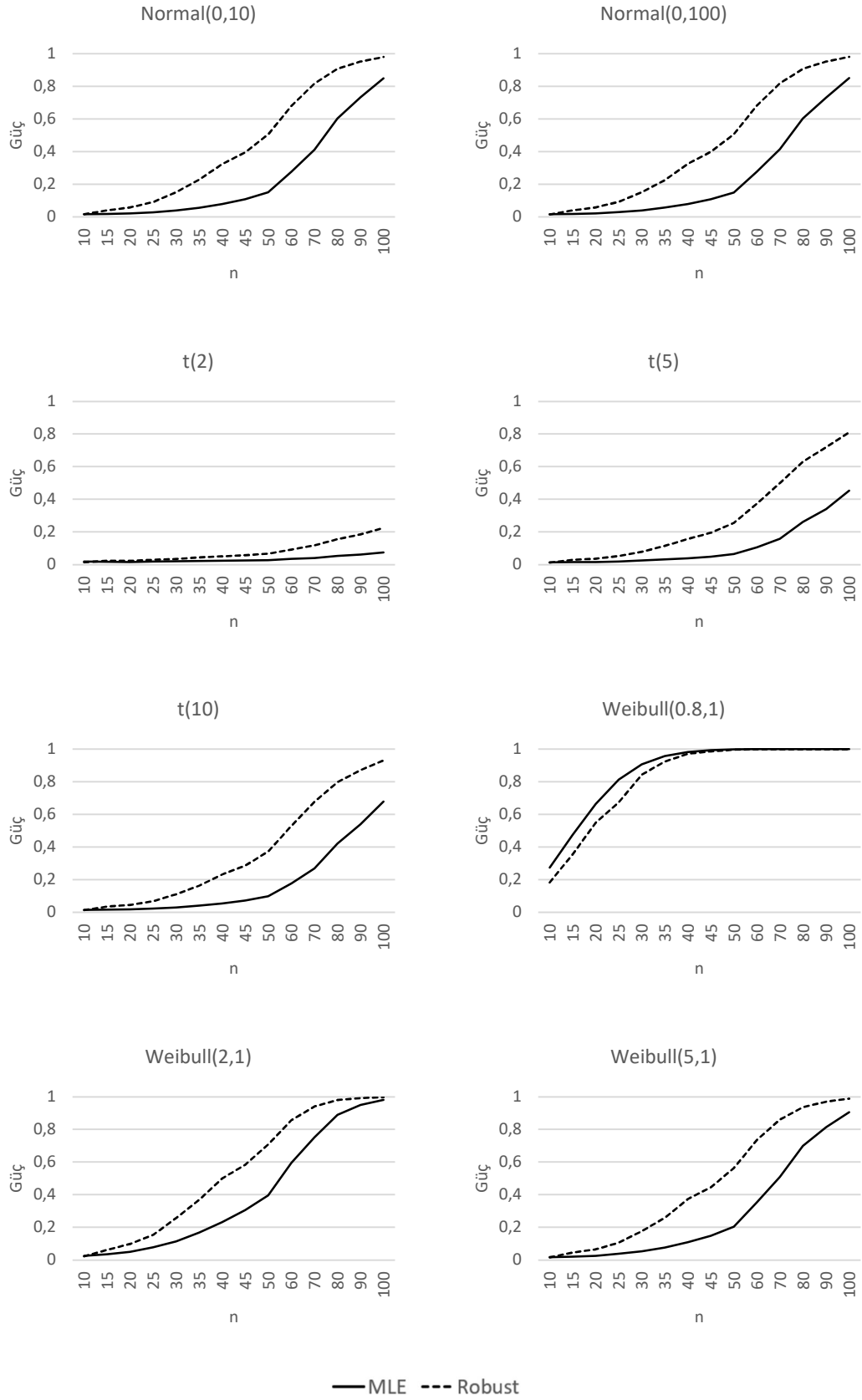
**Tablo 5.1.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen KS Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,07236	-0,00372	6	0,00642
<b>Beta(1,2)</b>	-0,01451	0,00761	32	0,61012
<b>Beta(2,1)</b>	-0,01492	0,00709	31	0,55615
<b>Üstel(1)</b>	0,00441	0,04881	66	0,00386
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,00035	0,07058	36	0,01427
<b>Gamma(2,1)</b>	0,00588	0,02674	88	0,00333
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,01942	-0,00082	16	0,02026
<b>Normal(0,1)</b>	-0,09609	-0,02681	2	0,00037
<b>Normal(0,10)</b>	-0,09636	-0,02723	3	0,00061
<b>Normal(0,100)</b>	-0,09582	-0,02578	4	0,00085
<b>t(2)</b>	-0,02129	-0,00746	3	0,00061
<b>t(5)</b>	-0,06446	-0,01608	3	0,00061
<b>t(10)</b>	-0,08264	-0,02102	3	0,00061
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,00120	0,06031	45	0,00915
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,03476	-0,00696	9	0,00403
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,08340	-0,02748	3	0,00061

Simülasyon bulgularına göre, KS testinin istatistiksel gücü, kullanılan parametre tahmin yöntemine ve alternatif dağılımın yapısına bağlı olarak anlamlı düzeyde değişiklik göstermektedir. Özellikle ağır kuyruklu ve simetrik dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleri, klasik maksimum olabilirlik tahminine (MLE) kıyasla daha yüksek test gücü sergilemiş; bu durum, Cauchy dağılımının yapısal özellikleri dikkate alındığında önemli bir avantaj olarak değerlendirilebilir. Öte yandan, pozitif çarpıklık içeren bazı dağılımlar için MLE yönteminin daha güçlü sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Ancak genel olarak değerlendirildiğinde, robust yöntemlerin KS testinin performansını iyileştirme potansiyeli, özellikle uç değer duyarlılığı yüksek olan dağılımlarda daha belirgin hale gelmiştir. Bu sonuçlar, Cauchy dağılımına yönelik uyum iyiliği testlerinde tahmin yöntemi tercihinin test gücü üzerinde belirleyici bir faktör olduğunu ortaya koymaktadır.



**Şekil 5.3.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen AD Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

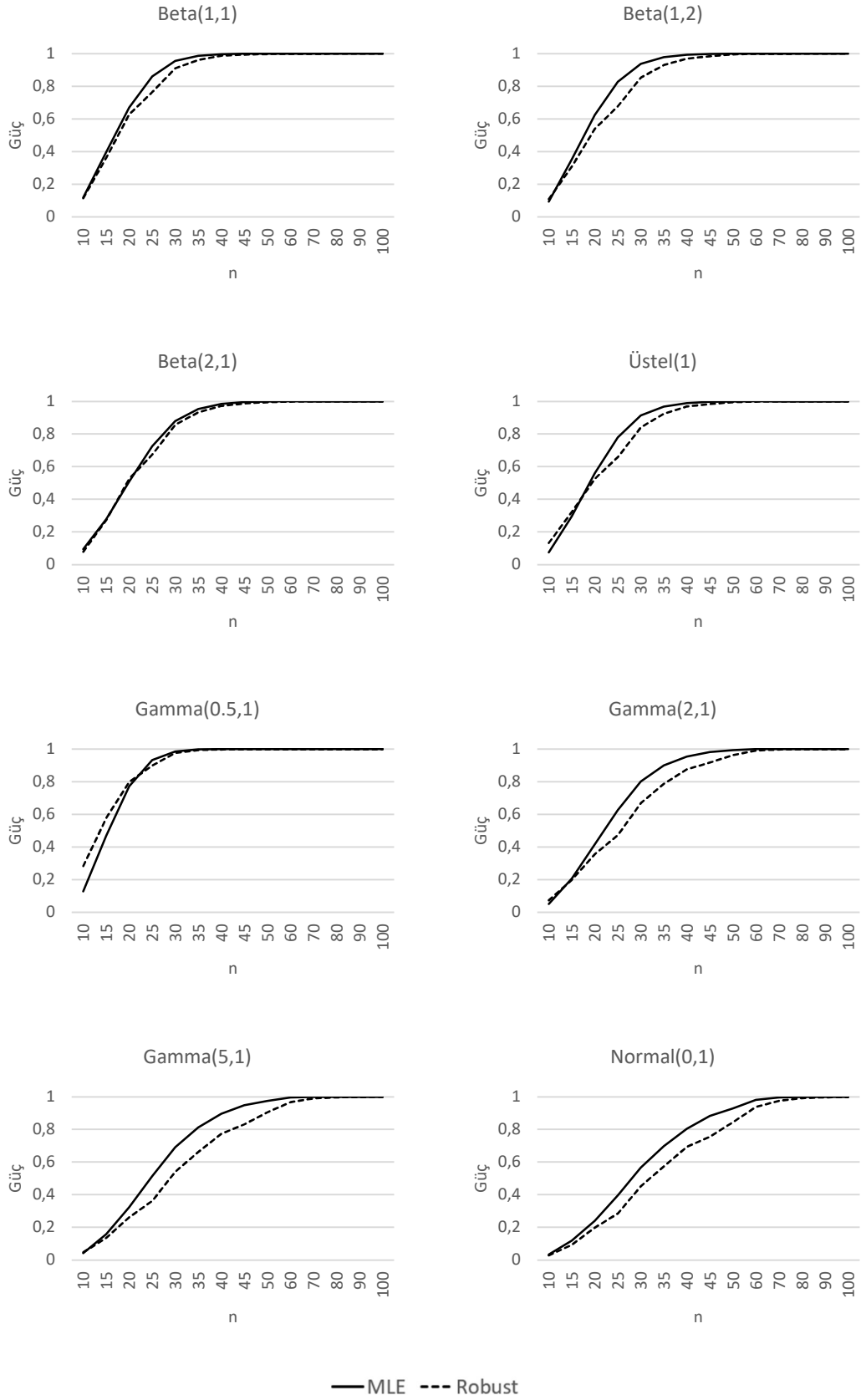


**Şekil 5.4.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen AD Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

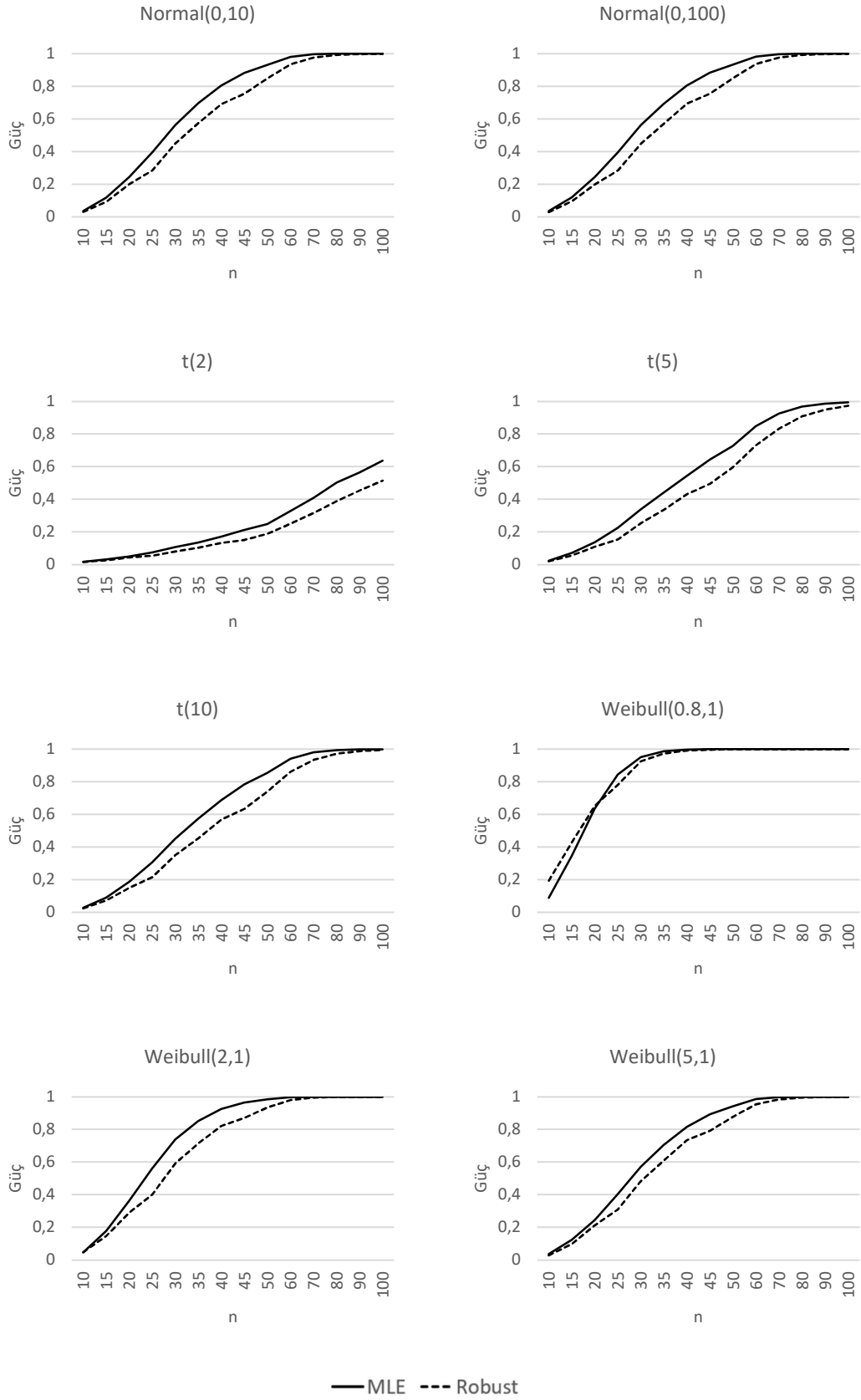
**Tablo 5.2.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen AD Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,23086	-0,03247	3	0,00061
<b>Beta(1,2)</b>	-0,13716	-0,02426	4	0,00085
<b>Beta(2,1)</b>	-0,13903	-0,02440	4	0,00085
<b>Üstel(1)</b>	0,00168	0,05118	77	0,03028
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,00511	0,12595	36	0,01427
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,04716	-0,00753	6	0,00171
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,15806	-0,04980	1	0,00024
<b>Normal(0,1)</b>	-0,28947	-0,11025	1	0,00024
<b>Normal(0,10)</b>	-0,28894	-0,10992	1	0,00024
<b>Normal(0,100)</b>	-0,28868	-0,11075	1	0,00024
<b>t(2)</b>	-0,07874	-0,01710	1	0,00024
<b>t(5)</b>	-0,25283	-0,06887	1	0,00024
<b>t(10)</b>	-0,28521	-0,10209	1	0,00024
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,00571	0,10410	55	0,00592
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,20340	-0,06009	1	0,00024
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,26805	-0,09663	1	0,00024

Simülasyon bulguları, AD testinde de parametre tahmin yöntemlerinin test gücü üzerinde istatistiksel olarak anlamlı farklılıklar yarattığını ortaya koymuştur. Özellikle normal ve t dağılımları gibi simetrik ve ağır kuyruklu alternatif dağılımlar karşısında, robust tahmin yöntemleri MLE'ye kıyasla testin gücünü belirgin biçimde artırmıştır; bu durum p-değerlerinin istisnasız olarak çok düşük çıkmasıyla da desteklenmiştir. Ayrıca Weibull ve Gamma gibi çarpık dağılımlar karşısında da robust yöntemlerin çoğunlukla üstünlük sağladığı, yalnızca Üstel(1) ve Weibull(0.8,1) gibi bazı dağılımlarda MLE'nin bir miktar avantajlı olduğu gözlenmiştir. Beta dağılımlarında ise robust tahminin yine anlamlı düzeyde daha güçlü sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Genel olarak değerlendirildiğinde, AD testinde robust tahmin yöntemlerinin kullanımı, Cauchy dağılımına benzer özellikler gösteren alternatif hipotezlere karşı testin ayırt ediciliğini artırmakta ve bu nedenle, uyum iyiliği değerlendirmelerinde güçlü bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.



**Şekil 5.5.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen MAD Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

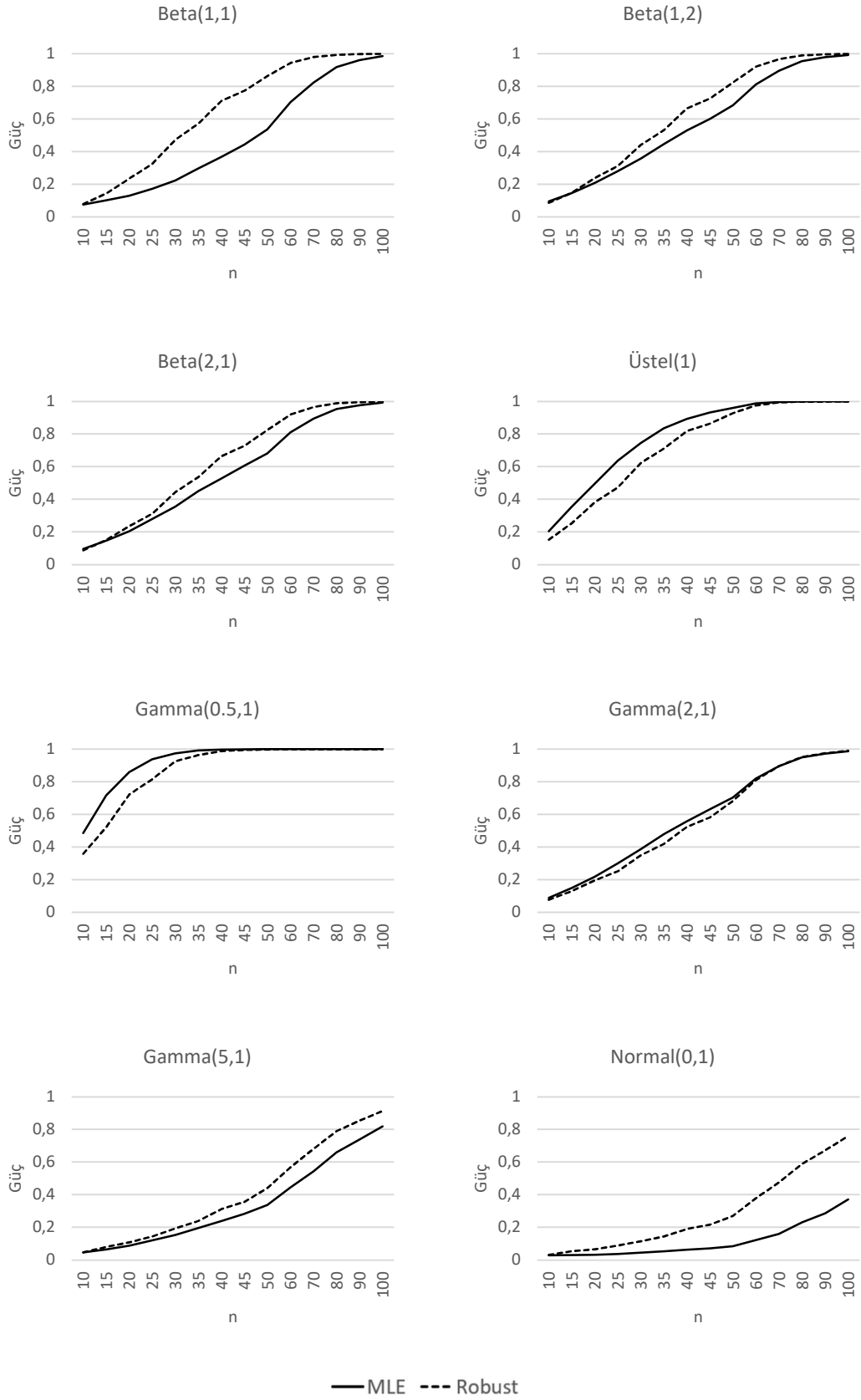


**Şekil 5.6.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen MAD Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

