T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE UYUMLU TÜREV OPERATÖRÜ

Muhammed Mustafa YADİGAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2024
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Muhammed Mustafa YADİGAR tarafından hazırlanan "*LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE UYUMLU TÜREV OPERATÖRÜ*" adlı tez çalışması 28/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Doç. Dr. Haldun Alpaslan PEKER	_______________
Danışman	
Doç. Dr. Mehmet YAVUZ	_______________
Üye	
Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN	_______________

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../ .../20.. gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Muhammed Mustafa YADİGAR

Tarih: 28/06/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE UYUMLU TÜREV OPERATÖRÜ

Muhammed Mustafa YADİGAR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

2024, ix+55 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Mehmet YAVUZ
Doç. Dr. Haldun Alpaslan PEKER
Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Literatürde, geleneksel denklemlerden farklı olarak daha karmaşık olayları daha doğru bir şekilde modelleme yetenekleri nedeniyle doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler üzerine yoğunlaşılmakta ve bu denklemler için analitik ve yaklaşık çözümler aranmaktadır. Bu tezde, literatürdeki doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modellerin bazı yaklaşık çözüm yöntemleri, uyumlu (conformable) türev operatörü anlamında incelenmiştir. Bu matematiksel modellerin birçok yöntemle çözülebilmeleri, en uygun yöntemin seçilmesi fırsatını sunmaktadır. Çalışmada uyumlu türev operatörünün hangi yöntemlerde ve modellerde/denklemlerde başarılı sonuçlar verdiği literatüre atıf yapılarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, uyumlu türev operatörü, matematiksel modelleme

ABSTRACT

MS THESIS

CONFORMABLE DERIVATIVE OPERATOR IN SOLVING NONLINEAR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Muhammed Mustafa YADİGAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet YAVUZ

2024, ix+55 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Mehmet YAVUZ
Assoc. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER
Asst. Prof. Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN

In the literature, there is a focus on nonlinear fractional differential equations due to their ability to model more complex phenomena more accurately than traditional equations, and analytical and approximate solutions for these equations are sought. In this thesis, several approximate solution methods for mathematical models consisting of nonlinear fractional order differential equations are examined in terms of the conformable derivative operator. The ability to solve these mathematical models using different methods provides the opportunity to select the most suitable method. In the study, the methods and models/equations in which the conformable derivative operator gives successful results are examined with reference to the literature.

Keywords: Conformable derivative operator, nonlinear fractional order differential equations, mathematical modelling

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince ilgilenip, desteklerini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mehmet YAVUZ'a, bu süreç boyunca hep yanımda olup destekleyen aileme, özellikle babam Abdullah YADİGAR'a ve sevgili eşim Nurşah'a içten teşekkür ederim.

Muhammed Mustafa YADİGAR

KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

α	: Alfa
$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu
$\lceil \alpha \rceil$	: α ya eşit veya α dan büyük en küçük tamsayı
T_α	: Uyumlu türev operatörü
I_α	: Uyumlu integral operatörü
D^α	: α-mertebeden kesirli türev

Kısaltmalar

KDD	: Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler
KMKDD	: Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler

1. GİRİŞ

Matematik, fizik, kimya, biyoloji, tıp, iktisat, mühendislik bilimleri gibi hemen hemen bütün bilim dalları; evrende, doğada, hayatın her alanında karşılaştığımız bilgileri anlamlandırmanın, sistematikleştirmenin, genellemenin peşine düşmüşlerdir. Genellikle de matematiksel modellemeler sayesinde bu amaçlarına ulaşabilmişlerdir. Matematiksel modeller de karşımıza basit bir cebirsel ifade, doğrusal denklem, logaritma fonksiyonu vb. olarak çıkabildiği gibi, bir diferansiyel denklem olarak da çıkabilmektedir. Günümüzde bilim ve teknolojideki gelişmelerle birlikte daha hassas ya da daha karmaşık modellemelere ihtiyaç duyulabilmektedir. İşte tam da bu noktada diferansiyel denklemler rol almaktadır. Birçok parametrenin söz konusu olduğu olaylarda matematiksel modelleme, genellikle doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemler ile yapılmaktadır. Bu denklemlerle oluşturulan modellemeler çok karmaşık görünmelerine karşın olayları daha iyi ifade edebilmemize imkan sağlamaktadır. Kesirli türevlerden oluşan, kesirli mertebeli kısmi diferansiyel denklemler (KMKDD'ler); geleneksel adi veya kısmi diferansiyel denklemlerden farklı olarak daha fazla olayı modellemek için kullanılmaktadır. KMKDD'ler, karmaşık olayları klasik tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerden daha doğru modelleme yetenekleri nedeniyle son yıllarda önemli ölçüde dikkat çekmiştir. Tam sayı olmayan mertebelerde türevin sağladığı özgürlük sayesinde, elektromanyetik dalgalar, viskoelastik sistemler vb. gibi karmaşık sistemler yüksek doğrulukla modellenebilmektedir. Finans (Yavuz ve Özdemir, 2018b,c), ekonomi (Bas vd., 2019), tıp (Ghita vd., 2021; Bonyah vd., 2022; Yavuz vd., 2023), fizik (Yokuş, 2021), elektrik (Martínez vd., 2018), biyoloji (Jena vd., 2021; Yavuz vd., 2021; Naik vd., 2020) gibi çeşitli alanlarda yapılan modellemelerde, KMKDD'ler karşımıza çıkmaktadır. Bu yapılan modellemelerle, daha hassas çözümler, modellerin davranışlarına ilişkin öngörüler ve daha fazla genelleştirilmiş bir analiz elde edilmektedir.

Kesirli türev fikri, 1695 yılında L'hospital'in Leibniz'e gönderdiği mektupta sorduğu bir soru ile ortaya çıkmıştır. Bu mektupta L'hospital, Leibniz'in türev tanımında kullandığı $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ gösteriminde $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda ne anlama geldiğini sormuştur. Daha sonraları Bernoulli de n nin tamsayı olmaması durumunda nasıl yorumlanacağını Leibniz'e sormuştur. Ancak bu sorulara yanıt olarak Leibniz bunun şimdilik bir paradoksa dönüşeceğini söylemiştir. Euler'in 1783 yılında Gamma fonksiyonunu tanımlaması ile birlikte kesirli türev tanımlarının kapısı aralanmıştır (Weilbeer, 2006). Riemann ile Liouville kesirli türev üzerinde ilk ciddi sonuçları elde eden bilim adamlarıdır. Liouville 1832 yılında e^{2x} in $\frac{1}{2}$ nci mertebeden türevi olan $\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}}e^{2x}$ i hesaplamıştır. Çalışmalarını ilerleterek Gamma fonksiyonu yardımıyla bazı fonksiyonların kesirli türevlerini tanımlamıştır (Liouville, 1834). Riemann 1866 yılında öldükten sonra yayınlanmamış çalışmaları arasında 1847 yılında yaptığı çalışması dikkat çekmiş ve bir fonksiyonun α mertebeden kesirli integralini bulduğu ortaya çıkarılarak 1876 yılında yayınlanmıştır. Riemann ve Liouville'in yaptıkları kesirli türev ile kesirli integral tanımlamaları birleştirilerek Riemann-Liouville tanımı geliştirilmiştir (Ross, 1974). 19. yüzyıldan günümüze kadar birçok bilim adamının yaptığı çalışmalarla çeşitli kesirli türev operatörleri tanımlanmıştır. Atangana-Baleanu (Atangana ve Baleanu, 2016), Caputo (Podlubny, 1998), Caputo-Fabrizio (Caputo ve Fabrizio, 2015), Hadamard (Ma ve Li, 2017), Hilfer (Hilfer, 2000a,b), Katugampola (Katugampola, 2014), Riemann-Liouville (Podlubny, 1998), Riesz (Yang vd., 2010), Uyumlu (conformable) (Khalil vd., 2014) kesirli türev tanımı gibi literatürde birçok kesirli türev tanımı vardır ve Riemann-Liouville ile Caputo tanımları en yaygın kullanılanlarıdır.

Literatürdeki her bir kesirli türev tanımının ayrı ayrı kullanışlı ve kullanışsız olduğu durumlar, problemler söz konusudur. Tam da bu sebeple her bir tanım değerlidir ve daha yeni tanımlar da yapılmaktadır. Yakın zamanda yapılan tanımlardan biri 2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından literatüre kazandırılan uyumlu (conformable) türev operatörüdür. Uyumlu türev operatörü Bölüm 2.1'de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Kesirli türevlerin yerel olmayan doğası sebebiyle kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri (KDD) çözmek zor olabilmektedir. Bu zorlukların üstesinden gelmek için çeşitli analitik ve sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Buna rağmen doğrusal (lineer) olmayan KDD'lerin analitik çözümlerini çoğu zaman elde etmek mümkün olmamaktadır fakat yaklaşık çözümler elde edilebilmektedir. Bu çözüm yöntemleri incelendiğinde, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerini içeren KDD'ler üzerinde yapılmış çok sayıda araştırma, kapsamlı bir literatür bulunmaktadır. Bu tezde nispeten yeni sayılan uyumlu (conformable) türev operatörü içeren lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde uygulanan literatürdeki yaklaşık çözüm yöntemleri Bölüm 3'te incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 $z > 0,\ z \in \mathbb{R}$ *olmak üzere Gamma fonksiyonu*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlıdır (Deming, 1944).

Tanım 2.2 $n \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere,* $\alpha \in [n-1, n)$ *için* f *fonksiyonunun* α*-mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türevi,*

$$D_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^\mathrm{n}}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx$$

şeklinde tanımlıdır (Podlubny, 1998).

Tanım 2.3 $n \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere,* $\alpha \in [n-1, n)$ *için* f *fonksiyonunun* α*-mertebeden Caputo Kesirli Türevi,*

$$D_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx$$

şeklinde tanımlıdır (Podlubny, 1998).

Caputo kesirli türevi, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için standart başlangıç koşullarının kullanımına izin verdiği için özellikle başlangıç değer problemlerinde kullanışlıdır.

2.1. Uyumlu Kesirli Türev

Khalil ve arkadaşları 2014 yılında yayınladıkları makalede, bildiğimiz klasik türev tanımında var olan fakat literatürdeki diğer kesirli türev tanımlarının sağlayamadığı bir takım eksikliklerden bahsetmişlerdir (Khalil vd., 2014). Bu makalede bahsettikleri eksiklikler şunlardır:

- Riemann-Liouville türev operatörü, eğer α bir doğal sayı değilse $D_a^\alpha(1) = 0$ eşitliğini sağlamaz. (Caputo türev operatöründe $D_a^\alpha(1) = 0$ sağlanmaktadır.)
- Diğer kesirli türev tanımları, iki fonksiyonun çarpımının türevi özelliği olarak bilinen $D_a^\alpha(f.g) = f.D_a^\alpha(g) + g.D_a^\alpha(f)$ özelliğini sağlamamaktadır.

- Diğer kesirli türev tanımları, iki fonksiyonun bölümünün türevi özelliği olarak bilinen $D_a^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.D_a^{\alpha}(f)-f.D_a^{\alpha}(g)}{g^2}$ özelliğini sağlamamaktadırlar.

- Diğer kesirli türev tanımları, $D_a^{\alpha}((f \circ g)(t)) = f^{(\alpha)}(g(t)).g^{(\alpha)}(t)$ zincir kuralını sağlamazlar.

- Diğer kesirli türev tanımları, $D^{\alpha}D^{\beta}(f) = D^{\alpha+\beta}(f)$ eşitliğini sağlamazlar.

- Bir fonksiyona Caputo kesirli türevinin uygulanabilmesi için o fonksiyonun diferansiyellenebilir olma şartı vardır.

Klasik türev tanımına benzeyen uyumlu kesirli türev tanımı yukarıdaki bu önemli özellikleri sağlamaktadır.

Tanım 2.4 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *olsun.* f *fonksiyonunun* α *mertebeden uyumlu kesirli türevi,* $\forall t > 0$ *ve* $\alpha \in (0,1)$ *için*

$$T_{\alpha}(f(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu limit varsa f *fonksiyonu* α *mertebeden diferansiyellenebilir denir (Khalil vd., 2014).*

Teorem 2.1 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ t_0 > 0,\ \ \alpha \in (0,1]$ *de* α *diferansiyellenebilir ise* f *fonksiyonu* t_0 *noktasında süreklidir (Khalil vd., 2014).*

İspat $f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon}.\varepsilon$
olduğundan,
$$\lim_{\varepsilon \to 0}(f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} . \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$$
şeklinde yazılabilir. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ yazıldığında da,
$$\lim_{h \to 0} f(t_0+h) = f^{(\alpha)}(t_0).0$$
olacaktır. Bu, $\lim_{h \to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$
anlamına gelir. Bu nedenle f, t_0 noktasında süreklidir.

Teorem 2.2 $\alpha \in (0,1]$ *ve* $t > 0$ *noktasında* f,g *fonksiyonları* α*-diferansiyellenebilir olsun. O halde,*

1. $\forall a,b \in \mathbb{R}$ *için,* $T_{\alpha}(af+bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g)$,

2. $\forall p \in \mathbb{R}$ *için,* $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$,

3. *Her* $f(t) = \lambda$ *sabit fonksiyonu için,* $T_\alpha(\lambda) = 0$*,*

4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,

5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)}{g^2}$,

6. f *diferansiyellenebilir ise* $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

olmaktadır (Khalil vd., 2014).

İspat 1, 2 ve 3 doğrudan tanımdan ispat edilir.

1. $$T_\alpha(af+bg) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(af+bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af+bg)(t)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[(af)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af)(t)] + [(bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (bg)(t)]}{\varepsilon}$$
$$= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[(f)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (f)(t)]}{\varepsilon} + b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[(g)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (g)(t)]}{\varepsilon}$$
$$= aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g).$$

2. $$T_\alpha(t^p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^p - t^p}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha} - t).[(t+\varepsilon t)^{p-1} + (t+\varepsilon t)^{p-2}.t + (t+\varepsilon t)^{p-3}.t^2 + ... + t^{p-1}]}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\varepsilon t^{1-\alpha}).[(t+\varepsilon t)^{p-1} + (t+\varepsilon t)^{p-2}.t + (t+\varepsilon t)^{p-3}.t^2 + ... + t^{p-1}]}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(t^{1-\alpha})[(t+\varepsilon t)^{p-1} + (t+\varepsilon t)^{p-2}.t + (t+\varepsilon t)^{p-3}.t^2 + ... + t^{p-1}]$$
$$= (t^{1-\alpha})[(t)^{p-1} + (t)^{p-2}.t + (t)^{p-3}.t^2 + ... + t^{p-1}]$$
$$= (t^{1-\alpha})[(t)^{p-1} + (t)^{p-1} + (t)^{p-1} + ... + t^{p-1}]$$
$$= (t^{1-\alpha})[(t)^{p-1} + (t)^{p-1} + (t)^{p-1} + ... + t^{p-1}]$$
$$= pt^{p-\alpha}.$$

3. $$T_\alpha(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda-\lambda}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{0}{1} = 0.$$

4. $$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right) + f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}\right)$$
$$= T_\alpha(f)(t)\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha(g)(t)$$
$$= T_\alpha(f)(t)g(t) + f(t)T_\alpha(g)(t).$$

5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\varepsilon}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)f(t) + g(t)f(t) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\varepsilon}$

$= \frac{g(t)}{g(t)} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$

$-\frac{f(t)}{g(t)} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$

elde edilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğundan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir. O halde $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} = \dfrac{1}{g(t)}$ yazabiliriz. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

6. $T_\alpha(f)(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$

tanımında $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alalım. Bu durumda $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ yazabiliriz; $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = t^{1-\alpha} \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$.

