



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**CO DOUBLE GRAFLAR ÜZERİNE BAZI
PARAMETRELER**

Raziye GÜRBÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Eylül-2020
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Raziye GÜRBÜZ tarafından hazırlanan “Co Double Graflar Üzerine Bazı Parametreler” adlı tez çalışması 10/09/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

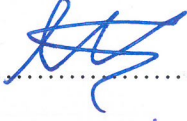
Danışman

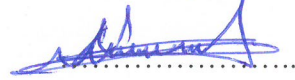
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

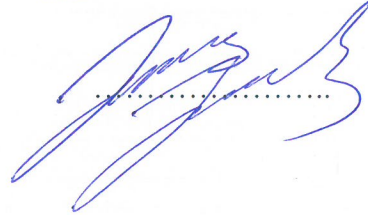
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Yunus YUMAK

İmza

.....


.....


.....


Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

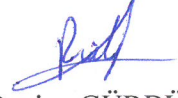
Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Raziye GÜRBÜZ

Tarih: 17/09/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Co Double Graflar Üzerine Bazı Parametreler

Raziye GÜRBÜZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2020, 41 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Yunus YUMAK

Graf Teori karmaşık gözükten bir çok problemin çözümünde kullandığımız ve bu karmaşık problemi daha basit ve anlaşılabilir bir hale getirerek o problemi çözmemizi kolaylaştıran bir yapıdır. Bu yapı sayesinde bir çok alanda kolaylık elde edilmiştir.

Tez 4 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez boyunca karşımıza çıkacak olan Graf Teorinin temel tanım ve özelliklerinden bahsedilmektedir.

İkinci bölümde çalışmanın temel konusu olan graf parametreleri ve double graflar üzerine literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde Co Double Grafların temel tanımı verilerek bazı graf çeşitleri için parametre değerleri hesaplanmıştır.

Ve son bölümde de sonuçlar tartışılarak önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Graf, Graf Parametreleri, Double Graf, Co Double Graf.

ABSTRACT

MS THESIS

Some Parameters Of Co Double Graphs

Raziye GÜRBÜZ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MECHANICAL ENGINEERING**

Advisor: Assoc.Prof.Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2020, 41 Pages

Jury

**Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Asst. Prof. Dr. Yunus YUMAK**

Graph Theory is a structure that we use for solving many problems that seem complicated and which makes this complex problem simpler and more understandable and makes it easier for us to solve it. Thanks to this structure, convenience is obtained in many areas.

This thesis contains four main sections.

In the first section, the basic definitions and properties of Graf Theory, which we will encounter throughout the thesis, are mentioned.

In the second section, literature review was done about the graph parameters and double graphs, which are the main subject of the study.

In the third section, by giving the basic definition of Co Double Graphs, parameter values are calculated for some graph types.

And in the final section, the results are discussed and suggestions are made.

Keywords: Graph, Graph Parameters, Double Graph, Co Double Graph.

ÖNSÖZ

Co Double Graflar Üzerine Bazı Parametreler isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Öğretim Üyesi, Doçent Doktor Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmıştır.

Bu çalışmamın başlangıcından sonlandırıldığı ana kadar karşılaştığım her türlü sorunun aşılmasında bana yardımcı olan, hoşgörüsü, desteği ve bilgisiyle bana yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ' e saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca hayatım boyunca benden hiç desteğini esirgemeyen değerli aileme sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Raziye GÜRBÜZ
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Graf Tanımı	2
1.1.1. Bazı Önemli Tanımlar	2
1.2. Derece ve Uzaklık	4
1.3. Altgraf	6
1.4. Yürüme ve Yol Kavramları.....	7
1.5. Uzaklık ve Bağlantılılık	8
1.6. Graf Çeşitleri	8
1.7. Graf Parametreleri	12
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	15
2.1. Graf Parametreleri Üzerine Çalışmalar	15
2.2. Double Graflar Üzerine Çalışmalar	17
3. Co-Double Graflar	18
3.1. Bazı Temel Tanımlar.....	18
3.2. Sonuçlar.....	19
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	30
4.1 Sonuçlar	30
4.2 Öneriler	30
5. KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER VE KISALTMALAR

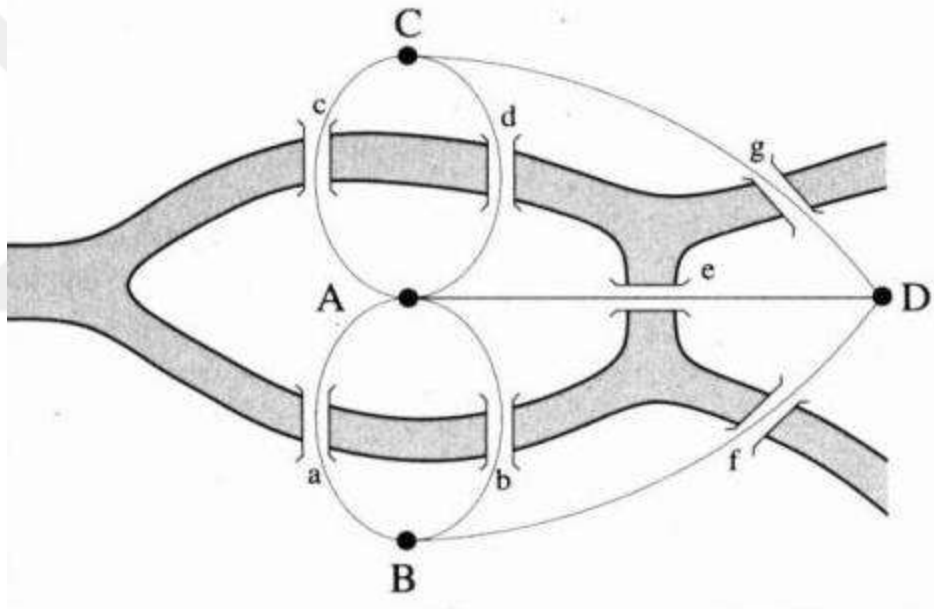
Simgeler

$G = (V, E)$	Graf
V	Köşe Kümesi
E	Kenar Kümesi
$der(v_i)$	v_i köşesinin derecesi
K_n	Tam Graf
\bar{G}	Tamamlayıcı (Tümleyen) Graf
C_n	Çevre Graf
P_n	Yol Graf
$K_{m,n}$	İki Parçalı Tam Graf
T	Ağaç Graf
S_n	Yıldız Graf
W_n	Tekerlek Graf
$d(u, v)$	Uzaklık
$e(v)$	Eksantrik
$rad(G)$	Yarıçap(radius)
$diam(G)$	Çap(Diameter)
$girth(G)$	Çevrim(Girth)
$\gamma(G)$	Baskınlık Sayısı
$\alpha(G)$	Örtü Sayısı
$\omega(G)$	Klik Sayısı
$D(G)$	Double Graf
$CD(G)$	Co Double Graf

1. GİRİŞ

Euler 1736 yılında yazdığı Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli makale ile graf teori kavramının literatüre girmesini sağlamıştır. (Euler, problemi çözmek için somut bir olayı modelleyip soyut hale dönüştürmüştür.)

Grafların yegane amacı lazım olan her bilgiyi lazım olmayacak her fazlalıktan uzağa odaklamaktır. Bu sebeple graflar karmaşık problemleri daha basit olarak düşünmemizi ve yalnızca çözümde yardımcı olacak verilere odaklanmamızı sağlayarak problemlerin çözümünü kolaylaştırır. Graflar 20. yy dan itibaren elektrik mühendisliği, kimya-kimya mühendisliği, ekonomi, bilgisayar bilimi, yönelem araştırmaları, dil bilimi, köprüler ve organik moleküler gibi birbirinden bağımsız alanlarda karşımıza çıkar.



Şekil 1.1. Königsberg'in Yedi Köprüsü Probleminin Grafi

Königsberg'in Yedi Köprüsü problemini şöyle açıklayabiliriz; 4 anakaradan ve bu 4 anakarayı birbirine bağlayan 7 köprüden oluşan Almanya'nın Königsberg şehrinde; herhangi bir anakaradan başlayarak ve bu yedi köprü yalnız birer kere kullanılarak " aynı noktaya dönen bir yürüyüş" yani tam bir tur gerçekleştirilebilir miydi? Konu üzerinde çalışan Leonard Euler, bu konuyla ilgili "Seven Bridges of Königsberg" isimli bir makale yayımladı. Özellikle bu problemi genel bir şekilde inceleyerek problemi teoremlerle kuramlaştırdı.

Bu bölümde yapılan bütün tanımlar Gross ve Yellen (Gross ve Yellen, 2004) , (Buckley ve Harary 1990) ve Harris ve arkadaşları (Harris ve ark., 2008) nin kitaplarından alınmıştır.

1.1. Graf Tanımı

Tanım 1.1.1 Nokta ve bu noktalar arasında bağlantı içeren herhangi matematiksel objeler **graf** olarak adlandırılır.