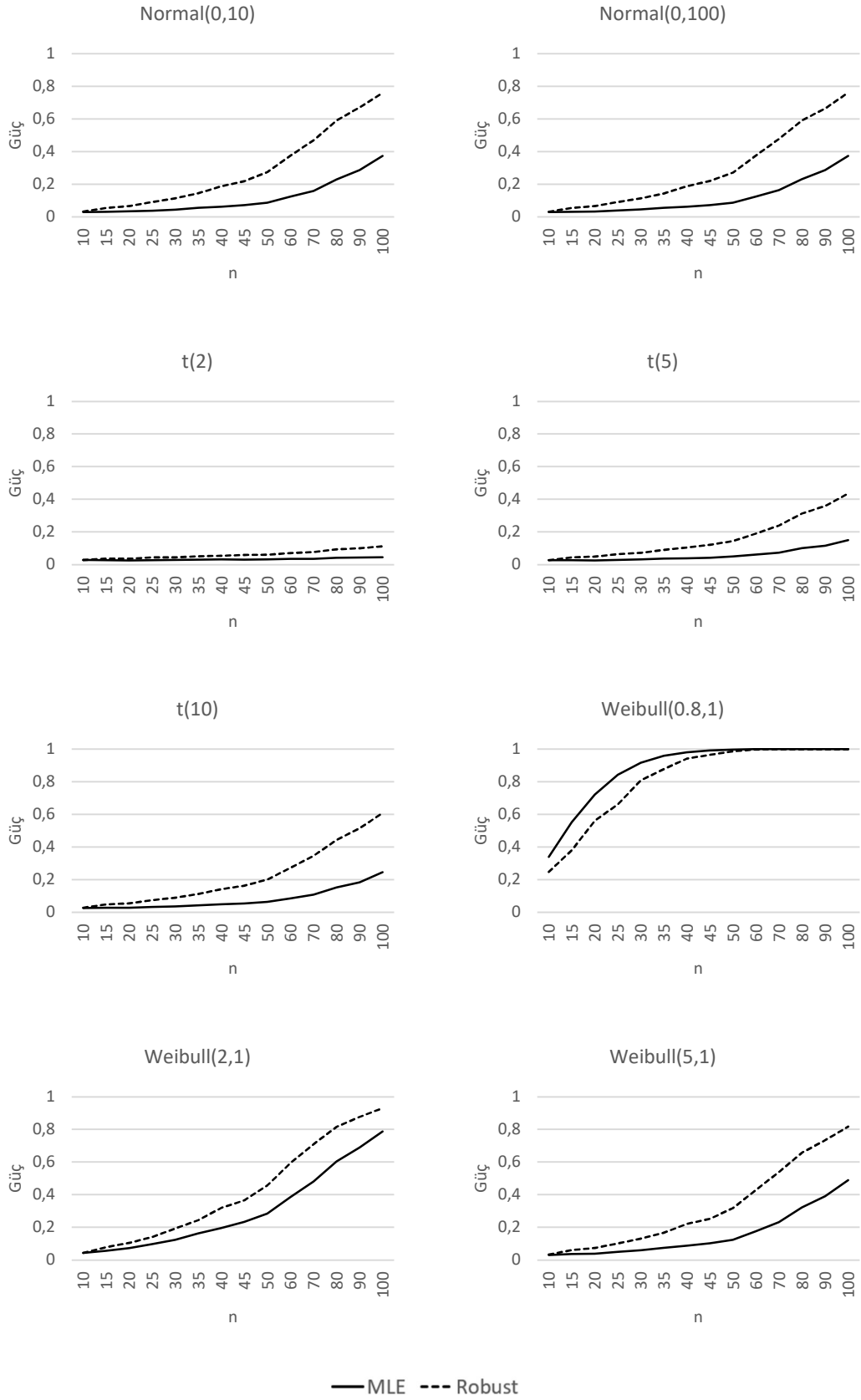
**Tablo 5.3.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen MAD Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,00266	0,04829	66	0,00386
<b>Beta(1,2)</b>	0,00409	0,07664	61	0,01448
<b>Beta(2,1)</b>	0,00019	0,02076	58	0,02938
<b>Üstel(1)</b>	-0,01242	0,05735	51	0,11972
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,07746	0,01583	22	1,00000
<b>Gamma(2,1)</b>	0,00705	0,09056	73	0,00859
<b>Gamma(5,1)</b>	0,01363	0,09503	101	0,00085
<b>Normal(0,1)</b>	0,02191	0,08467	105	0,00012
<b>Normal(0,10)</b>	0,02236	0,08478	105	0,00012
<b>Normal(0,100)</b>	0,02228	0,08592	105	0,00012
<b>t(2)</b>	0,02632	0,07768	105	0,00012
<b>t(5)</b>	0,04367	0,10379	105	0,00012
<b>t(10)</b>	0,02811	0,09877	105	0,00012
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,05056	0,02583	30	0,83846
<b>Weibull(2,1)</b>	0,01462	0,09262	102	0,00061
<b>Weibull(5,1)</b>	0,01617	0,06556	105	0,00012

Simülasyon sonuçları, MAD testinin istatistiksel gücünün de kullanılan parametre tahmin yöntemiyle anlamlı şekilde farklılaştığını ortaya koymaktadır. Özellikle normal ve t dağılımları gibi simetrik ve ağır kuyruklu alternatifler karşısında, robust tahmin yöntemleri ile elde edilen test güçlerinin MLE'ye kıyasla anlamlı düzeyde daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Bu durum, MAD testinin uç değerler ve dağılımın merkezi yapısındaki sapmalara karşı duyarlılığını artırmakta; robust yöntemlerin bu tür sapmalara karşı daha dirençli olması sayesinde testin ayırt ediciliği belirgin biçimde yükselmektedir. Beta ve Gamma gibi çarpık yapılu dağılımlar için de robust yöntem lehine sonuçlar elde edilmiş; yalnızca Weibull(0.8,1) ve Üstel(1) gibi bazı dağılımlarda yöntemler arasında anlamlı bir fark gözlenmemiştir. Bu bulgular, MAD testinin özellikle Cauchy gibi ağır kuyruklu dağılımlarla çalışılırken, robust parametre tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında daha güvenilir ve güçlü sonuçlar verdiğini; dolayısıyla, uyum iyiliği testlerinde yöntem seçiminin test performansı açısından kritik bir faktör olduğunu göstermektedir.



**Şekil 5.7.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen CVM Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

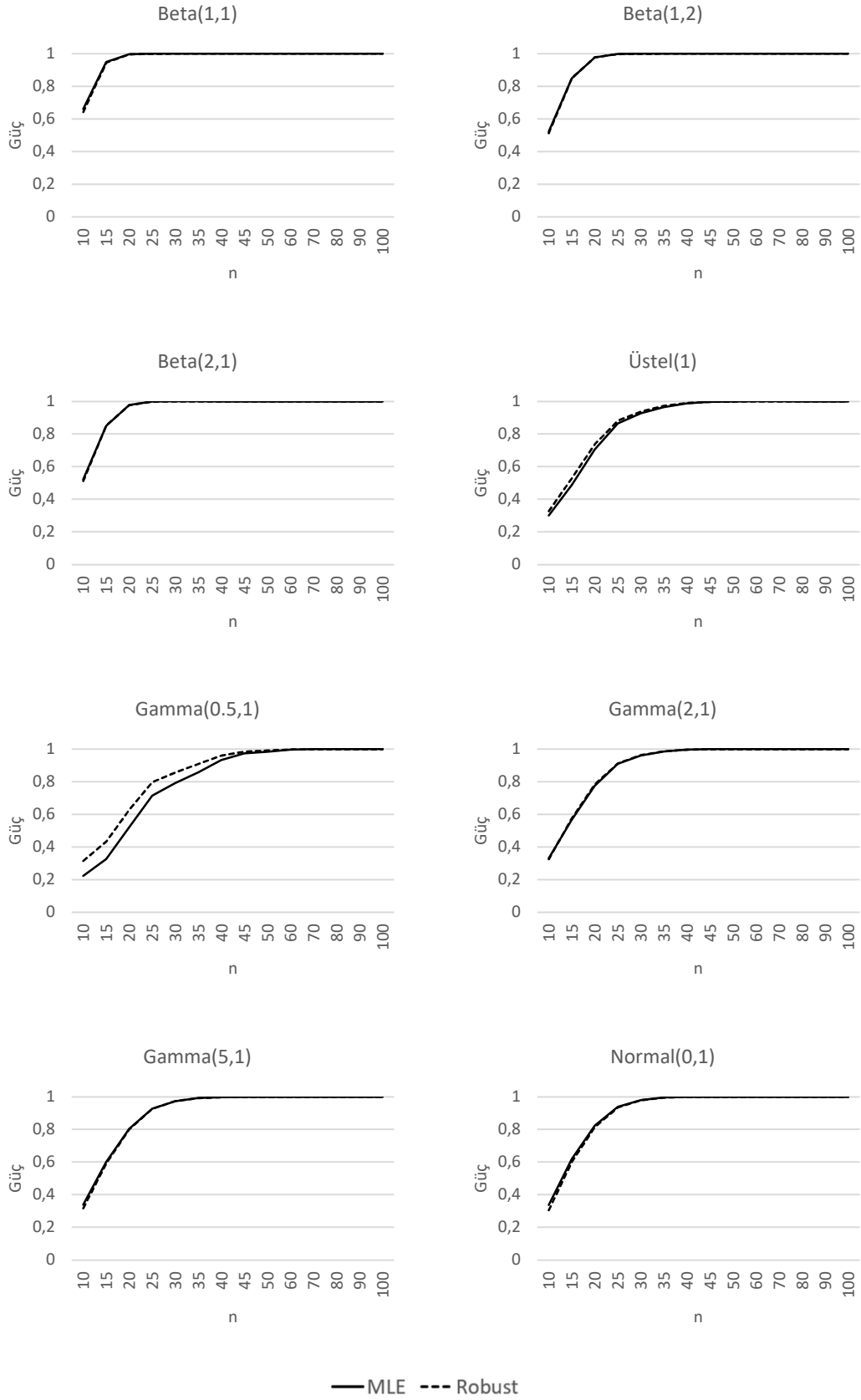


**Şekil 5.8.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen CVM Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

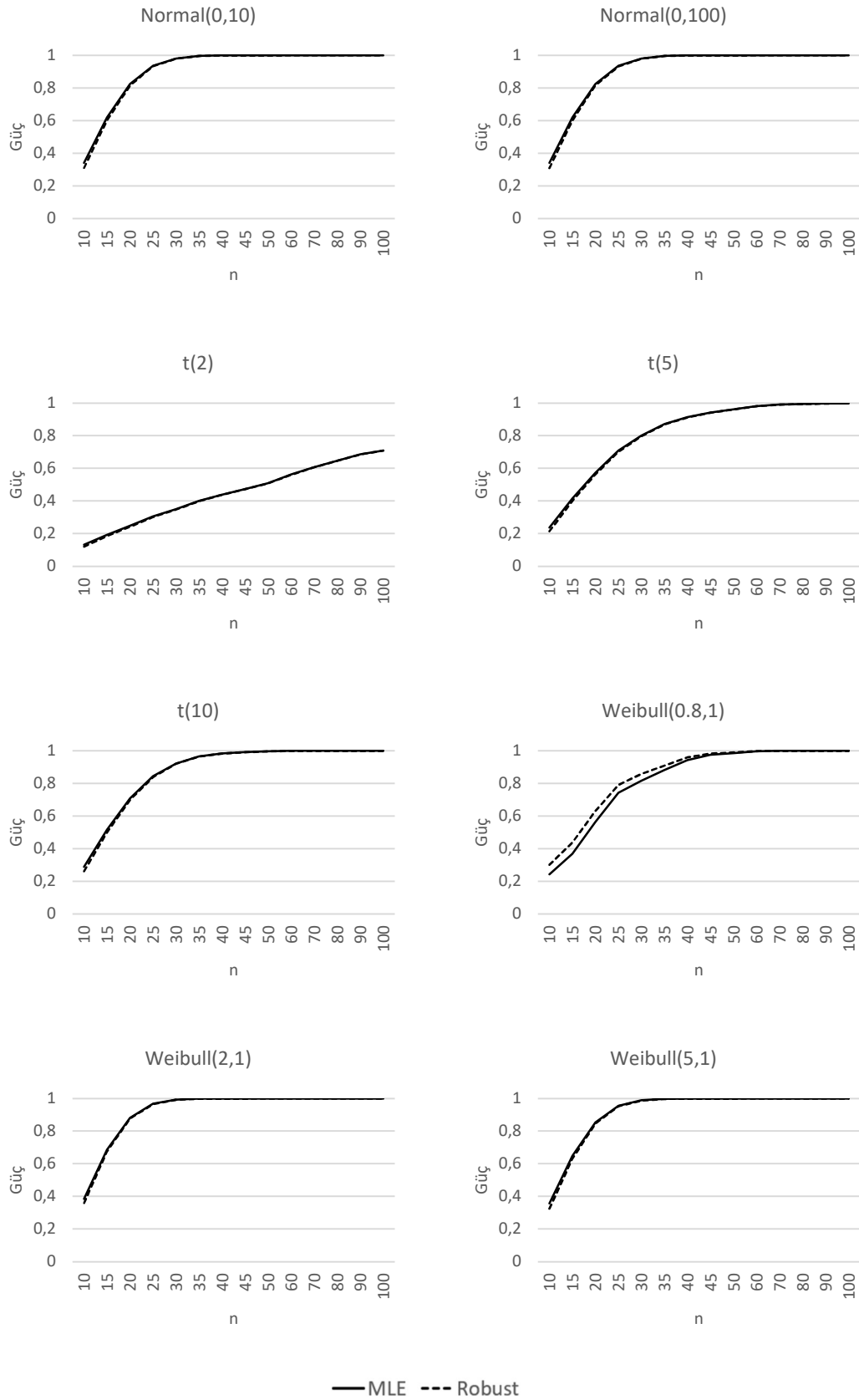
**Tablo 5.4.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen CVM Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,24639	-0,08342	0	0,00012
<b>Beta(1,2)</b>	-0,09141	-0,02713	3	0,00061
<b>Beta(2,1)</b>	-0,09148	-0,02785	3	0,00061
<b>Üstel(1)</b>	0,02617	0,09602	105	0,00012
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,00425	0,12030	66	0,00386
<b>Gamma(2,1)</b>	0,00756	0,03376	95	0,00525
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,10252	-0,04283	1	0,00024
<b>Normal(0,1)</b>	-0,25665	-0,07643	0	0,00012
<b>Normal(0,10)</b>	-0,25450	-0,07570	0	0,00012
<b>Normal(0,100)</b>	-0,25404	-0,07590	0	0,00012
<b>t(2)</b>	-0,04083	-0,01709	1	0,00024
<b>t(5)</b>	-0,15639	-0,04426	0	0,00012
<b>t(10)</b>	-0,21322	-0,05771	0	0,00012
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,01312	0,10639	91	0,00166
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,17113	-0,07205	0	0,00012
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,23947	-0,07965	0	0,00012

Simülasyon bulguları, CVM testinin de gücünün parametre tahmin yöntemi tercihine bağlı olarak anlamlı ölçüde değiştiğini göstermektedir. Özellikle normal ve t dağılımları gibi simetrik ve ağır kuyruklu alternatifler karşısında robust tahmin yöntemleri, MLE'ye kıyasla testin istatistiksel gücünü belirgin biçimde artırmış ve bu fark güven aralıklarına ve oldukça düşük p-değerlerine yansımıştır. Bununla birlikte, Beta(1,1), Beta(1,2), Beta(2,1) ve Weibull(2,1), Weibull(5,1) gibi bazı çarpık dağılımlar için de robust yöntemlerin anlamlı üstünlüğü gözlenmiştir. Sadece Üstel(1), Gamma(0.5,1), Gamma(2,1) ve Weibull(0.8,1) gibi dağılımlarda MLE yönteminin test gücünü daha yüksek verdiği durumlar ortaya çıkmış; ancak bu avantajın istatistiksel anlamlılığı çoğu durumda sınırlı kalmıştır. Genel olarak değerlendirildiğinde, CVM testinin güçlü bir uyum iyiliği testi olarak, özellikle Cauchy dağılımına benzer özellikler taşıyan dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleri ile kullanıldığında daha güvenilir sonuçlar verdiği söylenebilir.



**Şekil 5.9.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_1$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

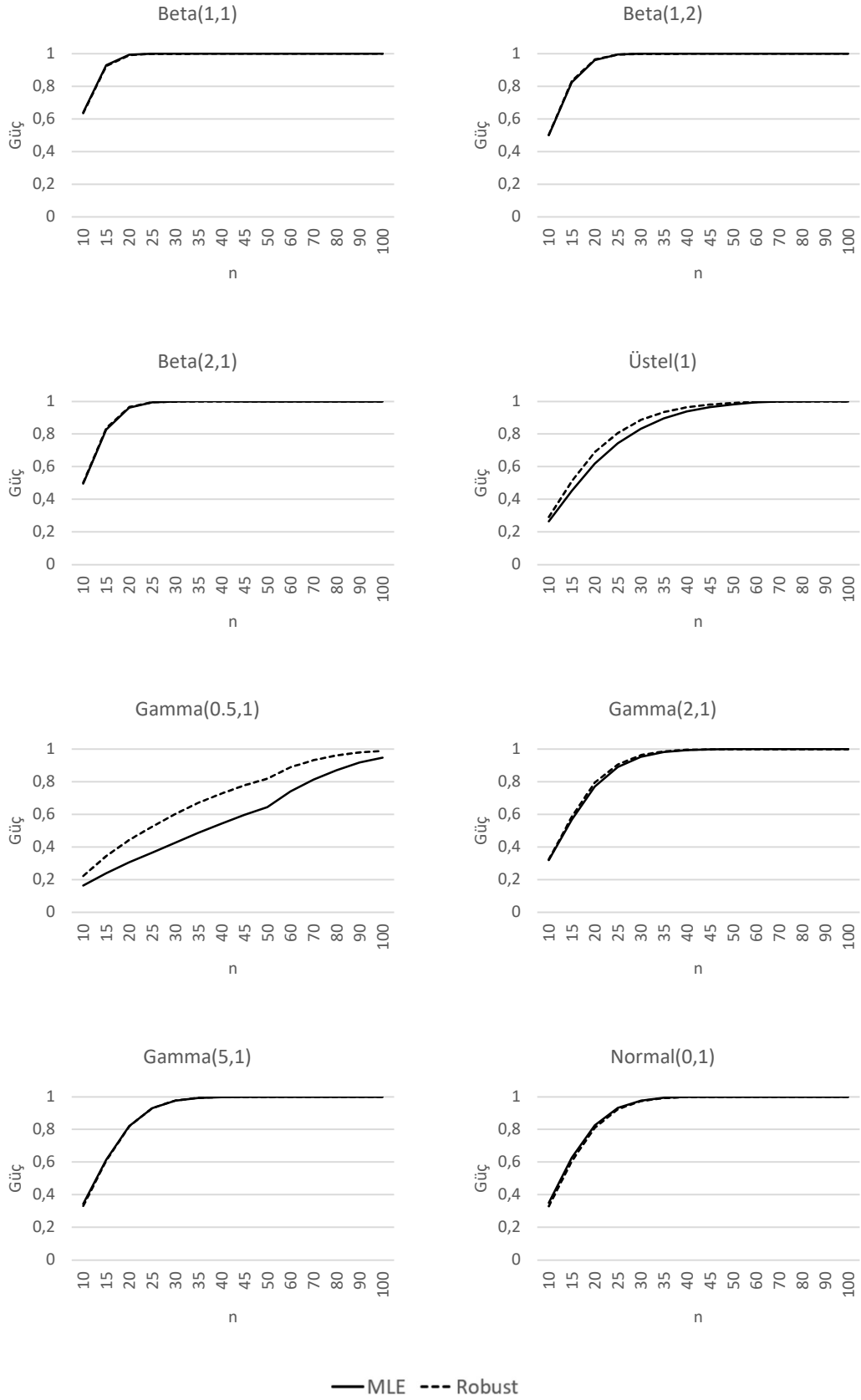


**Şekil 5.10.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_1$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