2.1.1. Bazı Fonksiyonların Uyumlu Kesirli Türevleri

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıda verilmiştir (Khalil vd., 2014):

- $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
- $T_\alpha(1) = 0$,
- $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$,
- $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\mathbf{sin} bx) = bx^{1-\alpha}\mathbf{cos} bx$,
- $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\mathbf{cos} bx) = -bx^{1-\alpha}\mathbf{sin} bx$,
- $T_\alpha\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = 1$,
- $T_\alpha\left(\mathbf{sin}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \mathbf{cos}\frac{t^\alpha}{\alpha}$,
- $T_\alpha\left(\mathbf{cos}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = -\mathbf{sin}\frac{t^\alpha}{\alpha}$,
- $T_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$.

Örnek 2.1 $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* $f(x) = x^4$ *fonksiyonunun* $\alpha-$*mertebeden uyumlu kesirli türevini bulalım.*

Tanım 2.4 den,

$$T_\alpha\big(f(x)\big) = T_\alpha\big(x^4\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x+\varepsilon x^{1-\alpha})^4 - x^4}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^4 + 4x^3\varepsilon x^{1-\alpha} + 6x^2\varepsilon^2 x^{2(1-\alpha)} + 4x\varepsilon^3 x^{3(1-\alpha)} + \varepsilon^4 x^{4(1-\alpha)} - x^4}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\big(4x^3x^{1-\alpha} + 6x^2\varepsilon x^{2(1-\alpha)} + 4x\varepsilon^2 x^{3(1-\alpha)} + \varepsilon^3 x^{4(1-\alpha)}\big)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\big(4x^3x^{1-\alpha} + 6x^2\varepsilon x^{2(1-\alpha)} + 4x\varepsilon^2 x^{3(1-\alpha)} + \varepsilon^3 x^{4(1-\alpha)}\big)$$
$$= 4x^3x^{1-\alpha} = 4x^{4-\alpha} \text{ olur.}$$

Tanım 2.5 $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* α*-mertebeden sol uyumlu kesirli türevi,* $(T_\alpha^a f)(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f\big(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}\big) - f(t)}{\varepsilon}$ *şeklinde tanımlıdır (Abdeljawad, 2015).*

$a = 0$ *olduğunda* T_α *yazalım. Eğer* (a,b) *aralığında* $(T_\alpha f)(t)$ *varsa* $(T_\alpha^a f)(a) = \lim\limits_{t\to a^+}(T_\alpha^a f)(t)$ *olur.*

Tanım 2.6 $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* α*-mertebeden sağ uyumlu kesirli türevi,* $({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$ *şeklinde tanımlıdır (Abdeljawad, 2015).*

$a = 0$ *olduğunda* T_α *yazılır. Eğer* (a,b) *aralığında* $({}^bT_\alpha f)(t)$ *varsa* $({}^bT_\alpha f)(b) = \lim\limits_{t\to b^-}({}^bT_\alpha f)(t)$ *olur.*

Teorem 2.3 $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* $f, g : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları* α*-diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve* $h(t) = f\big(g(t)\big)$ *olsun. Bu durumda* $h(t)$ α*-diferansiyellenebilir olacaktır ve* $t \neq a$, $g(t) \neq 0$ *sağlayan her* t *için,*

$$(T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big)(T_\alpha^a g)(t)\big(g(t)\big)^{\alpha-1}$$

olur. Eğer $t = a$ *olursa,* $(T_\alpha^a h)(a) = \lim\limits_{t\to a^+}(T_\alpha^a f)\big(g(t)\big)(T_\alpha^a g)(t)\big(g(t)\big)^{\alpha-1}$ *olacaktır (Abdeljawad, 2015).*

İspat Tanımda $u = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ yazılır ve g fonksiyonunun sürekliliğinden yararlanılırsa,

$$T_\alpha^a h(t) = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}\tfrac{f(g(u)) - f(g(t))}{u-t}t^{1-\alpha}$$
$$= \lim_{u\to t}\frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))}\lim_{u\to t}\frac{g(u) - g(t)}{u-t}t^{1-\alpha}$$
$$= \lim_{g(u)\to g(t)}\frac{f(g(u)) - f(g(t))}{g(u) - g(t)}g(t)^{1-\alpha}T_\alpha^a g(t)g(t)^{\alpha-1}$$
$$= (T_\alpha^a f)(g(t))(T_\alpha^a g)(t)g(t)^{\alpha-1}.$$

Önerme 2.1 *$\alpha, \beta \in (0,1]$ ve $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,∞) aralığında iki kere diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $1 < \alpha + \beta \leq 2$ olacaktır ve $(T^a_\alpha T^a_\beta f)(t) = T^\alpha_{\alpha+\beta} f(t) + (1-\beta)(t-\alpha^{-\beta})T^a_\alpha f(t)$ olur.*

Eğer $\alpha, \beta \to 1$ olursa $T^a_\alpha T_\beta f(t) = T_2 f(t) = f''(t)$ olacaktır (Abdeljawad, 2015).

İspat f fonksiyonunun iki kere diferansiyellenebilir olmasını göz önünde bulunduralım. O halde,

$$(T^a_\alpha T^a_\beta f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^{1-\beta}(t-a)^{-\beta}f'(t)\right]$$
$$= t^{1-\alpha}\left[t^{1-\beta}f''(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta}f'(t)\right]$$
$$= T^\alpha_{\alpha+\beta} f(t) + (1-\beta)(t-\alpha^{-\beta})T^a_\alpha f(t) \quad \text{olacaktır.}$$

Tanım 2.7 *$n < \alpha \leq n+1$ için α mertebeden uyumlu türev şöyle tanımlıdır:*
n bir doğalsayı, $t > 0$ olmak üzere, f fonksiyonu t noktasında $n-$diferansiyellenebilir olsun. $n < \alpha \leq n+1$ için f fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil \alpha - 1 \rceil)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha - 1 \rceil)}(t)}{\varepsilon}$$

Lemma 2.1 *Bu tanımın bir sonucu olarak $\alpha \in (n, n+1]$ aralığında ve f fonksiyonu $t > 0$ için $(n+1)$-diferansiyellenebilir olmak üzere, $T_\alpha(f)(t) = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{\lceil \alpha \rceil}(t)$ olduğu görülür (Khalil vd., 2014).*

Teorem 2.4 *(Rolle Teoremi)*

$a > 0$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

I. f, $[a,b]$ de süreklidir,

II. $\alpha \in (0,1)$ için f, α-diferansiyellenebilir,

III. $f(a) = f(b)$,

koşulları sağlandığı takdirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ yapan en az bir $c \in (a,b)$ vardır (Khalil vd., 2014).

İspat f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğundan, (a,b) aralığında bir yerel ekstremum noktası olan $c \in (a,b)$ bulunur. Bu c noktasının yerel minimum noktası olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

olur. Burada ilk limit negatif değildir, ikinci limit pozitif değildir. Dolayısıyla $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 2.5 *$a > 0$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,*

I. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli,

II. $\alpha \in (0,1)$ için f, α-diferansiyellenebilir,

koşulları sağlandığı takdirde $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$ sağlayan bir $c \in (a,b)$ vardır (Khalil vd., 2014).

İspat Aşağıdaki $g(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha\right).$$

g fonksiyonu Rolle Teoreminin koşullarını yerine getirir. Dolayısıyla, öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olur. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ kullanılarak istenen elde edilir.

Teorem 2.6 *(a,b) aralığında f fonksiyonu (sabit sayı olmayan) iki kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha, \beta < 1$ olmak üzere, $f(x)$ in uyumlu kesirli türevi için;*

$$T_{\alpha+\beta}(f(x)) \neq T_\alpha\big(T_\beta(f(x))\big)$$

olmaktadır (Atangana vd., 2015).

İspat f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu koşul altında aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T_\alpha(T_\beta f(x)) = T_\alpha\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon x^{1-\beta}) - f(x)}{\varepsilon}\right).$$

$\varepsilon x^{1-\beta} = h$ yazılırsa,

$$T_\alpha(T_\beta f(x)) = T_\alpha\left(x^{1-\beta}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = T_\alpha\left(x^{1-\beta}f'(x)\right)$$

olur. 2.2, 4. özelliği kullanılırsa,

$$T_\alpha(T_\beta f(x)) = T_\alpha(x^{1-\beta})f'(x) + x^{1-\beta}T_\alpha(f'(x))$$

$$T_\alpha(T_\beta f(x)) = x^{1-\beta-\alpha}\left[(1-\beta)f'(x) + xf''(x)\right]$$

olur. Diğer taraftan da,

$$T_{\alpha+\beta}(f(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f'(x+\varepsilon x^{2-\alpha-\beta}) - f'(x)}{\varepsilon}$$ ifadesine sahibiz. f fonksiyonu iki kere diferansiyellenebilir olduğundan, $l = \varepsilon x^{2-\alpha-\beta}$ yazılırsa,

$$T_{\alpha+\beta}(f(x)) = x^{2-\alpha-\beta}\lim_{l\to 0}\frac{f'(x+l)-f'(x)}{l} = x^{2-\alpha-\beta}f''(x)$$

olur. Görüldüğü üzere,

$T_{\alpha+\beta}(f(x)) \neq T_\alpha\big(T_\beta(f(x))\big)$

olmaktadır.

Sonuç f fonksiyonu sabit fonksiyon olmamak koşuluyla, (a, b) aralığında iki kere diferansiyellenebilir olsun. $0 < \alpha < 1$ ve $\beta = 1$ olmak üzere, $f(x)$ in uyumlu kesirli türevi aşağıdaki eşitliği sağlar (Atangana vd., 2015):

$T_{\alpha+\beta}(f(x)) = T_\alpha\big(T_\beta(f(x))\big)$

2.1.2. Uyumlu Kısmi Türev

$\alpha \in (0, 1]$ için m değişkenli $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_m)$ fonksiyonunun x_i değişkenine göre α-mertebeden uyumlu kısmi türevi aşağıdaki gibi tanımlıdır (Atangana vd., 2015):

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x_1, ..., x_m) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + \varepsilon x_i^{1-\alpha}, x_{i+1}, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\varepsilon}.$$

Teorem 2.7 *Kabul edelim ki* $f(x, y)$ *fonksiyonu için* $\partial_x^\alpha \left[\partial_y^\beta(f(x, y))\right]$ *ile* $\partial_y^\beta \left[\partial_x^\alpha(f(x, y))\right]$ *var olsun.* $f(x, y)$ *fonksiyonunun sürekli olduğu* $D \subset \mathbb{R}^2$ *üzerinde aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Atangana vd., 2015):*

$$\partial_x^\alpha \left[\partial_y^\beta(f(x, y))\right] = \partial_y^\beta \left[\partial_x^\alpha(f(x, y))\right].$$

Tanım 2.8 $u(x, t) : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin.* $\alpha \in (0, 1]$ *için* $u(x, t)$ *fonksiyonunun uyumlu zaman-kesirli kısmi türevi aşağıdaki gibi tanımlıdır (Teppawar vd., 2024):*

$$T_\alpha\, u(x, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x, t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - u(x, t)}{\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Bazı uyumlu zaman-kesirli türevler aşağıda verilmiştir.

$u(x, t) : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ve $v(x, t) : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\alpha \in (0, 1]$ için tanımlı oldukları bölgede α-diferansiyellenebilir olsun. $\forall p \in \mathbb{R}$ için (Teppawar vd., 2024):

- ${}_tT_\alpha(au + bv) = a\, {}_tT_\alpha(u) + b\, {}_tT_\alpha(v)$,
- ${}_tT_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
- $u(x, t) = p \Rightarrow {}_tT_\alpha u(x, t) = 0$,
- ${}_tT_\alpha(uv) = u\, {}_tT_\alpha(v) + v\, {}_tT_\alpha(u)$,

- ${}_tT_\alpha(\frac{u}{v}) = \frac{v\ ({}_tT_\alpha(u)) - u\ ({}_tT_\alpha(v))}{v^2}$,
- ${}_tT_\alpha u(x,t) = t^{1-\alpha}\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$,
- ${}_tT_\alpha^a\left((t-a)^p\right) = p(t-a)^{p-\alpha}$,
- ${}_tT_\alpha^a\left(e^{\lambda\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}+x\right)}\right) = \lambda e^{\lambda\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}+x\right)}$,
- ${}_tT_\alpha^a\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}\right) = 1.$

2.2. Uyumlu Kesirli İntegral

$\alpha \in (0,1)$ ve $c \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α-mertebeden uyumlu kesirli integrali,

$$I_\alpha^c(f)(t) = I_1^c(t^{\alpha-1}f) = \int_c^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx$$

genelleştirilmiş Riemann integrali ile ifade edilir (Khalil vd., 2014).

2.2.1. Polinomik Fonksiyonların Uyumlu Kesirli İntegrali

İntegral alma söz konusu olduğunda fonksiyonun sürekli olması gerekmektedir. Eğer sürekli değilse de Weierstrass teoremini kullanarak polinomik bir fonksiyona yakınsatılabilir. Bu nedenle kesirli integrali polinomlar üzerinde tanımlamamız çoğu zaman yeterli olacaktır.

$\alpha \in (0,\infty)$ olsun. $f(t) = t^p$ fonksiyonunun α-mertebeden kesirli integrali, $\forall p \in \mathbb{R}$ için $\alpha \neq -p$ olmak üzere $J_\alpha(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ tanımlayalım.
Eğer $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ ise,

$$J_\alpha\big(f(t)\big) = \sum_{k=0}^{n} b_k J_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}.$$

Eğer $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ ve seri düzgün yakınsak ise,

$$J_\alpha\big(f(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k J_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

şeklinde tanımlıdır. Dikkat edilirse, $\alpha = 1$ ise J_α klasik integraldir (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.8 *$\alpha \in (0,1)$ ve f sürekli bir fonksiyon olsun. $t \geq c$ için, $T_\alpha\big(I_\alpha^c(f)\big)(t) = f(t)$ olur (Khalil vd., 2014).*

İspat f fonksiyonu sürekli olsun. O halde $I_\alpha^c(f)(t)$ diferansiyellenebilirdir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T_\alpha\big(I_\alpha^c(f)\big)(t) &= t^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_\alpha^c(f)(t) \\ &= t^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_c^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \\ &= t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Lemma 2.2 *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Her $t > 0$ için $I_\alpha^a T_\alpha^a(f) = f(t) - f(a)$ olur (Abdeljawad, 2015).*

İspat f diferansiyellenebilir olduğundan 2.2 teoremindeki (6) yardımıyla,

$$\begin{aligned} I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} T_\alpha(f)(x)dx \\ &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1}(x-a)^{1-\alpha} f'(x)dx \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 2.2 *$\alpha \in (n, n+1]$ ve $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t > a$ için $(n+1)$ kere diferansiyellenebilir olsun. Her $t > 0$ için Lemma 2.2,*

$$I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

şeklinde genelleştirilir (Abdeljawad, 2015).

İspat Tanım 2.4 ve Teorem 2.2 deki 6. özellik yardımıyla,

$$\begin{aligned} I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) &= I_{n+1}^a\left((t-a)^{\beta-1}T_\beta^a f^{(n)}(t)\right) \\ &= I_{n+1}^a\left((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t)\right) \\ &= I_{n+1}^a f^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

olur. Buradan integrasyon Önerme 2.3'ü verecektir.

Önerme 2.3 *$\alpha \in (n, n+1]$ ve $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t < b$ için $(n+1)$ kere diferansiyellenebilir olsun. Her $t < b$ için,*

$$ {}^{b}I_{\alpha}{}^{b}T_{\alpha}(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!} $$

olur. $n = 0$ veya $0 < \alpha \leq 1$ ise ${}^{b}I_{\alpha}{}^{b}T_{\alpha}(f)(t) = f(t) - f(b)$ olmaktadır (Abdeljawad, 2015).