1.1.1. Bazı Önemli Tanımlar

Tanım 1.1.2 Bir graftaki tüm bağlantıların yönü yok ise **yönsüz graf** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.3 Bir G grafi $G = (V, E)$; V ve E şeklinde iki kümeyi içerir. V kümesinin elemanları **köşeler** , E kümesinin elemanları ise **kenarlar** olarak adlandırılır. Bu şekilde tanımlanan $G = (V, E)$ ikilisine **graf** denir.

Tanım 1.1.4 Bütün kenarlar bir veya iki köşe ile bağlanır. Bu köşeler **bitiş noktaları** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5 Köşe ve kenar kümesi sonlu olan bir graf **sonlu graf** olarak adlandırılır. Sonlu graflarda köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere $|V| = n$ sayısına **grafın mertebesi** ; kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere $|E| = m$ sayısı da **grafın boyutu** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.6 Eğer x ve y köşeleri bir kenarla birleşiyor ise x köşesi ile y köşesi **komşu köşeler** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.7 Ortak bir bitiş noktasına sahip olan iki kenara **komşu kenarlar** denir.

Tanım 1.1.8 Çoklu-kenar aynı bitiş noktalarına sahip iki ya da daha fazla kenardan oluşur.

Tanım 1.1.9 Grafın köşeleri arasında tam bir kenar var ise bu graftaki komşuluklara **basit komşuluk** denir.

Tanım 1.1.10 G grafında bir köşeyi kendisiyle birleştirerek kendisine komşu yapan kenara **ilmek** denir.

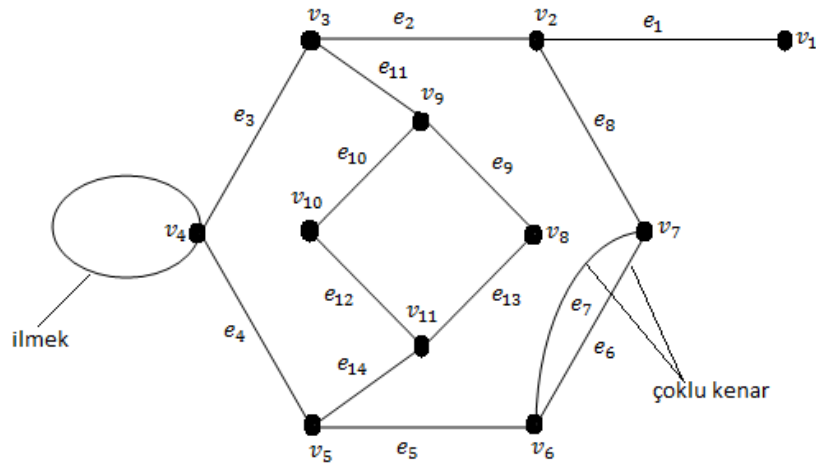
Tanım 1.1.11 Bir graf hem ilmek hem de çoklu kenar içermiyorsa bu grafa **basit graf** denir.

Tanım 1.1.12 Bir graf ilmek ve çoklu kenar içeriyorsa bu grafa **çoklu graf** denir.

Tanım 1.1.13 Bir $G = (V, E)$ grafının E kenar kümesi ve V köşe kümesi boş küme ise bu graf **boş graf** olarak isimlendirilir.

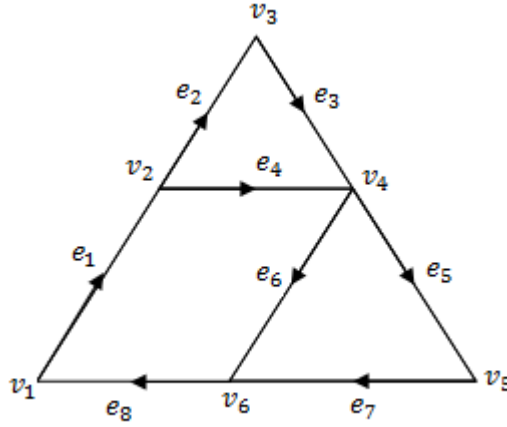
Tanım 1.1.14 Kenar kümesi ve köşe kümesi sonlu olan bir graf **sonlu graf** olarak isimlendirilir.

Örnek 1.1.1. Köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{10}, v_{11}\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{13}, e_{14}\}$ olan $G = (V, E)$ grafının şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.1.1 Çoklu Graf Örneği

Tanım 1.1.15 Kenarları doğrultuya sahip veya kenarları sıralanmış olan graflara **yönlendirilmiş graf** denir. Burada herhangi iki köşe olan v_i, v_j arasındaki kenar $e = v_i v_j$ için $v_i v_j \neq v_j v_i$ dir. Köşelere bağlı kenarlar, köşeden dışarı doğru ise bu köşeye **başlangıç noktası**, köşeye doğru ise bu köşeye de **final noktası** denir.

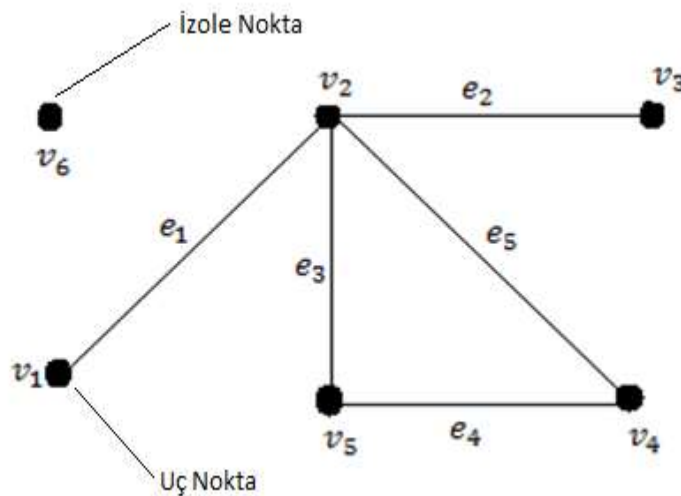


Şekil 1.1.2 Yönlendirilmiş Graf Örneği

1.2. Derece ve Uzaklık

Tanım 1.2.1 Bir G grafında herhangi bir v_i köşesinin derecesi bu köşeye komşu olan köşelerin sayısıdır ve $der(v_i)$ ile gösterilir. Bir grafta her köşe komşu olduğu köşelere birer derece kazandırır. İlmekte ise köşe kendisine komşu olduğundan 2 derece kazandıracaktır. Eğer köşe 0 dereceli ise bu köşeye **izole nokta**, 1 dereceli ise bu köşeye **uç nokta** adı verilir.

Örnek 1.2.1



Şekil 1.2.1 Basit Graf Örneği

Yukarıdaki şekilde verilen basit graf örneğinde v_1 ve v_3 uç nokta, v_6 izole noktadır. Ayrıca v_2 köşesinin derecesine bakacak olursak $der(v_2) = 4$ tür.

Tanım 1.2.2 Bir G grafının en az dereceli köşesine **minimum dereceli** denir ve bu köşenin derece sayısı $\delta(G)$ ile ifade edilir. Aynı şekilde en çok dereceli köşesine **maksimum dereceli** denir ve bu köşenin derece sayısı $\Delta(G)$ ile ifade edilir.

Örnek 1.2.2 Şekil 1.2.1 deki basit graf örneğinde $\delta(G) = 0$ ve $\Delta(G) = 4$ tür.

Teorem 1.2.1 Euler Teoremi (Gross ve Yellen, 2004) Sonlu bir G grafının köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\sum der(v_i) = 2m$$

Yani, bir grafın köşelerinin dereceleri toplamı kenar sayısının iki katıdır.

İspat: G grafi, n mertebeli ve m boyutlu bir graf olduğundan her bir kenar, iki köşeye komşu olur. Bundan dolayı köşelerin derecelerinin toplamında her bir kenar iki köşeyi temsil eder. Dolayısıyla G grafının tüm köşelerin derecelerinin toplamı, kenar sayısının iki katına eşit olur.

Sonuç 1.2.1 (Gross ve Yellen, 2004) Herhangi bir G grafında bütün köşelerin dereceleri toplamı çifttir.

İspat: Teorem 1.2.1 den görüleceği gibi köşelerin dereceleri toplamı kenarların sayısının iki katıdır, dolayısıyla çift sayı olduğu görülür.

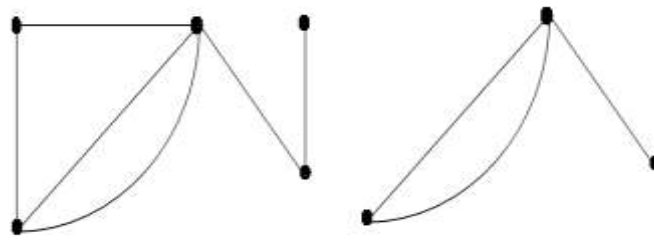
1.3. Altgraf

Tanım 1.3.1 $G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ birer graf olmak üzere, eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ koşulu sağlanıyorsa, H grafi G grafının **altgrafıdır** denir.