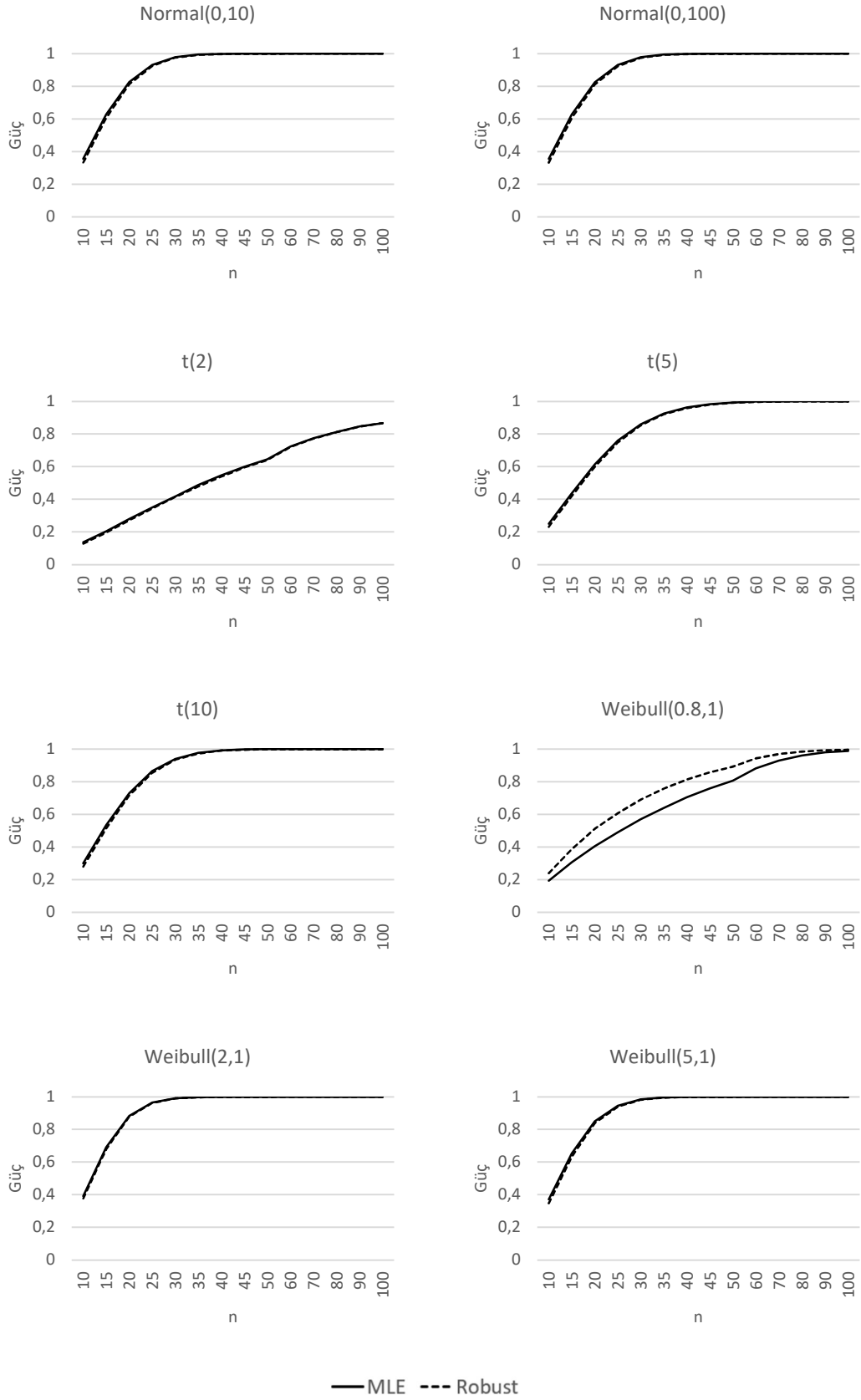
**Tablo 5.5.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_1$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,00004	0,01879	9	0,20124
<b>Beta(1,2)</b>	-0,00267	0,00983	4	0,85513
<b>Beta(2,1)</b>	-0,00158	0,00478	8	1,00000
<b>Üstel(1)</b>	-0,02690	-0,00171	0	0,00592
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,07226	-0,00638	0	0,00166
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,00607	0,00168	7	0,07556
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,00014	0,01088	29	0,14148
<b>Normal(0,1)</b>	0,00013	0,01735	35	0,02086
<b>Normal(0,10)</b>	0,00010	0,02279	27	0,03461
<b>Normal(0,100)</b>	0,00004	0,01743	34,5	0,02488
<b>t(2)</b>	0,00031	0,00342	100	0,00122
<b>t(5)</b>	0,00003	0,00846	79	0,02110
<b>t(10)</b>	0,00014	0,01396	44	0,01285
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,04931	-0,00633	0	0,00253
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,00001	0,01716	25	0,07593
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00037	0,01886	21	0,03603

Simülasyon bulguları,  $D_1$  testinin gücünün diğer uyum iyiliği testlerine kıyasla parametre tahmin yöntemine daha az duyarlı olduğunu göstermektedir. MLE ve robust tahmin yöntemleri arasındaki fark çoğu dağılımda istatistiksel olarak anlamlı değildir; özellikle Beta, Gamma ve Weibull(2,1) gibi dağılımlarda farklar ihmal edilebilir düzeydedir. Ancak, ağır kuyruklu normal ve t dağılımları ile Üstel(1) ve Weibull(0.8,1) gibi uç değer duyarlılığı yüksek dağılımlarda robust yöntemlerin test gücünü bir miktar artırdığı gözlenmiştir. Bu sonuçlar,  $D_1$  testinin genel olarak istikrarlı bir yapıya sahip olduğunu ve robust tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında Cauchy dağılımına karşı daha güçlü sonuçlar verebileceğini göstermektedir.



**Şekil 5.11.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_2$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

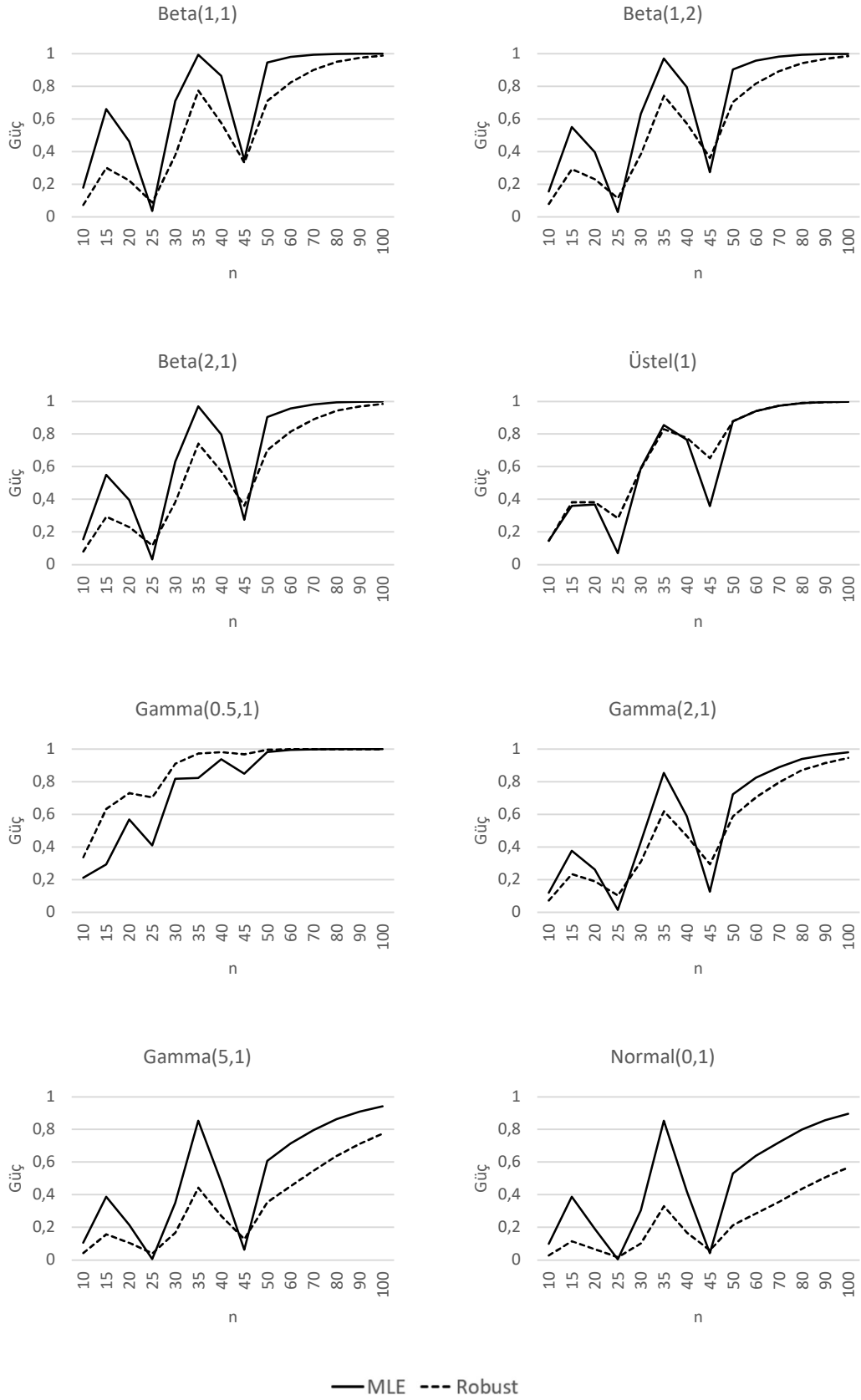


**Şekil 5.12.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_2$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

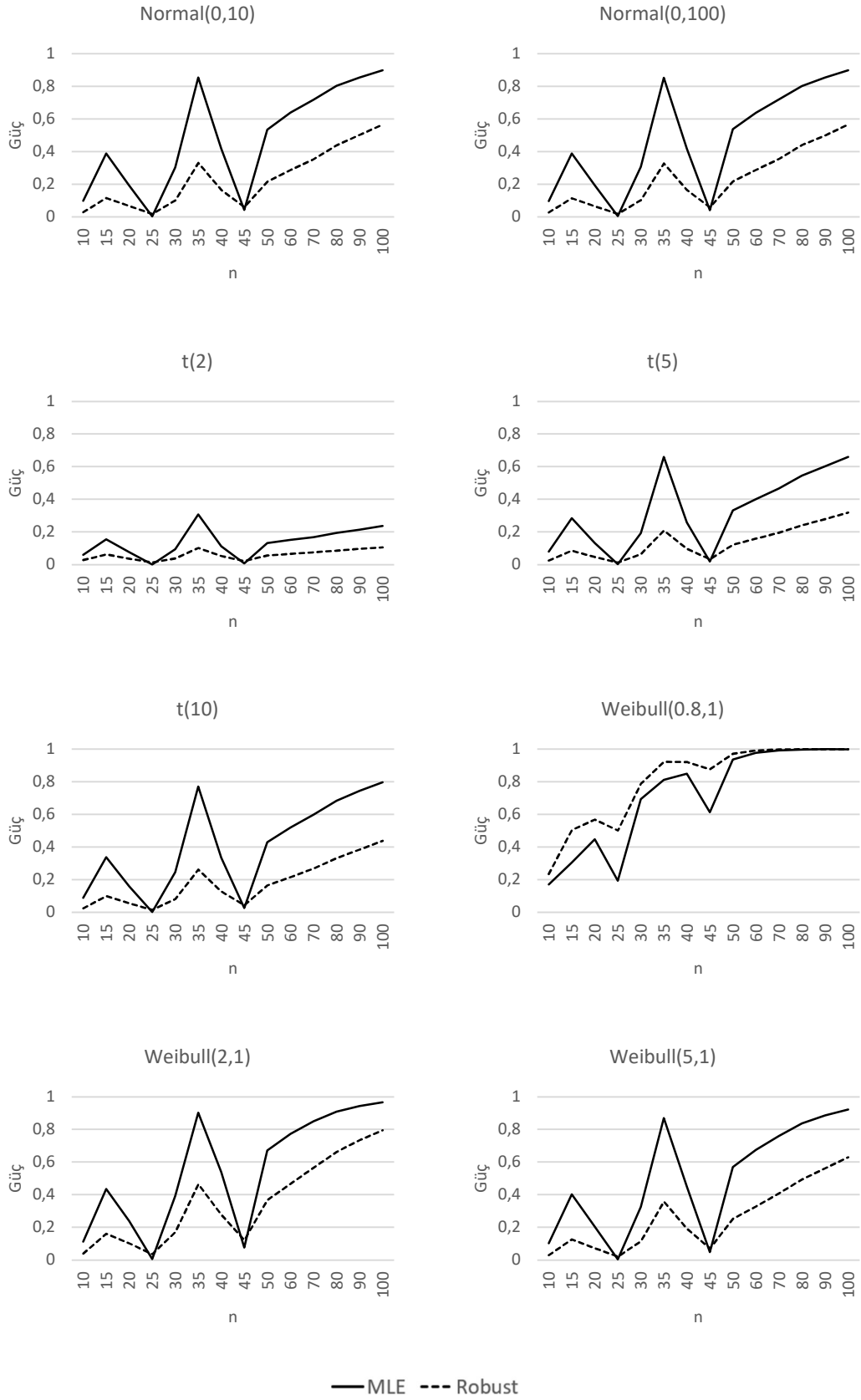
**Tablo 5.6.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_2$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,00010	0,00373	15	0,05906
<b>Beta(1,2)</b>	-0,00691	-0,00014	0	0,03603
<b>Beta(2,1)</b>	-0,00772	-0,00013	0	0,03603
<b>Üstel(1)</b>	-0,04150	-0,00846	0	0,00012
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,16683	-0,10079	0	0,00012
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,01526	-0,00121	0	0,00592
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,00082	0,00582	17	0,55362
<b>Normal(0,1)</b>	0,00035	0,01650	36	0,01427
<b>Normal(0,10)</b>	0,00026	0,01354	45	0,00915
<b>Normal(0,100)</b>	0,00021	0,01491	45	0,00915
<b>t(2)</b>	0,00165	0,00555	104	0,00024
<b>t(5)</b>	0,00040	0,00898	87	0,00417
<b>t(10)</b>	0,00113	0,01419	45	0,00915
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,10348	-0,05005	0	0,00012
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,00002	0,01151	26	0,05191
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00024	0,01617	36	0,01427

$D_2$  testi için elde edilen simülasyon sonuçları, parametre tahmin yöntemleri arasında bazı dağılımlarda anlamlı farklılıklar olduğunu göstermektedir. Özellikle Gamma(0.5,1), Üstel(1) ve Weibull(0.8,1) gibi dağılımlar karşısında robust yöntemler, MLE'ye kıyasla anlamlı derecede daha yüksek test gücü sağlamıştır. Beta(1,2) ve Beta(2,1) gibi bazı dağılımlarda da benzer şekilde robust yöntemler avantajlıdır. Buna karşın normal ve t dağılımları ile çoğu diğer alternatifte yöntemler arası fark istatistiksel olarak anlamlı olsa da görece düşüktür. Bu bulgular,  $D_2$  testinin özellikle uç değer duyarlılığı yüksek durumlarda robust yöntemlerle birlikte daha etkili çalıştığını ve Cauchy dağılımına karşı yapılan uyum iyiliği analizlerinde güçlü bir araç olabileceğini göstermektedir.



**Şekil 5.13.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_3$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

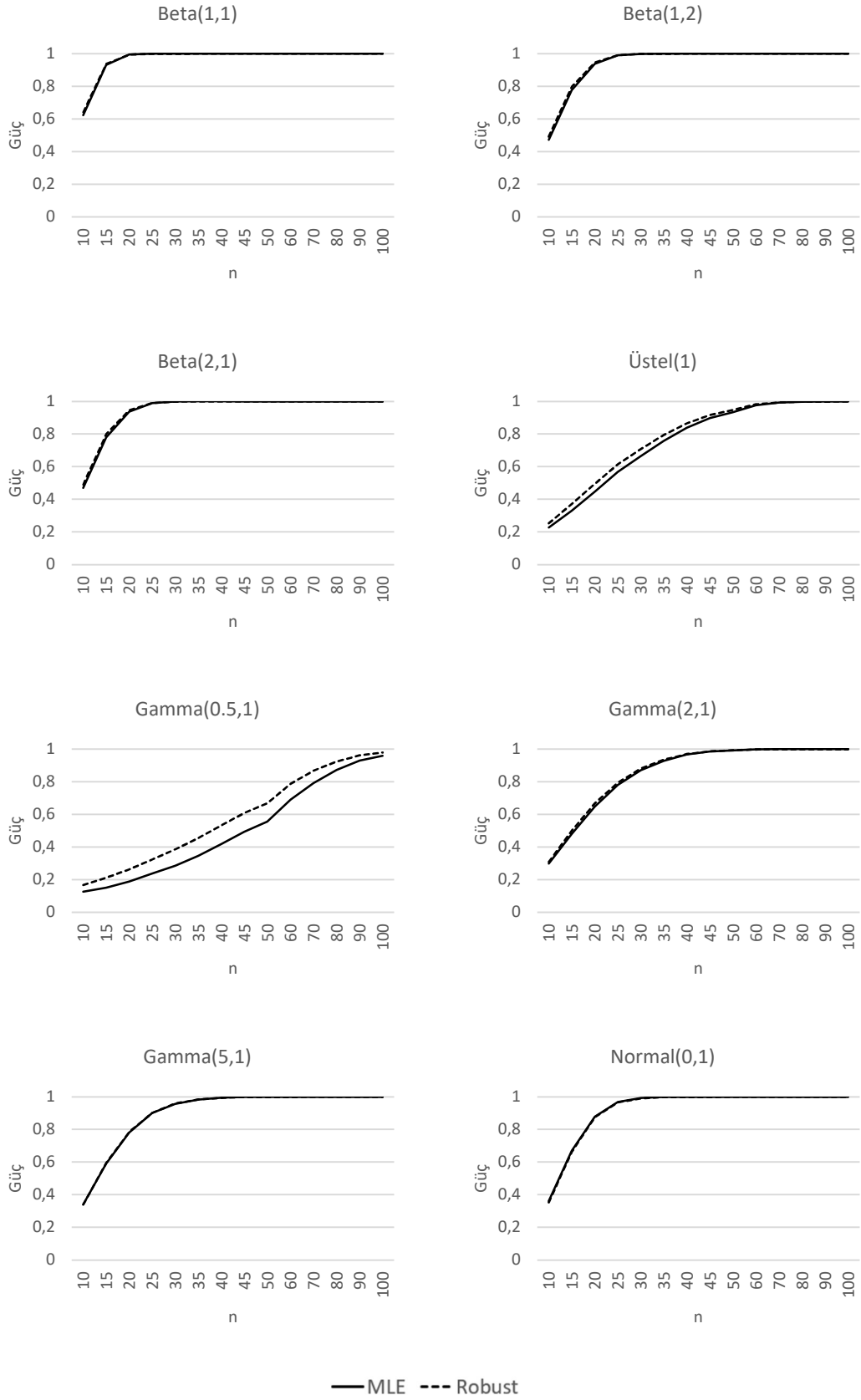


**Şekil 5.14.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_3$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