Önerme 2.4 *$\alpha \in (n, n+1]$ ve $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t < b$ için $(n+1)$ kere diferansiyellenebilir olsun. Her $t < b$ için,*

$$ {}^{b}I_{\alpha}{}^{b}T_{\alpha}(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!} $$

olur. $n = 0$ veya $0 < \alpha \leq 1$ ise ${}^{b}I_{\alpha}{}^{b}T_{\alpha}(f)(t) = f(t) - f(b)$ olmaktadır (Abdeljawad, 2015).

2.3. Uyumlu Kesirli Kuvvet Serisi

f fonksiyonu t_0 noktasının bir komşuluğundaki bazı $0 < \alpha \leq 1$ için sonsuz α-diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonunun uyumlu kesirli kuvvet serisi açılımı;

$$ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)\,(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!},\ t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}\,,\ R > 0 $$

şeklindedir. Burada $(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}$, uyumlu kesirli türevin k kere uygulanması anlamına gelmektedir (Abdeljawad, 2015).

Önerme 2.5 *f fonksiyonunun sonsuz α-diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım; t_0 noktasının komşuluğundaki bazı $0 < \alpha \leq 1$ için 2.3'dan Taylor kuvvet serisi temsiline sahiptir, öyle ki bazı $n \in \mathbb{N}$ 'ler için $|(T_{\alpha}^{\alpha} f)^{n+1}| \leq M$, $M > 0$ olur. Daha sonra, bütün $(t_0, t_0 + R)$ için*

$$ |R_n^{\alpha}(t)| \leq \frac{M}{\alpha^{n+1}(n+1)!}(t-t_0)^{\alpha(n+1)}, $$

burada $R_n^{\alpha}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$ 'dir (Abdeljawad, 2015).

Örnek 2.2 $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $f(t) = e^{\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}$ *kesirli üstel fonksiyonunu inceleyelim.* $f(t)$ *fonksiyonu* t_0 *noktasında açıkça türevlenebilir değildir ve dolayısıyla* t_0 *civarında Taylor kuvvet serisi gösterimi yoktur. Bununla birlikte her* n *için* $(T_\alpha^{t_0} f)^{(n)}(t_0) = 1$ *'dir ve dolayısıyla,*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$$

serisidir. Oran testi, bu serinin $[t_0, \infty)$ *aralığında* f*'ye yakınsak olduğunu göstermektedir (Abdeljawad, 2015).*

Örnek 2.3 $g(t) = sin\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)$ *ve* $h(t) = cos\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)$ *fonksiyonları* $0 < \alpha < 1$ *için* t_0 *civarında diferansiyellenebilir olmadıklarından Taylor kuvvet serisi açılımlarına sahip değillerdir.*
Ancak $T_\alpha^{t_0} sin\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right) = cos\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)$ *ve* $T_\alpha^{t_0} cos\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right) = -sin\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)$ *olduğundan 2.3 yardımıyla,*

$$sin\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{(t-t_0)^{(2k+1)\alpha}}{\alpha^{(2k+1)}(2k+1)!}\right),\ t \in [t_0, \infty)$$

ve

$$cos\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{(t-t_0)^{(2k)\alpha}}{\alpha^{(2k)}(2k)!}\right),\ t \in [t_0, \infty)$$

yazılabilir (Abdeljawad, 2015).

3. DOĞRUSAL OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin uyumlu türevden yararlanarak yaklaşık çözümlerini elde ederken kullanılan yöntemler incelenecektir. Bu yöntemleri iki sınıfa ayırabiliriz; sayısal (nümerik) yöntemler ve yaklaşık analitik yöntemler. Sayısal (nümerik) yöntemler direkt hata vererek yaklaşık çözümler elde edilen yöntemlerdir. Yaklaşık analitik yöntemler ise serilerle ifade edilen çözümlerin üretildiği yöntemlerdir, çözümlerde son terimlerin kesilerek çok ufak bir kesme hatası ile, veya bütün serinin limitinin yakınsadığı değer alınarak yaklaşık çözümler elde edilir. Doğrusal olmayan KDD'lerin çözümleri, geleneksel diferansiyel denklemlere kıyasla daha karmaşıktır ve analitik çözümleri genellikle elde edilememektedir. KDD'lerin çözümlerini elde etmek için literatürde birçok yöntem mevcuttur. Her geçen gün yeni yöntemler literatüre kazandırılmaktadır. Çözüm yöntemlerinin sayıca fazla olmasının sebebi olarak, kullanılan kesirli türev tanımlarından, denklemlerin yapılarına kadar birçok etken vardır. Uyumlu türev operatörü ile birlikte kullanılan çözüm yöntemlerinden bazıları şunlardır;

- $\left(\frac{1}{G'}\right)$-Genişleme yöntemi
- $exp\big(-\varphi(\xi)\big)$-genişleme yöntemi
- $tan\big(\phi(\eta)/2\big)$-genişleme yöntemi
- $tan\big(\kappa(\rho)\big)$-genişleme yöntemi
- Alt denklem yöntemi
- Ansatz yöntemi
- CDSE-ayrıştırma yöntemi
- Diferansiyel dönüşüm yöntemi
- Doğrudan yöntem
- Genelleştirilmiş $exp\big(-\varphi(\xi)\big)$-genişleme yöntemi
- Genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem

- Homotopi pertürbasyon yöntemi
- İlk integral yöntemi
- İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi
- Modifiye Kudryashov yöntemi
- Optimal yardımcı fonksiyon yöntemi
- q-Homotopi analiz yöntemi
- Rasyonel sine-Gordon genişlemesi yöntemi
- Rezidual kuvvet serisi yöntemi
- Sine-Gordon genişleme yöntemi
- Sonlu farklar yöntemi
- Uyumlu kesirli (G'/G)-genişleme yöntemi
- Uyumlu kesirli Adomian ayrıştırma yöntemi
- Uyumlu kesirli modifiye homotopi perturbasyon yöntemi
- Uyumlu Laplace ayrıştırma yöntemini
- Uyumlu Mohand Adomian ayrıştırma yöntemi
- Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi
- Uyumlu q-Mohand homotopi analiz yöntemi
- Uyumlu varyasyonel yineleme yöntemini
- Üreme çekirdeği Hilbert uzay yöntemi .

Şimdi bu yöntemlerle ilgili literatürdeki çalışmalara göz atalım:

Yavuz (2017) Adomian ayrıştırma yöntemini ve modifiye homotopi pertürbasyon yöntemini uyumlu türev ile tanımlayarak bu yöntemlerin çözüm metodolojilerini vermiştir. Yöntemleri kesirli kısmi diferansiyel denklemler üzerinde kullanarak bazı başlangıç sınır değer problemlerini çözmüş ve yöntemlerin verimliliklerini göstermek için çözümleri karşılaştırmıştır. Ayrıca, önerilen yöntemlerin, uyumlu kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemler için yaklaşık çözümler bulmada verimli ve güçlü teknikler olduğu sonucuna varmıştır.

Yavuz ve Özdemir (2018a) Adomian ayrıştırma ve modifiye homotopi pertürbasyon yöntemlerini uyumlu türev ile birlikte kullanarak kesirli Black-Scholes modellerinin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Uyguladıkları yöntemlerin verimliliklerini göstermek için, fiyatlandırmada gerçek piyasa verilerini kullanarak bu iki farklı fiyatlandırma probleminin sayısal ve kesin çözümlerini karşılaştırmışlardır. Sonuç olarak yöntemlerin uyumlu türevli Black-Scholes modellerinin yaklaşık çözümlerini bulmada verimli ve güçlü teknikler olduklarını belirtmişlerdir.

Yavuz ve Özdemir (2019) Adomian ayrıştırma yöntemini ve modifiye homotopi pertürbasyon yöntemini uyumlu türev anlamında ele almışlardır. Bazı uyumlu türevli tek boyutlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için bu iki yöntemin çok verimli ve güçlü teknikler olduklarını, üç problemin sayısal ve kesin çözümlerini bulup karşılaştırarak göstermişlerdir.

Ayata ve Ozkan (2020) uyumlu Laplace ayrıştırma yöntemini vermişlerdir. Bu yöntem, uyumlu Laplace dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yönteminin birleşiminden oluşmaktadır. Doğrusal veya doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerinin bulunmasında kullanılmaktadır. Bu çalışmada kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemine uyumlu Laplace ayrıştırma yöntemini uygulamışlardır. Sonuç olarak, yöntemin kesirli diferansiyel denklemleri çözmede etkili olduğunu göstermişlerdir.

Ahmed vd. (2024) CDSE-ayrıştırma yöntemi adını verdikleri yöntem; uyumlu çift Sumudu-Elzaki dönüşümünü ve Adomian ayrıştırma yöntemini birleştiren bir kombinasyondur. Bazı özel koşulları dikkate alarak doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için sundukları bu yöntemin ana özelliklerini ve ana sonuçlarını açıklamışlardır. CDSE-ayrıştırma yöntemini uyguladıkları problemlerde, kesin çözüme yüksek yakınsaklığa sahip seri çözümler üretmişlerdir.

Javeed vd. (2019) Homotopi pertürbasyon yöntemini kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için analiz etmişlerdir. Birleşik bir yakınsama teoremi vermişlerdir. Teoriyi doğrulamak için kesirli sıralı Burger-Poisson denkleminde bu yöntemi uygulamışlardır. Ayrıca, bu yöntemi kesirli mertebeden karmaşık bir sınır değer problemine uygulamışlardır. Her iki örnek için grafikler üzerinden yorumlar yaparak yöntemin başarılı olduğunu, hem doğrusal hem de doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için bu yöntemin uygulanabilir olduğunu belirtmişlerdir. Bu çalışmada verilen teori, kesirli mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için Adomian ayrıştırma yöntemi ve homotopi analiz yöntemi gibi diğer geleneksel analitik teknikler uygulandıktan sonra çözümleri analiz etmek için yararlı olabilir.

Yavuz ve Özdemir (2018) q-Homotopi analiz yöntemini uyumlu türev ile kullanarak kesirli Cauchy probleminin analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Kesirli Cauchy diferansiyel denkleminin homojenliğine ve doğrusallığına göre farklı durumları ele almışlar ve elde ettikleri sonuçların analizini yapmışlardır. Sonuç olarak elde edilen çözümlerin kesin çözümlere yaklaştığını grafiklerle göstermişlerdir.

Avit ve Anac (2024) Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemini uyumlu kesirli türevli doğrusal olmayan Kuramoto-Sivashinsky denklemleri üzerinde kullanmışlardır. Elde edilen seri çözümün yakınsama aralığını h-eğrileri ile göstermişlerdir. Uyumlu kesirli doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri incelemede ve çözmede dikkate değer bir hesaplama hassasiyeti olduğu sonucuna varmışlardır.

Yavuz ve Yaşkıran (2018) İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uyumlu türevle tanımlamışlardır. Zaman-kesirli tek boyutlu kablo diferansiyel denklemini çözmek için uyumlu türevli modifiye homotopi pertürbasyon yöntemi ve doğrusal-doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için çözümlerden türetilen uyumlu türevle tanımlanan indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak kesirli kablo denkleminin yaklaşık-analitik çözümü için yeni formülasyonlar sunmuşlardır. Bu yöntemlerin verimliliklerini göstermek için, kesirli nöronal dinamikler probleminin sayısal ve kesin çözümleriyle karşılaştırmışlardır. Ayrıca, önerilen modellerin, uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için yaklaşık-analitik çözümlerin belirlenmesinde etkili olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Mamat vd. (2020) Diferansiyel dönüşüm yöntemi daha çok Caputo ve Riemann–Liouville türevleriyle kullanılmaktadır. Bu makalede uyumlu kesirli türev uygulamalarıyla birlikte uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini önermişlerdir.

Teppawar vd. (2024) Uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak; bir ve iki boyutlu zaman-kesirli kısmi doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin başlangıç değerleriyle çözümünü tahmin etmek için yeni bir teknik kullanmışlardır. Mathematica yazılımını kullanarak, bu yeni teknikle elde ettikleri çözümleri 2D ve 3D grafiklerle gösterip analiz etmişlerdir.

Günerhan vd. (2021) Uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi ile doğrusal olmayan uyumlu kesirli lojistik denklemlerinin analitik ve yaklaşık analitik çözümleri çözümlerini bulmuşlardır. Burada elde ettikleri çözümlerle, homotopi pertürbasyon yöntemiyle elde edilen çözümleri ve kesin çözümleri karşılaştırıp, grafikler üzerinden analiz etmişlerdir. Sonuç olarak geçerli ve etkin bir yöntem olduğunu göstermişlerdir.

Avcı ve Anaç (2023) Uyumlu q-Mohand homotopi analiz yöntemi (Uq-MHADY) ile Uyumlu Mohand Adomian ayrıştırma yöntemi (UMAAY) isimlerini verdikleri iki yeni yöntem önermişlerdir. Bu yöntemlerden ilki olan Uq-MHADY, q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi ile uyumlu Mohand dönüşümünün birleşiminden oluşan hibrit bir yöntemdir. Diğer yöntem olan CMADM ise Adomian ayrıştırma yöntemi ile uyumlu Mohand dönüşümünün birleşiminden oluşan hibrit bir yöntemdir. Bu yöntemleri, oransal gecikmeli doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin yeni sayısal çözümlerini araştırmak için kullanmışlardır. Önerilen yöntemlerin etkin çalıştığını ve güvenilir olduğunu göstermek için bilgisayar simülasyonları yapmışlardır. Kesin çözümler, bulunan çözümlerle karşılaştırıldığında, yeni tekniklerin her ikisinin de başarılı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca bu iki yöntemin, oransal gecikmeli doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklem çözmek için iyi çalışan, basit ve güçlü yöntemler olduğunu belirtmişlerdir.

Al-Smadi vd. (2020a) Rezidual kuvvet serisi yöntemini uyumlu türev kullanarak, doğrusal olmayan Schrödinger sınıfından kesirli Kundu-Eckhaus ve massive Thirring modellerinin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için kullanmışlardır. Bu yöntem, uyumlu kuvvet serilerinin genelleştirilmesine dayalı bir dizi periyodik dalga serisi çözümü oluşturmak için sistematik bir prosedür sunar ve bilinmeyen katsayıları basit bir düzende verir. Önerilen yaklaşım tarafından oluşturulan yaklaşık çözümler, varsa kesin çözümler, q-homotopi analiz dönüşüm yöntemiyle ve Laplace Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar üzerinden, önerilen yöntemin uygulanmasının kolay olduğunu ve bazı doğrusal olmayan uyumlu kesirli sistemlerin çözümünde hesaplama açısından kullanışlı olduğunu belirtmişlerdir.

Al-Smadi vd. (2020b) Üreme çekirdeği Hilbert uzay yöntemini, doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli rezonans Schrödinger denklemi ve doğrusal olmayan birleştirilmiş uyumlu kesirli Schrödinger denklemlerinin sınıflarını çözmek için yeni bir analitik yaklaşım olarak tanıtmışlardır. Uyumlu rezidual kuvvet serilerine dayanan bu yöntemin çözüm metodolojisi; hata fonksiyonlarını en aza indirerek güvenilir dalga modeline sahip sonsuz uyumlu bir seri çözümü oluşturmakta yatmaktadır. Ayrıca bu makalede birkaç sayısal uygulama yaparak yöntemin yeterliliğini ve kapasitesini incelemişlerdir. Bu yaklaşımı kullanmanın avantajının, diğer mevcut yöntemlere kıyasla yüksek doğruluk yakınsamasına sahip olduğu ve yeni uyumlu türev kullanılarak ortaya çıkan birçok kesirli modelle başa çıkmak için fizibilite, kararlılık, uygunluk açısından çeşitli avantajları olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Shqair vd. (2020) Uyumlu kesirli rezidual kuvvet serisi yöntemiyle, doğrusal olmayan kesirli Schrödinger modelinin çözümü elde edilmiştir. Analitik çözüm, kesilmiş bir uyumlu kesirli serinin yerine konulması ve hızlı yakınsayan kesirli seride destekleyici bir yaklaşık çözüm elde etmek için rezidual hataların en aza indirilmesi yoluyla uyumlu Taylor serisi açılımı kullanılarak elde edilmiştir. Elde ettikleri sayısal sonuçları grafiklerle göstererek yaptıkları analizler sonucunda, yöntemin güçlü bir araç olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Liaqat vd. (2022) Uyumlu kesirli kuvvet serisi yöntemi doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için sunulan bir yöntemdir. Rezidual kuvvet serisi yönteminden farklı olarak, bir seri için katsayıları üreterek her durumda kesirli türevleri hesaplamak zorunda olunmayan bu yöntemde katsayıları eşitleme fikri yeterlidir. Bu yöntemi kullanarak üç problem çözüp analiz etmişlerdir. Doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözerken homotopi analizi ve Adomian ayrıştırma yöntemlerine göre üstün olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca seri çözümlerin yakınsama ve hata analizlerini de sunmuşlardır.