Tanım 1.3.2 $G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ birer graf olmak üzere, eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ koşulunun yanında H grafında tüm köşeler diğer köşeler ile komşu oluyorsa H grafına G grafının **tam altgrafı** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.3.3 G bir graf ve G grafının nokta kümesinin boştan farklı alt kümesi ise S olsun. Köşe kümesi S olan ve kenar kümesi de G nin S deki köşe çiftleriyle komşu olan tüm kenarlarından oluşan altgrafa G nin **indüklenmiş altgrafı** denir ve $\langle S \rangle$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.3.1



Şekil 1.3.1 Bir graf ve altgrafı

Yukarıda bir graf ve o grafa ait altgrafı verilmiştir.

1.4. Yürüme ve Yol Kavramları

Tanım 1.4.1 Köşe kümesi $V = \{a, b, c, \dots, y, z\}$ olan bir G grafi için her biri birbiriyle sırasıyla bağlanan köşeler dizisine **yürüme** denir. G deki ab, bc, \dots, yz formundaki yürümenin uzunluğu, n tane kenarın bir araya gelmesiyle oluştuğu için bu yürümenin uzunluğu n dir. Bu yürüme $abc \dots yz$ şeklinde gösterilir ve a ile z arasında bir yürüme olarak isimlendirilir.

Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı ise bu yürüme **kapalı yürüme** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.4.2 Bir grafta **iz** hiçbir kenarın birden fazla geçilmediği yürüyüştür.

Tanım 1.4.3 Bir G grafinin **euler izi** o grafin her kenarının yalnızca bir kere geçildiği yürüyüştür.

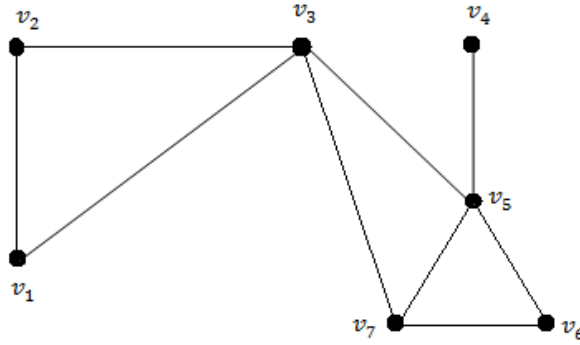
Tanım 1.4.4 Bir yürümede her bir köşeden birer kere geçiliyorsa bu yürüme **yol** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.4.5 Başlangıç ve bitiş noktaları dışında kalan diğer tüm köşeleri ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürümeye **devir** denir.

Tanım 1.4.6 Eğer yürümede geçilen tüm kenarlar farklı ise bu şekildeki yürümeye **gezi** denir.

Tek bir köşe kendi başına bir yol teşkil eder. O halde her yol bir gezi olurken her gezi bir yol ifade etmez.

Örnek 1.4.1



Şekil 1.4.1 Bir G grafi

Yukarıdaki G grafında $v_2v_3v_5v_6v_7v_5$ bir yürümedir fakat yol değildir. $v_1v_3v_7v_5v_4$ bu bir yoldur ayrıca bir iz dir. $v_3v_5v_6v_7v_3$ bir devirdir ama bir yol değildir. Ayrıca burada $v_4v_5v_3v_1v_2$ bir gezidir.

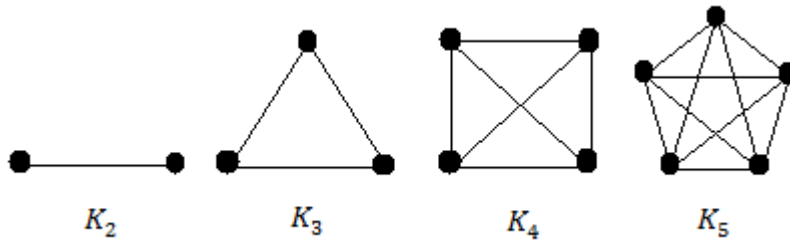
1.5. Uzaklık ve Bağlantılılık

Tanım 1.5.1 Bir grafta herhangi iki köşe x ve y arasındaki uzaklık bu iki köşe arasındaki en kısa yürüyüşün uzunluğudur ve $d(x, y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.2 Bir grafta iki köşe çifti arasında bir yürüyüş varsa bu grafa **bağlantılı** denir. Aksi durumda bu grafa **bağlantısız graf** denir. Bağlantısız graflarda iki köşe arasında bir yürüyüş yoksa aralarında uzaklığa sonsuzdur denir.

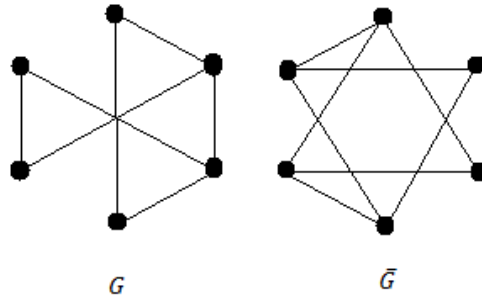
1.6. Graf Çeşitleri

Tanım 1.6.1 Bir G grafında her bir köşe diğer tüm köşelere komşu ise bu grafa **tam graf** denir. n tane köşeye sahip bir tam graf K_n ile ifade edilir.



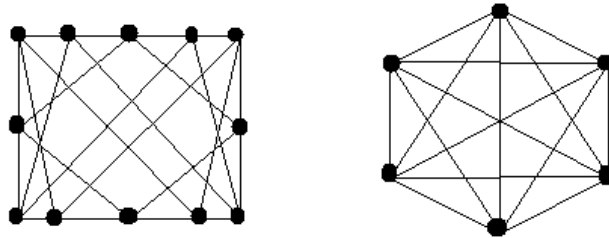
Şekil 1.6.1 Tam Graf Örnekleri

Tanım 1.6.2 Köşe kümesi G grafının köşe kümesi ile aynı, kenar kümesi ise G de olmayan kenarlardan oluşan ve dolayısıyla komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yaparak elde edilen grafa G grafının **tamamlayıcı (tümleyen) grafi** denir. G grafının tamamlayıcı grafi \bar{G} ile ifade edilir.



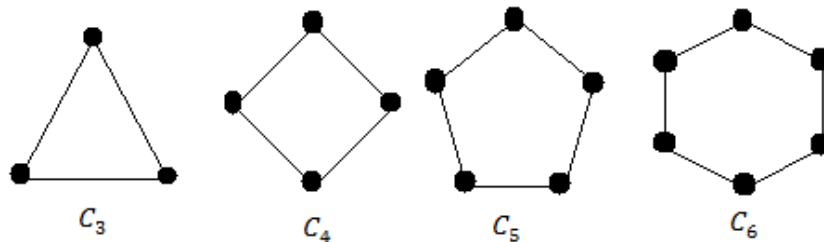
Şekil 1.6.2 Tamamlayıcı Graf Örneği

Tanım 1.6.3 Bir grafta bulunan tüm köşeler aynı dereceye sahip ise bu graflara **düzgün graf** adı verilir. Eğer her köşesi r dereceye sahip ise bu graf r -düzgün graftır.



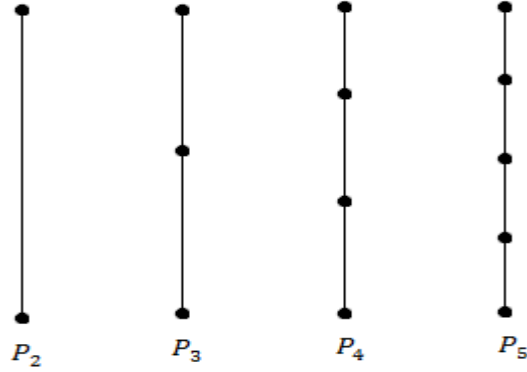
Şekil 1.6.3 4-düzgün ve 5-düzgün Graf

Tanım 1.6.4 Başlangıç ve bitiş noktası aynı ve tüm köşe dereceleri 2 olan graflar **devir veya çevre graf** olarak isimlendirilir. Özel olarak, n köşeye sahip bir çevre graf C_n ile ifade edilir.



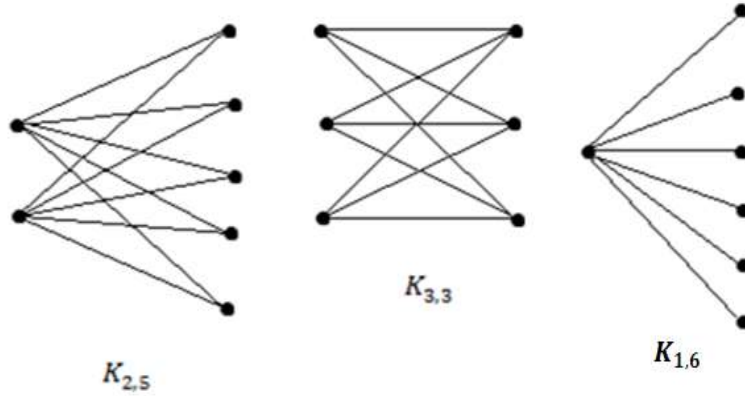
Şekil 1.6.4 Bazı Çevre Graf Örnekleri

Tanım 1.6.5 Bir grafta başlangıç ve bitiş köşesinin derecesi 1 ve diğer köşe dereceleri 2 ise bu graflar **yol graf** olarak isimlendirilir. n köşeye sahip bir yol graf ise P_n ile ifade edilir.