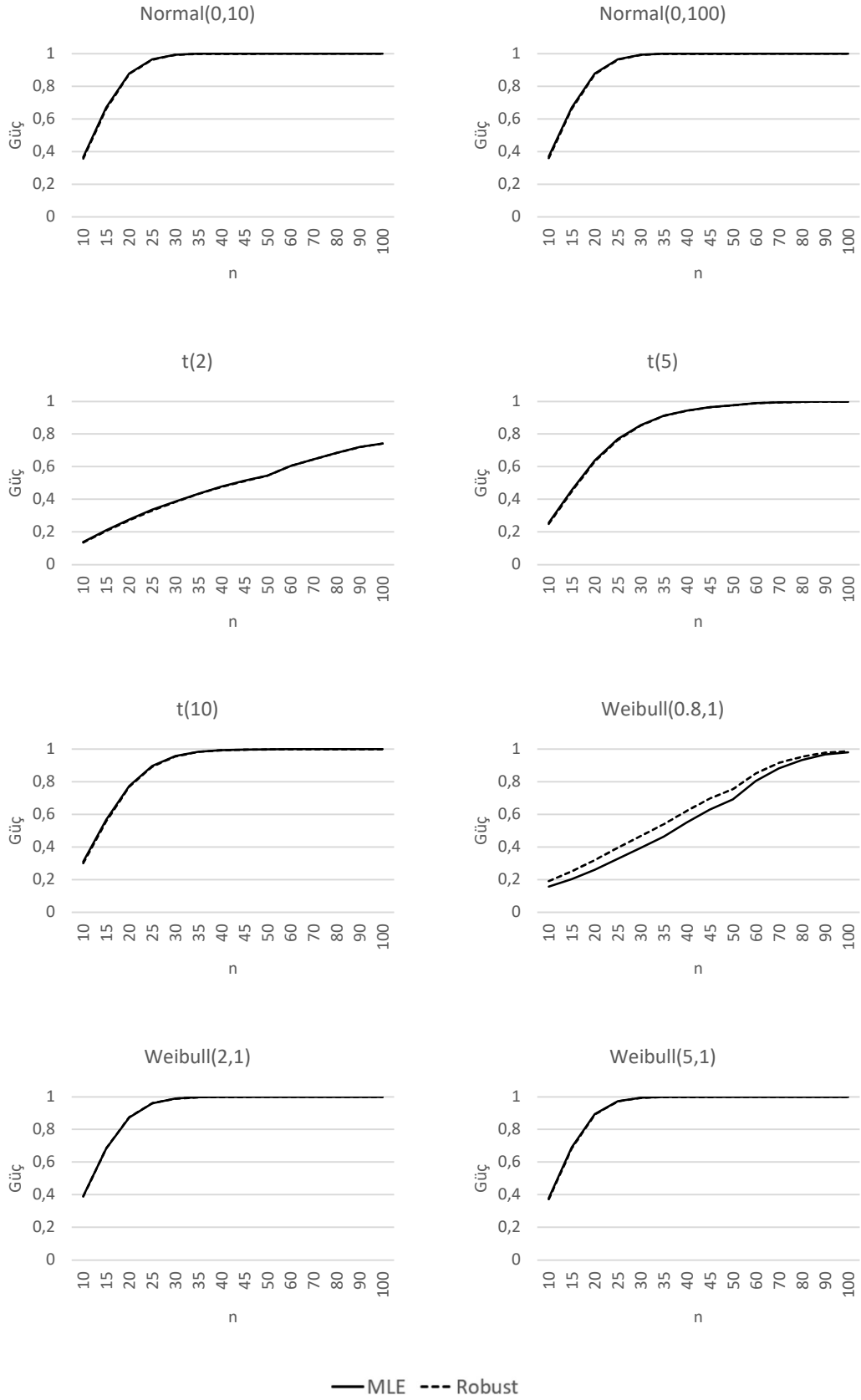
**Tablo 5.7.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_3$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,05812	0,22961	100	0,00122
<b>Beta(1,2)</b>	0,04017	0,18368	94	0,00671
<b>Beta(2,1)</b>	0,04051	0,18470	94	0,00671
<b>Üstel(1)</b>	-0,10728	0,00020	22	0,05798
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,17064	-0,02224	0	0,00166
<b>Gamma(2,1)</b>	0,01672	0,12104	86	0,03528
<b>Gamma(5,1)</b>	0,09501	0,23824	101	0,00085
<b>Normal(0,1)</b>	0,16179	0,34607	102	0,00061
<b>Normal(0,10)</b>	0,16007	0,34838	102	0,00061
<b>Normal(0,100)</b>	0,16100	0,34654	102	0,00061
<b>t(2)</b>	0,04070	0,10490	102	0,00061
<b>t(5)</b>	0,11320	0,27440	102	0,00061
<b>t(10)</b>	0,14282	0,32930	102	0,00061
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,15572	-0,03265	0	0,00012
<b>Weibull(2,1)</b>	0,12132	0,27913	102	0,00061
<b>Weibull(5,1)</b>	0,15006	0,32973	102	0,00061

$D_3$  testine ilişkin simülasyon sonuçları, robust parametre tahmin yöntemlerinin hemen tüm alternatif dağılımlar karşısında MLE'ye kıyasla anlamlı ölçüde daha yüksek test gücü sağladığını göstermektedir. Özellikle normal, t ve Weibull(2,1) ile Weibull(5,1) gibi simetrik ya da ağır kuyruklu dağılımlarda elde edilen p-değerleri ve pozitif güven aralıkları, robust yöntemlerin belirgin üstünlüğünü ortaya koymaktadır. Ayrıca Beta ve Gamma dağılımlarında da bu yöntemlerin test performansını anlamlı şekilde artırdığı görülmektedir. Yalnızca Üstel(1) ve Gamma(0.5,1) gibi bazı dağılımlarda MLE ile robust yöntemler arasında anlamlı olmayan veya tersine zayıf farklar dikkat çekmektedir. Genel olarak değerlendirildiğinde,  $D_3$  testi robust tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında Cauchy dağılımına alternatif hipotezler karşısında oldukça güçlü ve ayırt edici bir performans sergilemektedir.



**Şekil 5.15.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_4$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

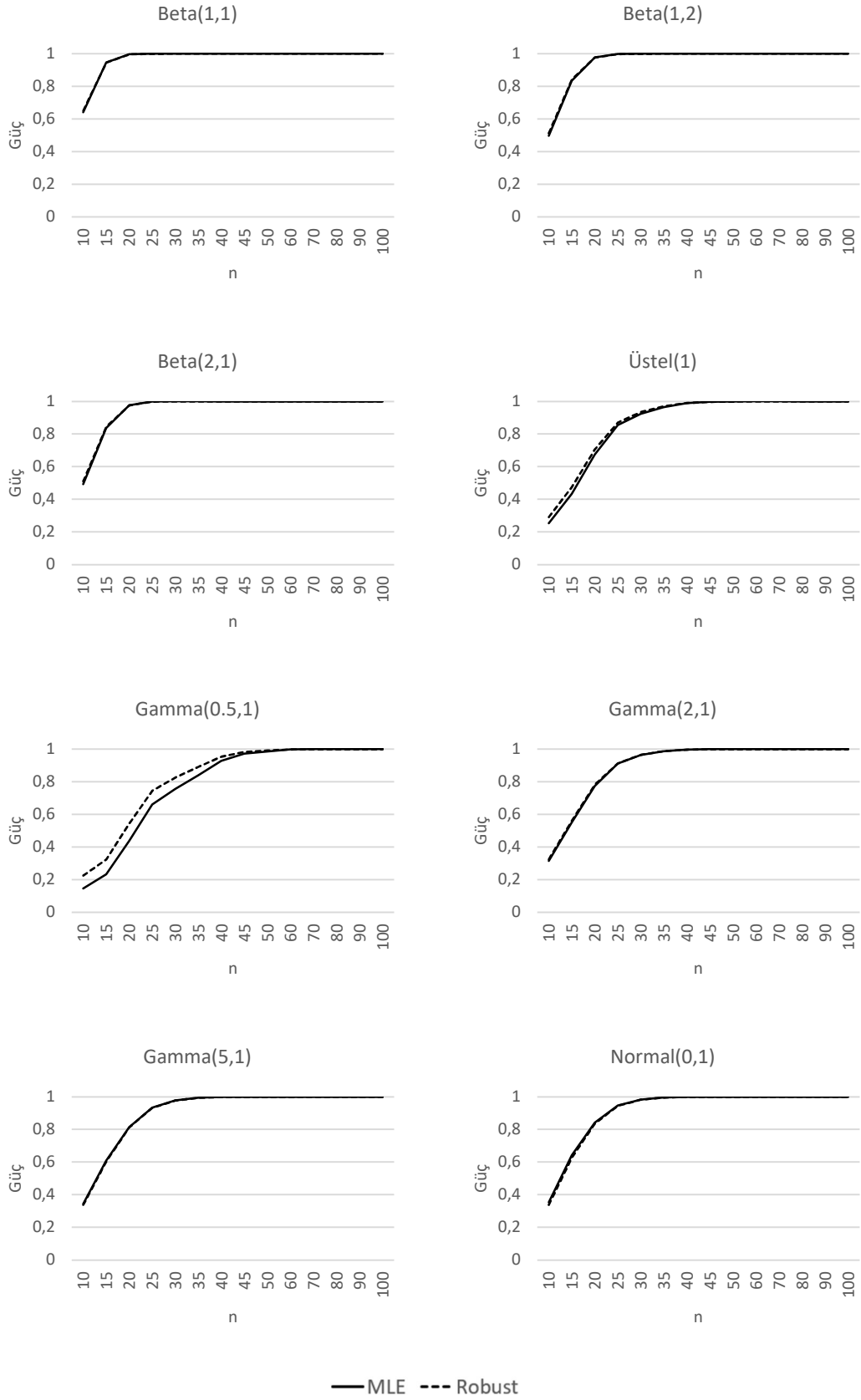


**Şekil 5.16.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_4$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

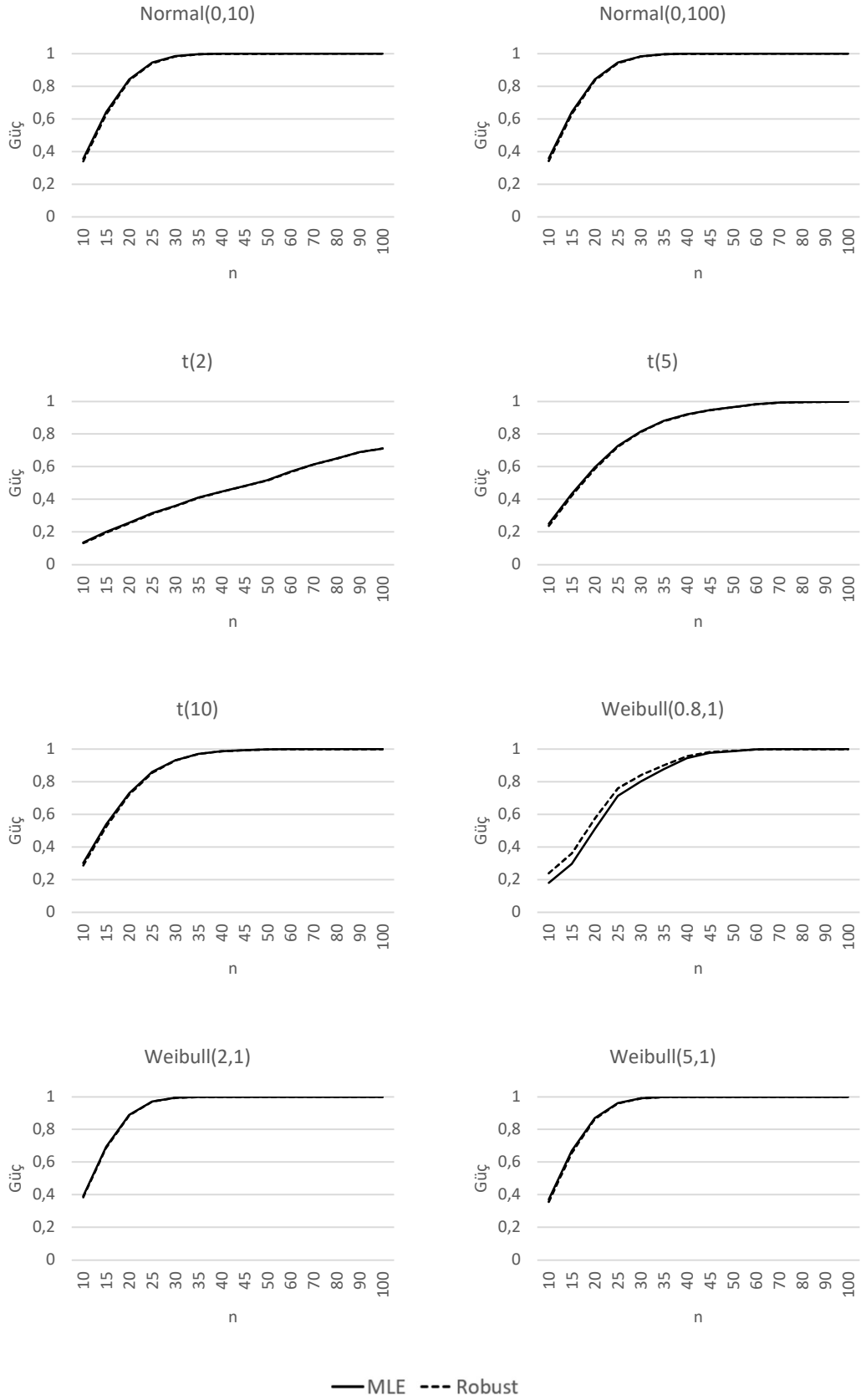
**Tablo 5.8.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_4$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,01004	-0,00007	0	0,05906
<b>Beta(1,2)</b>	-0,01945	-0,00044	0	0,03603
<b>Beta(2,1)</b>	-0,02052	-0,00001	0	0,02249
<b>Üstel(1)</b>	-0,03485	-0,01020	0	0,00012
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,10024	-0,05873	0	0,00012
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,01468	-0,00190	0	0,00386
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,00342	-0,00005	5	0,04401
<b>Normal(0,1)</b>	0,00001	0,00514	36	0,01415
<b>Normal(0,10)</b>	0,00001	0,00664	28	0,02249
<b>Normal(0,100)</b>	-0,00001	0,00823	27	0,03461
<b>t(2)</b>	0,00003	0,00209	85	0,04187
<b>t(5)</b>	0,00002	0,00394	74	0,05037
<b>t(10)</b>	0,00007	0,00549	42	0,02439
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,06636	-0,03530	0	0,00012
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,00236	0,00055	6	0,10733
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00011	0,00452	28	0,02225

$D_4$  testine ait simülasyon bulguları, çoğu alternatif dağılım için MLE ve robust parametre tahmin yöntemleri arasında istatistiksel olarak anlamlı güç farklarının bulunduğunu göstermektedir. Özellikle Gamma(0.5,1), Weibull(0.8,1) ve Üstel(1) gibi dağılımlarda robust yöntemlerin daha yüksek test gücü sağladığı açıkça görülmektedir. Beta ve Gamma dağılımlarında da robust yöntem lehine anlamlı farklar bulunurken, normal ve t dağılımlarında yöntemler arası farklar istatistiksel olarak anlamlı olmakla birlikte görece olarak düşüktür. Bu sonuçlar,  $D_4$  testinin uç değer ve çarpıklık içeren dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleriyle birlikte daha başarılı çalıştığını; ancak simetrik dağılımlar için her iki yöntemin de benzer güç seviyeleri üretebildiğini göstermektedir. Genel olarak  $D_4$  testi, tahmin yöntemi duyarlılığı açısından dikkatli değerlendirilmesi gereken bir test olarak öne çıkmaktadır.



Şekil 5.17. MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_5$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

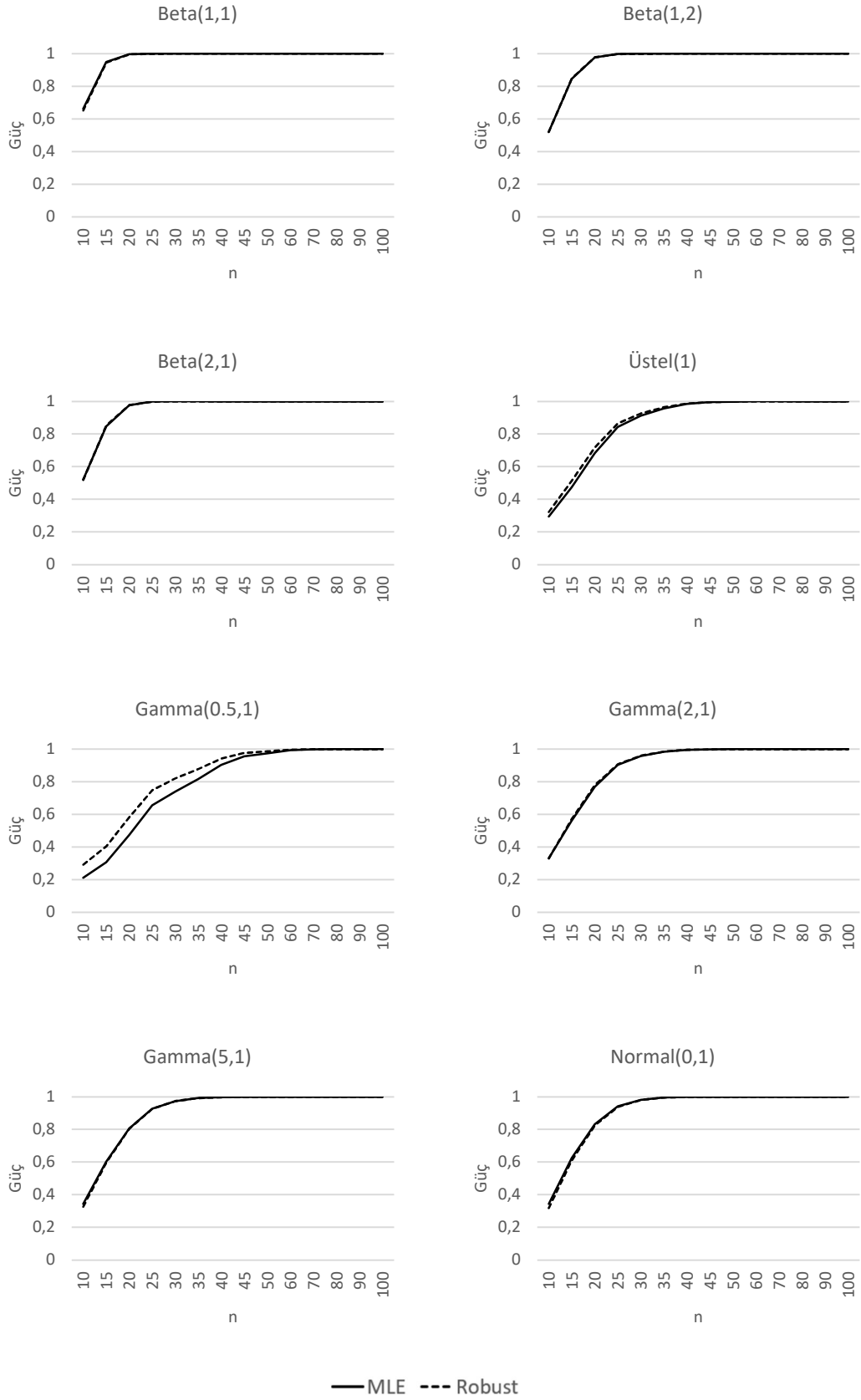


**Şekil 5.18.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_5$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