Mabrouk vd. (2024) Sine-Gordon genişlemesi yöntemini, doğrusal olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli Vakhnenko-Parkes denklemini ve modifiye edilmiş versiyonunun çözümünü araştırmak için kullanmışlardır. Bu yöntemde, kesirli modeller eşdeğer bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Bu çalışmada grafikleriyle birlikte verdikleri çözümler, fiberlerdeki ultra hızlı optiklerin davranışını ve fiber optik boyunca dalga yayılımını incelemeye yardımcı olmaktadır.

Mamun vd. (2024) Rasyonel sine-Gordon genişlemesi yöntemi adını verdikleri yöntemle, doğrusal olmayan kesirli Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) kısmi diferansiyel denklemler ailesini çözmek için sine-Gordon genişlemesi yöntemini genelleştirmişlerdir. Bu yöntemde sine-Gordon genişlemesi yönteminden farklı olarak, yardımcı denklemin çözümlerindeki bir polinomdan ziyade daha genel bir yaklaşım yapılması; rasyonel bir fonksiyon alınması fikri vardır. Bu çalışmada, yöntem tanıtıldıktan sonra WBBM denklemlerinin çeşitli çözümlerini elde etmişlerdir ve grafikler üzerinde analizler yapmışlardır.

Hosseini vd. (2017) Modifiye Kudryashov yöntemi ile doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli Klein-Gordon denklemlerini çözmüşlerdir. Bu denklemler katı hal fiziği, optik ve kuantum alan teorisindeki bazı fiziksel olayların tanımlanmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Kumar vd. (2018) Modifiye Kudryashov yöntemi bazı uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için yeni kesin çözümler oluşturmak için kullanılmaktadır. Uyumlu kesirli türev ve uyumlu kesirli kompleks dönüşümler uygulanarak, kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing model denklemi, kesirli biyolojik popülasyon modeli ve ikinci dereceden ve kübik doğrusal olmayan kesirli difüzyon reaksiyon modeli denklemlerine bu yöntemi uygulamışlardır. Sonuç olarak, bazı yeni kesin çözümler elde etmişlerdir.

Ekici (2024) Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi ile uyumlu kesirli türev kullanarak, (3+1)-boyutlu zaman kesirli Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu zaman-kesirli modifiye KdV-Zakharov-Kuznetsov denklemi ve (2+1)-boyutlu zaman kesirli Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota denklemi olmak üzere üç önemli denklem için çözümler elde etmiştir. Genelleştirilmiş Kudryashov yönteminin, doğrusal olmayan denklemleri çözmekte etkili bir yöntem olduğunu göstermiştir.

Alqaraleh vd. (2022) Ansatz yöntemini tanıttıktan sonra, doğrusal olmayan evolasyon denklemlerinin benzer sistemlerinin kesin çözümlerini elde etmede ansatz yönteminin etkinliğini göstermek için bazı sayısal örnekler vermişlerdir. The Fractional-Six-Wave-Interaction-Equations olarak adlandırılan uyumlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin kesirli doğrusal olmayan bir evolasyon sistemini türetmek için, doğrusal olmayan operatörlerin Lax çiftini göz önüne almışlardır. Bu yöntemin fikri, sayısal davranışını inceleyerek çözümün kompakt bir formunu tahmin etmek ve daha sonra bu formu çalışılan sistemde yerine koyarak bulmaya çalışmaktır. Bu yöntem genellikle çok sayıda çözülemeyen denklem içeren doğrusal olmayan cebirsel bir sistem üretir, bu yüzden çözümün tam formunun bazı terimleri gözden kaçabilir ve ansatzın tahmin edilen formu bir sonuca yol açmayabilir.

Eslami vd. (2024) Genelleştirilmiş üstel rasyonel fonksiyon yöntemini, uyumlu zaman-kesirli doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere kesin çözümler elde etmek için yenilikçi bir yaklaşım olarak önermişlerdir. Bu yöntemde kesin çözümler trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonları içerir. Yöntemin etkinliğini değerlendirmek için, uyumlu zaman-kesirli Hybrid Lattice denklemine uygulamışlardır. Çözümleri 3D, 2D ve Contour grafikleri üzerinden incelemişlerdir.

Ali vd. (2024) Sonlu fark yöntemini ve basit denklem yöntemini kullanarak iki farklı modelin, doğrusal olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli telgraf ve doğrusal olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov denklemlerinin; sayısal ve analitik çözümlerini incelemişlerdir. Elde ettikleri çözümleri Mathematica yazılımını kullanarak doğrulamışlardır. Ayrıca çözümleri 2-D ve 3-D grafiklerle göstererek, çözümler arasında karşılaştırmalar yapmışlardır.

Yokus ve Yavuz (2021) Sonlu farklar yöntemini, $\left(\frac{1}{G'}\right)$-genişleme yöntemini ve Laplace pertürbasyon yöntemini uygulayarak zaman-kesirli doğrusal olmayan Burger-Fisher denkleminin bazı analitik, sayısal ve yaklaşık analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Çözümleri karşılaştırıp sonlu farklar yönteminin daha düşük hata düzeyine sahip olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Al-Shawba vd. (2023) Uyumlu kesirli $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yöntemini uygulamışlardır. Doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin kapalı form çözümlerini üretmek için $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yaklaşımını ve genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme şemasını uyumlu türev ile genişletmişlerdir. Yöntemi kesirli uzay-zaman Burgers denklemlerine uygulayarak başarılı olduğunu göstermişlerdir.

Durur vd. (2022) $\left(\frac{1}{G'}\right)$-genişleme yöntemi ve alt-denklem yöntemi ile uyumlu türev operatörünü kullanarak zaman-kesirli Kaup-Kupershmidt denkleminin çözümlerine ulaşmışlardır. Elde ettikleri tekil, rasyonel, trigonometrik ve hiperbolik tip çözümlerdeki sabitlere keyfi değerler vererek 2D, 3D grafiklerini çizerek yorumlamışlardır.

Razzaq vd. (2024) Modifiye $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$-açılım yöntemini; uyumlu kesirli genelleştirilmiş reaksiyon Duffing modelini ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli difüzyon-reaksiyon denklemini çözmek için kullanmışlardır. Buldukları çözümleri Mathematica programı aracılığıyla doğrulamışlardır.

Iqbal vd. (2024) $\left(\frac{G'}{G'+G+A}\right)$-açılım yöntemi ile uyumlu kesirli üç tane matematiksel modelin; zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi, zaman-kesirli Sharma-Tasso-Olever denklemi ve zaman-kesirli Clannish Random Walker'ın parabolik denklemi çözümlerini incelemişlerdir. Trigonometrik ve üstel olmak üzere iki farklı formda çözümler elde etmişlerdir. Çalıştıkları kesirli modelleri derinlemesine açıklayabilmek için bazı koşullar altında bazı parametrelere ayırt edici dağerler vererek 2D, 3D ve kontur grafiklerini çizmişlerdir. Bu grafiklerden dalga genliğinin dalga yayılımını artırdığı gibi çeşitli bir çok sonuç elde etmişlerdir.

Rezazadeh vd. (2018b) Genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem ile doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli Phi-4 denkleminin analitik çözümlerini uyumlu kesirli türev aracılığıyla elde etmişlerdir.

Alabedalhadi vd. (2020) Doğrudan yöntem ile uyumlu doğrusal olmayan uzay-zaman kesirli Schrödinger modeli için çözümleri araştırmışlardır. Burada kullandıkları yöntem bazı kesirli karmaşık dönüşümler yapılan hiperbolik fonksiyon yöntemidir. Doğrusal olmayan kesirli karmaşık sistemler için önerdikleri bu yöntemi, Kerr ve çift Kuvvet yasalarına dayandırmışlardır.

Zada vd. (2021) Optimal yardımcı fonksiyon yöntemini genel kısmi diferansiyel denklemlere genişletmişlerdir. Bu yöntem, yakınsama kontrol parametrelerini kontrol etmenin ve düzenlemenin araçlarını sunar. Önerdikleri yöntemdeki farklılıklardan birisi de sınır koşullarına veya başlangıç koşullarına herhangi bir parametrenin eklenmesine gerek olmamasıdır. Yöntemi örnekler üzerinde uygulayarak yaklaşık çözümlerin analitik çözümlerle tutarlılığı gösterilmiştir. Yöntem yalnızca bir yineleme ile çok hızlı bir yakınsama sağlamıştır.

Akram vd. (2022) $tan\big(\phi(\eta)/2\big)$-genişleme yöntemi kullanılarak uyumlu zaman-kesirli Klien-Fock-Gordon denkleminin çözümleri araştırılmıştır. Sonuçta üstel, hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümleri olmak üzere dört tür çözüm elde etmişlerdir. Bazı belirli durumlar için çözümlere ait 3D ve çizgi grafiklerini göstererek analizler yapmışlardır.

Kumar vd. (2020) Genelleştirilmiş $exp(-\varphi(\xi))$-genişleme yöntemini doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli modeller için önermişlerdir. Buna örnek modeller olarak, zaman-kesirli yaklaşık uzun-dalga denklemlerini, zaman-kesirli varyant-Boussinesq denklemlerini ve zaman-kesirli Wu-Zhang denklem sistemini; uyumlu türev operatöründen ve kesirli karmaşık dönüşümden faydalanarak incelemişlerdir. Sonuç olarak, hiperbolik fonksiyon, periyodik fonksiyon, rasyonel fonksiyon ve üstel fonksiyon içeren dört çeşit çözüm bulmuşlardır. Yaptıkları analiz sonucunda $exp(-\varphi(\xi))$-genişleme yönteminden daha etkili bir yöntem olduğunu bildirmişlerdir.

Lakestani ve Manafian (2018) $tan\big(\phi(\eta)/2\big)$-genişleme yöntemi ile $exp(-\varphi(\xi))$-genişleme yöntemini, doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün incelenmesinde kullanmışlardır. Bu yöntemler, entegrasyon metoduna ve bir dalga dönüşümüne dayanmaktadır. Yaptıkları çalışmada doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli Boussinesq denklemlerine bu yöntemleri uygulamışlardır. Bu kesirli diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek için kesirli kompleks dönüşüm uygulamışlardır. Sonuç olarak farklı biçimlerde çözümler elde etmişlerdir.

Nisar vd. (2021) $tan(\kappa(\rho))$-genişleme yöntemi ile $exp(-\kappa(\rho))$-genişleme yöntemini kullanarak, doğrusal olmayan kesirli bir model olan, uzay-zaman kesirli (2+1)-boyutlu uyumlu kesirli Bogoyavlenskii denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Islam vd. (2023) Uyumlu kesirli $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yöntemi ile uyumlu türevi kullanarak uzay-zaman kesirli Bogoyavlenskii denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Acan vd. (2017) Uyumlu varyasyonel yineleme yöntemini tanıttıktan sonra, biri doğrusal homojen ve diğeri doğrusal olmayan homojen olmayan iki tane kesirli mertebeden adi diferansiyel denkleme bu yöntemi uygulamışlardır. Elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılmış ve yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için grafikleri çizilmiştir.

Acan vd. (2020) Uyumlu varyasyonel yineleme yöntemini tanıttıkları bu makalede ayrıca uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemine ve uyumlu homotopi analiz yöntemine de yer vermişlerdir. Bu yöntemleri örnekler üzerinde uygulayarak elde ettikleri çözümleri, grafikler ve tablolar ile analiz etmişlerdir. KMKDD'lerin çözümünde başarılı yöntemler olduklarını belirtmişlerdir.

Eslami ve Rezazadeh (2016) İlk integral yöntemini uyumlu türev ile birlikte kullanmışlardır. Bu yöntem cebirin halka teorisiyle temellendirilen bir tekniktir. Uyumlu türev kullanılarak zaman-kesirli Wu-Zhang sisteminin kesin çözümlerini oluşturmak için bu yöntemi kullanmışlardır. Çözümler üzerinde yaptıkları analizle bu yöntemin doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri için etkili olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu çalışmalardan öğrendiğimiz yaklaşık çözüm yöntemlerinden birkaçını biraz daha yakından tanıyalım. Bu yöntemlerin her birinde kullanılan notasyonların farklılığından dolayı her bir başlığı kendi içinde değerlendiriyoruz.

3.1. Genişletilmiş Doğrudan Cebirsel Yöntem

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemi şu formda ele alalım:

$$P\left(u, u_t^{(\mu)}, u_x, u_{tt}^{(2\mu)}, u_{xx}, ...\right) = 0\,, \tag{3.1}$$

burada u bilinmeyen bir fonksiyondur. P ise u 'nun, u 'nun kısmi türevlerinin ve u 'nun uyumlu kesirli kısmi türevlerinin bir polinomudur. Yöntemin ana adımları şu şekildedir (Rezazadeh vd., 2018b):

1. Adım: Dalga dönüşümünü kullanarak,

$$u(x,t) = U(\xi)\,, \quad \xi = x - v\frac{t^\mu}{\mu}\,, \tag{3.2}$$

burada v daha sonra belirlenecek keyfi bir sabittir, (3.1) denklemini aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem şeklinde yazalım:

$$G(U, U', U'', ...) = 0\,, \tag{3.3}$$

burada $U', U'', ...$ ifadeleri ξ 'ye göre türevleri göstermektedir.