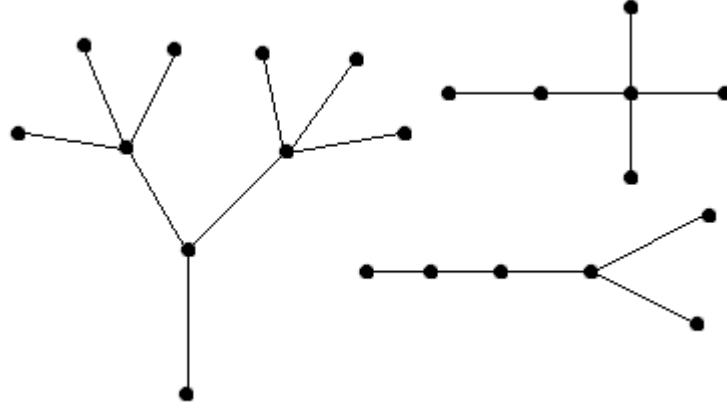
Şekil 1.6.5 Bazı Yol Graf Örnekleri

Tanım 1.6.6 Bir grafta köşe kümesi V_1 ve V_2 olmak üzere iki kümeye ayrılışın. Eğer bu grafta kenarlar V_1 deki köşelerle V_2 deki köşelerin birleştirilmesiyle elde ediliyorsa, bu graf **iki parçalı graf** olarak isimlendirilir. $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olan iki parçalı bir graf $K_{m,n}$ ile ifade edilir. V_1 ve V_2 deki tüm köşeler karşılıklı olarak birbirleriyle birleştirilmiş ise bu şekildeki graflar ise **iki parçalı tam graf** olarak isimlendirilir.



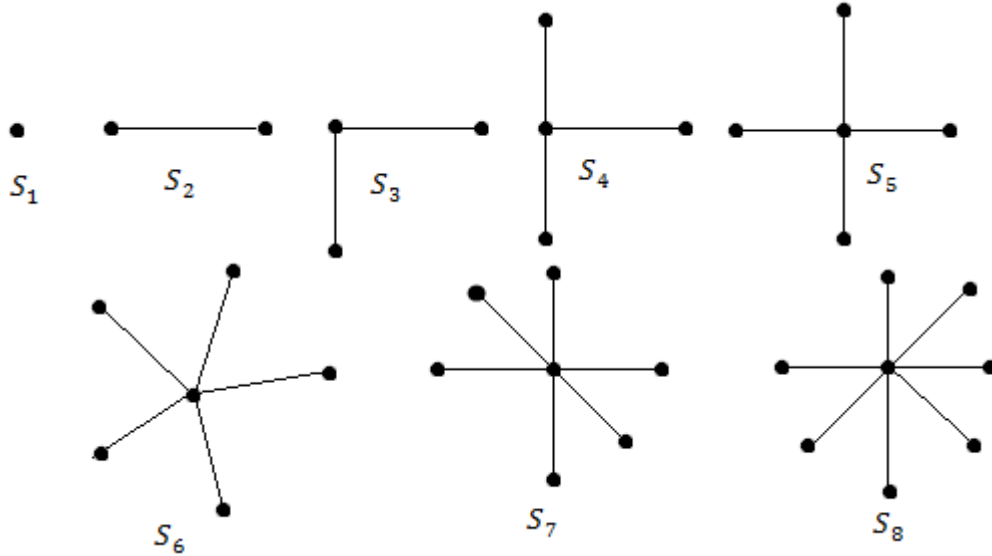
Şekil 1.6.6 Bazı İki Parçalı Tam Graflar

Tanım 1.6.7 Bağlantılı bir graf devir bulunmuyorsa bu grafa **ağaç graf** denir. Ağaç graflar T ile gösterilir.



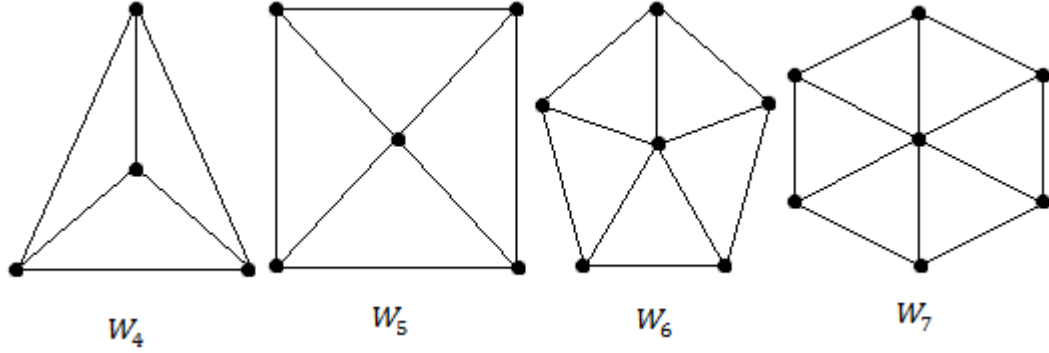
Şekil 1.6.7 Bazı Ağaç Graf Örnekleri

Tanım 1.6.8 n köşeli bir ağaç grafin, bir köşesinin derecesi $n - 1$ ve geriye kalan diğer tüm köşelerinin dereceleri 1 ise bu şekildeki graflara **yıldız graf** denir. Yıldız graflar tam iki parçalı graf olarak da adlandırılırlar. İki parçalı graflarda özel olarak $m = 1$ alınırsa oluşan $K_{1,n}$ grafi bir yıldız graftır ve S_n ile gösterilir.



Şekil 1.6.8 Bazı Yıldız Graf Örnekleri

Tanım 1.6.9 Köşe sayısı n olan bir C_n çevre grafinde tüm köşelere bir kenar ile komşu olan bir köşe eklenerek elde edilen yeni graf **tekerlek graf** şeklinde isimlendirilir ve W_n ile ifade edilir.



Şekil 1.6.9 Tekerlek Graf Örnekleri

1.7. Graf Parametreleri

Tanım 1.7.1 $G = (V, E)$ bir graf olsun ve $u, v \in V(G)$ şeklinde alınarak bu iki köşe olan u, v arasındaki en kısa yol uzunluğuna u ile v köşeleri arasındaki **uzaklık** denir ve $d(u, v)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.7.2 Bir $G = (V, E)$ grafında alınan v köşesi ile v ye en uzak köşe arasındaki uzaklığa v köşesinin **eksantiriği (eccentricity)** denir ve $e(v)$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$e(v) = \max\{d(v, x) : x \in V(G)\}$$

gösterilebilir.

Tanım 1.7.3 Bağlantılı bir G grafının köşeleri arasındaki en küçük eksantiriğe G grafının **yarıçapı (radius)** denir ve

$$rad(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}$$

ile ifade edilir.

Tanım 1.7.4 Bağlantılı bir G grafında köşeleri arasındaki en büyük eksantiriğe G grafının **çapı (diameter)** denir ve

$$diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$$

dir. Tam bir grafta tüm köşeler birbirine komşu olduğundan dolayı her zaman $diam(G) = 1$ dir.

Teorem 1.7.1 (Ostrand, 1973) Herhangi bir G grafi için

$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$$

eşitsizliği mevcuttur.

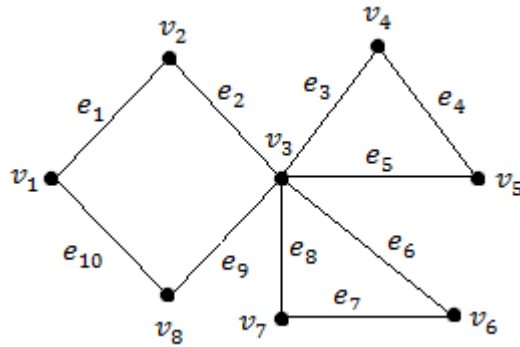
Teorem 1.7.2 (Haynes ve ark., 1998) Bir G grafinin yarıçapının 1 olması için gerek ve yeter şart G grafinin diğer bütün köşelere komşu bir düğüm içermesidir.

İspat: (\Rightarrow) G yarıçapı 1 olan bir graf olsun. Varsayalım ki G nin diğer bütün köşelere komşu bir düğümü bulunmasın. O halde G nin herhangi bir u köşesi için $e(u) \geq 2$ olacaktır. Bu ise G nin yarıçapının 1 olması ile çelişir. O halde u köşesi v köşesi ile komşudur.

(\Leftarrow) u, G grafinin diğer tüm köşelere komşu bir köşe olsun. $e(u) = 1$ olacağı açıktır. Üstelik bu değer, G nin köşeleri arasındaki minimum eksantriktir. O halde $rad(G) = 1$ dir.

Tanım 1.7.5 Bir G grafinin içerdiği en kısa devir **çevrim (girth)** olarak adlandırılır ve $girth(G)$ ile ifade edilir.