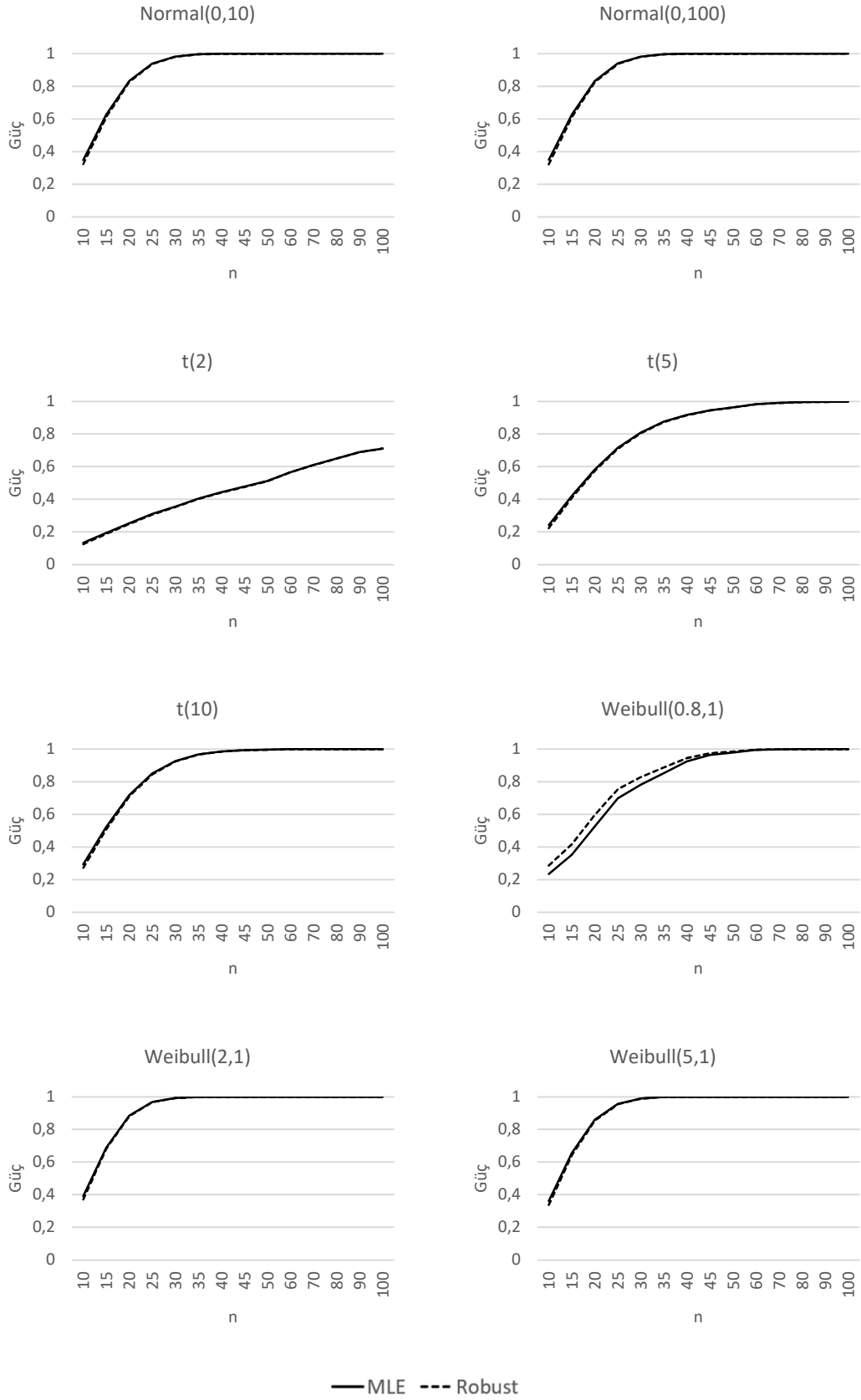
**Tablo 5.9.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_5$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,00992	0,00040	5	1,00000
<b>Beta(1,2)</b>	-0,01532	-0,00008	0	0,10035
<b>Beta(2,1)</b>	-0,01626	0,00006	1	0,20124
<b>Üstel(1)</b>	-0,02745	-0,00138	0	0,00592
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,06957	-0,00585	0	0,00166
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,00936	-0,00021	0	0,00915
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,00008	0,00279	35	0,15513
<b>Normal(0,1)</b>	0,00013	0,01435	27	0,03461
<b>Normal(0,10)</b>	0,00005	0,01023	35	0,02086
<b>Normal(0,100)</b>	0,00011	0,01091	36	0,01427
<b>t(2)</b>	0,00054	0,00290	100	0,00122
<b>t(5)</b>	0,00014	0,00593	97	0,00569
<b>t(10)</b>	0,00011	0,00756	55	0,00589
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,04584	-0,00498	0	0,00253
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,00006	0,00580	24	0,10832
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,00001	0,01331	26,5	0,04215

$D_5$  testine ilişkin simülasyon sonuçları, genel olarak MLE ve robust parametre tahmin yöntemleri arasında test gücü açısından belirgin farklar olmadığını; ancak bazı dağılımlarda robust yöntemlerin sınırlı da olsa üstünlük sağladığını göstermektedir. Özellikle Üstel(1), Gamma(0.5,1), Gamma(2,1) ve Weibull(0.8,1) gibi dağılımlar için p-değerleri anlamlı bulunmuş ve robust yöntemin test gücünü artırdığı gözlenmiştir. Buna karşın Beta ve Gamma(5,1) dağılımları gibi bazı durumlarda fark istatistiksel olarak anlamsızdır. Normal ve t dağılımları ile yapılan karşılaştırmalarda da farklar küçük olmakla birlikte robust yöntem lehine eğilim dikkat çekmektedir. Bu bulgular,  $D_5$  testinin tahmin yöntemi duyarlılığının sınırlı olmakla birlikte, uç değer içeren dağılımlarda robust yöntemlerle birlikte kullanımının test performansını artırabileceğini göstermektedir.



**Şekil 5.19.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen D6 Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

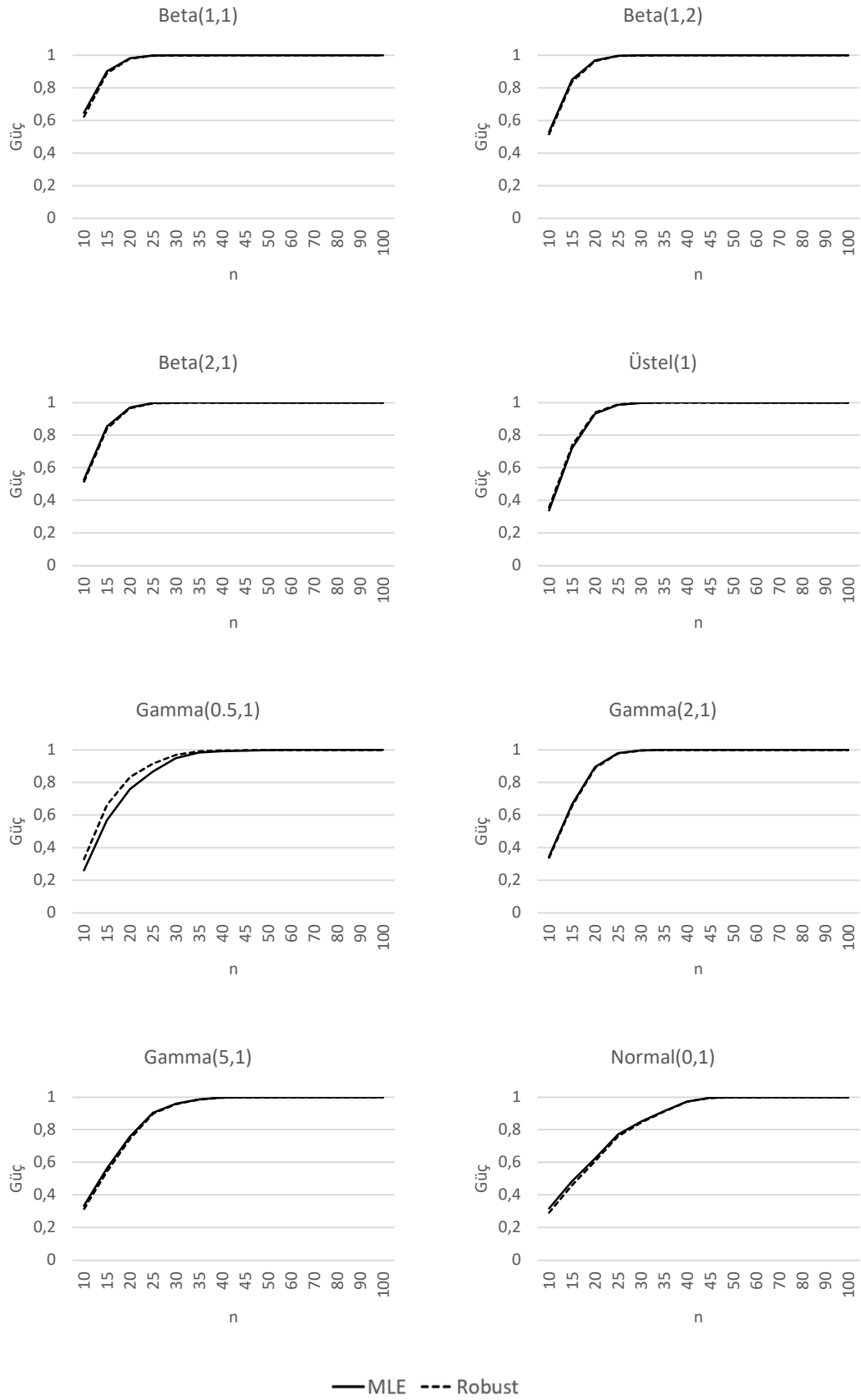


**Şekil 5.20.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_6$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

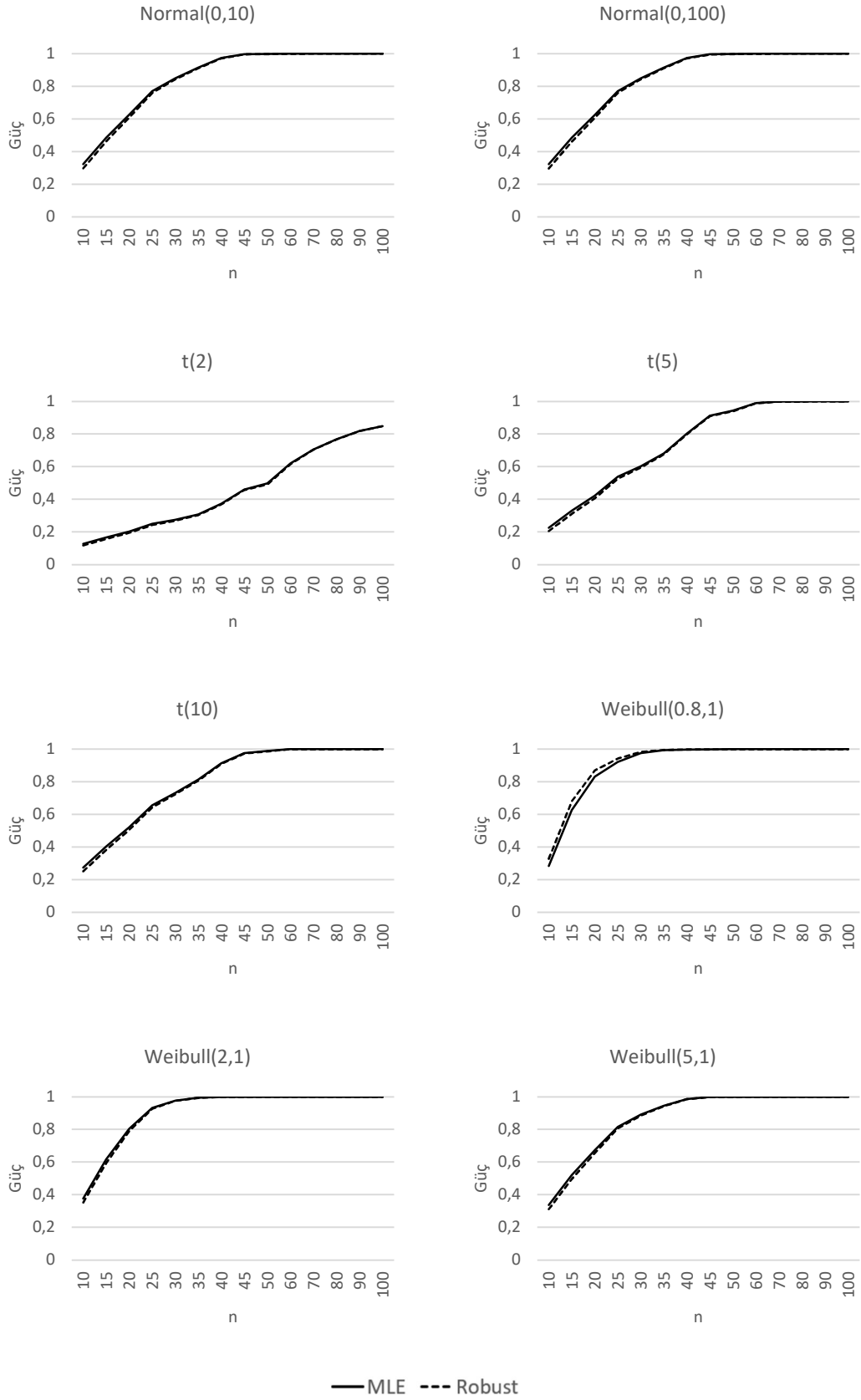
**Tablo 5.10.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_6$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,00006	0,01128	10	0,10035
<b>Beta(1,2)</b>	-0,00463	0,00178	3	0,58388
<b>Beta(2,1)</b>	-0,00267	0,00087	5	0,58964
<b>Üstel(1)</b>	-0,02822	-0,00225	0	0,00592
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,06934	-0,01009	0	0,00012
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,00736	-0,00007	4	0,03297
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,00023	0,00780	23,5	0,95272
<b>Normal(0,1)</b>	0,00004	0,01303	40	0,04401
<b>Normal(0,10)</b>	0,00007	0,01278	34	0,02997
<b>Normal(0,100)</b>	0,00009	0,01482	35	0,02086
<b>t(2)</b>	0,00046	0,00305	100	0,00122
<b>t(5)</b>	0,00011	0,00702	83	0,00969
<b>t(10)</b>	0,00014	0,01106	44	0,01285
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,05182	-0,00904	0	0,00253
<b>Weibull(2,1)</b>	0,00000	0,01065	18	0,14221
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00019	0,01313	28	0,02225

$D_6$  testine ait simülasyon bulguları, MLE ve robust tahmin yöntemleri arasında test gücü bakımından sınırlı düzeyde farklılıklar olduğunu göstermektedir. Gamma(0.5,1), Üstel(1) ve Weibull(0.8,1) gibi çarpıklık ve uç değer içeren dağılımlarda robust yöntemlerin anlamlı düzeyde daha yüksek test gücü sağladığı gözlenmiştir. Buna karşılık Beta ve Gamma(5,1) gibi birçok dağılımda yöntemler arası fark istatistiksel olarak anlamlı değildir. Normal ve t dağılımları gibi simetrik yapıları alternatiflerde ise farklar küçük olmakla birlikte robust yöntemler lehine hafif bir üstünlük dikkat çekmektedir. Bu bağlamda,  $D_6$  testinin genel olarak tahmin yöntemi değişimlerinden düşük düzeyde etkilendiği, ancak uç değer duyarlılığı yüksek senaryolarda robust tahminlerle birlikte kullanımının test gücünü artırabileceği söylenebilir.



**Şekil 5.21.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_7$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

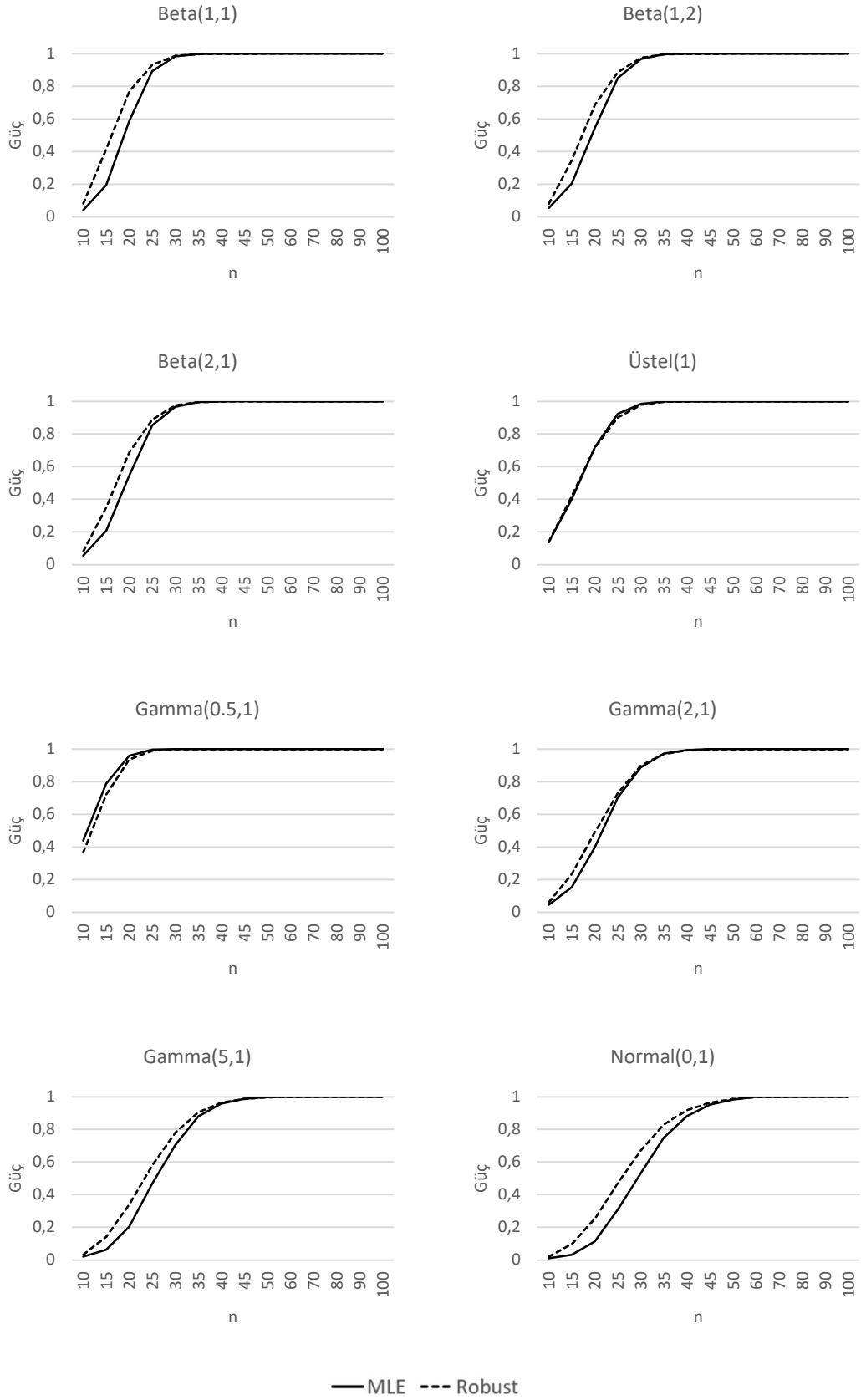


**Şekil 5.22.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_7$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