2. Adım: (3.3) denkleminin aşağıdaki formda bir çözüme sahip olduğunu varsayalım.

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^{N} b_j Q^j(\xi)\,, \quad b_N \neq 0\,, \tag{3.4}$$

burada b_j $(0 < j < N)$ daha sonra belirlenecek sabit katsayılardır. N ise, (3.3) denklemindeki en yüksek mertebeli türevler ile doğrusal olmayan terimlerin dengelenmesiyle bulunan pozitif bir tamsayıdır. $Q(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar.

$$Q'(\xi) = ln(A)\left(\alpha + \beta Q(\xi) + \sigma Q^2(\xi)\right), \quad A \neq 0\,, A \neq 1\,, \tag{3.5}$$

burada α, β, σ sabitlerdir. (3.5) adi diferansiyel denkleminin bazı özel çözümleri şunlardır:

1. $\beta^2 - 4\alpha\sigma < 0$ ve $\sigma \neq 0$ olduğunda :

   $Q_1(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\, tan_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2}\right),$

   $Q_2(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\, cot_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2}\right),$

   $Q_3(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} +$
   $+\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\left[tan_A\left(\xi\, \sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}\right) \pm \sqrt{qp}\, sec_A\left(\xi\, \sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}\right)\right],$

   $Q_4(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} +$
   $+\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\left[-cot_A\left(\xi\, \sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}\right) \pm \sqrt{pq}\, csc_A\left(\xi\, \sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}\right)\right],$

   $Q_5(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{4\sigma}\left[tan_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{4}\right) - cot_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{4}\right)\right].$

2. $\beta^2 - 4\alpha\sigma > 0$ ve $\sigma \neq 0$ olduğunda :

   $Q_6(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\, tanh_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2}\right),$

   $Q_7(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\, coth_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2}\right),$

   $Q_8(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} +$
   $+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\left[-tanh_A\left(\xi\, \sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}\right) \pm i\sqrt{pq}\, sech_A\left(\xi\, \sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}\right)\right],$

   $Q_9(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} +$
   $+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\left[-coth_A\left(\xi\, \sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}\right) \pm \sqrt{pq}\, csch_A\left(\xi\, \sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}\right)\right],$

   $Q_{10}(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{4\sigma}\left[tanh_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{4}\right) + coth_A\left(\xi\, \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{4}\right)\right].$

3. $\alpha\sigma > 0$ ve $\beta = 0$ olduğunda :

   $Q_{11}(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\, tan_A(\xi\, \sqrt{\alpha\sigma}),$

   $Q_{12}(\xi) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\, cot_A(\xi\, \sqrt{\alpha\sigma}),$

$Q_{13}(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\, \left(tan_A(2\xi\,\sqrt{\alpha\sigma}) \pm \sqrt{pq}\, sec_A(2\xi\,\sqrt{\alpha\sigma})\right),$

$Q_{14}(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\, \left(-cot_A(2\xi\,\sqrt{\alpha\sigma}) \pm \sqrt{pq}\, csc_A(2\xi\,\sqrt{\alpha\sigma})\right),$

$Q_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}} \left[tan_A\left(\xi\,\frac{\sqrt{\alpha\sigma}}{2}\right) - cot_A\left(\xi\,\frac{\sqrt{\alpha\sigma}}{2}\right)\right].$

4. $\alpha\sigma < 0$ ve $\beta = 0$ olduğunda:

$Q_{16}(\xi) = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\, tanh_A(\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma}),$

$Q_{17}(\xi) = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\, coth_A(\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma}),$

$Q_{18}(\xi) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\, \left(-tanh_A(2\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma}) \pm i\,\sqrt{qp}\, sech_A(2\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma})\right),$

$Q_{19}(\xi) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\, \left(-coth_A(2\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma}) \pm \sqrt{qp}\, csch_A(2\xi\,\sqrt{-\alpha\sigma})\right),$

$Q_{20} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}} \left[tanh_A\left(\xi\,\frac{\sqrt{-\alpha\sigma}}{2}\right) - coth_A\left(\xi\,\frac{\sqrt{-\alpha\sigma}}{2}\right)\right].$

5. $\sigma = \alpha$ ve $\beta = 0$ olduğunda:

$Q_{21}(\xi) = tan_A(\alpha\xi),$

$Q_{22}(\xi) = -cot_A(\alpha\xi),$

$Q_{23}(\xi) = tan_A(2\alpha\xi) \pm \sqrt{qp}\, sec_A(2\alpha\xi),$

$Q_{24}(\xi) = -cot_A(2\alpha\xi) \pm \sqrt{qp}\, csc_A(2\alpha\xi),$

$Q_{25} = \frac{1}{2}\left[tan_A\left(\frac{\alpha}{2}\,\xi\right) - cot_A\left(\frac{\alpha}{2}\,\xi\right)\right].$

6. $\sigma = -\alpha$ ve $\beta = 0$ olduğunda:

$Q_{26}(\xi) = -tanh_A(\alpha\xi),$

$Q_{27}(\xi) = -coth_A(\alpha\xi),$

$Q_{28}(\xi) = -tanh_A(2\alpha\xi) \pm i\sqrt{qp}\, sech_A(2\alpha\xi),$

$Q_{29}(\xi) = -coth_A(2\alpha\xi) \pm \sqrt{qp}\, csch_A(2\alpha\xi),$

$Q_{30} = -\frac{1}{2}\left[tanh_A\left(\frac{\alpha}{2}\,\xi\right) + coth_A\left(\frac{\alpha}{2}\,\xi\right)\right].$

7. $\beta^2 = 4\alpha\sigma$ olduğunda :

$Q_{31}(\xi) = \frac{-2\alpha\,(\beta\xi lnA+2)}{\beta^2\xi lnA}.$

8. $\beta = k$, $\alpha = mk$ $(m \neq 0)$ ve $\sigma = 0$ olduğunda:

$Q_{32}(\xi) = A^{k\xi} - m.$

9. $\beta = \sigma = 0$ olduğunda:

   $Q_{33}(\xi) = \alpha \xi ln A.$

10. $\beta = \alpha = 0$ olduğunda:

   $Q_{34}(\xi) = \frac{-1}{\sigma \xi ln A}.$

11. $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ olduğunda:

   $Q_{35}(\xi) = -\frac{p\beta}{\sigma\left[cosh_A(\beta\xi) - sinh_A(\beta\xi) + p\right]},$

   $Q_{36}(\xi) = -\frac{\beta\left[sinh_A(\beta\xi) + cosh_A(\beta\xi)\right]}{\sigma\left[sinh_A(\beta\xi) - cosh_A(\beta\xi) + q\right]}.$

12. $\beta = k\,,\ \sigma = mk\,(m \neq 0)$ ve $\alpha = 0$ olduğunda:

   $Q_{37}(\xi) = \frac{pA^{k\xi}}{q - mpA^{k\xi}}.$

Not: Genelleştirilmiş trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar şu şekilde tanımlıdırlar:

$$
\begin{array}{ll}
sinh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} - qA^{-\xi}}{2} \ , & cosh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}{2}, \\
tanh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} - qA^{-\xi}}{pA^{\xi} + qA^{-\xi}} \ , & coth_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}{pA^{\xi} - qA^{-\xi}} \ , \\
sech_A(\xi) = \frac{2}{pA^{\xi} + qA^{-\xi}} \ , & csch_A(\xi) = \frac{2}{pA^{\xi} - qA^{-\xi}} \ , \\
sin_A(\xi) = \frac{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}}{2i} \ , & cos_A(i\xi) = \frac{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}{2} \ , \\
tan_A(\xi) = -i\frac{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}}{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}} \ , & cot_A(\xi) = i\frac{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}} \ , \\
sec_A(\xi) = \frac{2}{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}} \ , & csch_A(\xi) = \frac{2i}{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}},
\end{array}
$$

burada ξ bağımsız değişken, p ile q sıfırdan büyük keyfi sabitler olup, deformasyon parametreleri olarak adlandırılırlar.

3. Adım: (3.4) ve (3.5) ifadelerini, (3.3) 'da yerine yazıp, $Q^j(\xi)$ 'nun katsayılarını sıfıra eşitleyerek, $b_j\,(j = 0, 1, 2, ..., N)$ ve v için doğrusal olmayan bir cebirsel sistem elde edilir.

4. Adım: Daha sonra bu sabitleri ve (3.5) denkleminin çözümlerini (3.4) ve (3.2) 'de yerlerine koyarak, (3.1) için kesin çözümler elde ederiz.

3.1.1. Genişletilmiş Doğrudan Cebirsel Yöntem Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Rezazadeh vd. (2018b), Genişletilmiş Doğrudan Cebirsel Yöntemi uygulamışlardır.*

Bu çalışmada Klein-Gordon denkleminin özel bir biçimi olarak düşünebileceğimiz $u_t^{(\mu)} - u_{xx} + p^2 u + \lambda u^3 = 0$ doğrusal olmayan zaman-kesirli Phi-4 denklemini, tanıttıkları genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem ile çözmüşlerdir. Elde ettikleri çözümleri grafikler üzerinde göstererek yaptıkları analizler sonucunda uygulanan yöntemin başarılı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu yöntemin, diğer yöntemlere kıyasla, daha kolay, doğrudan bir çözüm yapıldığı için basit ve başka doğrusal olmayan dispersif denklemleri çözmek için yetenekli bir yöntem olduğunu belirtmişlerdir.

- *Rezazadeh vd. (2018a), Genişletilmiş Doğrudan Cebirsel Yöntemi uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $iu_t^{(\mu)} + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u + i\lambda u_{xxx} = 0$ doğrusal olmayan uyumlu kesirli Schrödinger-Hirota denklemine bu yöntemi uygulamışlardır. Dalga dönüşümü kullanarak kesirli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürüp, Maple programı yardımıyla yeni çözümler hesaplamışlardır.

3.2. İlk İntegral Yöntemi

x, y ve t üç bağımsız değişken olmak üzere doğrusal olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklem şöyle verilsin (Eslami ve Rezazadeh, 2016):

$$F\left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0,\ 0 < \alpha \leq 1\,, \tag{3.6}$$

burada $u(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyon, F, u nun çeşitli kısmi türevlerinde, en yüksek dereceli türevlerin ve doğrusal olmayan terimlerin yer aldığı bir polinomdur. İlk integral yöntemi aşağıdaki adımlardan oluşur:

1. Adım: Dalga dönüşümü kullanılır,

$$u(x, y, t) = U(\xi),\ \xi = x + y - l\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\,, \tag{3.7}$$

burada l daha sonra belirlenecek bir sabittir. Bu, aşağıdaki dönüşümleri kullanmamızı sağlar:

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}(.) = -l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(.)\,,\ \frac{\partial}{\partial x}(.) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(.)\,,\ \frac{\partial}{\partial y}(.) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\,,\ \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}}(.) = l^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\,, \ldots \tag{3.8}$$

3.6 doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini, doğrusal olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için (3.7) kullanarak

$$G(U, U', U'', U''', \ldots) = 0 \tag{3.9}$$

yazılır. Burada U', U'', ... ifadeleri ξ ye göre türevi gösterir.

2. Adım: Yeni bağımsız değişkenler tanıtılır,

$$X(\xi) = U(\xi)\,,\; Y(\xi) = U_\xi(\xi)\,, \tag{3.10}$$

bu da doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklem sistemine yol açar:

$$\begin{cases} X_\xi(\xi) = Y(\xi) \\ Y_\xi(\xi) = S\left(X(\xi), Y(\xi)\right). \end{cases} \tag{3.11}$$

3. Adım: Adi diferansiyel denklemlerin niteliksel teorisine göre, aynı koşullar altında (3.11) sisteminin integrallerini bulabilirsek, (3.11) sisteminin genel çözümleri doğrudan çözülebilir. Ancak, genelde bunu bir ilk integral için bile gerçekleştirmemiz gerçekten zordur. (3.9) denklemini birinci dereceden integrallenebilir bir adi diferansiyel denkleme indirgeyen (3.11)'e bir ilk integral elde etmek için bölme teoremi uygulanır.

Bölme teoremi: $P(x,y)$ ile $Q(x,y)$, $\mathbb{C}[x,y]$ de iki değişkenli polinomlar ve $P(x,y)$ indirgenemez polinom olduğunu varsayalım. Eğer $Q(x,y)$ polinomu, $P(x,y)$ polinomunun tüm sıfır noktalarında sıfır oluyorsa, $\mathbb{C}[x,y]$ de öyle bir $G(x,y)$ polinomu vardır ki; $Q(x,y) = P(x,y)\,G(x,y)$ olur.

3.2.1. İlk İntegral Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Eslami ve Rezazadeh (2016), İlk İntegral Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli

  $$\begin{aligned} \tfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= -u\tfrac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \tfrac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= -v\tfrac{\partial u}{\partial x} - u\tfrac{\partial v}{\partial x} - \tfrac{1}{3}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{aligned}$$

  Wu-Zhang sistemini ilk integral yöntemiyle çözmüşlerdir. Grafikler üzerinde çözümü analiz edip güvenilir ve başarılı bir yöntem olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Yöntemin doğrusal olmayan zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin birçoğunu çözmek için kullanılabileceğini belirtmişlerdir.

- *Cenesiz vd. (2017), İlk İntegral Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada; $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Burgers denklemi, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u^2\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ modifiye Burgers denklemi ve $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varpi u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + s\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ Burgers-KdV denklemi ilk integral yöntemiyle çözülmüştür. Elde edilen çözümler grafikler üzerinde analiz edilmiş ve yöntemin etkili olduğu sonucuna ulaşmışlardır. İlk integral yöntemiyle uyumlu türev operatörünün birlikte kullanılması sonucunda çözümlerin; programlamada ihtiyaç duyduğu algoritmaların hızlı ve basit olmasının avantaj sağladığını belirtmişlerdir. Yöntemin doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde başarıyla kullanılabileceğini rapor etmişlerdir.

3.3. Modifiye Kudryashov Yöntemi

Doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi düşünelim (Hosseini vd., 2017):

$$F\left(u, \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}, ...\right) = 0 \tag{3.12}$$

$\varepsilon = x - l(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})$ olmak üzere $u(x,t) = f(\varepsilon)$ dönüşümü yapılırsa (3.12) denklemi aşağıdaki formda bir doğrusal olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$G(f, f', f'', ...) = 0 \tag{3.13}$$

burada $f', f'', ...$ ifadeleri ε 'a göre türevi gösterir. (3.13) 'nin çözümünü aşağıdaki formda kesilmiş bir seri olarak düşünelim.

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n Q^n(\varepsilon) \tag{3.14}$$

burada $n = 0, 1, 2, ..., N$ için a_n $(a_N \neq 0)$ hesaplanacak sabitlerdir ve $Q(\varepsilon)$ aşağıdaki fonksiyondur.

$$Q(\varepsilon) = \frac{1}{1 + da^{\varepsilon}}$$

$Q(\varepsilon)$ aşağıdaki gibi birinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemi sağlar.

$$Q'(\varepsilon) = Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)lna$$

N değeri (3.13) denklemindeki en yüksek mertebeden doğrusal ve doğrusal olmayan terimlerin dengelenmesiyle belirlenir. (3.14) ve gerekli türevleri alınıp, (3.13) denkleminde yazıldığında,

$$P(Q(\varepsilon)) = 0 \tag{3.15}$$

burada $P(Q)$, $Q(\varepsilon)$ cinsinden bir polinomdur.

(3.15) denkleminde $Q(\varepsilon)$ 'nun her bir kuvvetinin katsayısı sıfıra eşitlenirse, çözümü (3.12) denkleminin çözümünü sağlayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Not: $N = 2$ için $f(\varepsilon)$ 'nun ilk iki türevi aşağıdaki gibidir.

$f'(\varepsilon) = a_1 Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)lna + 2a_2 Q^2(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)lna,$

$f''(\varepsilon) = a_1 Q(\varepsilon)\left(Q(\varepsilon) - 1\right)^2 (\ln a)^2 + a_1 Q^2(\varepsilon)\left(Q(\varepsilon) - 1\right)(lna)^2$

$+ 4a_2 Q^2(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)^2(lna)^2 + 2a_2 Q^3(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)(lna)^2).$

3.3.1. Modifiye Kudryashov Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Hosseini vd. (2017), Modifiye Kudryashov Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \lambda \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu u(x,t) + vu^2(x,t) = 0$ doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli Klein-Gordon denklemini modifiye Kudryashov yöntemiyle çözmüşlerdir.

- *Korkmaz ve Hosseini (2017), Modifiye Kudryashov Yöntemi ile $exp\big(-\varphi(\epsilon)\big)$-genişleme yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $-D_t^{\alpha} u + u_{xx} + k_1 + k_2 e^{n\kappa u} = 0$ üstel, doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli parabolik denklemi iki yöntemle de çözülmüştür. Yöntemleri tanıttıktan sonra denklemi belirli dönüşümler kullanarak tamsayı mertebeden doğrusal olmayan adi diferansiyel denkleme indirgedikten sonra, yöntemleri ayrı ayrı uygulayarak çözümleri sunmuşlardır.