Örnek 1.7.1



Şekil 1.7.1 Bir Graf Örneği

Yukarıdaki şekilde verilen G grafinin bazı köşeleri arasındaki uzaklıklar $d(v_2, v_8) = 2$, $d(v_1, v_4) = 3$, $d(v_3, v_6) = 1$ ve $d(v_1, v_7) = 3$ şeklindedir. Çap köşeler arasındaki en büyük değer olduğundan G grafinin çapı $diam(G) = 3$ tür. Benzer şekilde yarıçapı $rad(G) = 2$ ve çevrimi $girth(G) = 3$ tür.

Tanım 1.7.7 V bir G grafının köşe kümesi ve $D \subseteq V$ olmak üzere D kümesindeki her eleman V/D kümesindeki herhangi bir elemana komşu oluyor ise bu D kümelerinin en küçüğünün eleman sayısına **baskınlık sayısı** denir ve $\gamma(G)$ ile ifade edilir.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Çalışmamızın bu bölümünde bir çok araştırmacının üzerinde çalışmış olduğu konu olan graf parametreleri ve double graflar üzerine literatürde var olan çalışmalardan bahsedilecektir.

İlk olarak graf parametreleri ile ilgili çalışmalardan bahsedeceğiz.

2.1. Graf Parametreleri Üzerine Çalışmalar

Sabidussi (1957), "*Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretical Properties*" isimli çalışmada iki grafın kartezyen çarpım grafının kromatik numarasının bu iki graftan kromatik numarası büyük olanın değerine eşit olduğu bulunmuştur.

Berge (1962), "*The Theory of Graphs and Its Applications*" isimli eserinde mükemmel grafları belirlemek için kullanılabilir Berge Graf olarak adlandırılan grafi ve özellikleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu çalışmada genel graf bilgisi de bulunmaktadır.

Hedetniemi (1966), "*Homomorphisms of Graphs and Automata*" isimli çalışmada iki grafın tensör çarpımlarının kromatik numarasının bu iki graftan kromatik numarası küçük olanın değerine eşit olduğu bulunmuştur.

Ostrand (1973), "*Graphs with specified radius and diameter*" adlı çalışmasında yarıçap ve uzaklık ile ilgili $rad(G) \leq diam(G) < 2rad(G)$ eşitsizliği bulunmuştur.

Geller ve Stahl (1975), "*The Chromatic Number and Other Functions of the Lexicographic Product*" isimli çalışmada iki grafın lexico çarpımlarının kromatik numarasının köşe ve kenar bağlantılılığı ve köşe bağımsızlığı grafların parametrelerinin değerleriyle ilişkisi açıklandı.

Bondy ve Murty (1976), "*Graph Theory with Applications*" isimli çalışmalarında önemli graf parametrelerinden renklendirme sayısı için grafın maksimum derecesi ile ilişkili bir üst sınır elde etmiştir.

Doyle ve Graver (1977), "*Mean Distance in a Graph*" isimli çalışmada ortalama uzaklık için grafın köşe sayısı ve uzaklığı ile ilgili sınırlar bulunmuştur.

Erdős ve ark. (1989), "*Radius, diameter and minimum degree*" adlı çalışmalarında grafın uzaklığı ve yarıçapı ile ilgili grafın yalnızca köşe sayısını ve en küçük derecesini içeren sınırlar bulmuştur.

Plavšić ve ark. (1993), "*On the Harary index for the characterization of chemical graphs*" adlı eserlerinde kimyasal grafların karakterizasyonun için Harary

indeks adıyla bilinen graf parametresini ortaya koymuşlardır. Bu parametre yardımıyla çeşitli kimyasal graflar üzerinde sınıflandırma gerçekleştirmişlerdir.

Ivanciuc ve ark. (1993), "*Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices*" isimli çalışmalarında yukarıdan bağımsız olarak Harary indeksi tanımlamışlardır. İki çalışmada da Harary indeksi isminin konulmasının sebebi çok önemli bir kimyacı ve matematikçi olan Harary'nin 70. Doğum yılı olmasıdır.

Čížek ve Klavžar (1994), "*On the Chromatic Number of the Lexicographic Product and the Cartesian Sum of Graphs*" isimli çalışmada iki grafın lexicographical grafının kromatik numarası üzerinde çalışılmıştır.

Kouider ve Winkler (1997), "*Mean Distance and Minimum Degree*" isimli çalışmada bir grafın ortalama uzaklığının grafın merteye ve en küçük derecesi ile bağlantılı bir üst sınırı elde edilmiştir.

Dankelmann, ve ark. (2000), "*Average distance, minimum degree and spanning trees*" isimli eserinde bir grafın ortalama uzaklığı için minimum derece ve grafın köşe sayısı ile ilgili önemli bir sınır ispat etmiş ayrıca kullandığı ispat tekniği bir çok araştırmacı için yol gösterici olmuştur.

Dündar (2001), "*Accessibility number and the neighbor-integrity of generalised Petersen graphs*" adlı çalışmasında bir grafın komşulukları ile ilgili olarak erişilebilirlik sayısı adlı parametreyi tanıtmış ve bazı grafların Petersen grafları üzerinde çalışmıştır.

Vukičević ve Furtula (2009), "*Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges*" adlı eserlerinde matematik alanında iyi bilinen aritmetik ve geometrik ortalama ifadelerinden faydalanıp graflar için yeni parametre tanımlamışlardır. Geometrik-aritmetik indeks isimli bu parametre ile genel aritmetik ve geometrik ortalamalarının da özellikleri ile bir çok sınırı daha iyi hale getirmişlerdir.

Vukičević ve Graovac (2010), "*Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices*" adlı eserlerinde birinci ve ikinci normalize edilmiş Zagreb eksantrik (eccentricity) indekslerini tanımlamış ve bunlar ile ilgili sınırlar ortaya koymuş ayrıca diğer topolojik indeksler ve parametrelerle olan ilişkilerini incelemişlerdir.

Mukwembi (2012), "*A Note on Diameter and The Degree Sequence of a Graph*" adlı makalesinde yeni bir graf parametresi olan düzensizlik (irregularity) indeksi

kavramını tanımlamış ve bunun yardımıyla önemli graf parametrelerinden diameter için bir sınır elde etmiştir.

Akgüneş ve Çevik (2013), "*A New Bound of Radius of Irregularity Index*" isimli çalışmalarında yarıçap (radius) graf parametresi için düzensizlik indeksi (irregularity index) yardımı ile kuvvetli bir üst sınır elde edilmiştir.

2.2. Double Graflar Üzerine Çalışmalar

Emanuele Munarini, Claudio Perelli Cippo, Andrea Scagliola, Norma Zagaglia Salvi (2008), "*Double Graphs*" isimli çalışmalarında Double Graf ın tanımını yapıp Double Graflarla ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Cangul, Yurttas ve Togan (2016), "Zagreb indices and multiplicative Zagreb indices of subdivision graphs of double graphs" isimli çalışmalarında double grafların Zagreb indekslerini hesaplamışlardır.

Cangul ve Ascioğlu (2018), "Narumi-Katayama index of the subdivision graphs" isimli çalışmalarında double grafların Narumi-Katayama indekslerini hesaplamışlardır.

3. Co-Double Graflar

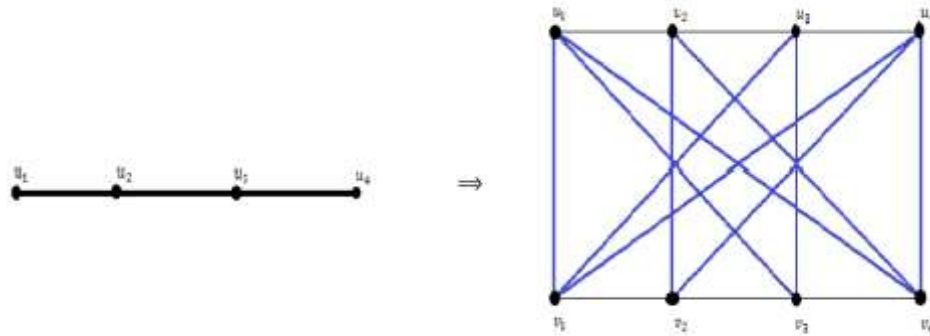
Önceki bölümlerde literatürde bulunan, bizim kullanacağımız bazı bilgilerden bahsedilmiştir. Bu bölümde ise yeni tanımlamış olduğumuz Co Double Grafların tanımı ve Co Double Grafların bazı parametrelerinin sonuçları anlatılmaktadır.