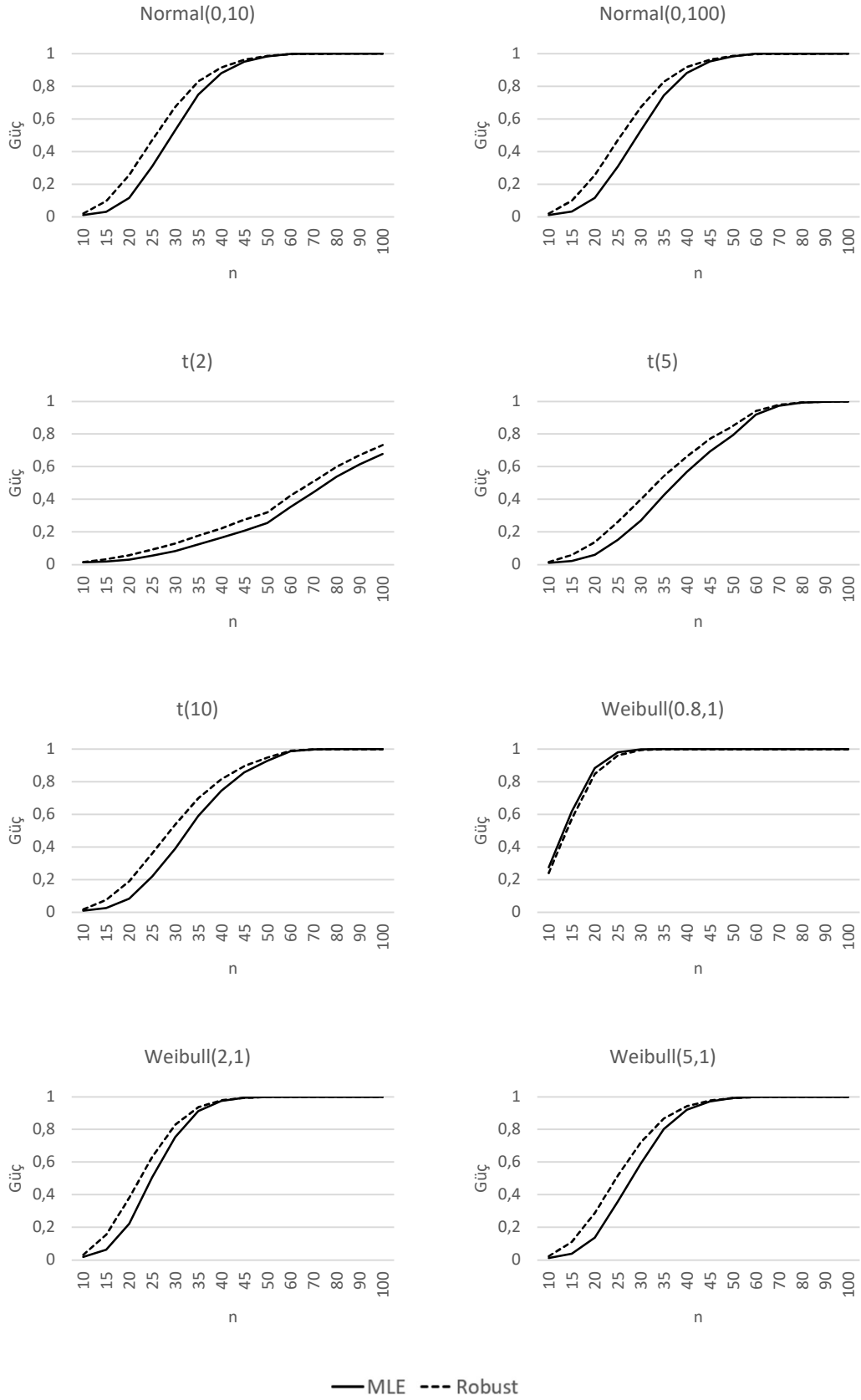
**Tablo 5.11.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $D_7$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	0,00028	0,02329	10	0,10035
<b>Beta(1,2)</b>	0,00033	0,01179	15	0,05906
<b>Beta(2,1)</b>	0,00039	0,01175	15	0,05906
<b>Üstel(1)</b>	-0,01833	-0,00001	0	0,02249
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,04765	-0,00127	0	0,00166
<b>Gamma(2,1)</b>	0,00098	0,00761	15	0,05906
<b>Gamma(5,1)</b>	0,00007	0,01576	34	0,02997
<b>Normal(0,1)</b>	0,00055	0,01580	55	0,00592
<b>Normal(0,10)</b>	0,00109	0,01763	45	0,00915
<b>Normal(0,100)</b>	0,00056	0,01596	55	0,00592
<b>t(2)</b>	0,00195	0,00577	102	0,00061
<b>t(5)</b>	0,00217	0,01148	77	0,00326
<b>t(10)</b>	0,00168	0,01530	55	0,00592
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,02954	-0,00059	0	0,00386
<b>Weibull(2,1)</b>	0,00019	0,01841	36	0,01415
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00041	0,01695	45	0,00915

$D_7$  testine ilişkin simülasyon sonuçları, robust parametre tahmin yöntemlerinin birçok dağılımda MLE'ye kıyasla hafif fakat istatistiksel olarak anlamlı bir güç üstünlüğü sağladığını göstermektedir. Özellikle normal, t ve Weibull(2,1) gibi simetrik ya da ağır kuyruklu alternatif dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleriyle elde edilen test güçleri anlamlı düzeyde daha yüksek bulunmuştur. Üstel(1), Gamma(0.5,1) ve Weibull(0.8,1) gibi çarpık ya da uç değer duyarlılığı yüksek dağılımlarda ise farklar robust yöntem lehine olsa da büyüklükleri daha sınırlıdır. Beta dağılımlarında da benzer şekilde küçük ancak tutarlı avantajlar dikkat çekmektedir. Bu sonuçlar,  $D_7$  testinin robust tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında uyum iyiliği açısından daha güvenilir ve güçlü sonuçlar verebildiğini, özellikle Cauchy benzeri dağılımlara karşı yapılan değerlendirmelerde tercih edilmesi gereken bir yapı sunduğunu göstermektedir.



**Şekil 5.23.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_A$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

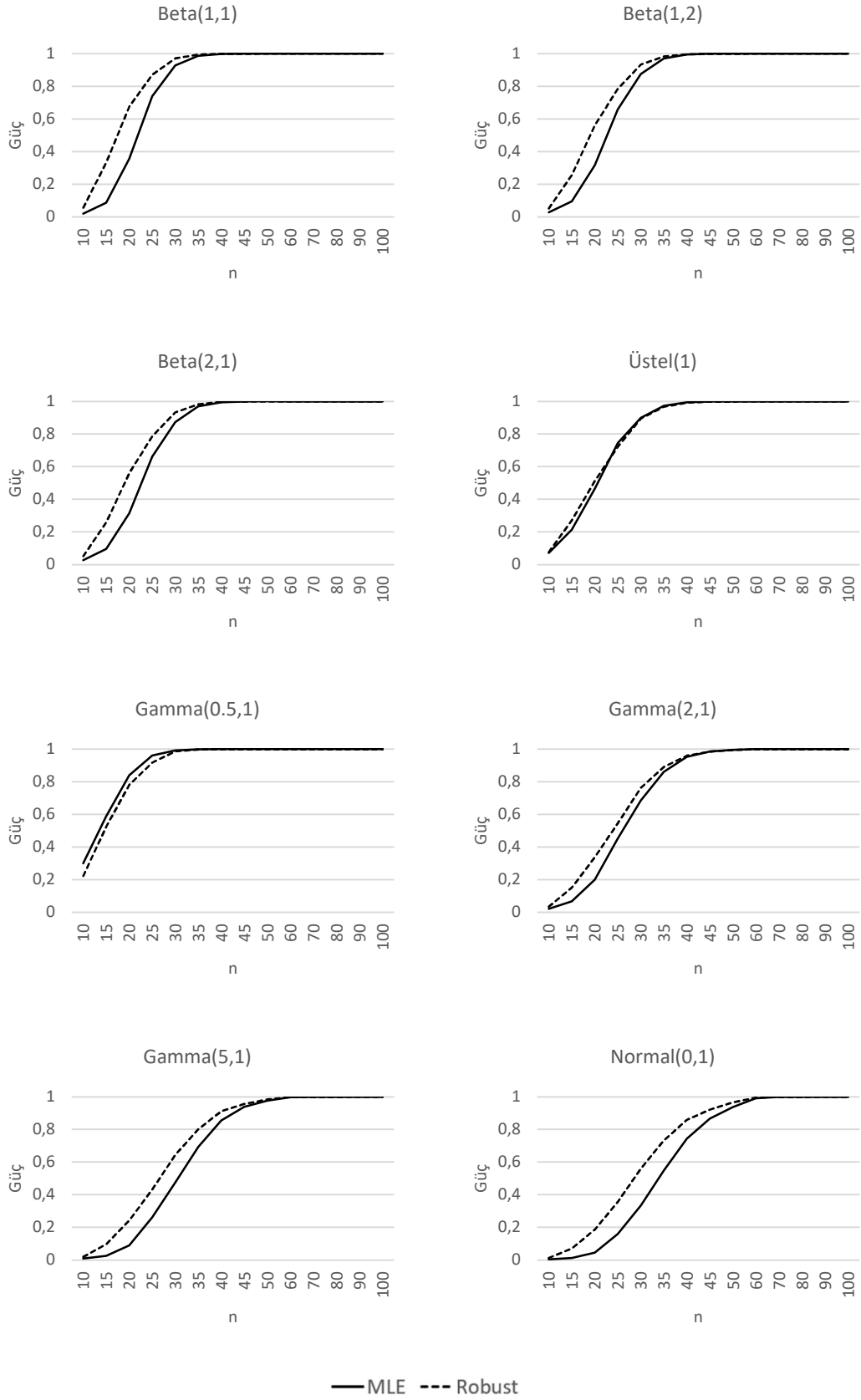


**Şekil 5.24.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_A$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

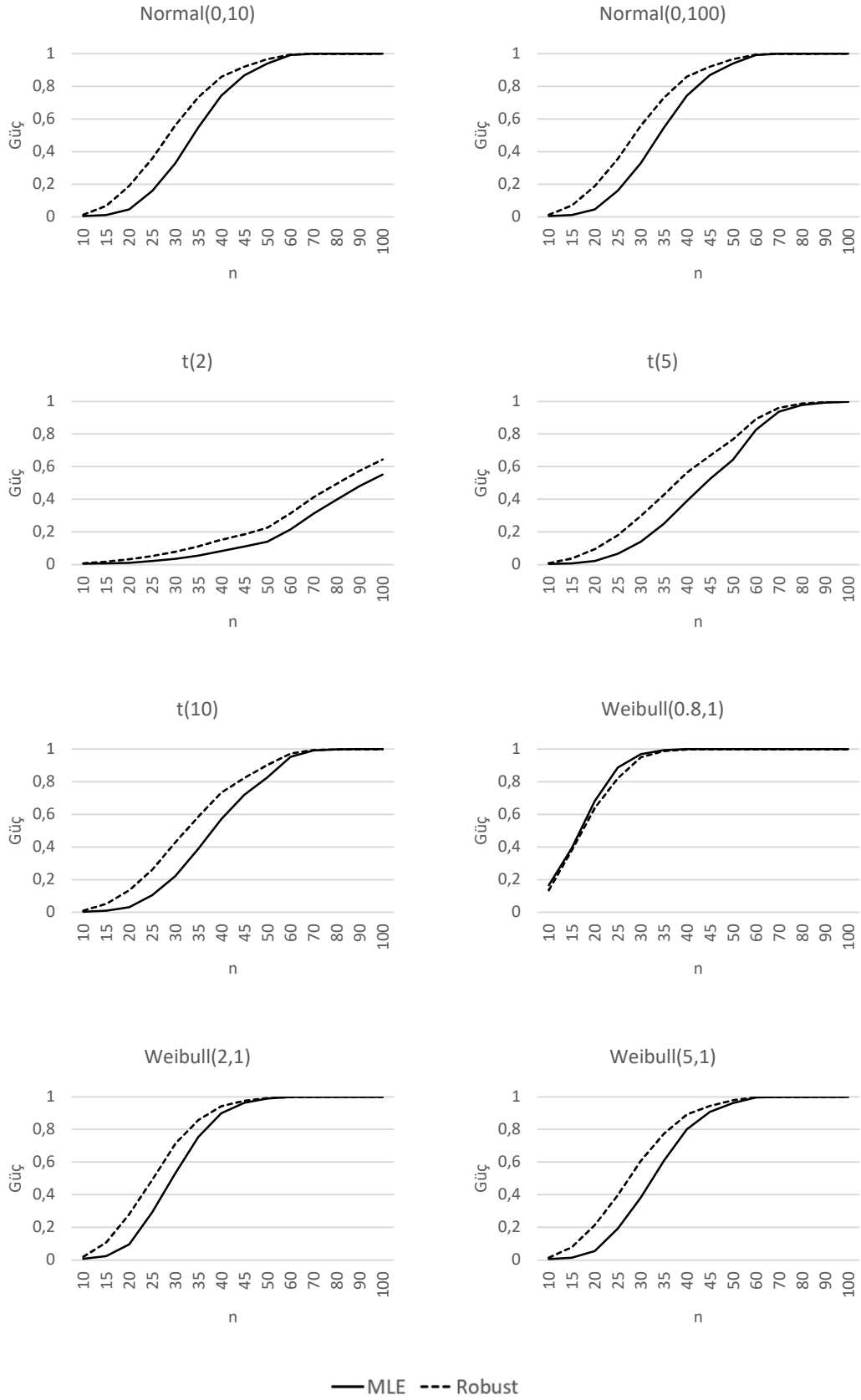
**Tablo 5.12.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_A$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,13144	-0,00008	3	0,04206
<b>Beta(1,2)</b>	-0,09012	-0,00003	2	0,02997
<b>Beta(2,1)</b>	-0,08561	0,00001	7	0,07556
<b>Üstel(1)</b>	-0,01025	0,01175	26	0,29362
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,00544	0,06545	15	0,05906
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,05392	0,00069	10	0,15513
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,09657	-0,00596	1	0,01285
<b>Normal(0,1)</b>	-0,10380	-0,00680	1,5	0,00582
<b>Normal(0,10)</b>	-0,11437	-0,00928	1	0,00805
<b>Normal(0,100)</b>	-0,09086	-0,00606	6	0,01079
<b>t(2)</b>	-0,06204	-0,03577	0	0,00012
<b>t(5)</b>	-0,08386	-0,01887	0	0,00012
<b>t(10)</b>	-0,09080	-0,01060	1	0,00211
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,00014	0,03828	28	0,02249
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,09373	-0,00215	6	0,03231
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,10290	-0,00501	2	0,00669

$Z_A$  testine ait simülasyon bulguları, MLE ve robust tahmin yöntemleri arasında istatistiksel olarak anlamlı güç farklarının özellikle ağır kuyruklu ve simetrik dağılımlar karşısında ortaya çıktığını göstermektedir. Normal ve t dağılımlarında robust tahmin yöntemleri anlamlı şekilde daha yüksek test gücü sağlamış, bu durum negatif test istatistikleri ve düşük p-değerleriyle desteklenmiştir. Benzer şekilde Beta(1,1), Beta(1,2), Gamma(5,1), Weibull(2,1) ve Weibull(5,1) gibi çarpık dağılımlar karşısında da robust yöntemlerin avantajlı olduğu görülmüştür. Öte yandan Üstel(1), Gamma(0.5,1) ve Weibull(0.8,1) gibi bazı dağılımlarda yöntemler arası fark ya istatistiksel olarak anlamlı değildir ya da zayıftır. Genel olarak  $Z_A$  testinin, robust parametre tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında uyum iyiliği açısından daha güvenilir sonuçlar verdiği ve Cauchy benzeri özellikler taşıyan dağılımlara karşı daha etkili olduğu söylenebilir.



**Şekil 5.25.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_C$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

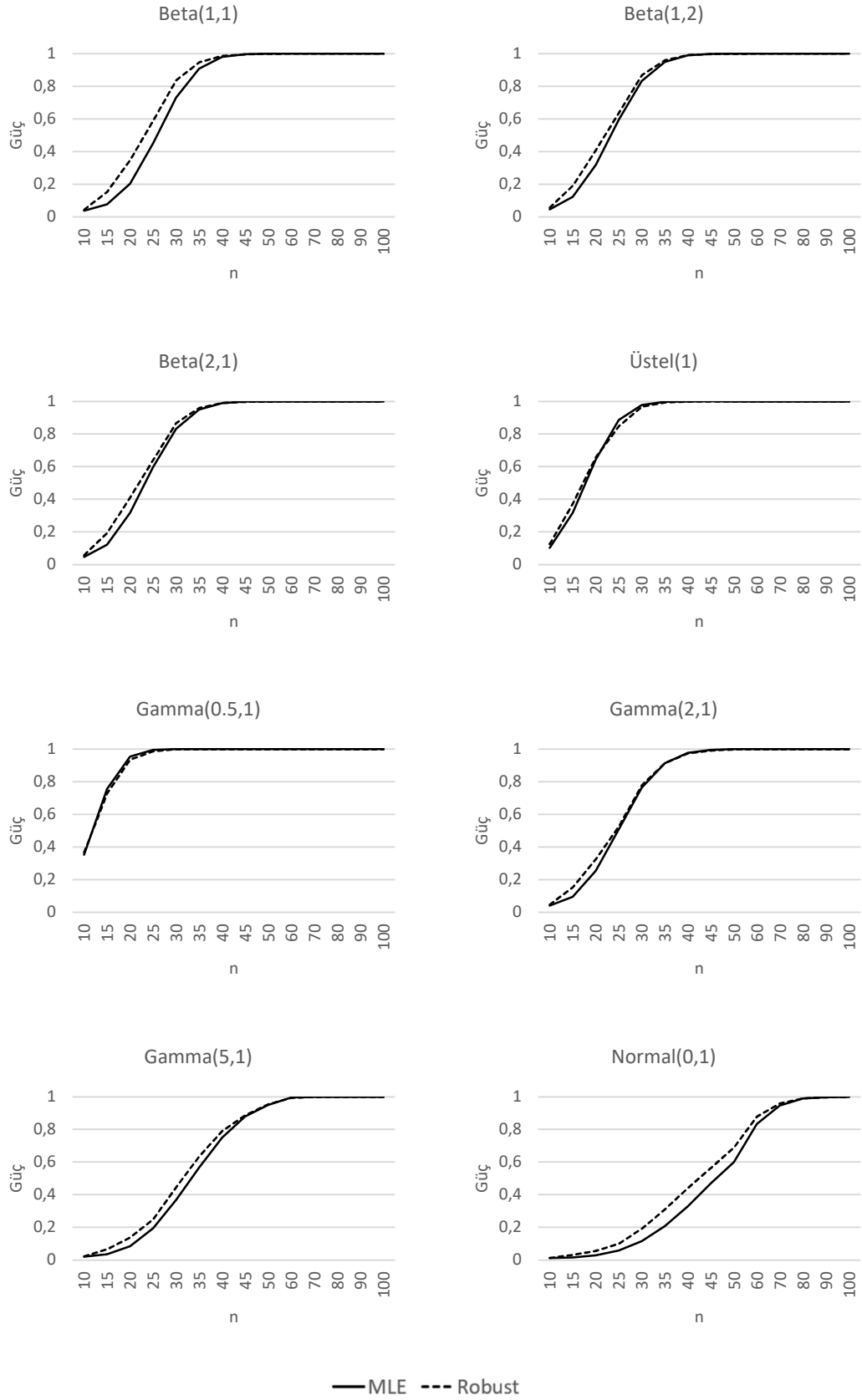


**Şekil 5.26.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_C$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