3.4. Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Adomian ayrıştırma yönteminde; doğrusal olmayan terimler, Adomian polinomları kullanılarak ayrıştırılır ve bu sayede problem daha yönetilebilir hale gelir. Uyumlu kesirli türev kullanarak bu yöntemi oluşturalım (Yavuz, 2017). Aşağıdaki doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemi ele alalım:

$$L_{*\alpha}\big(u(x,t)\big) + R\big(u(x,t)\big) + N\big(u(x,t)\big) = v(x,t). \tag{3.16}$$

Burada $n < \alpha < n+1$ olmak üzere $L_{*\alpha} = \top_{*\alpha}$ operatörü α-mertebeden uyumlu türevli doğrusal bir operatördür, R doğrusal operatörün diğer bir parçası, N doğrusal olmayan bir operatör ve $v(x,t)$ homojen olmayan bir terimdir.

(3.16) denkleminde doğrusal operatörü Lemma 2.1'e uygularsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\frac{\partial^{\lceil\alpha\rceil}u(x,t)}{\partial t^{\lceil\alpha\rceil}}+R\big(u(x,t)\big)+N\big(u(x,t)\big)=v(x,t).$$

(3.16) denkleminin her iki tarafına doğrusal operatörün tersi olan $L^{-1}=\int_0^t\int_0^{\gamma_1}...\int_n^{\gamma_{n-1}}\frac{1}{\gamma_n^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}}(.)d\gamma_n d\gamma_{n-1}...d\gamma_1$ i uygulanırsa şu elde edilir:

$$L_{*\alpha}^{-1}L_{*\alpha}\big(u(x,t)\big)+L_{*\alpha}^{-1}R\big(u(x,t)\big)+L_{*\alpha}^{-1}N\big(u(x,t)\big)=L_{*\alpha}^{-1}v(x,t). \tag{3.17}$$

Uyumlu Adomian ayrıştırma yöntemi, $u(x,t)$ çözümünün bileşenlerin sonsuz serisine ayrıştırılmasını önerir:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t). \tag{3.18}$$

(3.16) denklemindeki doğrusal olmayan fonksiyon şu şekilde ayrıştırılır:

$$N(u)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n,\ (u_0,u_1,u_2,...,u_n), \tag{3.19}$$

burada A_n Adomian polinomları olarak adlandırılır. Bu polinomlar, Adomian tarafından geliştirilen algoritmalara göre tüm doğrusal olmayan formlar için hesaplanabilir.
Denklem (3.18) ve (3.19), (3.17) de yerine koyulduğunda şu eşitlik elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u(x,0)+L_{*\alpha}^{-1}v-L_{*\alpha}^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)-L_{*\alpha}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right). \tag{3.20}$$

(3.20) eşitliğini kullanarak, iterasyon terimleri şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x,0)+L_{*\alpha}^{-1}v,\\ u_1 &= -L_{*\alpha}^{-1}Ru_0-L_{*\alpha}^{-1}RA_0,\\ &\vdots\\ u_{n+1} &= -L_{*\alpha}^{-1}Ru_n-L_{*\alpha}^{-1}RA_n,\quad n\geq 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sonra, (3.16) denkleminin yaklaşık-analitik çözümü şu şekilde elde edilir:

$$\tilde{u}_k(x,t)=\sum_{n=0}^{k}u_n(x,t).$$

Son olarak (3.16) denkleminin tam çözümü aşağıdaki limit ile hesaplanır:

$$u(x,t)=\lim_{k\to\infty}\tilde{u}_k(x,t).$$

3.4.1. Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Yavuz ve Yaşkıran (2017), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}u(x,t) + f(x,t)$ homojen olmayan kesirli kablo denklemini (non-homogeneous fractional cable equation) iki yöntemle de çözmüşlerdir. Her iki yöntemde elde ettikleri çözümleri $\alpha = 0.3$ ve $\alpha = 0.7$ için grafikler üzerinde gösterdikten sonra çeşitli α değerleri için tablolar üzerinden hata analizi yapmışlardır. Analiz sonucunda uyumlu varyasyonel iterasyon yönteminin kesin çözümlere daha yakın sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır.

- *Yavuz (2017), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemini uygulamıştır.*

  Bu çalışmada iki tane zaman-kesirli doğrusal kısmi diferansiyel denklem üzerinde tanıttığı yöntemleri uygulamıştır. $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + u$ doğrusal zaman-kesirli denklemini ve $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zaman-kesirli difüzyon denklemini iki yöntemle de ayrı ayrı çözmüştür. Çeşitli α değerleri için tablolar oluşturmuştur. Ayrıca $\alpha = 0.30$ için ve $\alpha = 0.70$ için iki yöntemden elde edilen çözümlerin grafiklerini de sunup analizler yapmıştır. Sonuç olarak kesin çözümlere oldukça yakın değerler veren bu iki yöntemin birçok kesirli mertebeden doğrusal veya doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir olduğunu belirtmiştir.

- *Yavuz ve Özdemir (2019), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ doğrusal zaman-kesirli tek boyutlu homojen olmayan dalga denklemini, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 2(t^\alpha + x^2 + 1)$ kesirli kısmi diferansiyel denklemini ve $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2t^{2-\alpha}}{3-\alpha} + 2(x-1)$ zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemini iki yöntemlede çözüp, elde ettikleri yaklaşık çözümleri grafikler üzerinde analizler yapmışlardır. Elde ettikleri çözümlerin, kesin çözümlerle uyum içinde olduğunu belirtmişler ve bu yöntemlerin başarılı oldukları sonucuna ulaşmışlardır.

- *Edeki vd. (2019), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemini uygulamışlardır.* Bu çalışmada $\frac{\partial^{\alpha} P}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{2}\sigma^2\xi^{2\phi}\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + (\beta_1 + \beta_2\xi)\frac{\partial P}{\partial \xi} - \xi P$ uyumlu türevli zaman-kesirli tek faktörlü Markovian modelini bu yöntemle çözüp grafikler üzerinden yorumlamışlardır.

3.5. Uyumlu Kesirli Homotopi Analiz Yöntemi

Aşağıdaki diferansiyel denklemi göz önünde bulunduralım (Acan vd., 2020):

$$N[u(x,t)] = 0 \tag{3.22}$$

Burada N doğrusal olmayan bir operatör, t bağımsız değişken ve $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyondur. Sadelik olması için, tüm sınır veya başlangıç koşullarını göz ardı edelim. Genelleştirilmiş homotopi yönteminde, sıfır dereceli deformasyon denklemi oluşturulur. Benzer olarak,

$$(1-q)L[\Phi(x,\xi;q) - u_0(x,\xi)] = qhH(x,\xi)N[\Phi(x,\xi;q)]. \tag{3.23}$$

Burada $q \in [0,1]$ gömme parametresi, $h \neq 0$ yardımcı parametre, $H(x,\xi) \neq 0$ yardımcı fonksiyondur. $L = {}_t\mathrm{T}_{\alpha}$ $(n-1 < \alpha < n)$ ise, aşağıdaki özelliğe sahip yardımcı doğrusal operatördür;

$$\Phi(x,\xi) = 0 \text{ olduğunda } L[\Phi(x,\xi)] = 0. \tag{3.24}$$

$u_0(x,\xi)$, $u(x,\xi)$ nin ilk tahminidir. $\Phi(x,\xi;q)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. Homotopi analiz yönteminde, kişinin yardımcı şeyleri seçme konusunda büyük özgürlüğe sahip olması önemlidir. Bu $q = 0$ ve $q = 1$ olduğunda geçerlidir,

$$\Phi(x,\xi;0) = u_0(x,\xi) \text{ ve } \Phi(x,\xi;1) = u(x,\xi). \tag{3.25}$$

Dolayısıyla q, 0 dan 1 e arttıkça, $\Phi(x,\xi;q)$ çözümü ilk tahmin $u_0(x,\xi)$ den $u(x,\xi)$ çözümüne kadar değişir. $\Phi(x,\xi;q)$, Taylor serisiyle q ya göre genişletilirse,

$$\Phi(x,\xi;q) = u_0(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,\xi)q^m. \tag{3.26}$$

Burada,

$$u_m(x,\xi) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \Phi(x,\xi;q)}{\partial q^m} \tag{3.27}$$

şeklindedir. Eğer yardımcı doğrusal operatör, ilk tahmin, yardımcı parametre h ve yardımcı fonksiyon doğru seçilirse, (3.26) serisi $q = 1$ de yakınsarsa, o zaman sonuç şu olur:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t). \tag{3.28}$$

Bu (3.28) ifadesi, orjinal doğrusal olmayan denklemin çözümlerinden biridir. $h = 1$ ve $H(x,\xi) = 1$, (3.23) denklemi şöyle olur:

$$(1-q)L[\Phi(x,\xi;q) - u_0(x,\xi)] + qN[\Phi(x,\xi;q)] = 0. \tag{3.29}$$

(3.27) ifadesinin tanımına göre, yönetici denklem (3.23) sıfır dereceli deformasyon denkleminden çıkarılabilir.

$$\vec{u}_n = \{u_0(x,\xi), u_1(x,\xi), u_2(x,\xi), ..., u_n(x,\xi)\} \tag{3.30}$$

vektörü tanımlansın. (3.23) denklemi m-zamanlarını q gömme parametresine göre farklılaştırıp, $q = 0$ ayarlar ve bunları $m!$ ile bölersek, $m.$ dereceden deformasyon denklemi elde ederiz.

$$L[u_m(x,\xi) - x_m u_{m-1}(x,\xi)] = hH(x,\xi)R\vec{u}_{m-1} \tag{3.31}$$

burada

$$R(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N[\Phi(x,\xi;q]}{\partial q^{m-1}} \tag{3.32}$$

ve

$$x_m = \begin{cases} 0 \quad , \quad m \leq 1 \\ 1 \quad , \quad m > 1 \end{cases} \tag{3.33}$$

şeklindedir. Çözüme aşağıdaki kesik serilerle yaklaşılır:

$$\Phi_m(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k(x,\xi). \tag{3.34}$$

3.5.1. Uyumlu Kesirli Homotopi Analiz Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Acan vd. (2020), Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Uyumlu Homotopi Analiz Yöntemini uygulamışlardır.*

Bu çalışmada iki ayrı denklem üzerinde, tanıttıkları üç yöntemi de uygulamışlardır. Bu denklemlerden biri; ${}_t\mathrm{T}_\alpha u + uu_x + u_{xx} + \frac{1}{5}u = 0$ kesirli Damped Burger denklemi, diğeri ise ${}_t\mathrm{T}_\alpha u - u_x u_{xx} + u_{xx} + uu_{xxx} = 0$ denklemidir. Her bir denklem için, uyguladıkları üç yöntemden elde ettikleri çözümler ile; $\alpha = 1$ için yöntemlerin verdikleri sonuçları kesin çözümle karşılaştırdıktan sonra, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için yöntemlerin verdileri sonuçları da karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmaları tablo ve grafiklerle göstermişlerdir. Sonuç olarak yöntemlerin çok başarılı olduklarını söyleyebiliriz. Bu üç yöntem arasında $\alpha = 1$ için kesin çözüme en yakın sonuçlar veren yöntem uyumlu varyasyonel iterasyon yöntemidir. Ayrıca diğer iki yöntem birbirleriyle aynı sonuçları vermişlerdir.

- *Kurt vd. (2016), Uyumlu Homotopi Analiz Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varpi u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + s\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ Burgers-KdV denkleminde uyumlu türev ile homotopi analiz yöntemi kullanarak, problemin yaklaşık analitik çözümünü elde etmişlerdir. Grafikler üzerinden elde ettikleri çözümler ile analitik çözümleri karşılaştırmışlardır. Ayrıca mutlak hata grafiklerini de vermişlerdir.

3.6. Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

Homotopi pertürbasyon yönteminde, bir parametre etrafında homotopi oluşturulur ve bu sayede doğrusal olmayan denklemlerin çözümü iteratif olarak gerçekleştirilir. Uyumlu kesirli türev kullanarak bu yöntemi oluşturalım (Yavuz, 2017). Aşağıdaki doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\top_{*t}^{\alpha} = L(u, u_x, u_{xx}) + v(x,t) \tag{3.35}$$

denkleminin başlangıç koşulları $u^k(x,0) = v_k(x), k = 0,1,...,m-1$ olsun ve burada $t > 0$, L doğrusal operatör, N doğrusal olmayan operatör, v analitik bir fonksiyon ve $m-1 < \alpha \leq m$ için $\top_{*t}^{\alpha}$; α-mertebeden uyumlu kesirli türevdir. Homotopi tekniğine göre aşağıdaki homotopiyi oluşturabiliriz. Homotopi parametresi $p \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - L(u, u_x, u_{xx}) - v(x,t) = p\left(\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + N(u, u_x, u_{xx}) - \top_{*t}^{\alpha}\right) \tag{3.36}$$

veya

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - v(x,t) = p\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - \top_{*t}^{\alpha}\right) \tag{3.37}$$

yazılabilir. Bu son denklemde homotopi parametresi p her zaman sıfırdan bire değişir.

$p=0$ durumunda (3.36) denklemi,

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=L(u,u_x,u_{xx})+v(x,t)$$

doğrusal denklemine dönüşür ve (3.37) denklemi de

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=v(x,t)$$

doğrusal denklemine dönüşür.

$p=1$ durumunda (3.36) veya (3.37) denklemi, orjinal (3.35) diferansiyel denklemine dönüşür.

Temel varsayım (3.37) denkleminin çözümünün, p'nin bir kuvvet serisi kullanılarak yazılabileceğidir,

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+...$$

Çözüm adımlarının sonunda, çözüm yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilir:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

3.6.1. Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Yavuz (2017), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada iki tane zaman-kesirli doğrusal kısmi diferansiyel denklem üzerinde tanıttığı yöntemleri uygulamıştır. $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+u$ doğrusal zaman-kesirli denklemini ve $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zaman-kesirli difüzyon denklemini iki yöntemle de ayrı ayrı çözmüştür. Çeşitli α değerleri için tablolar oluşturmuştur. Ayrıca $\alpha=0.30$ için ve $\alpha=0.70$ için iki yöntemden elde edilen çözümlerin grafiklerini de sunup analizler yapmıştır. Sonuç olarak kesin çözümlere oldukça yakın değerler veren bu iki yöntemin birçok kesirli mertebeden doğrusal veya doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir olduğunu belirtmiştir.

- *Yavuz ve Yaşkıran (2018), Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

Bu çalışmada $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}u(x,t) + f(x,t)$ homojen olmayan kesirli kablo denklemini (non-homogeneous fractional cable equation) iki yöntemle de çözmüşlerdir. Her iki yöntemde elde ettikleri çözümleri grafikler üzerinde gösterdikten sonra çeşitli α değerleri için tablo üzerinden analiz yapmışlardır. Uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır.