3.1. Bazı Temel Tanımlar

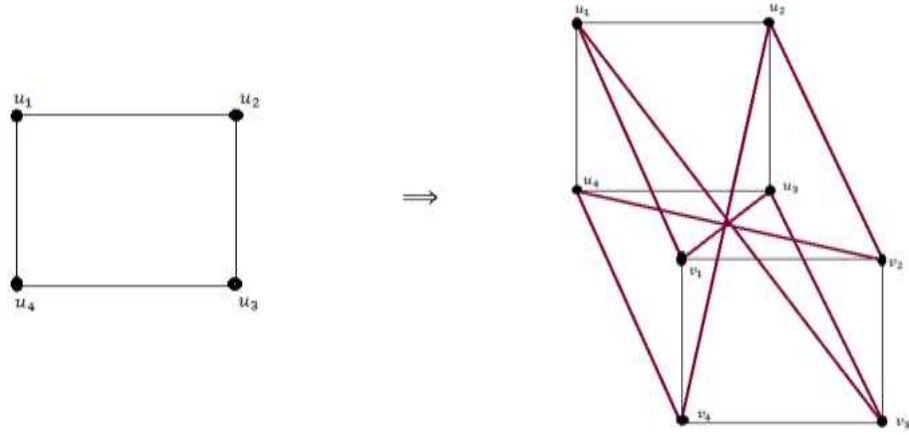
Tanım 3.1.1 (Emanuele Munarini ve arkadaşları (2008)) Köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir G grafi için, köşeleri $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olan başka bir G kopyasını alarak, G nin tüm köşelerinin her i için kopyasındaki u_i nin komşusu olanlarla bağlarsak G grafinin **Double Grafini** elde edilir ve $D(G)$ ile ifade edilir.

Tanım 3.1.2 Köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir G grafinin, köşeleri $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olan bir G kopyasını alalım. Her i için G nin tüm köşelerini kopyasındaki u_i nin komşusu olmayan köşelere bağlayarak elde edilen grafa G grafinin **Co-Double Grafi** denir ve $CD(G)$ ile gösterilir.

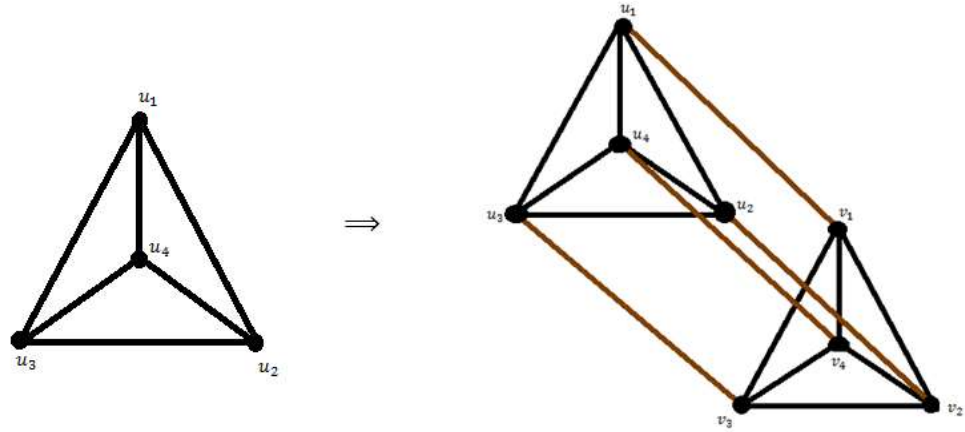
Örnekler



Şekil 3.1.1 P_4 Yol Grafinin Co Double Grafi



Şekil 3.1.2 C_4 Çevre Grafının Co Double Grafı



Şekil 3.1.3 W_4 Tekerlek Grafının Co Double Grafı

NOT: Co Double grafların tüm köşelerinin dereceleri birbirine eşittir ve n dir.

Tanım 3.1.9 (Gross ve Yellen, 2004) Bir G grafında bütün köşelerin dereceleri birbirine eşit ise G grafına **regüler (düzgün) graf** denilmektedir. Özel olarak regüler bir grafın her köşesinin derecesi r ise bu graf **r -regüler** olarak isimlendirilir.

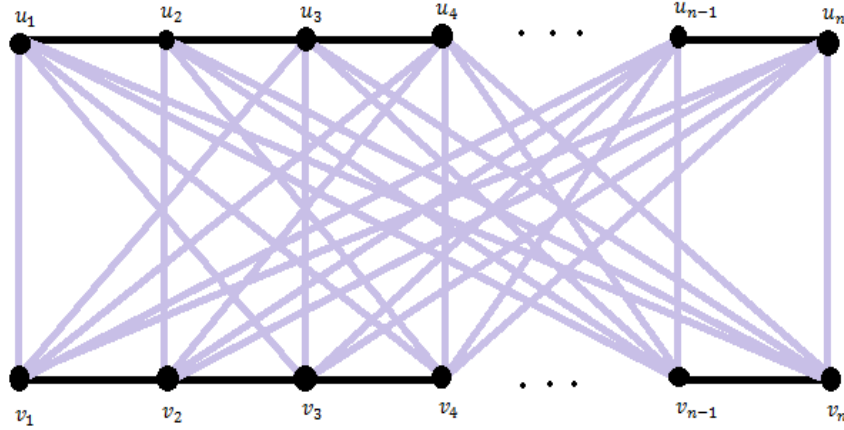
NOT: CoDouble graflar regüler graflardır.

3.2. Sonuçlar

Teorem 3.2.1 Herhangi bir yol grafında Co-Double grafının diametresi 2 dir.

İspat: Diameter tanımı gereği yani bir grafın içerdiği en büyük eksantrik olduğundan, yol grafi Co-Double grafının yapısını göz önüne alarak diameter ın (çapın) 2 olduğunu gösterelim.

Yol Grafın Co-Double grafının yapısı gereği;



Şekil 3.2.1 P_n Yol Grafının Co Double Grafı $CD(P_n)$

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2$$

$$u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 1, 3$$

⋮

$$u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \ j \neq i + 1, i - 1$$

O halde

u_i ile v_{i-1} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim u_{i+1} \sim v_{i-1}$ olduğundan diameter 2 dir.

Teorem 3.2.2 Herhangi bir yol grafında Co-Double grafının radiusu 2 dir.

İspat: Radius tanımı gereği yani bir grafın içerdiği en küçük eksantrik olduğundan, yol grafın Co-Double grafının yapısı göz önüne alınarak radius (yarıçapın) 2 olduğunu gösterelim.

Yol Grafın Co-Double grafının yapısı gereği; Şekil 3.2.1 den;

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2$$

$$u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 1, 3$$

⋮

$$u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \ j \neq i + 1, i - 1$$

O halde;

u_i ile v_{i+1} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim u_{i-1} \sim v_{i+1}$ olduğundan radius 2 dir.

Teorem 3.2.3 Herhangi bir yol grafında Co-Double grafının girthi

$$girth[CD(P_n)] = \begin{cases} 4, & n = 2,3 \\ 3, & n \geq 4 \end{cases}$$

tür.

İspat: Girth tanımından yani bir grafın içerdiği en küçük çevrim olduğundan, yol grafın Co-Double grafının yapısı göz önüne alınarak girth in 3 olduğunu gösterelim.

Yol Grafın Co-Double grafının yapısı gereği; Şekil 3.2.1 den;

$$\begin{aligned} u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2 \\ u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 1, 3 \\ \vdots \\ u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \ j \neq i + 1, i - 1 \end{aligned}$$

O halde;

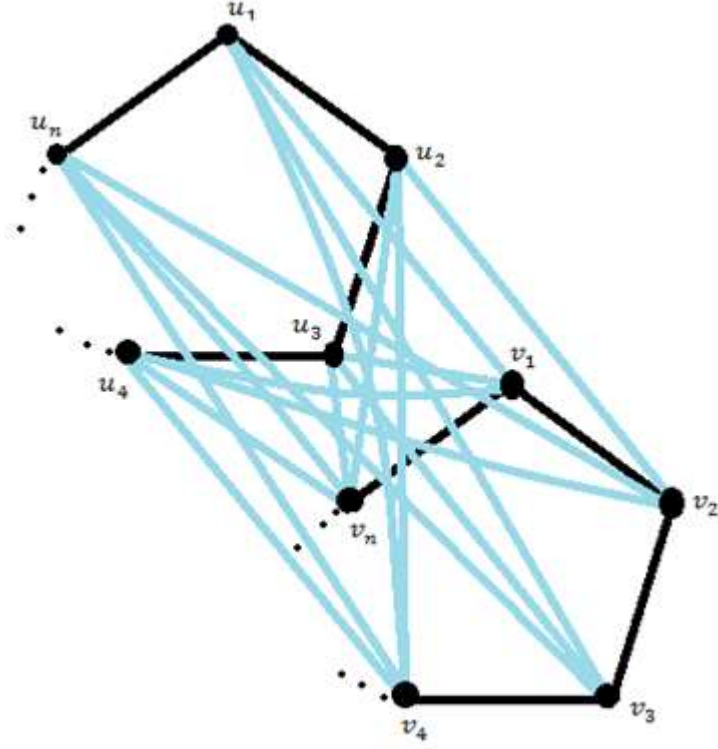
$n \geq 4$ için

$u_i \sim v_{i+2} \sim v_{i+3} \sim u_i$ olduğundan girth 3 tür.

Teorem 3.2.4 Herhangi bir çevre grafında Co-Double grafının diametresi 2 dir.

İspat: Diameter tanımından dolayı, çevre grafın Co-Double grafını göz önüne alarak diametresinin (çapının) 2 olduğunu gösterelim.