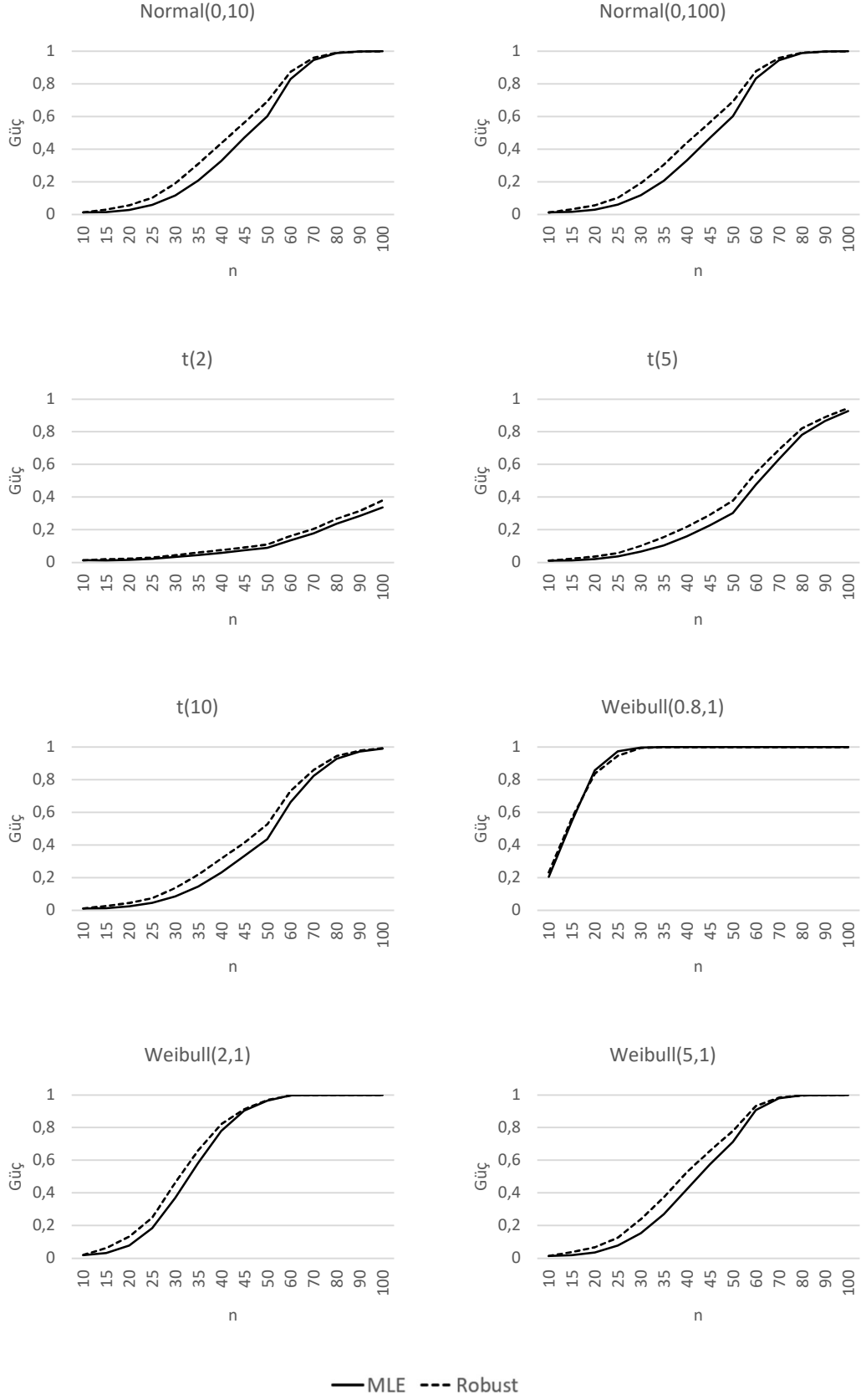
**Tablo 5.13.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_C$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,18308	-0,00055	0	0,00915
<b>Beta(1,2)</b>	-0,14453	-0,00201	3	0,02439
<b>Beta(2,1)</b>	-0,14515	-0,00216	3	0,02439
<b>Üstel(1)</b>	-0,02914	0,01041	23	1,00000
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,00060	0,06948	28	0,02249
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,08608	-0,00494	1,5	0,00930
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,12170	-0,00905	1	0,00510
<b>Normal(0,1)</b>	-0,12953	-0,01505	1,5	0,00236
<b>Normal(0,10)</b>	-0,15767	-0,02869	0	0,00386
<b>Normal(0,100)</b>	-0,14428	-0,01798	0	0,00253
<b>t(2)</b>	-0,08750	-0,04438	0	0,00012
<b>t(5)</b>	-0,12284	-0,03467	0	0,00012
<b>t(10)</b>	-0,12550	-0,02109	0	0,00109
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,00243	0,04129	36	0,01427
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,13603	-0,00771	0	0,00386
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,13654	-0,01284	1	0,00326

$Z_C$  testine ilişkin simülasyon bulguları, robust tahmin yöntemlerinin birçok alternatif dağılım karşısında MLE'ye kıyasla anlamlı ölçüde daha yüksek test gücü sağladığını göstermektedir. Özellikle normal, t ve Beta dağılımlarında robust yöntemin lehine olan farklar oldukça belirgin olup, düşük p-değerleri ile istatistiksel anlamlılık taşımaktadır. Gamma ve Weibull(2,1), Weibull(5,1) gibi çarpık dağılımlarda da benzer şekilde robust tahminin avantajlı olduğu görülmektedir. Sadece Gamma(0.5,1) ve Weibull(0.8,1) gibi birkaç dağılımda MLE ile robust yöntemler arasında fark minimal düzeydedir. Üstel(1) dağılımında ise anlamlı bir fark gözlenmemektedir. Genel olarak,  $Z_C$  testinin robust parametre tahmin yöntemleri ile birlikte kullanıldığında, özellikle ağır kuyruklu ve simetrik dağılımlar karşısında daha güçlü ve güvenilir sonuçlar ürettiği söylenebilir.



**Şekil 5.27.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_K$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

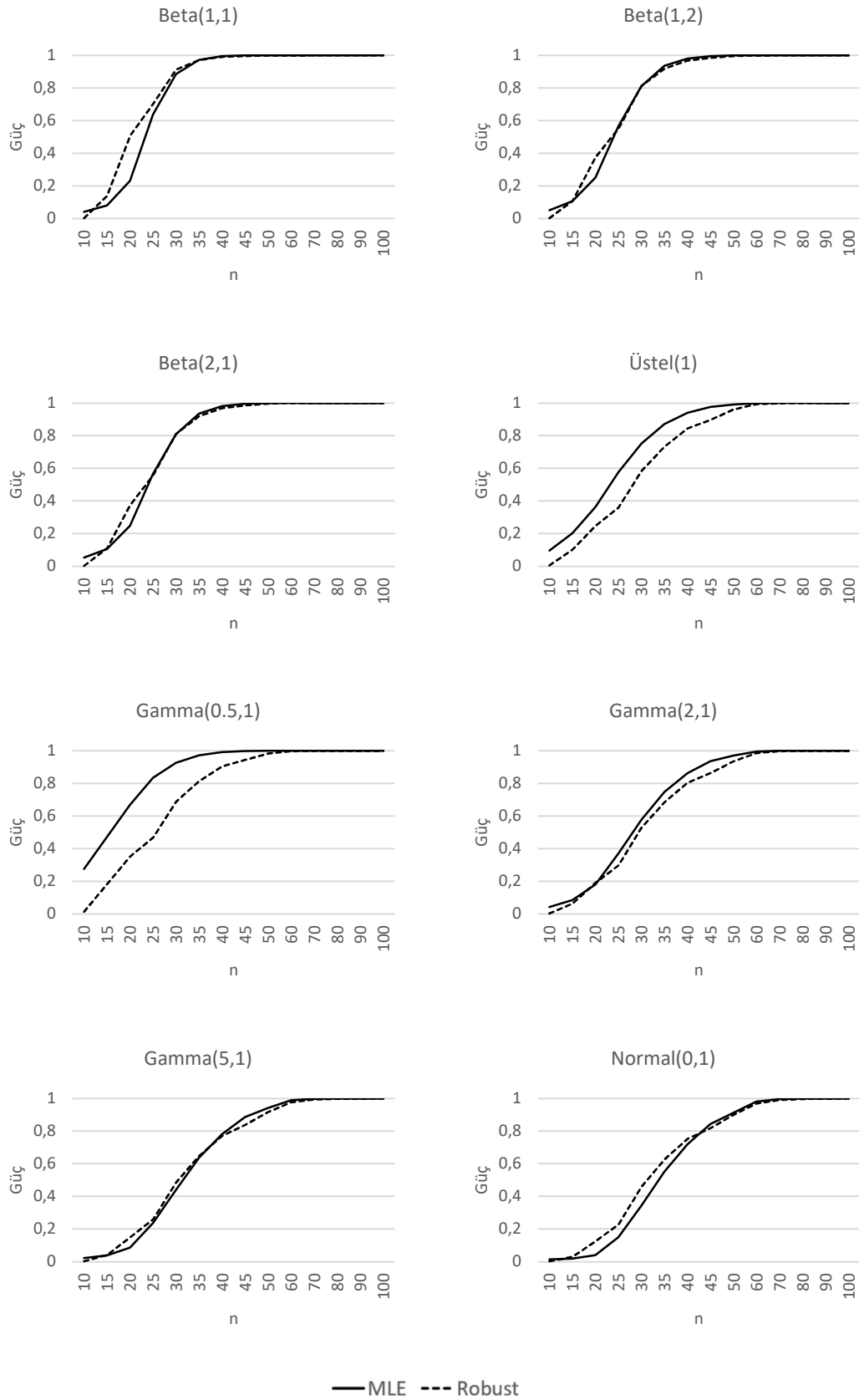


**Şekil 5.28.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_K$  Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

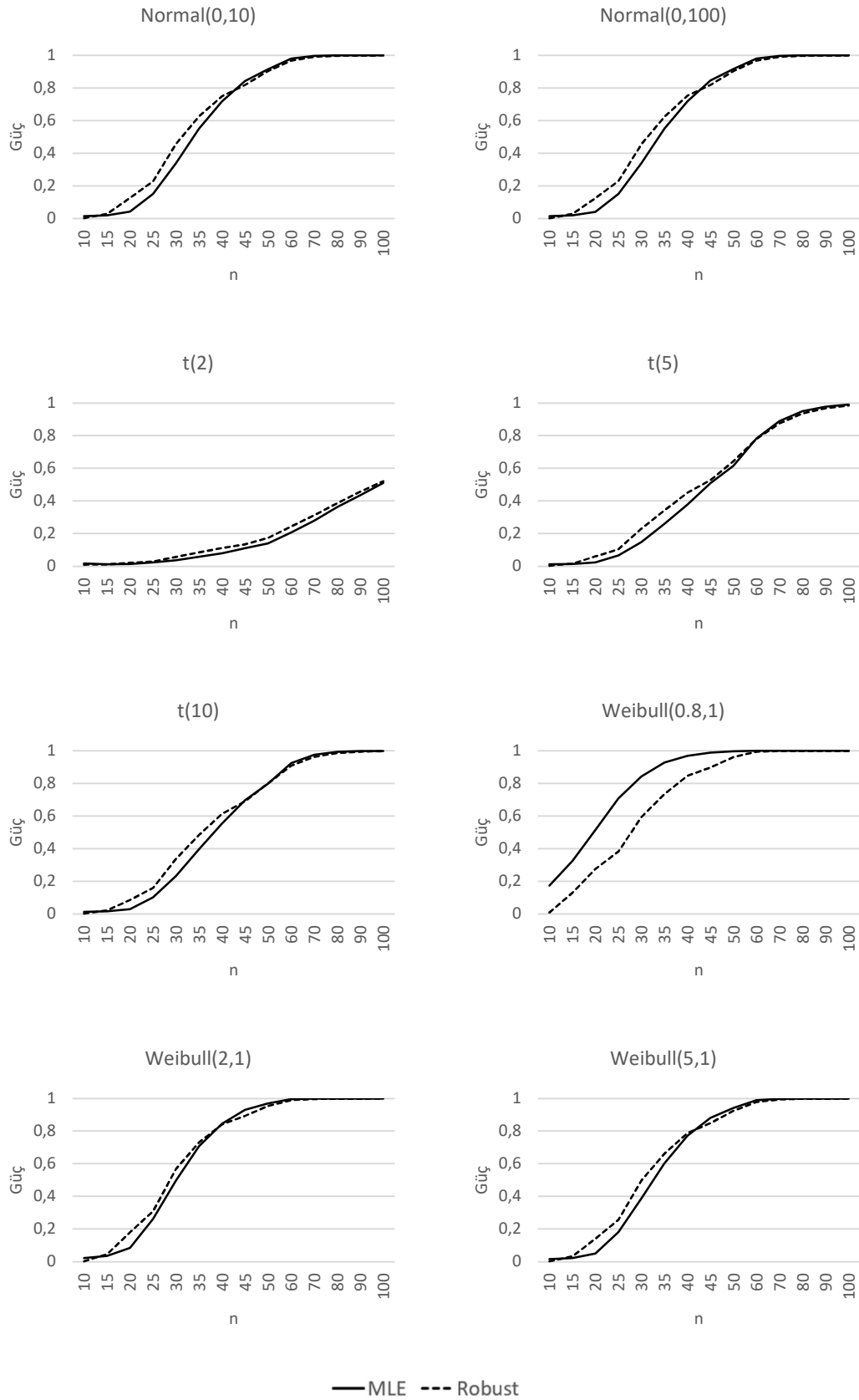
**Tablo 5.14.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $Z_K$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,11226	-0,00357	3	0,02439
<b>Beta(1,2)</b>	-0,05549	-0,00148	3	0,02439
<b>Beta(2,1)</b>	-0,05796	-0,00176	3	0,02439
<b>Üstel(1)</b>	-0,02913	0,01956	23	1,00000
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,00644	0,01852	17	0,20841
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,03931	0,00151	9	0,12353
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,05474	-0,00360	3	0,00872
<b>Normal(0,1)</b>	-0,07717	-0,01567	0	0,00166
<b>Normal(0,10)</b>	-0,06948	-0,01454	0	0,00012
<b>Normal(0,100)</b>	-0,06910	-0,01480	3	0,00061
<b>t(2)</b>	-0,02672	-0,01232	1	0,00024
<b>t(5)</b>	-0,05555	-0,02370	1	0,00024
<b>t(10)</b>	-0,06244	-0,01856	0	0,00012
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,01345	0,01500	23	0,52861
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,06209	-0,00469	3	0,00872
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,06630	-0,01275	2	0,00037

$Z_K$  testine ilişkin simülasyon bulguları, robust parametre tahmin yöntemlerinin özellikle simetrik ve ağır kuyruklu dağılımlar karşısında MLE'ye kıyasla anlamlı şekilde daha yüksek test gücü sağladığını ortaya koymaktadır. Normal, t ve Weibull(2,1)–Weibull(5,1) dağılımlarında test istatistikleri anlamlı düzeyde negatif olup, robust yöntemin üstünlüğü istatistiksel olarak doğrulanmıştır. Benzer şekilde Beta ve Gamma(5,1) dağılımlarında da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Öte yandan, Üstel(1), Gamma(0.5,1) ve Weibull(0.8,1) gibi dağılımlarda tahmin yöntemleri arasındaki farklar önemsiz veya anlamsız düzeydedir. Bu bağlamda,  $Z_K$  testi özellikle Cauchy benzeri ağır kuyruklu dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında daha güçlü ve güvenilir sonuçlar sunmaktadır.



**Şekil 5.29.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen GH Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)

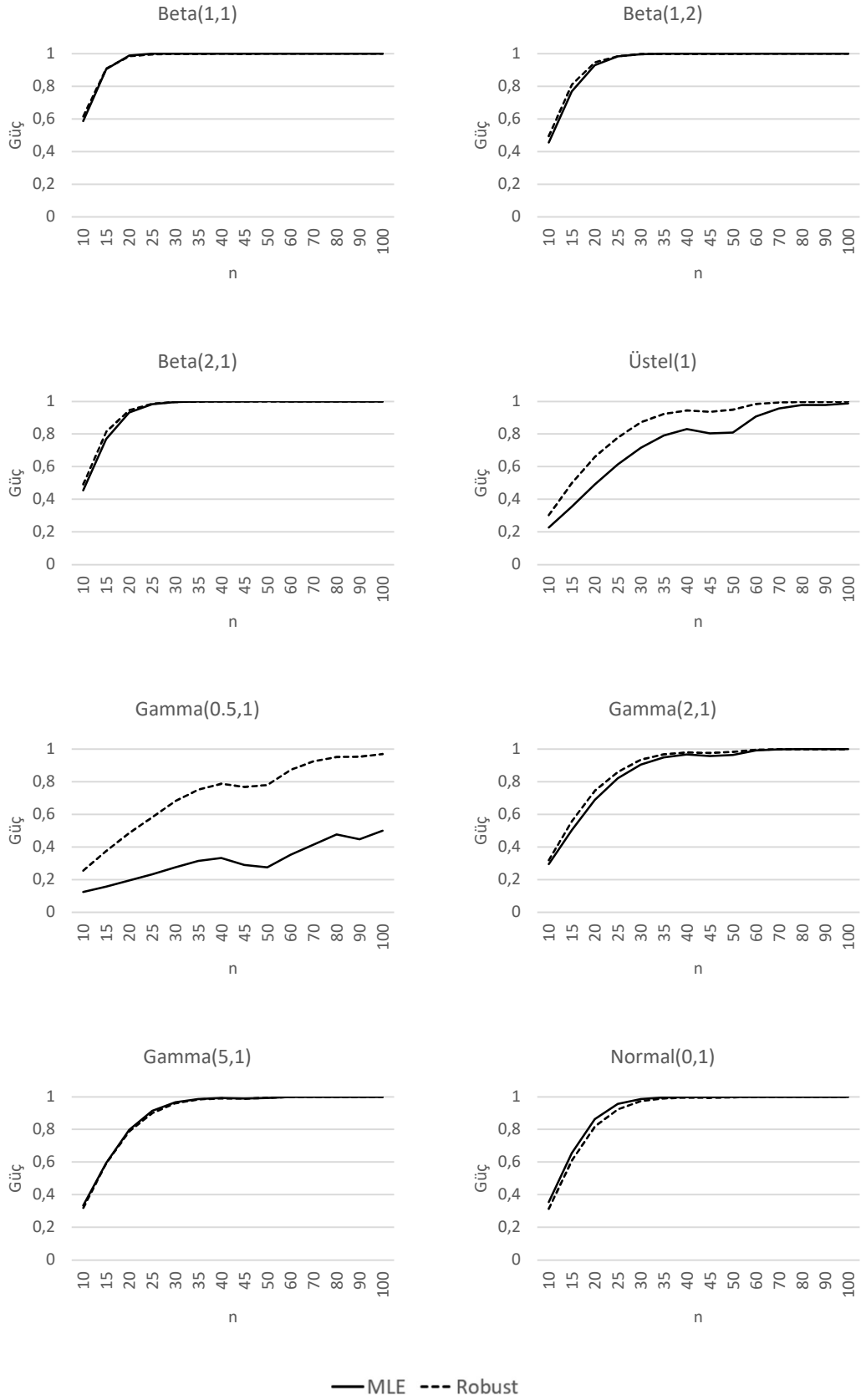


**Şekil 5.30.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen GH Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