3.7. Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu başlık altında, $0 < \alpha \leq 1$ ve α-mertebeden uyumlu türev operatörü ${}_\alpha\top$ şeklinde, ayrıca fonksiyonların orjinalleri küçük harfle ve dönüşüm fonksiyonları büyük harfle gösterilmiştir. Örneğin; $u(x,t)$ fonksiyonu için kesirli indirgenmiş dönüşüm fonksiyonu $U_h^\alpha(x)$ olarak gösterilmiştir (Yavuz ve Yaşkıran, 2018).

t zaman, x uzay değişkeni, $u(x,t)$ sürekli türevli ve analitik fonksiyon olmak üzere, t-boyutlu spektrum fonksiyon olan $U_h^\alpha(x)$ uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$U_h^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^h h!}\left[\left({}_\alpha\top_{*t}^{(h)}u\right)\right]_{t=t_0}$$

$u(x,t)$ 'nin dönüşüm fonksiyonu $U_h^\alpha(x)$ olsun. $U_h^\alpha(x)$ 'in ters dönüşüm fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h^\alpha(x)(t-t_0)^{\alpha h} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^h h!}\left[{}_\alpha\top_{*t}^{(h)}u\right]_{t=t_0}(t-t_0)^{\alpha h}$$

n uyumlu kısmi diferansiyel denklemin mertebesi ve $h = 0,1,2,3,...,\left(\frac{n}{\alpha}-1\right)$ olmak üzere, başlangıç koşullarının dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$U_h^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha h)!}\left[\frac{\partial^{\alpha h}}{\partial t^{\alpha h}}u(x,t)\right]_{t=t_0} & ,\ \alpha h \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & ,\ \alpha h \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Aşağıdaki genel lineer kesirli diferansiyel denklemi $u(x,0) = f(x)$ başlangıç koşuluyla ele alalım:

$${}_\alpha\top_{*t}^{(h)}u(x,t) = Lu(x,t) + v(x,t)\,, \tag{3.38}$$

uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşümüyle,

$$\alpha(h+1)U_{h+1}^\alpha(x) = LU_h^\alpha(x) + V_h^\alpha(x)\,. \tag{3.39}$$

$u(x,0) = f(x)$ başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$U_0^\alpha(x) = f(x)$$

olur ve bu (3.39) denkleminde yerine yazılırsa basit hesaplamalarla, $h = 0, 1, 2, 3, ..., n$ için $U_h^\alpha(x)$ fonksiyonlarını elde edilir. Sonrasında $U_h^\alpha(x)_{h=0}^n$ ters dönüşüm fonksiyonu şu şekilde yaklaşık çözüm verir:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h^\alpha(x) t^{h\alpha}$$

burada n yaklaşık çözümün mertebesini gösterir. Ayrıca (3.38) denkleminin tam çözümü şu şekildedir:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(x,t).$$

Yukarıda metodunu verdiğimiz, uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin ana dönüşümleri aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

Orjinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$u(x,t)$	$U_h^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^h h!}\left[{}_\alpha\top_{*t}^{(h)} u\right]_{t=t_0} (t-t_0)$
$u(x,t) = av(x,t) \pm bw(x,t)$	$U_h^\alpha(x) = aV_h^\alpha(x) \pm bW_h^\alpha(x)$
$u(x,t) = v(x,t)\, w(x,t)$	$U_h^\alpha(x) = \sum_{r=0}^{h} V_r^\alpha(x)\, W_{h-r}^\alpha(x)$
$u(x,t) = \top_{*t}^\alpha\, v(x,t)$	$U_h^\alpha(x) = \alpha(h+1)\, V_{h+1}^\alpha(x)$
$u(x,t) = x^m(t-t_0)^n$	$U_h^\alpha(x) = x^m\, \delta\left(h - \frac{n}{\alpha}\right)\ ,\ \delta\left(h-\frac{n}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & , h = \frac{n}{\alpha} \\ 0 & , h \neq \frac{n}{\alpha} \end{cases}$

3.7.1. Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Acan vd. (2020), Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Uyumlu Homotopi Analiz Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada iki ayrı denklem üzerinde, tanıttıkları üç yöntemi de uygulamışlardır. Bu denklemlerden biri; ${}_t\mathrm{T}_\alpha u + uu_x + u_{xx} + \frac{1}{5}u = 0$ kesirli Damped Burger denklemi, diğeri ise ${}_t\mathrm{T}_\alpha u - u_x u_{xx} + u_{xx} + uu_{xxx} = 0$ denklemidir. Her bir denklem için, uyguladıkları üç yöntemden elde ettikleri çözümler ile; $\alpha = 1$ için yöntemlerin verdikleri sonuçları kesin çözümle karşılaştırdıktan sonra, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için yöntemlerin verdileri sonuçları da karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmaları tablo ve grafiklerle göstermişlerdir. Sonuç olarak yöntemlerin çok başarılı olduklarını söyleyebiliriz. Bu üç yöntem arasında $\alpha = 1$ için kesin çözüme en yakın sonuçlar veren yöntem uyumlu varyasyonel iterasyon yöntemidir. Ayrıca diğer iki yöntem birbirleriyle aynı sonuçları vermişlerdir.

- *Yavuz ve Yaşkıran (2018), Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Uyumlu Kesirli Modifiye Homotopi Pertürbasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}u(x,t) + f(x,t)$ homojen olmayan kesirli kablo denklemini (non-homogeneous fractional cable equation) iki yöntemle de çözmüşlerdir. Her iki yöntemde elde ettikleri çözümleri grafikler üzerinde gösterdikten sonra çeşitli α değerleri için tablo üzerinden analiz yapmışlardır. Uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır.

3.8. Uyumlu Kesirli Modifiye İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Yöntemde kullanacağımız bazı bilgiler şunlardır (Teppawar vd., 2024):

- $u(x,\tau)$ fonksiyonu $u(x,\tau) : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı olsun.
- Tanım 2.8 den, $\alpha \in (0,1]$ ve $\tau > 0$ için,

$$T_\alpha\, u(x,\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x,\tau+\varepsilon\tau^{1-\alpha}) - u(x,\tau)}{\varepsilon}.$$

- $(x,\tau) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ olmak üzere $u(\xi,\tau)$ fonksiyonu k-zaman diferansiyellenebilir, $\alpha \in (0,1]$ ve $v_0(x,\tau) = u(x,\tau)$ olsun. (x,τ) noktasındaki bir $u(x,\tau)$ fonksiyonu için k-zaman uyumlu zaman kesirli türevi şu şekilde temsil edilebilir:

$$v_k(x,\tau) = {}_t T_{k\alpha} v_{k-1}(x,\tau) = t^{1-\alpha}\frac{\partial^k v_{k-1}(x,\tau)}{\partial t^k}.$$

- $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. u'nun α-mertebeden uyumlu zaman-kesirli türevi aşağıda verilmiştir.

$${}_\tau T_\alpha^a u(x,\tau) = {}_\tau T_\beta^a \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,\tau)$$

- $\alpha \in (0,1]$ ve $0 < x_0 \leq x \leq x_0 + R^{1/\alpha}$, $R > 0$ için $u(x,\tau)$ fonksiyonu (x,τ_0) noktasında sonsuz $\alpha-$diferansiyellenebilirse, ${}_{\tau}T_{k\alpha}^{\tau_0}$ $k-$zaman uyumlu zaman-kesirli kısmi türev olmak üzere, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$u(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k k!} \left[{}_{\tau}T_{k\alpha}^{\tau_0} u(x,\tau) \right]_{\tau=\tau_0}$$

- $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $u(x,\tau)$ fonksiyonunun uyumlu zaman kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$${}_{\tau}\mathrm{U}_{\alpha k}(x) = \frac{1}{\alpha^k k!} \left[{}_{\tau}T_{k\alpha}^{\tau_0} u(x,\tau) \right]_{\tau=\tau_0} .$$

- n uyumlu zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemin sırası olmak üzere $k = 0,1,2,...,\left(\frac{n}{\alpha}-1\right)$ olsun. Başlangıç koşullarının uyumlu zaman-kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşümleri şu şekilde tanımlıdır:

$${}_{\tau}\mathrm{U}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha k)!} \left[\frac{\partial^{k\alpha} u}{\partial x^{k\alpha}} \right]_{\tau=\tau_0} & \text{eğer } k\alpha \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{eğer } k\alpha \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

- ${}_{\tau}\mathrm{U}_k(x)$ fonksiyonunun uyumlu zaman-kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşümü $u(x,\tau)$ olsun. $k = 0,1,2,...,n$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere ${}_{\tau}\mathrm{U}_{\alpha k}(x)$ 'nin ters dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$u(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\tau}\mathrm{U}_{\alpha k}(x) \left(\tau-\tau_0\right)^{k\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k k!} \left[{}_{\tau}T_{k\alpha}^{\tau_0} u(x,\tau) \right]_{\tau=\tau_0} \left(\tau-\tau_0\right)^{k\alpha}.$$

Aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem sistemini ele alalım (Teppawar vd., 2024):

$$D^{\beta} u_j(x,\tau) + L u_j(x,\tau) + N u_j(x,\tau) = r_j(x,\tau) \, , \; x,\tau \geq 0 \, , \; m-1 < \beta \leq m \, , \; j = 1,2 \, . \tag{3.40}$$

(3.40) ifadesindeki türevler uyumlu türevlerdir. L doğrusal terimleri, N doğrusal olmayan terimleri ve $r_j(x,\tau)$ başlangıç koşuluyla kalan terimleri ifade eder.

$$u_{j,\tau}^{(k)}(x,0) = f_{j,k}(x) \, , \; k = 0,1,2,...,m-1. \tag{3.41}$$

Uyumlu indirgenmiş diferansiyel dönüşümü (3.40) denkleminin her iki tarafına uygulayarak; $Lu_j(x,\tau)$, $Nu_j(x,\tau)$ ve $r_j(x,\tau)$ fonksiyonlarının dönüşümleri sırasıyla ${}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k+\beta/\alpha}^{\alpha}(x)$, $N_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}^{\alpha}(x)$ ve $G_{j,k}^{\alpha}(x)$ olmak üzere şunu elde ederiz:

$$\frac{\Gamma(k\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k\alpha+\beta-m)} \, {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k+\beta/\alpha}^{\alpha}(x) = G_{j,k}^{\alpha}(x) - \left[L \, {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}^{\alpha}(x) + N \, {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}^{\alpha}(x) \right] \, . \tag{3.42}$$

Çözümü sonsuz bir seri olarak temsil edersek:

$$u_j(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}(x)\,. \tag{3.43}$$

Problemde doğrusal olmayan terim şu şekilde verilir:

$$Nu_j(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \tag{3.44}$$

burada $A_{j,k}$ adomian polinomlarıdır:

$$A_{j,k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{d\lambda}\left(N\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^k\,{}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k})\right)\right]_{\lambda=0}\;,\; j=1,2\,. \tag{3.45}$$

(3.42) ’de (3.43) ve (3.44) yazıldığında,

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}(x) = G^{\alpha}_{j,k}(x) - \left[L\sum_{k=0}^{\infty} {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k}\right].$$

İndirgenmiş diferansiyel ayrıştırma yöntemiyle şunu elde ederiz:

$${}_{\tau}\mathrm{U}_{j,0}(x) = G^{\alpha}_{j,k}(x)\;,$$

$${}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k+1}(x) = \left[L\sum_{k=0}^{\infty} {}_{\tau}\mathrm{U}_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k}\right]\;,\; k\geq 0\,.$$

$\left[{}_{\tau}\mathrm{U}^{\alpha}_{j,k}(x)\right]_{k=0}^{n}$ değerler kümesinin ters dönüşümü, n terimli yaklaşık çözümü şu şekilde verir:

$$u_n(x,\tau) = \sum_{k=0}^{n} {}_{\tau}\mathrm{U}^{\alpha}_{j,k}(x)\,\tau^{k\alpha}.$$

Sonuç olarak problemin yaklaşık çözümü şu şekilde elde edilir:

$$u(x,\tau) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,\tau)\,.$$

3.8.1. Uyumlu Kesirli Modifiye İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Teppawar vd. (2024), Uyumlu Kesirli Modifiye İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada öncelikle uyumlu kesirli modifiye diferansiyel dönüşüm yöntemini tanıtmışlardır. Bu yöntem, uyumlu türev operatörünü ve Adomian ayrıştırma yöntemi ile indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini birlikte kullanma mantığıyla oluşturulmuştur. Yöntem tanıtıldıktan sonra hata analizi için bir yöntem vermişlerdir. Sonrasında da dört örnek üzerinde bu tanıttıkları yöntemi uygulamışlardır. ${}_{\tau}\mathrm{T}_{\alpha}^{\tau_0}\,u + uu_x + u_{xx} + \frac{1}{5}u = 0$ kesirli damped Burgers denklemine, ${}_{\tau}\mathrm{T}_{\alpha}^{\tau_0}\,u - uu_{xx} - {u_x}^2 - u = 0$ doğrusal olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemine, kesirli mertebeden $\frac{\partial^\beta u}{\partial \tau^\beta} + v\frac{\partial u}{\partial x} + u = 1$, $\frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v = 1$ kısmi diferansiyel denklemler sistemine ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli $\mathrm{T}_{\alpha}^{\tau}\,u - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0$, $\mathrm{T}_{\alpha}^{\tau}\,u - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0$ kısmi diferansiyel denklemler sistemine; yöntemi uygulayarak ayrı ayrı tablolar ve grafikler üzerinden analizler yapmışlardır.

3.9. Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Doğrusal olmayan KMKDD’leri standart formda şöyle yazalım (Acan vd., 2020):

$$ {}_{t}\mathrm{T}_{\alpha}u(x,t) + L\left(u(x,t)\right) + N\left(u(x,t)\right) = g(x,t)\ ,\ n < \alpha \le n+1 \tag{3.46} $$

Burada, L doğrusal operatör, N doğrusal olmayan operatör, $g(x)$ homojen olmayan terim ve ${}_{t}\mathrm{T}_{\alpha}$ ise α-mertebeden uyumlu kesirli türevdir. (3.46) denklemindeki uyumlu türevi lemma 2.1 formunda yazılırsa;

$$ t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\frac{\partial^{\lceil\alpha\rceil}}{\partial t^{\lceil\alpha\rceil}}u(x,t) + L\left(u(x,t)\right) + N\left(u(x,t)\right) = g(x,t) \tag{3.47} $$

elde edilir. Klasik varyasyonel iterasyon yönteminde olduğu gibi, (3.47) denkleminde düzeltme fonksiyonu şu şekilde oluşturulur:

$$ \begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\zeta)\left[\zeta^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\frac{\partial^{\lceil\alpha\rceil}u_n(x,\zeta)}{\partial\zeta^{\lceil\alpha\rceil}}\right]d\zeta \\ &\quad + \int_0^t \lambda(\zeta)\left[L\left(u_n(x,\zeta)\right) + N\left(\tilde{u}_n(x,\zeta)\right) - g(x,\zeta)\right]d\zeta \end{aligned} \tag{3.48} $$

burada $\tilde{u}_n$ sınırlı bir varyasyondur ve $\delta\tilde{u}_n = 0$ ’dır, λ Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teorisi yardımıyla optimal olarak belirlenebilir. λ belirlenebilmesi için ilk önce en iyi şekilde tanımlanmalıdır. Belirlenen Lagrange çarpanı ve seçilen herhangi bir u_0, u_{n+1} fonksiyonu kullanılarak, $n \ge 0$ için $u(x)$ ’in ardışık yaklaşımları olan u_{n+1} kolaylıkla elde edilecektir. Dolayısıyla çözüm şu şekilde elde edilir:

$$ u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) $$

3.9.1. Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemi Uygulanan Literatürdeki Çalışmalar

- *Yavuz ve Yaşkıran (2017), Uyumlu Kesirli Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile Varyasyonel İterasyon Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - {}_0\mathrm{T}_t^{1-\alpha}u(x,t) + f(x,t)$ homojen olmayan kesirli kablo denklemini (non-homogeneous fractional cable equation) iki yöntemle de çözmüşlerdir. Her iki yöntemde elde ettikleri çözümleri $\alpha = 0.3$ ve $\alpha = 0.7$ için grafikler üzerinde gösterdikten sonra çeşitli α değerleri için tablolar üzerinden hata analizi yapmışlardır. Analiz sonucunda uyumlu varyasyonel iterasyon yönteminin kesin çözümlere daha yakın sonuçlar verdiği sonucuna ulaşmışlardır.

- *Acan vd. (2020), Uyumlu Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Uyumlu Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Uyumlu Homotopi Analiz Yöntemini uygulamışlardır.*

  Bu çalışmada iki ayrı denklem üzerinde, tanıttıkları üç yöntemi de uygulamışlardır. Bu denklemlerden biri; ${}_t\mathrm{T}_\alpha u + uu_x + u_{xx} + \frac{1}{5}u = 0$ kesirli Damped Burger denklemi, diğeri ise ${}_t\mathrm{T}_\alpha u - u_x u_{xx} + u_{xx} + uu_{xxx} = 0$ denklemidir. Her bir denklem için, uyguladıkları üç yöntemden elde ettikleri çözümler ile; $\alpha = 1$ için yöntemlerin verdikleri sonuçları kesin çözümle karşılaştırdıktan sonra, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için yöntemlerin verdileri sonuçları da karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmaları tablo ve grafiklerle göstermişlerdir. Sonuç olarak yöntemlerin çok başarılı olduklarını söyleyebiliriz. Bu üç yöntem arasında $\alpha = 1$ için kesin çözüme en yakın sonuçlar veren yöntem uyumlu varyasyonel iterasyon yöntemidir. Ayrıca diğer iki yöntem birbirleriyle aynı sonuçları vermişlerdir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürdeki çalışmalar, birçok disiplinde model olarak kullanılabilen doğrusal olmayan KDD'ler üzerine yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalarda KDD'ler için analitik ve yaklaşık çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Ancak Caputo ve Riemann-Liouville gibi kesirli türev tanımları, bilinen klasik türevin bazı temel özelliklerini sağlamadıkları ve singüler noktaya sahip oldukları için her zaman çözüme ulaştırma kabiliyetine sahip değildirler. Yani literatürdeki bazı kesirli türevler ile modellenen gerçek hayat problemlerini, bu tanımlarla çözmek mümkün olmayabilir. Bu yüzden kesirli türev içeren problemleri çözmek için literatürde birçok tipte kesirli türev tanımı ortaya çıkmıştır. Tanımlardaki farklılıklar, ilgili problemlerin doğasındaki farklılıklardan kaynaklanmaktadır. Bu tanımlar arasında uyumlu kesirli türev tanımı, klasik türevin özelliklerinden önemli bir bölümünü sağladığı için son yıllarda ilgi odağı olmuştur.

Doğrusal olmayan KDD'ler şeklindeki modeller için her bir modelin tek çözüm yönteminin olduğu söylenemez. Araştırmamızda gördüğümüz üzere, bir KDD modelinin farklı yöntemlerle çözümleri fonksiyonel olarak bulunabilmekte, ancak sonrasında analizler yapabilmek için de standartlaşmış matematiksel araçlar bulunmamaktadır. Yöntem ve araçların çeşitlilik göstermesi, bize modellerdeki parametre değerlerini, sayısal simülasyonları doğrulayan en uygun yöntemi tercih etmemiz için fırsatlar sunmaktadır.

Bu çalışmada uyumlu türev operatörü kullanılarak literatürde geliştirilen yöntemler ayrı ayrı ele alınmış ve bu yöntemlerin uygulandığı problemler sunulmuştur. Ayrıca bu problemler için kullanılan yöntemlerden hangilerinin daha az hata oranıyla çözüm verdiği de dikkate alınarak yöntemler arasında değerlendirme yapılmıştır.

Bundan sonraki süreçte bu alanda yapılacak olan çalışmalarda uyumlu türev operatörünün hangi metotlarda daha iyi sonuç verdiğinin ortaya çıkarılması yanında, farklı tür kesirli türev operatörleri arasında karşılaştırma yapmak suretiyle hangi tür problemlerde hangi operatörün daha anlamlı ve doğru sonuçlar verdiği gerçek veriler yardımıyla çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279:57–66.

Acan, O., Firat, O., ve Keskin, Y. (2020). Conformable variational iteration method, conformable fractional reduced differential transform method and conformable homotopy analysis method for non-linear fractional partial differential equations. *Waves in Random and Complex Media*, 30(2):250–268.

Acan, O., Firat, O., Keskin, Y., ve Oturanc, G. (2017). Conformable variational iteration method. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1):172–178.

Ahmed, S. A., Saadeh, R., ve Qazza, A. (2024). Applying conformable double Sumudu–Elzaki approach to solve nonlinear fractional problems. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 10:271–286.

Akram, G., Sadaf, M., Arshed, S., ve Sameen, F. (2022). Traveling wave solutions of conformable time-fractional Klien-Fock-Gordon equation by the improved tan (ψ (ζ)/2)-expansion method. *Journal of King Saud University-Science*, 34(3):101822.

Al-Shawba, A. A., Abdullah, F. A., Azmi, A., Akbar, M. A., ve Nisar, K. S. (2023). Compatible extension of the (G'/G)-expansion approach for equations with conformable derivative. *Heliyon*, 9(5).

Al-Smadi, M., Arqub, O. A., ve Hadid, S. (2020a). Approximate solutions of nonlinear fractional Kundu-Eckhaus and coupled fractional massive Thirring equations emerging in quantum field theory using conformable residual power series method. *Physica Scripta*, 95(10):105205.

Al-Smadi, M., Arqub, O. A., ve Momani, S. (2020b). Numerical computations of coupled fractional resonant Schrödinger equations arising in quantum mechanics under conformable fractional derivative sense. *Physica Scripta*, 95(7):075218.

Alabedalhadi, M., Al-Smadi, M., Al-Omari, S., Baleanu, D., ve Momani, S.

(2020). Structure of optical soliton solution for nonliear resonant space-time Schrödinger equation in conformable sense with full nonlinearity term. *Physica Scripta*, 95(10):105215.

Ali, K. K., Zafar, A., Razzaq, W., Ahmad, H., Awwad, F. A., ve Ismail, E. A. (2024). The kink solitary wave and numerical solutions for conformable non-linear space–time fractional differential equations. *Results in Physics*, s. 107423.

Alqaraleh, S. M., Talafha, A. G., Momani, S., Al-Omari, S., ve Al-Smadi, M. (2022). Exact soliton solutions for conformable fractional six wave interaction equations by the ansatz method. *Fractals*, 30(05):2240143.

Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.

Atangana, A., Baleanu, D., ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13:889–898.

Avcı, H. H. ve Anaç, H. (2023). The new conformable methods to solve conformable time-fractional generalized Burgers equation with proportional delay. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 39(2):315–329.

Avit, Ö. ve Anac, H. (2024). Thenovel numerical solutions for conformable fractional Kuramoto-Sivashinsky equations by using Cq-HATM and CHPETM. *Alexandria Engineering Journal*, 92:294–309.

Ayata, M. ve Ozkan, O. (2020). A new application of conformable Laplace decomposition method for fractional Newell-Whitehead-Segel equation. *AIMS mathematics*, 5(6):7402–7412.

Bas, E., Acay, B., ve Ozarslan, R. (2019). The price adjustment equation with different types of conformable derivatives in market equilibrium. *AIMS Mathematics*, 4(3):805–820.

Bonyah, E., Yavuz, M., Baleanu, D., ve Kumar, S. (2022). A robust study on the listeriosis disease by adopting fractal-fractional operators. *Alexandria Engineering Journal*, 61(3):2016–2028.

Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2):73–85.

Cenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A., ve Tasbozan, O. (2017). New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative. *Waves in Random and Complex Media*, 27(1):103–116.

Deming, W. E. (1944). The gamma and beta functions. *Graduate School, Department of Agriculture*, s. 1–10.

Durur, H., Yokuş, A., ve Yavuz, M. (2022). Behavior analysis and asymptotic stability of the traveling wave solution of the Kaup-Kupershmidt equation for conformable derivative. *Fractional Calculus: New Applications in Understanding Nonlinear Phenomena*, 3:162–185.

Edeki, S., Adinya, I., Akinlabi, G., ve Ogundile, O. (2019). Conformable decomposition for analytical solutions of a time-fractional one-factor markovian model for bond pricing. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 13(4):539–544.

Ekici, M. (2024). Travelling wave solutions for some time-fractional nonlinear differential equations. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 7(2):246–253.

Eslami, M., Heidari, S., Jedi Abduridha, S. A., ve Asghari, Y. (2024). Generalized exponential rational function method for solving nonlinear conformable time-fractional hybrid-lattice equation. *Optical and Quantum Electronics*, 56(5):725.

Eslami, M. ve Rezazadeh, H. (2016). The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, 53:475–485.

Ghita, M., Copot, D., ve Ionescu, C. M. (2021). Lung cancer dynamics using fractional order impedance modeling on a mimicked lung tumor setup. *Journal of Advanced*

Research, 32:61–71.

Günerhan, H., Yiğider, M., Manafian, J., ve Ilhan, O. A. (2021). Numerical solution of fractional order logistic equations via conformable fractional differential transform method. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 24(5):1207–1220.

Hilfer, R. (2000a). Applications of fractional calculus in physics. *World Scientific*, s. 87.

Hilfer, R. (2000b). Fractional calculus and regular variation in thermodynamics. *Applications of fractional calculus in physics*, 429.

Hosseini, K., Mayeli, P., ve Ansari, R. (2017). Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein-Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities. *Optic*, 130:737–742.

Iqbal, M. A., Ganie, A. H., Miah, M. M., ve Osman, M. S. (2024). Extracting the ultimate new soliton solutions of some nonlinear time fractional pdes via the conformable fractional derivative. *Fractal and Fractional*, 8(4):210.

Islam, M. T., Ryehan, S., Abdullah, F. A., ve Gomez-Aguilar, J. F. (2023). The effect of brownian motion and noise strength on solutions of stochastic Bogoyavlenskii model alongside conformable fractional derivative. *Optic*, 287(171140).

Javeed, S., Baleanu, D., Waheed, A., Shaukat Khan, M., ve Affan, H. (2019). Analysis of homotopy perturbation method for solving fractional order differential equations. *Mathematics*, 7(1):40.

Jena, R. M., Chakraverty, S., Yavuz, M., ve Abdeljawad, T. (2021). A new modeling and existence–uniqueness analysis for Babesiosis disease of fractional order. *Modern Physics Letters B*, 35(30):2150443.

Katugampola, U. N. (2014). A new fractional derivative with classical properties. *arXiv preprint arXiv:1410.6535*.

Khalil, R., Horani, M. A., Yousef, A., ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70.

Korkmaz, A. ve Hosseini, K. (2017). Exact solutions of a nonlinear conformable time-fractional parabolic equation with exponential nonlinearity using reliable methods. *Optical and Quantum Electronics*, 49(278):1–10.

Kumar, D., Kaplan, M., Haque, M. R., Osman, M., ve Baleanu, D. (2020). A variety of novel exact solutions for different models with the conformable derivative in shallow water. *Frontiers in Physics*, 8:177.

Kumar, D., Seadawy, A. R., ve Joardar, A. K. (2018). Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology. *Chinese journal of physics*, 56(1):75–85.

Kurt, A., Tasbozan, O., ve Çenesiz, Y. (2016). Homotopy analysis method for conformable Burgers–Korteweg-de Vries equation. *Bulletin of Mathematical Sciences and Applications*, 17:17–23.

Lakestani, M. ve Manafian, J. (2018). Analytical treatment of nonlinear conformable time-fractional Boussinesq equations by three integration methods. *Optical and Quantum Electronics*, 50(4):1–31.

Liaqat, M. I., Khan, A., ve Akgül, A. (2022). Adaptation on power series method with conformable operator for solving fractional order systems of nonlinear partial differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 157:111984.

Ma, L. ve Li, C. (2017). On Hadamard fractional calculus. *Fractals*, 25(03):1750033.

Mabrouk, S., Rezazadeh, H., Ahmad, H., Rashed, A., Demirbilek, U., ve Gepreel, K. A. (2024). Implementation of optical soliton behavior of the space–time conformable fractional Vakhnenko–Parkes equation and its modified model. *Optical and Quantum Electronics*, 56(222).

Mamat, M., Syouri, S., Alghrouz, I. M., Sulaiman, I. M., Sufahani, S. F., ve Quds, P. (2020). Conformable fractional differential transform method for solving fractional derivatives. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(7):1734–1743.

Mamun, A.-A., Lu, C., Ananna, S. N., ve Uddin, M. M. (2024). Dynamical behavior of water wave phenomena for the 3d fractional WBBM equations using rational sine-Gordon expansion method. *Scientific Reports*, 14(6455):1–19.

Martínez, L., Rosales, J., Carreño, C., ve Lozano, J. M. (2018). Electrical circuits described by fractional conformable derivative. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 46(5):1091–1100.

Naik, P. A., Owolabi, K. M., Yavuz, M., ve Zu, J. (2020). Chaotic dynamics of a fractional order hiv-1 model involving aids-related cancer cells. *Chaos, Solitons and Fractals*, 140(110272):1–13.

Nisar, K. S., Ilhan, O. A., Manafian, J., Shahriari, M., ve Soybaş, D. (2021). Analytical behavior of the fractional Bogoyavlenskii equations with conformable derivative using two distinct reliable methods. *Results in Physics*, 22(103975).

Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Academic Press*, 198:62–81.

Razzaq, W., Zafar, A., ve Bekir, A. (2024). Traveling wave solutions of some cfd reaction duffing and diffusion–reaction equations arising in mathematical physics. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 10(3):107.

Rezazadeh, H., Mirhosseini-Alizamini, S. M., Eslami, M., Rezazadeh, M., Mirzazadeh, M., ve Abbagari, S. (2018a). New optical solitons of nonlinear conformable fractional Schrödinger-Hirota equation. *Optic*, 172:545–553.

Rezazadeh, H., Tariq, H., Eslami, M., Mirzazadeh, M., ve Zhou, Q. (2018b). New exact solutions of nonlinear conformable time-fractional phi-4 equation. *Chinese Journal of Physics*, 56(6):2805–2816.

Ross, B. (1974). The development, theory and applications of the gamma-function and a profile of fractional-calculus. *New York University*, s. 1–15.

Shqair, M., Al-Smadi, M., Momani, S., ve El-Zahar, E. (2020). Adaptation of conformable residual power series scheme in solving nonlinear fractional quantum mechanics problems. *Applied Sciences*, 10(3):890.

Teppawar, R., Ingle, R., ve Muneshwar, R. (2024). Solving nonlinear time-fractional partial differential equations using conformable fractional reduced differential transform with Adomian decomposition method. *Contemporary Mathematics*, s. 853–872.

Weilbeer, M. (2006). Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. *Papierflieger Clausthal-Zellerfeld, Germany*, s. 7–13.

Yang, Q., Liu, F., ve Turner, I. (2010). Numerical methods for fractional partial differential equations with riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling*, 34(1):200–218.

Yavuz, M. (2017). Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 8:1–7.

Yavuz, M., Coşar, F. Ö., Günay, F., ve Özdemir, F. N. (2021). A new mathematical modeling of the Covid-19 pandemic including the vaccination campaign. *Open Journal of Modelling and Simulation*, 9(3):299–321.

Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2018). On the solutions of fractional Cauchy problem featuring conformable derivative. In *ITM Web of Conferences*, volume 22. EDP Sciences.

Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2019). New numerical techniques for solving fractional partial differential equations in conformable sense. In *Non-Integer Order Calculus and its Applications: 9th International Conference on Non-Integer Order Calculus and Its Applications, Łódź, Poland 9*, s. 49–62. Springer.

Yavuz, M. ve Yaşkıran, B. (2018). Conformable derivative operator in modelling neuronal dynamics. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 13(2):13.

Yavuz, M. ve Yaşkıran, B. (2017). Approximate-analytical solutions of cable equation using conformable fractional operator. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(4):209–219.

Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2018a). A different approach to the European option pricing model with new fractional operator. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):12.

Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2018b). European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel. *Fractal and Fractional*, 2(1):3.

Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2018c). A quantitative approach to fractional option pricing problems with decomposition series. *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1):102–109.

Yavuz, M., Özköse, F., Susam, M., ve Kalidass, M. (2023). A new modeling of fractional-order and sensitivity analysis for hepatitis-b disease with real data. *Fractal and Fractional*, 7(2):165.

Yokus, A. ve Yavuz, M. (2021). Novel comparison of numerical and analytical methods for fractional Burger–Fisher equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S*, 14(7).

Yokuş, A. (2021). Construction of different types of traveling wave solutions of the relativistic wave equation associated with the Schrödinger equation. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 1(1):24–31.

Zada, L., Nawaz, R., Nisar, K. S., Tahir, M., Yavuz, M., Kaabar, M. K., ve Martínez, F. (2021). New approximate-analytical solutions to partial differential equations via auxiliary function method. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 4:100045.