Çevre Grafın Co-Double grafının yapısını incelersek;



Şekil 3.2.2 C_n Çevre Grafının Co Double Grafı $CD(C_n)$

$$\begin{aligned}
 &u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2, n \\
 &u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 1, 3 \\
 &u_3 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2, 4 \\
 &\quad \vdots \\
 &i = \overline{2, n-1} \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \ j \neq i+1, i-1 \\
 &i = 1, n \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } \begin{array}{l} i = 1, j \neq 2, n \\ i = n, j \neq 1, n-1 \end{array}
 \end{aligned}$$

O halde;

u_i ile v_{i+1} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim v_i \sim v_{i+1}$ olduğundan diameter 2 dir.

Teorem 3.2.5 Herhangi bir çevre grafı için Co-Double grafının radius u 2 dir.

İspat: Radius un tanımı gereği, çevre grafın Co-Double grafını göz önüne alınarak radius (yarıçapın) 2 olduğunu gösterelim.

Çevre Grafın Co-Double grafını incelersek Şekil 3.2.2 den;

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \ i \neq 2, n$$

$$\begin{aligned}
u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 1, 3 \\
u_3 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, 4 \\
\vdots \\
i = \overline{2, n-1} \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \text{ } j \neq i+1, i-1 \\
i = 1, n \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } \begin{array}{l} j = 1, j \neq 2, n \\ j = n, j \neq 1, n-1 \end{array}
\end{aligned}$$

O halde;

u_i ile v_{i+1} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim v_i \sim v_{i+1}$ olduğundan radius 2 dir.

Teorem 3.2.6 Herhangi bir çevre graf için Co-Double grafının girthi

$$\text{girth}[CD(C_n)] = \begin{cases} 3, n = 3 \\ 4, n = 4 \\ 3, n \geq 5 \end{cases}$$

tür.

İspat: Girth tanımı gereği, çevre grafın Co-Double grafını göz önüne alarak girth in 4 olduğunu gösterelim.

Çevre Grafın Co-Double grafının yapısı Şekil 3.2.2 den;

$$\begin{aligned}
u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, n \\
u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 1, 3 \\
u_3 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, 4 \\
\vdots \\
i = \overline{2, n-1} \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \text{ } j \neq i+1, i-1 \\
i = 1, n \Rightarrow u_i \sim v_j \text{ dir } \begin{array}{l} j = 1, j \neq 2, n \\ j = n, j \neq 1, n-1 \end{array}
\end{aligned}$$

O halde;

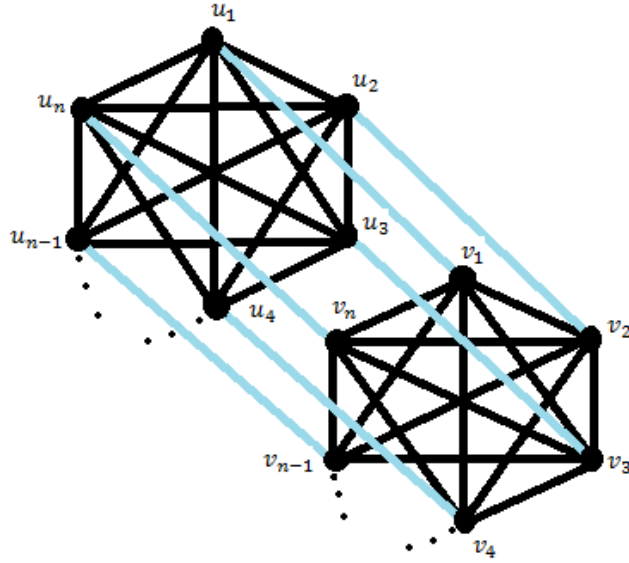
$n \geq 5$ için

$u_i \sim v_{i+2} \sim v_{i+3} \sim u_i$ olduğundan girth 3 tür.

Teorem 3.2.7 Herhangi bir tam graf için Co-Double grafının diametery 2 dir.

İspat: Diameter tanımı gereği, tam grafın Co-Double grafını inceleyerek diameter in (çapın) 2 olduğunu gösterelim.

Tam Grafın Co-Double grafının yapısı gereği;



Şekil 3.2.3 K_n Tam Grafının Co Double Grafı $CD(K_n)$

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = 1$$

$$u_2 \sim v_i \text{ dir } i = 2$$

$$\vdots$$

$$u_i \sim v_j \text{ dir } j = i$$

O halde;

u_i ile v_{i+2} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim v_i \sim v_{i+2}$ olduğundan diameter 2 dir.

Teorem 3.2.8 Herhangi bir tam graf için Co-Double grafının radiusu 2 dir.

İspat: Radius tanımını göz önüne alarak, tam grafın Co-Double grafının yapısını inceleyip radius (yarıçapın) 2 olduğunu gösterelim.

Tam Grafın Co-Double grafının yapısı Şekil 3.2.8 den;

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = 1$$

$$u_2 \sim v_i \text{ dir } i = 2$$

$$\vdots$$

$$u_i \sim v_j \text{ dir } j = i$$

şeklindedir. O halde;

u_i ile v_{i+1} in uzaklığına bakarsak:

$u_i \sim v_i \sim v_{i+1}$ olduğundan radius 2 dir.

Teorem 3.2.9 Herhangi bir Tam graf için Co-Double grafının girthi 3 tür.

$$\begin{aligned} & \vdots \\ u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \text{ } j \neq i + 1, i - 1, n \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde;

u_i ile v_{i+1} in uzaklığını inceleyelim.

$u_i \sim v_i \sim v_{i+1}$ olduğundan diameter 2 dir.

Teorem 3.2.11 Herhangi bir tekerlek graf için Co-Double grafının radiusu 2 dir.

İspat: Radius tanımı incelendiğinde, tekerlek grafın Co-Double grafının yapısı göz önüne alarak radius (yarıçapın) 2 olduğunu gösterelim.

Tekerlek Grafın Co-Double grafının komşulukları Şekil 3.2.4 den;

$$\begin{aligned} u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, n, n - 1 \\ u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 1, 3, n \\ u_3 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, 4, n \\ \vdots \\ u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \text{ } j \neq i + 1, i - 1, n \end{aligned}$$

O halde;

u_i ile v_{i-1} in uzaklığına bakarsak:

$u_i \sim v_i \sim v_{i-1}$ olduğundan radius 2 dir.

Teorem 3.2.12 Herhangi bir Tekerlek graf için Co-Double grafının girthi 3 tür.

İspat: Girth tanımı gereği, tekerlek grafın Co-Double grafi göz önüne alınarak girth in 4 olduğunu gösterelim.

Tekerlek Grafın Co-Double grafının yapısı Şekil 3.2.4 den;

$$\begin{aligned} u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, n, n - 1 \\ u_2 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 1, 3, n \\ u_3 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \text{ } i \neq 2, 4, n \\ \vdots \\ u_i \sim v_j \text{ dir } j = \overline{1, n} \text{ } j \neq i + 1, i - 1, n \end{aligned}$$

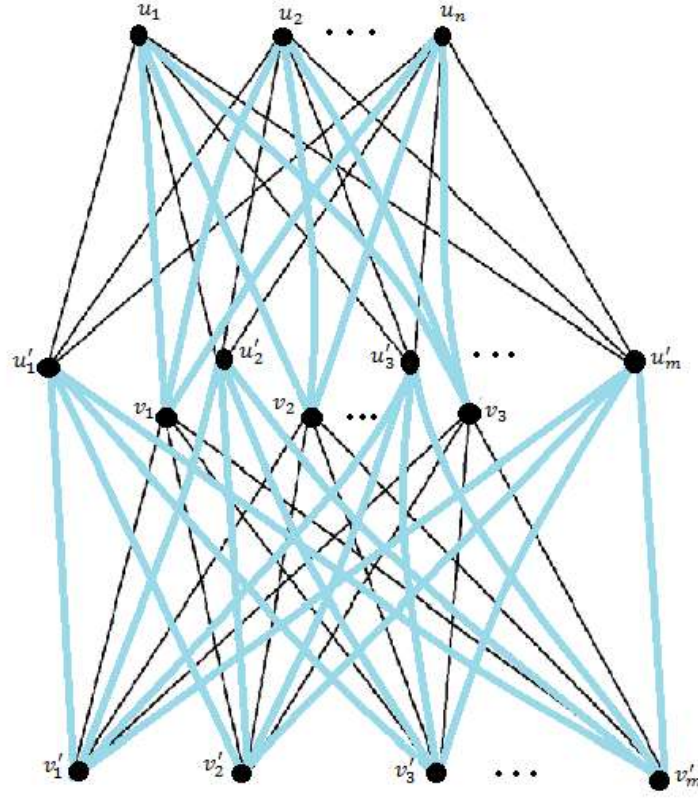
O halde;

$u_i \sim u_{i+1} \sim u_n \sim u_i$ olduğundan girth 3 tür.

Teorem 3.2.13 Herhangi bir iki parçalı tam graf için Co-Double grafının diametri 2 dir.

İspat: Diameter tanımı göz önüne alınarak, iki parçalı tam grafin Co-Double grafinin yapısını inceleyerek diameter ın (çapın) 2 olduğunu gösterelim.