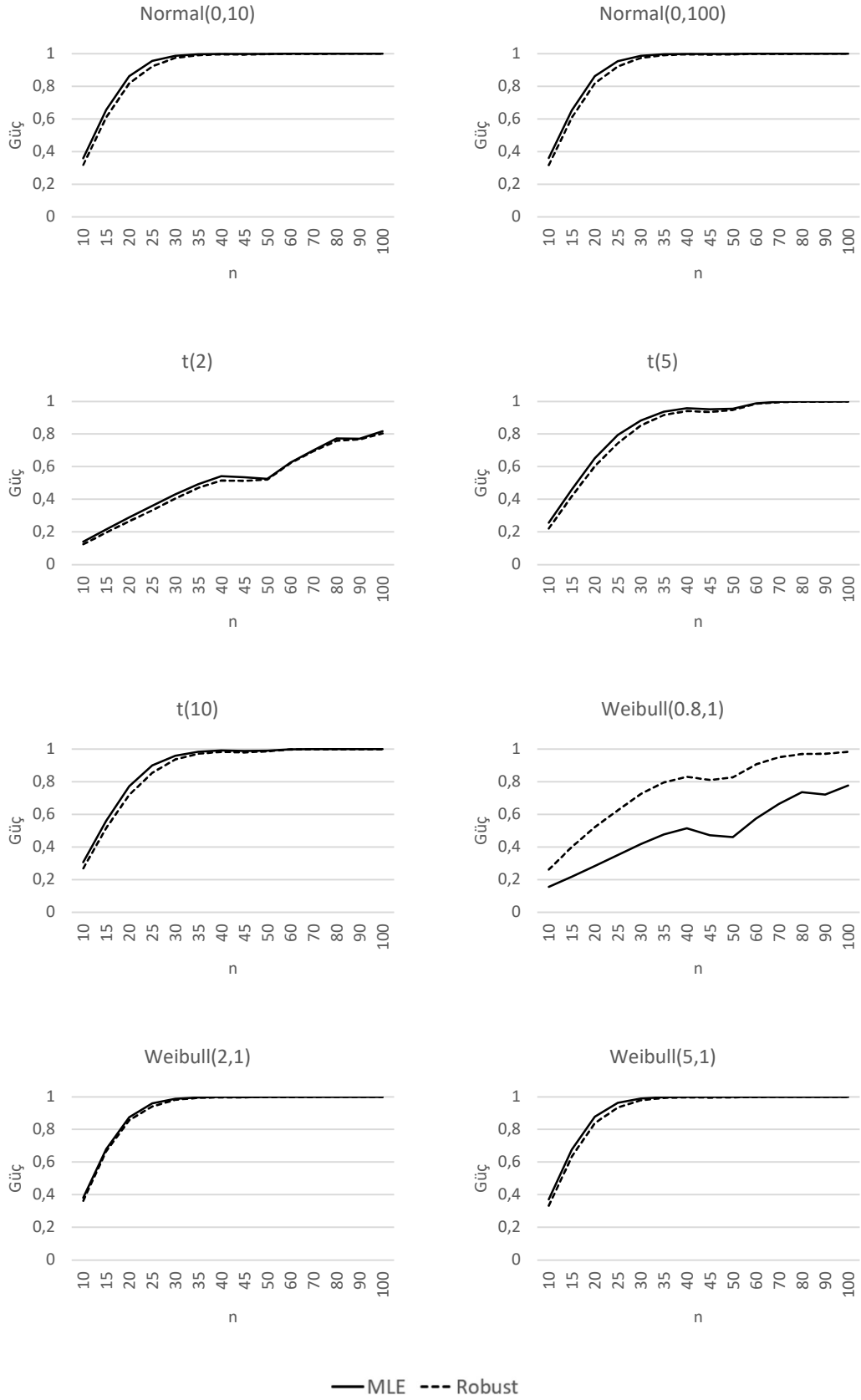
**Tablo 5.15.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen GH Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,13709	0,00278	20	0,47553
<b>Beta(1,2)</b>	-0,05609	0,02334	39	0,26219
<b>Beta(2,1)</b>	-0,03820	0,01395	46	0,26640
<b>Üstel(1)</b>	0,03921	0,12354	91	0,00166
<b>Gamma(0.5,1)</b>	0,04327	0,27502	66	0,00386
<b>Gamma(2,1)</b>	0,01077	0,05298	86	0,00518
<b>Gamma(5,1)</b>	-0,02274	0,01491	47	0,94428
<b>Normal(0,1)</b>	-0,05256	0,00624	40	0,46313
<b>Normal(0,10)</b>	-0,05361	0,00616	39	0,42627
<b>Normal(0,100)</b>	-0,05336	0,00639	40	0,46313
<b>t(2)</b>	-0,02916	-0,01134	3	0,00061
<b>t(5)</b>	-0,04077	0,00390	26	0,10400
<b>t(10)</b>	-0,04868	0,00480	37	0,35754
<b>Weibull(0.8,1)</b>	0,06122	0,21463	78	0,00253
<b>Weibull(2,1)</b>	-0,03856	0,00980	40	0,72677
<b>Weibull(5,1)</b>	-0,05221	0,00796	32	0,36361

GH testine ilişkin simülasyon sonuçları, MLE ve robust parametre tahmin yöntemleri arasında test gücü açısından genel olarak sınırlı düzeyde farklar olduğunu göstermektedir. Üstel(1), Gamma(0.5,1) ve Weibull(0.8,1) gibi çarpık ya da uç değer duyarlılığı yüksek dağılımlarda robust yöntemlerin anlamlı şekilde daha yüksek test gücü sağladığı görülmektedir. Buna karşın Beta, normal ve t dağılımları ile Gamma(5,1) gibi birçok dağılımda güven aralıklarının sıfırı içermesi ve yüksek p-değerleri, tahmin yöntemleri arasındaki farkların istatistiksel olarak anlamlı olmadığını ortaya koymaktadır. Bu sonuçlar, GH testinin tahmin yöntemi seçimine karşı görece daha duyarsız olduğunu; ancak uç değer içeren dağılımlarda robust yöntemlerin tercih edilmesinin test performansını artırabileceğini göstermektedir.



**Şekil 5.31.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen AP<sub>1</sub> Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (1/2)



**Şekil 5.32.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen AP<sub>1</sub> Test güç değerlerinin farklı örneklem hacimleri ve alternatif dağılımlara göre dağılımı (2/2)

**Tablo 5.16.** MLE ve Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen  $AP_P$  Test güç değerlerinin karşılaştırılması

	Güven Aralığı		Test İstatistiği	P-değeri
	Alt Değer	Üst Değer		
<b>Beta(1,1)</b>	-0,01700	0,00260	15	0,93253
<b>Beta(1,2)</b>	-0,02256	-0,00012	0	0,00909
<b>Beta(2,1)</b>	-0,02457	-0,00009	0	0,00915
<b>Üstel(1)</b>	-0,14066	-0,07136	0	0,00012
<b>Gamma(0.5,1)</b>	-0,48854	-0,33762	0	0,00012
<b>Gamma(2,1)</b>	-0,03112	-0,00958	0	0,00012
<b>Gamma(5,1)</b>	0,00005	0,00695	72	0,06913
<b>Normal(0,1)</b>	0,00230	0,03857	55	0,00592
<b>Normal(0,10)</b>	0,00190	0,02807	66	0,00386
<b>Normal(0,100)</b>	0,00135	0,02413	74,5	0,00602
<b>t(2)</b>	0,01017	0,02102	105	0,00012
<b>t(5)</b>	0,00774	0,02976	105	0,00012
<b>t(10)</b>	0,00356	0,02866	91	0,00166
<b>Weibull(0.8,1)</b>	-0,31347	-0,22904	0	0,00012
<b>Weibull(2,1)</b>	0,00066	0,01172	66	0,00386
<b>Weibull(5,1)</b>	0,00164	0,03349	55	0,00592

$AP_P$  testine ait simülasyon sonuçları, parametre tahmin yöntemi tercihinin test gücü üzerinde bazı dağılımlar için belirgin etkiler yarattığını göstermektedir. Özellikle Üstel(1), Gamma(0.5,1), Gamma(2,1) ve Weibull(0.8,1) gibi çarpık ve uç değer duyarlılığı yüksek dağılımlarda robust tahmin yöntemleri, MLE'ye kıyasla anlamlı düzeyde daha yüksek test gücü sağlamıştır. Buna karşın normal ve t dağılımları gibi simetrik yapılarda yöntemler arası farklar oldukça düşüktür; ancak yine de robust yöntem lehine anlamlı bir avantaj dikkat çekmektedir. Beta dağılımlarında ise bazı durumlarda fark istatistiksel olarak anlamlı olmakla birlikte, etki büyüklükleri görece küçüktür. Genel olarak  $AP_P$  testinin, özellikle uç değer içeren veya çarpık yapıya alternatif dağılımlar karşısında robust tahmin yöntemleriyle birlikte kullanıldığında daha güçlü ve güvenilir sonuçlar verdiği görülmektedir.

## 6. SONUÇ

Bu çalışmada, Cauchy dağılımına yönelik çeşitli uyum iyiliği testlerinin güçleri, MLE ile robust tahmin yöntemleri kullanılarak karşılaştırılmıştır. Monte Carlo simülasyonu yoluyla 100.000 iterasyonla yapılan analizde, örneklem büyüklükleri 10'dan 100'e kadar artırılmış ve alternatif dağılımlar altında (Beta, Üstel, Gamma, Normal, t, Weibull) testlerin duyarlılığı incelenmiştir.

KS ve AD testleri, özellikle simetrik alternatif dağılımlar (örneğin, Normal ve t dağılımları) altında robust tahmin yöntemleriyle daha yüksek güce ulaşmıştır. MAD ve CVM testleri, geniş örneklerde MLE'ye göre robust tahminlerle anlamlı performans artışı göstermiştir. Entropiye dayalı  $D_1$ – $D_7$  test istatistikleri, bazı alternatif dağılımlara karşı (özellikle Gamma(0.5,1), Weibull(0.8,1)) duyarlılık göstermekte zayıf kalmıştır. GH testi, genel olarak düşük ve kararsız güç değerleri üretmiş ve diğer testlere göre daha zayıf kalmıştır.

Normal(0,1) ve Normal(0,100) gibi simetrik dağılımlarda, özellikle AD, CVM ve  $D_3$  testlerinin robust tahmin yöntemi ile çok daha yüksek güç sağladığı görülmektedir. Beta(1,2) ve Beta(2,1) gibi asimetrik dağılımlar altında ise  $D_3$ ,  $Z_A$ ,  $Z_C$  gibi testler anlamlı farklılıklar sergileyerek robust tahminin avantaj sağladığı durumlar sunmaktadır.

Gamma(0.5,1) gibi ağır kuyruklu alternatiflere karşı yalnızca MAD ve  $AP_P$  ayırt edici güce sahiptir. Weibull(0.8,1) gibi sol eğik dağılımlarda,  $Z_C$ ,  $Z_K$ ,  $AP_P$  gibi testlerin robust tahmin yöntemleriyle daha duyarlı sonuçlar verdiği kaydedilmiştir.

Çoğu test istatistiği için elde edilen p-değerleri, 0.05 anlamlılık düzeyinin oldukça altında olup, alternatif dağılımlara karşı güçlü ayırt etme kapasitesini işaret etmektedir. Ancak bazı durumlarda (örn.  $D_1, D_2$  testleri için Beta(2,1)) fark istatistiksel olarak anlamlı değildir, bu da testin güç açısından yetersizliğini gösterir.

MLE yönteminin kırılğan yapısı, özellikle uç değer içeren dağılımlarda test gücünü düşürmekte; bu nedenle robust tahmin yöntemlerinin GOF testleriyle birlikte kullanımı tercih edilmelidir.

AD ve  $D_3$  test istatistikleri, geniş dağılım yelpazesi altında istikrarlı ve yüksek güç sergilemiş, bu da onları genel amaçlı uyum iyiliği testleri için öne çıkarmaktadır. Yeni önerilen testlerin ( $D_1$ – $D_7$ ,  $Z_C$ ,  $Z_K$ ) bazıları belirli dağılımlarda güçlü olsa da çoğu için sistematik avantaj sağladığı söylenemez; bu testlerin sınırlı durumlara özgü kullanımı önerilmektedir.

## 7. KAYNAKLAR

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2020). *Essentials of modern business statistics with Microsoft Excel*. Cengage Learning.
- Anderson, T. W. (1962). On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1148-1159.
- Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. *The annals of mathematical statistics*, 193-212.
- Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1954). A test of goodness of fit. *Journal of the American statistical association*, 49(268), 765-769.
- Akdeniz, F. (2004). *Olasılık ve istatistik* (2. Baskı). Çukurova Üniversitesi Yayınları.
- Akdi, Y., Öztürk, Z., & Aydoğdu, M. (2006). *Parametre tahmini ve hipotez testi*. Gazi Kitabevi
- Bishop, C. M., & Nasrabadi, N. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning* (Vol. 4, No. 4, p. 738). New York: springer.
- Bracewell, R. N., Cherry, C., Gibbons, J. F., Harman, W. W., Heffner, H., Herold, E. W., ... & Rohrer, R. A. (2000). McGraw-hill series in electrical and computer engineering. In *The Fourier Transform and Its Applications* (pp. 361-363). Boston: McGraw Hill.
- Bryson, M. C. (1974). Heavy-tailed distributions: properties and tests. *Technometrics*, 16(1), 61-68.
- Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). *Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach* (2nd ed.). Springer.
- Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference* (2nd ed.). Duxbury.
- Cauchy, A. L. (1846). Sur les intégrales qui s' étendent à tous les points d' une courbe fermée. *Comptes rendus*, 23, 251-255.
- Cauchy, A. L. (1853). Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d' une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus*, 36, 454-459.
- Cochran, W. G. (1977). *Sampling techniques* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Conover, W. J. (1999). *Practical nonparametric statistics* (3rd ed.). Wiley.

- Cramér, H. (1928). On the composition of elementary errors: First paper: Mathematical deductions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1928(1), 13–74. <https://doi.org/10.1080/03461238.1928.10416862>
- D'Agostino, R. B., & Stephens, M. A. (Eds.). (1986). *Goodness-of-fit-techniques*. New York: Marcel Dekker.
- Davison, A. C., & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap methods and their application* (No. 1). Cambridge university press.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(1), 1–22.
- Devroye, L. (1986). *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag.
- Tibshirani, R. J., & Efron, B. (1993). *An introduction to the bootstrap*. *Monographs on Statistics and Applied Probability*, 57(1), 1–436.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 2, 2nd ed.). Wiley.
- Field, A. (2017). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (5th ed.). Sage Publications.
- Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 222(594-604), 309–368. <https://doi.org/10.1098/rsta.1922.0009>
- Gelman, A. (2008). Scaling regression inputs by dividing by two standard deviations. *Statistics in Medicine*, 27(15), 2865–2873. <https://doi.org/10.1002/sim.3107>
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). Chapman & Hall/CRC.
- Genç, A. (2022). *Doğrusal regresyon analizi ve uygulamaları* (1. baskı, ss. 116). Necmettin Erbakan Üniversitesi Yayınları.
- Gibbons, J. D., & Chakraborti, S. (2010). *Nonparametric statistical inference* (5th ed.). CRC Press.
- Greene, W. H. (2018). *Econometric analysis* (8th ed.). Pearson.
- Gürtler, N., & Henze, N. (2000). Goodness-of-fit tests for the Cauchy distribution based on the empirical characteristic function. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52, 267-286.

- Hampel, F. R. (1974). The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 69(346), 383–393.
- Hampel, F. R., Rousseeuw, P. J., Ronchetti, E. M., & Stahel, W. A. (1986). *Robust Statistics: An Approach Based on Influence Functions*.
- Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to mathematical statistics* (8th ed.). Pearson.
- Huber, P. J., & Ronchetti, E. M. (1981). *Robust statistics* John Wiley & Sons. *New York*, 1(1).
- Huber, P. J., & Ronchetti, E. M. (2009). *Robust statistics* (2nd ed.). Wiley.
- Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions, Volume 1* (2nd ed.). Wiley.
- Keller, G. (2018). *Statistics for management and economics* (11th ed.). Cengage Learning.
- Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn Dell'inst Ital Degli Att*, 4, 89-91.
- Kullback, S., & Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The annals of mathematical statistics*, 22(1), 79-86.
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., & Neter, J. (2004). *Applied linear regression models* (4th ed.). McGraw-Hill/Irwin.
- Lange, K. L., Little, R. J. A., & Taylor, J. M. G. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 84(408), 881–896.
- Lehmann, E. L. (2006). *Nonparametrics: Statistical methods based on ranks* (Rev. ed.). Springer.
- Lehmann, E. L., & Casella, G. (1998). *Theory of point estimation* (2nd ed.). Springer.
- Lehmann, E. L., & Romano, J. P. (1986). *Testing statistical hypotheses* (Vol. 3). New York: Springer.
- Lenth, R. V. (2001). Some practical guidelines for effective sample size determination. *The American Statistician*, 55(3), 187–193.
- Limpert, E., Stahel, W. A., & Abbt, M. (2001). Log-normal distributions across the sciences: keys and clues: on the charms of statistics, and how mechanical models resembling gambling machines offer a link to a handy way to characterize log-normal distributions, which can provide deeper insight into variability and probability—normal or log-normal: that is the question. *BioScience*, 51(5), 341-352.

- Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(1), 145–151. <https://doi.org/10.1109/18.61115>
- Lorentz, H. A. (1909). *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*. New York, NY: Columbia University Press.
- MacKay, D. J. C. (2003). *Information theory, inference, and learning algorithms*. Cambridge University Press.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Maronna, R. A., Martin, R. D., & Yohai, V. J. (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. Wiley.
- Maronna, R. A., Martin, R. D., & Yohai, V. J. (2019). *Robust statistics: Theory and methods* (2nd ed.). Wiley.
- Metropolis, N., & Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, 44(247), 335-341.
- Montgomery, D. C. (2013). *Design and analysis of experiments* (8th ed.). Wiley.
- Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2019). *Applied statistics and probability for engineers*. John wiley & sons.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. (2012). *Introduction to linear regression analysis* (5th ed.). Wiley.
- Moore, D. S., McCabe, G. P., Alwan, L. C., & Craig, B. A. (2016). *The practice of statistics for business and economics*. WH Freeman and Company.
- Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*, 47(1), 90–100.
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). *Numerical optimization* (2nd ed.). Springer.
- Nolan, J. P. (2001). Maximum likelihood estimation and diagnostics for non-normal data: Tools for heavy-tailed distributions and outliers. In S. Morgenthaler, E. Ronchetti, & W. A. Stahel (Eds.), *Modern Statistical Modelling* (pp. 151–170). Birkhäuser.
- Öztürk, F. ve Özbek, L. (2015). *Matematiksel modelleme ve simülasyon* (3. baskı). Pigeon Yayıncılık.
- Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood: Statistical modelling and inference using likelihood*. Oxford University Press.

- Pearson, K. (1900). X. On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 50(302), 157-175.
- Pekgör, A. (2023). A Novel Goodness-of-Fit Test for Cauchy Distribution. *Journal of Mathematics*, 2023(1), 9200213.
- Pekgör, A., Erişoğlu, M., Karakoca, A. ve Erişoğlu. Ü. (2018). Empirical type 1 error rate and power comparisons of normality tests with R. *Cumhuriyet Science Journal*. 39(3). 799–811. <https://doi.org/10.17776/csj.426382>
- R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna. Austria. <https://www.R-project.org/>
- Rao, C. R. (2001). *Linear Statistical Inference and Its Applications* (2nd ed.). Wiley.
- Razali, N. M., & Wah, Y. B. (2011). Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, 2(1), 21–33.
- Rousseeuw, P. J., & Croux, C. (1993). Alternatives to the Median Absolute Deviation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424), 1273–1283. <https://doi.org/10.2307/2291267>
- Rousseeuw, P. J., & Leroy, A. M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. Wiley.
- Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality. *Biometrika*, 52(3/4), 591–611.
- Smirnov, N. V. (1939). On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. *Bulletin Moscow University*, 2(3), 3–14.
- Stephens, M. A. (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69(347), 730–737. <https://doi.org/10.2307/2286009>
- Stephens, M. A. (1976). Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters. *The Annals of Statistics*, 4(2), 357–369. <https://doi.org/10.1214/aos/1176343418>
- Thode, H. C. (2002). *Testing for Normality*. CRC Press.
- Triola, M. F., & Iossi, L. (2018). *Elementary statistics* (p. 792). New York: Pearson.
- Upton, G., & Cook, I. (2008). *A dictionary of statistics* (2nd ed.). Oxford University Press.

- Wasserman, L. (2004). *All of statistics: a concise course in statistical inference*. Springer Science & Business Media.
- Weiss, N. A. (2016). *Introductory statistics* (10th ed.). Pearson.
- Wilk, M. B., & Gnanadesikan, R. (1968). Probability plotting methods for the analysis for the analysis of data. *Biometrika*, 55(1), 1-17.
- Wilcox, R. R. (2012). *Introduction to robust estimation and hypothesis testing* (3rd ed.). Academic press.
- Zhang, J. (2002). Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 281–294. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00338>
- Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional stable distributions* (Vol. 65). American Mathematical