İki Parçalı Tam Grafin Co-Double grafinin komşulukları;



Şekil 3.2.5 İki Parçalı Tam Grafin Co Double Grafi $CD(K_{n,m})$

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n}$$

$$u'_1 \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m}$$

$$\vdots$$

$$u_i \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n}$$

$$u'_j \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m}$$

şeklinde. O halde

u_i ile v'_i in arasındaki uzaklığı inceleyelim.

$u_i \sim v_i \sim v'_i$ olduğundan diameter 2'dir.

Teorem 3.2.14 Herhangi bir İki Parçalı Tam graf için Co-Double grafinin radiusu 2 dir.

İspat: Radius tanımı gereği, iki parçalı tam grafin Co-Double grafinin yapısını göz önüne alarak radius (yarıçapın) 2 olduğunu gösterelim.

İki Parçalı Tam Grafin Co-Double grafinin yapısı Şekil 3.2.5 den;

$$u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n}$$

$$\begin{aligned}
u'_1 \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m} \\
\vdots \\
u_i \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \\
u'_j \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m}
\end{aligned}$$

O halde

u_i ile v'_{i+1} in uzaklığına bakalım.

$u_i \sim v_i \sim v'_{i+1}$ olduğundan radius 2'dir.

Teorem 3.2.15 Herhangi bir İki Parçalı Tam graf için Co-Double grafının girthi 4 tür.

İspat: Girth tanımı düşünülerek, iki parçalı tam grafın Co-Double grafının komşulukları göz önüne alınarak girth in 4 olduğunu gösterelim.

İki Parçalı Tam Grafın Co-Double grafının komşulukları Şekil 3.2.5 den;

$$\begin{aligned}
u_1 \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \\
u'_1 \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m} \\
\vdots \\
u_i \sim v_i \text{ dir } i = \overline{1, n} \\
u'_j \sim v'_j \text{ dir } j = \overline{1, m}
\end{aligned}$$

O halde

$u_i \sim v_i \sim v'_i \sim u'_i \sim u_i$ olduğundan girth 4'tür.

Teorem 3.2.16 G grafının, Co Double grafi

$$rad[CD(G)] = diam[CD(G)] = 2$$

dir.

İspat: $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olsun.

O halde $V[CD(G)] = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$.

Tanımdan;

$$\begin{aligned}
u_i, u_j \in E(G) &\Rightarrow d_{CD(G)}[u_i, u_j] = 1 \\
u_i, u_j \notin E(G) &\Rightarrow d_{CD(G)}[u_i, u_j] = 2 \text{ dir.} \\
&(\text{Çünkü; } u_i \sim u'_j \sim u_j) \\
&d_{CD(G)}[u_i, u'_i] = 1 \\
u_i, u_j \in E(G) &\Rightarrow d_{CD(G)}[u_i, u'_j] = 2 \\
&(\text{Çünkü ; } u_i \sim u_j \sim u'_j)
\end{aligned}$$

$$u_i u_j \notin E(G) \Rightarrow d_{CD(G)}[u_i, u_j] = 1.$$

Dolayısıyla $ecc(u_i) = 2$ ($\forall u_i \in V(CD(G))$)

Benzer şekilde $ecc(u'_i) = 2$ ($\forall u'_i \in V(CD(G))$)

Buradan; $CD(G)$ self-centered graftır. Yani;

$$rad[CD(G)] = diam[CD(G)] = 2.$$

Teorem 3.2.17. T , n köşeli bir ağaç graf. O halde;

$$girth[CD(T)] = \begin{cases} 4, & T \cong P_2, P_3, S_n \\ 3, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

İspat:

Kolayca kontrol edilebilir;

$$T \cong P_2 \text{ ise } girth[CD(T)] = 4$$

$$T \cong P_3 \text{ ise } girth[CD(T)] = 4$$

$$T \cong S_n \text{ ise } girth[CD(T)] = 4$$

$T \not\cong P_2, P_3, S_n$ olsun. Yani T , $d \geq 4$ olacak şekilde alalım. $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ diameter reel yola sahip. Bu durumda $v_1 \sim v'_3 \sim v'_4 \sim v_1$ olup tanım gereği $girth(T) = 3$ tür.

Teorem 3.2.18. G unicyclic graf olsun. O halde

$$girth[CD(G)] = \begin{cases} 3, & G \cong C_3 \\ 4, & G \cong C_4 \\ 3, & G \cong C_n \end{cases}$$

- $G \cong C_n$ ise önceki bilgiden

$$girth[CD(C_4)] = 4$$

$$girth[CD(C_n)] = 3, (n \neq 4, n \geq 3)$$

- Varsayalım $G \cong C_n$ olsun. O halde G bir C_p deviri ve devire ait olmayan $n - p$ köşe içerir. Yani $v_1, v_2 \in E(C_p)$ ve $v_3 \notin V(C_p)$ olacak şekilde v_1 ve v_2 ye komşu olmayan bir v_3 köşesi mevcuttur. Co Double grafinin tanımından,

$$v_1 \sim v'_3 \text{ ve } v_2 \sim v'_3 \text{ olacağından};$$

$$v_1 \sim v_2 \sim v'_3 \sim v_1 \text{ dir.}$$

O halde $girth[CD(G)] = 3$ olur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tezde genel graf tanımı ve parametreleri verilmiştir. Bunun yanı sıra CoDouble Grafın tanımı verilip bazı parametrelerin;

- Çapın 2,
- Yarıçapın 2,
- Girth in

$$girth[CD(P_n)] = \begin{cases} 4, & n = 2,3 \\ 3, & n = 4 \end{cases}$$

$$girth[CD(C_n)] = \begin{cases} 3, & n = 3 \\ 4, & n = 4 \\ 3, & n \geq 5 \end{cases}$$

$$Girth(CD(G)) = \begin{cases} 4 \text{ if} & G = K_{n,m} \\ 3 \text{ if} & G = K_n, W_n \end{cases},$$

olduğundan bahsedilmiştir.

4.2 Öneriler

Bu tezde tanımlanan Co Double Grafi graf teori alanında çalışmak isteyen araştırmacılar için iyi bir çalışma konusu olabilir. Ayrıca bizim tanımladığımız gibi bir grafi da tanımlayıp özelliklerini inceleyebilirler.

5. KAYNAKLAR

Akgüneş, N., 2013, Graf Parametreleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Akgüneş, N., Çevik., A., S., A New Bound of Radius with Irregularity Index, *Applied Math. And Comp.*, 219 (11), 5750-5753.

Ascioglu M., Cangul N., 2018, Narumi-Katayama index of the subdivision graphs.

Berge, C., 1962, The Theory of Graphs and Its Applications, x+247 pp. Wiley, New York Translated by Alison Doig Methuen & Co. Ltd., London.

Bondy, J., A., Murty, U., S., R., 1976, Graph Theory with Applications, *The Macmillan Press Ltd.*, Great Britain.

Cizek N., Klavzar S., 1994, On the chromatic number of the lexicographic product and the cartesian sum of graphs, *Discrete Math.*, 134, 17-24.

Dankelmann, P., Entringer, R.C., 2000, Average distance, minimum degree and spanning trees, *J. Graph Theory* 33, 1–13.

Doyle, J. K., Graver, J. E., 1977, Mean Distance in a Graph, *Discrete Mathematics*, 17, 147-154.

Dündar, P., 2001, Accessibility number and the neighbor-integrity of generalised Petersen graphs, *Neural Network World*, 2, 167-174.

Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., Tuza, Z., Radius, Diameter and Minimum Degree, *J. Combin. Theory Ser., B* 47, 73-79.

Geller D., Stahl S., 1975, The chromatic number and other parameters of the lexicographic product, *J. Combin. Theory Ser., B* 19, 87-95.

Gross, J. L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall, CRC Press*.

Hedetnemi S., 1966, Homomorphisms of graphs and automata, *Univ Michigan*, Technical Report 03105-44-T.

Ivanciuc, O., Balaban, T. S., Balaban, A. T., 1993, Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices, *J. Math. Chem.* 12 , 309-318.

Kouider, M., Winkler, P., 1997, Mean Distance and Minimum Degree, *Journal of Graph Theory*, 25, 95-99.

Ostrand, P., A., Graphs with Specified Radius and Diameter, *Discrete Math.*, 4 (1973) 71-75.

Sabidussi, G., 1957, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *J.*

Math.

Mukwembi, S., 2012, A Note on Diameter and The Degree Sequence of a Graph, *Applied Mathematics Letters* 25, 175-178.

Munarini E., Cippo P., Scagliola A., Salvi N., 2008, Double Graphs.

Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z., 1993, On the Harary index for the characterization of chemical graphs, *J. Math. Chem.* 12, 235-250.

Vukičević, D., Furtula, B., 2009, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges. *J. Math. Chem.* 46, 1369-1376.

Vukičević, D., Graovac, A., 2010, Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices. *Acta Chim. Slov.* 57, 524-528 .

Yurttas A., Togan M., Cangul N., 2016, Zagreb indices and multiplicative Zagreb indices of subdivision graphs of double graphs.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Raziye GÜRBÜZ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya-11.06.1996
Telefon : 05377019271
e-mail : razigul47@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Muhittin Güzel Kılınç Lisesi, Meram, Konya	2014
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	2018
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	
Doktora	:	

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR