



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



EŞ DUBLE GRAFLARIN ZAGREB  
İNDEKSLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Beyza URLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2020  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL VE ONAYI

Beyza URLU tarafından hazırlanan “Eş Duple Grafların Zagreb İndeksleri Üzerine Bir Çalışma” adlı tez çalışması 07/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

#### Üye

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ....../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Beyza URLU

Tarih:

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### EŞ DUBLE GRAFLARININ ZAGREB İNDEKSLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

**Beyza URLU**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ**

**2020, 52 Sayfa**

**Jüri**

**Doç Dr. Nihat AKGÜNEŞ  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER**

Graf teori, matematiğin önemli bir alt bilim dalıdır. Günlük hayatımızda ve temel bilimlerde de önemli bir yeri olan graf teori, problemlerin çözümünde pratikliği sayesinde popülerliğini korumaktadır.

Bu çalışmada özel graf çeşitlerinin duble graflarının eş duble grafları üzerinde durulmuş. Özel graf çeşitlerinin duble graflarının eş duble graflarının Zagreb indeksleri elde edilmiştir ve uygulamaları yapılmıştır.

Tez, 5 ana bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, graf tanımlanmış ve bazı özel graflara yer verilmiştir. Duble graf ve eş duble graf tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, Zagreb indeksler üzerine literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ise, bazı Zagreb indekslerin tanımlarına değinilmiştir. Zagreb indekslerinin uygulamalarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, eş duble grafların Zagreb indeksleri hesaplanmıştır. Eş duble grafların Zagreb indeksleri üzerine uygulamalar yapılmıştır.

Son olarak ise, elde edilen yeni gelişmeler doğrultusunda ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Duble Graf, Eş Duble Graf, Forgotten İndeksi, Graf, Narumi-Katayama İndeksi, Zagreb İndeksi

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**A STUDY ON ZAGREB INDEXES OF CO-DOUBLE GRAPS**

**Beyza URLU**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
MATHEMATICS**

**Advisor: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ**

**2020, 52 Pages**

**Jury**

**Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER**

Graph theory is an important subscience of mathematics. Graph theory, which also has an important place in our daily life and basic science, remains popular thanks to its practicality in solving problems.

In this study, the essential focus is on the co-double graphs of double graphs of special graph varieties. The Zagreb indexes of co-double graphs of double graphs of special graph varieties are obtained and applications are made.

The thesis consists of 5 main chapters.

In the first chapter, the graph is defined and some special graphs are included. Double graph and co-double graph are introduced.

In the second chapter, a literature review about the Zagreb indexes is made.

In the third chapter, the definitions of some Zagreb indexes are referred. Application of Zagreb indexes are included.

In the fourth chapter, the Zagreb indexes of the co-double graphs are calculated. Application of Zagreb indexes of co-double graphs are made.

Finally, the results, which are obtained in the view of new developments, are stated.

**Keywords:** Co-Double Graph, Double Graph, Forgotten Index, Graph, Narumi-Katayama Index, Zagreb Index

## ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlama sürecinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ' e ve ilgisini, önerilerini göstermekten kaçınmayan Doç. Dr. Melek ERDOĞDU' ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen değerli arkadaşım Aslı AYDIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Beyza URLU  
KONYA-2020

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ .....</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER .....</b>	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR.....</b>	<b>ix</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ .....</b>	<b>xi</b>
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Grafın Tanımı ve Yapısı.....	3
1.2. Graf Çeşitleri .....	6
1.3. Duple Graf.....	10
1.4. Eş Duple Graf.....	10
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>11</b>
2.1. Zagreb İndeksleri Üzerine Yapılan Çalışmalar .....	11
<b>3. ZAGREB İNDEKSLERİ .....</b>	<b>15</b>
3.1. Birinci Zagreb İndeksi .....	15
3.2. İkinci Zagreb İndeksi .....	15
3.3. Forgotten İndeksi .....	16
3.5. Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi .....	18
3.6. İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi.....	19
3.7. Birinci Modified Zagreb İndeksi .....	19
3.8. İkinci Modified Zagreb İndeksi .....	19
3.9. Narumi-Katayama İndeksi .....	22
3.10. Birinci Zagreb Eş İndeksi .....	22
3.11. İkinci Zagreb Eş İndeksi .....	22
3.12. Hyper-Zagreb Eş İndeksi .....	23
<b>4. EŞ DUBLE GRAFLARININ ZAGREB İNDEKSLERİ.....</b>	<b>28</b>
4.1. Eş Duple Grafların Birinci Zagreb İndeksi .....	29
4.2. Eş Duple Grafların İkinci Zagreb İndeksi.....	29
4.3. Eş Duple Grafların Forgotten İndeksi.....	30
4.4. Eş Duple Grafların Hyper-Zagreb İndeksi.....	31
4.5. Eş Duple Grafların Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi .....	34

4.6. Eş Duple Grafların İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi .....	34
4.7. Eş Duple Grafların Birinci Modified Zagreb İndeksi .....	35
4.8. Eş Duple Grafların İkinci Modified Zagreb İndeksi.....	36
4.9. Eş Duple Grafların Narumi-Katayama İndeksi .....	39
4.10. Eş Duple Grafların Birinci Zagreb Eş İndeksi.....	39
4.11. Eş Duple Grafların İkinci Zagreb Eş İndeksi.....	41
4.12. Eş Duple Grafların Hyper-Zagreb Eş İndeksi.....	42
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>48</b>
5.1 Sonuçlar .....	48
5.2 Öneriler .....	48
<b>6. KAYNAKLAR .....</b>	<b>49</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>52</b>



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$n$	: Köşe sayısı
$m$	: Kenar sayısı
$V(G)$	: $G$ grafinin köşe kümesi
$E(G)$	: $G$ grafinin kenar kümesi
$G = (V, E)$	: $G$ grafi
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}$	: $G$ grafinin köşe noktaları
$\{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}$	: $G$ grafinin kenar noktaları
$ V(G) $	: $G$ grafinin mertebesi
$ E(G) $	: $G$ grafinin boyutu
$(u, v)$	: $G$ grafinin komşu noktaları
$d_G(v_n)$	: $G$ grafinin derecesi
$\Delta(G)$	: $G$ grafinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	: $G$ grafinin minimum derecesi
$G^c$	: $G$ grafinin tümleyeni
$N_n$	: $n$ köşeli boş graf
$P_n$	: $n$ köşeli yol graf
$C_n$	: $n$ köşeli çevre graf
$K_n$	: $n$ köşeli tam graf
$K_{n,m}$	: İki parçalı tam graf
$S_n$	: $n$ köşeli yıldız graf
$W_n$	: $n$ köşeli tekerlek graf
$T_n$	: $n$ köşeli larva graf
$D(G)$	: Double graf
$CD(G)$	: Eş double graf
$M_1(G)$	: Birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	: İkinci Zagreb indeksi
$F(G)$	: Forgotten indeksi

$HZ(G)$	: Hyper-Zagreb indeksi
$\Pi_1(G)$	: Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(G)$	: İkinci çarpımsal Zagreb indeksi
$M_1'(G)$	: Birinci modified Zagreb indeksi
$M_2'(G)$	: İkinci modified Zagreb indeksi
$NK(G)$	: Narumi-Katayama İndeksi
$\overline{M_1(G)}$	: Birinci Zagreb eş indeksi
$\overline{M_2(G)}$	: İkinci Zagreb eş indeksi
$\overline{HZ(G)}$	: Hyper-Zagreb eş indeksi
$n_c$	: Eş duble graf köşe sayısı
$m_c$	: Eş duble graf kenar sayısı
$M_1(CD(G))$	: Eş duble grafın birinci Zagreb indeksi
$M_2(CD(G))$	: Eş duble grafın ikinci Zagreb indeksi
$F(CD(G))$	: Eş duble grafın forgotten indeksi
$HZ(CD(G))$	: Eş duble grafın hyper-zagreb indeksi
$\pi_1(CD(G))$	: Eş duble grafın birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\pi_2(CD(G))$	: Eş duble grafın ikinci çarpımsal Zagreb indeksi
$M'_1(CD(G))$	: Eş duble grafın birinci modified Zagreb indeksi
$M'_2(CD(G))$	: Eş duble grafın ikinci modified Zagreb indeksi
$NK(CD(G))$	: Eş duble grafın narumi-katayama indeksi
$\overline{M_1(CD(G))}$	: Eş duble grafın birinci Zagreb eş indeksi
$\overline{M_2(CD(G))}$	: Eş duble grafın ikinci Zagreb eş indeksi
$\overline{HZ(CD(G))}$	: Eş duble grafın hyper-zagreb eş indeksi

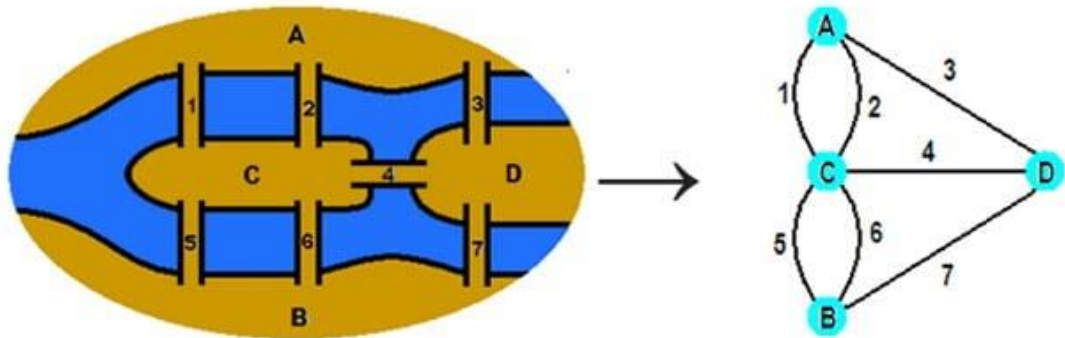
## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Königsberg Yedi Köprü Probleminin Çizgi Kuramına Aktarımı .....	1
Şekil 1. 1. Graf Örneği.....	3
Şekil 1. 2. Bir $G$ Grafının Mertebesi ve Boyutu .....	4
Şekil 1. 3. Bir $G$ Grafının Dereceleri .....	5
Şekil 1. 4. Bir $G$ Grafının Tümleyeni .....	6
Şekil 1. 5. Boş Graf Örnekleri .....	7
Şekil 1. 6. Yol Graf Örnekleri .....	7
Şekil 1. 7. Çevre Graf Örnekleri.....	7
Şekil 1. 8. Tam Graf Örnekleri .....	8
Şekil 1. 9. İki Parçalı Tam Graf Örnekleri .....	8
Şekil 1. 10. Yıldız Graf Örnekleri .....	9
Şekil 1. 11. Tekerlek Graf Örnekleri .....	9
Şekil 1. 12. Larva Graf Örnekleri .....	9
Şekil 1. 13. $D(P_4)$ Duple Graf Örneği.....	10
Şekil 1. 14. $CD(P_4)$ Eş Duple Graf Örneği.....	10
Şekil 3. 1. Larva Grafi .....	17
Şekil 3. 2. Larva Grafının Dereceleri .....	17
Şekil 3. 3. Tekerlek Grafi .....	20
Şekil 3. 4. Tekerlek Grafının Dereceleri.....	20
Şekil 3. 5. Yıldız Grafi.....	24
Şekil 3. 6. Yıldız Grafının Dereceleri.....	24
Şekil 4. 1. $CD(C_3)$ Çevre Eş Duple Grafi.....	32
Şekil 4. 2. $CD(C_3)$ Çevre Eş Duple Grafının Derecesi.....	32
Şekil 4. 3. $CD(K_{1,4})$ İki Parçalı Eş Duple Grafi .....	37
Şekil 4. 4. $CD(K_{1,4})$ İki Parçalı Eş Duple Grafının Dereceleri.....	37
Şekil 4. 5. $CD(P_4)$ Yol Eş Duple Grafi .....	43
Şekil 4. 6. $CD(P_4)$ Yol Eş Duple Grafının Dereceleri.....	44

## 1. GİRİŞ

Königsberg şehri, Pregel ırmağı ve bu ırmağın meydana getirdiği bir ada ile yarımadaı birbirine bağlayan yedi adet köprüden oluşmaktadır. Königsberg şehrinde yaşayan Prusya halkında bu yedi köprü'nün her birinden bir kez geçme şartı ile bütün şehri dolaşabilmenin mümkün olup olmadığı merak konusu olmuştur. Bu merak konusu olan Königsberg yedi köprü probleminin çözümünü 1736 yılında Leonhard Euler tarafından çözülmesi ile Graf teorisinin temelleri atılmıştır.

Leonhard Euler, Königsberg yedi köprü probleminin çözümü için kara parçalarını harfler ile köprüleri ise sayılar ile belirterek Königsberg yedi köprü problemini çizgi kuramına aktarmıştır. Leonhard Euler'in çizgi kuramına aktarımı sayesinde harflerle belirtilen noktalar adaları ve çizgileri de köprüyü göstermesi ile matematiğin önemli bir dalı haline gelen graf teorisinin temelleri bulunmuş olmaktadır.



Şekil 1. Königsberg Yedi Köprü Probleminin Çizgi Kuramına Aktarımı

Königsberg yedi köprü probleminin çözümünde kullanılan çizgi kuramı olan graf teorisinin matematik ve birçok bilim için önemli olmakla beraber uygulanabilirliği açısından popülerliğini günümüzde hala korumaktadır. Çoklu problem çözümlerinde pratiklik kazandırdığı için graf teorisinin günümüzde navigasyonda yol konum belirlemede, bilgisayar teknolojisinde sosyal ağların temsilinde, elektronik devre sistemlerinde, şebeke yapılarında, bilgisayar ağlarında, web site yazılımlarında, veri tabanlarında, elektronların bağlantı biçimlerini göstermesinde, canlı türlerini göstermekte, soy ağacı gösterimlerinde ve doğal bilim olan fizik, kimya, biyoloji bilimlerinde kullanılmıştır.

Graf teorisinin matematik biliminde de önemli bir yere sahiptir. Graf teorisinin matematik biliminde en önemli özelliği pratiklik açısından kullanılabilir olmasıdır. Çünkü matematikte verilen bir problemin çözümünün köşe noktalarıyla belirlenmesi ile daha hızlı sonuç ve daha pratik sonuç vermesidir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, graf teorisinin tarihçesine değinilmiştir. Sonra grafın tanımına ve yapısına yer verilmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra graf çeşitleri tanıtılmıştır. Ek olarak duble graf ve eş duble grafın tanımlarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, zagreb indeksleri üzerine yapılan daha önceki bazı çalışmalar hakkında bilgilere kısaca yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, birinci ve ikinci zagreb indeksi, forgotton indeksi, hyper zagreb indeksi, birinci ve ikinci çarpımsal zagreb indeksi, birinci ve ikinci modified zagreb indeksi, narumi-katayama indeksi, birinci ve ikinci zagreb eş indeksi ve son olarak hyper zagreb eş indeksinin tanımları verilmiş. Ek olarak verilen bütün indeksler için örnek yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümde tanımlarına yer verdiğimiz bütün indeksler eş duble graflar için hesaplanmıştır. İlaveten hesaplanan tüm eş duble indeksler için örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde, bu tez çalışmasındaki bulunan bilgilere değinilmiş. Verilen tüm bilgiler sistematik şekilde düzenlenerek yazılmıştır.

Son olarak, bu tez çalışmasında orijinal olarak; eş duble graflar üzerinde birinci ve ikinci zagreb indeksi, forgotton indeksi, hyper zagreb indeksi, birinci ve ikinci çarpımsal zagreb indeksi, birinci ve ikinci modified zagreb indeksi, narumi-katayama indeksi, birinci ve ikinci zagreb eş indeksi ve son olarak hyper zagreb eş indeksini hesaplanmıştır.

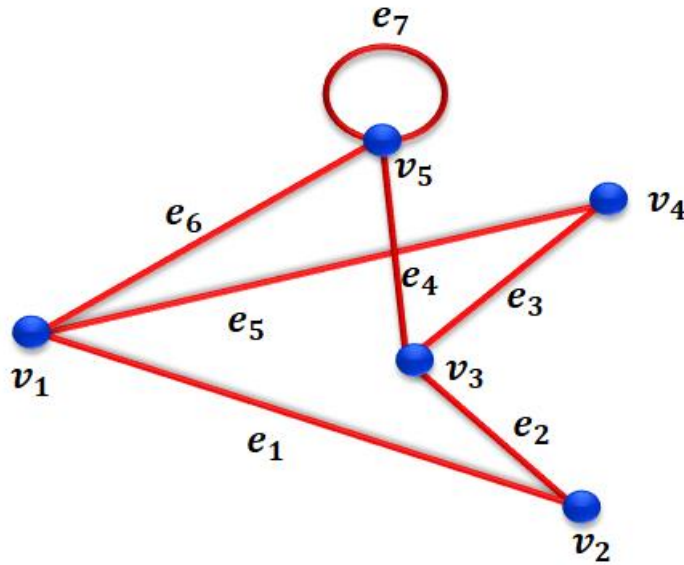
## 1.1. Grafın Tanımı ve Yapısı

Bu bölümde graf ile ilgili temel kavramlar ve tezde kullandığımız temel graf çeşitleri hakkında bilgiler verilmektedir. Verilen tüm tanımlar Gross ve Yellen'in Handbook of Graph Theory (Gross ve Yellen, 2004) kitabından alınmıştır.

**Tanım 1.1.1.** Köşe noktalarının kenarlar yoluyla birleştirilmesine graf teori denir.

**Tanım 1.1.2.** Bir  $G$  graf olmak üzere köşe noktalarının kümesini  $V(G)$  ve kenarlarının kümesini ise  $E(G)$  ile gösterilsin.  $G = (V, E)$  kümesine graf denir.

**Örnek 1.1.** Bir  $G$  graf olmak üzere köşelerinin kümesi  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  olan ve kenarlarının kümesi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  olacak şekilde aşağıda verilmiş olan yapı bir graftır.

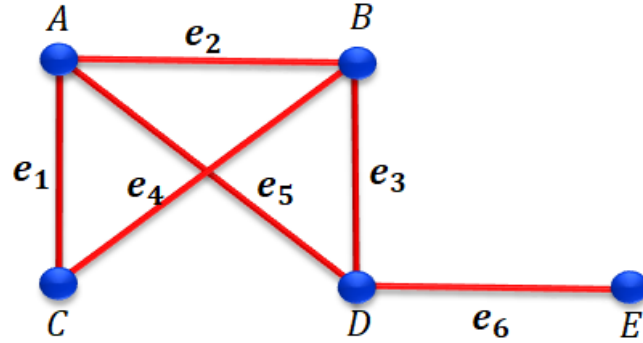


Şekil 1. 1. Graf Örneği

**Tanım 1.1.3.**  $G$  bir graf olmak üzere köşe noktalarının kümesini oluşturan  $V(G)$ 'nin eleman sayısına  $G$  grafının mertebesi denir ve  $|V(G)|$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.4.**  $G$  bir graf olmak üzere köşe noktalarını bağlayan kenarlarının kümesi oluşturan  $E(G)$ 'nin eleman sayısına  $G$  grafının boyutu denir ve  $|E(G)|$  ile gösterilir.

**Örnek 1.2.** Aşağıda verilen  $G$  grafının mertebesini ve boyutunu gösterelim.



Şekil 1. 2. Bir  $G$  Grafının Mertebesi ve Boyutu

Köşe noktalarını oluşturan  $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$  olduğu için mertebesi  $|V(G)| = 5$  olur. Köşe noktalarını bağlayan kenar kümesi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  olduğu için boyutu  $|E(G)| = 6$  olur.

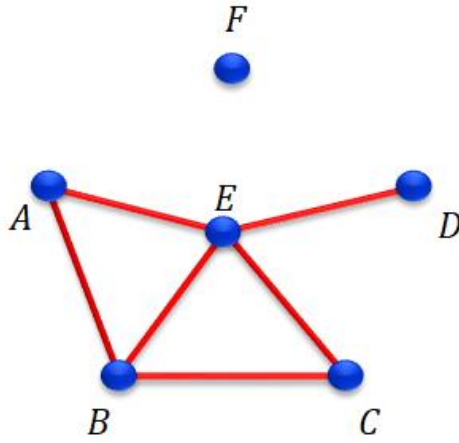
**Tanım 1.1.5.** Bir  $G$  grafında köşeleri bağlayan kenarların yönünün olmaması durumuna yönsüz graf denir.

**Tanım 1.1.6.** Bir  $G$  grafında köşe kümesinin ve köşeleri bağlayan kenar kümesinin elemanlarının sonlu olması durumunda oluşan grafa sonlu graf denir.

**Tanım 1.1.7.** Köşe kümesinin iki elemanı olan  $u$  ve  $v$  noktaları bir kenar ile birleşiyorsa ise  $u$  ve  $v$  noktalarına komşu köşe noktalar denir. Komşu köşe noktaları  $(u, v)$  gösterilir.

**Tanım 1.1.8.** Bir  $G$  grafında köşe kümesinden alınan bir  $v_n$  noktasına komşu olan köşe noktalarının sayısına grafın derecesi denir. Grafın derecesini  $d_G(v_n)$  ile gösterilir. Bir  $G$  grafındaki köşe noktasının derecesinin 0 olduğu köşeye izole köşe ve köşe noktasının derecesinin 1 olduğu köşeye de pendant (uç) köşe denir.

**Örnek 1.3.** Aşağıda verilen  $G$  grafın derecelerini bulalım.



*Şekil 1. 3. Bir  $G$  Grafının Dereceleri*

$$\deg(A) = 2$$

$$\deg(B) = 3$$

$$\deg(C) = 2$$

$$\deg(D) = 1$$

$$\deg(E) = 4$$

$$\deg(F) = 0$$

Bu örnekte görüldüğü gibi köşe noktasının derecesi 1 olan  $D$  köşesi pendant köşe ve köşe noktasının derecesi 0 olan  $F$  köşesi izole köşedir.

**Tanım 1.1.9.** Bir  $G$  grafi için maksimum ve minimum köşe noktasının derecesi sırası ile

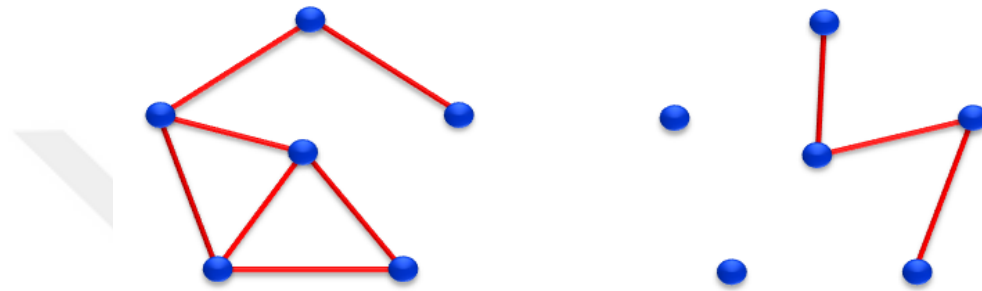
$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in G\}$$

ve

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in G\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

**Tanım 1.1.10.**  $G$  bir graf olmak üzere,  $G$  grafi ile aynı köşe noktalarına sahip olan ve  $G$  grafında kenar içermeyen köşelerin bağlanması ile oluşan grafa grafın tümleyeni denir ve  $\bar{G}$  ile gösterilir.



Şekil 1. 4. Bir  $G$  Grafının Tümleyeni

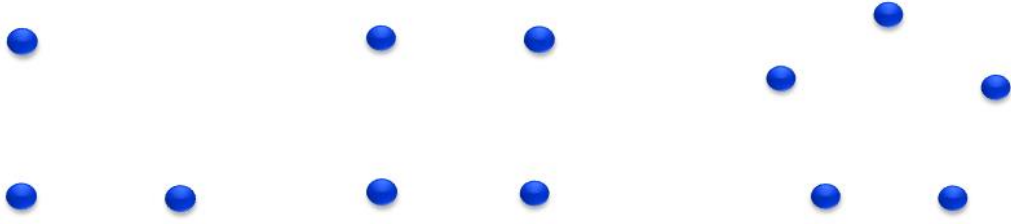
**Teorem 1.1.1.** Bir  $G$  grafi için  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  köşe noktalarının kümesi ve  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$  kenar kümesi olmak üzere, köşe sayısını  $n$  ve kenar sayısını  $m$  olarak gösterelim. Köşe noktalarının derecelerinin toplamınının, kenar sayısının iki katına eşit olmasına el sıkma teoremi denir. El sıkma teoremi;

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2m$$

şeklinde gösterilir.

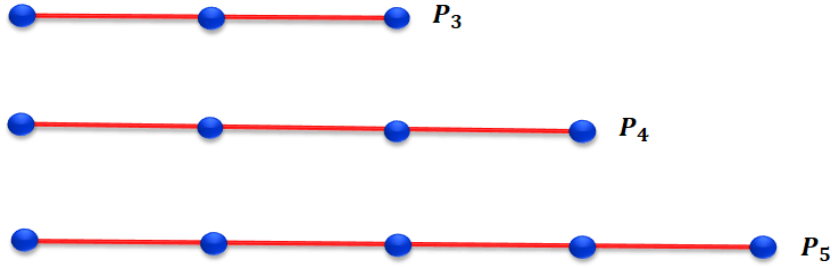
## 1.2. Graf Çeşitleri

**Tanım 1.2.1.** Köşe noktalarının dereceleri 0 olan graflara boş graf denir ve  $n$  köşe noktası olan boş graf  $N_n$  ile gösterilir.



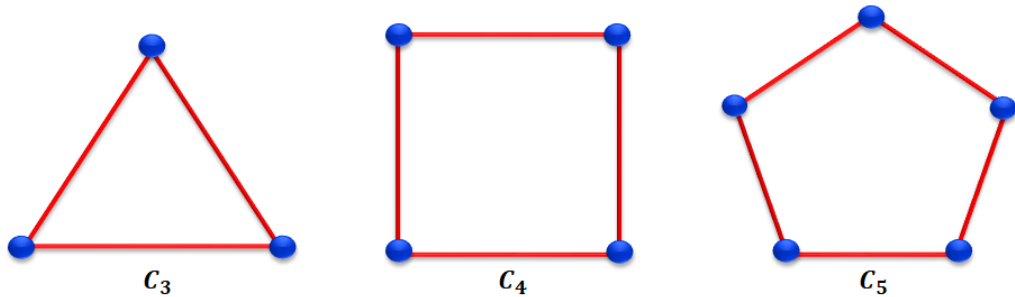
Şekil 1. 5. Boş Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.2.** Bir  $G$  grafında birbirinden farklı  $a, b, c, \dots, x, y, z$  köşe noktalarını bağlayan kenarları  $ab, bc, cd, de, \dots, vy, yz$  olarak gösterilmesine ve başlangıç köşe noktası ve bitiş köşe noktasının derecelerinin 1, diğer köşe noktalarının derecelerinin 2 olduğu grafa yol grafi denir.  $n$  tane köşe noktası olan yol grafi  $P_n$  ile gösterilir.



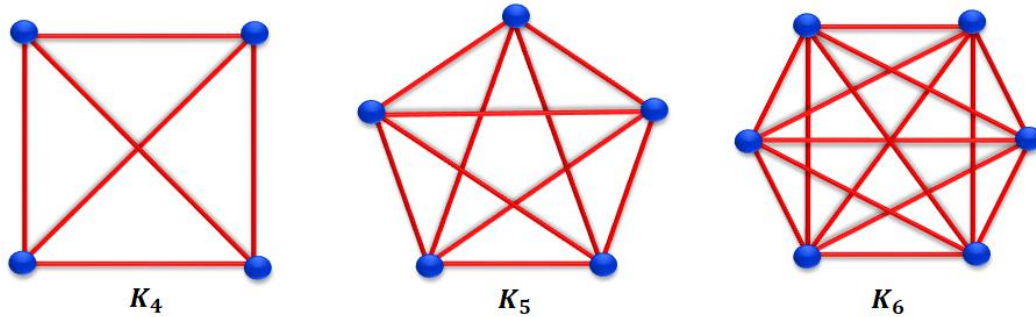
Şekil 1. 6. Yol Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.3.** Bir  $G$  yol grafının başlangıç köşe noktası ile bitiş köşe noktası aynı olan grafın köşe noktalarının derecesi 2 ve içerisinde yalnızca bir tane devir olan grafa çevre graf denir.  $n$  tane köşe noktası olan çevre grafı  $C_n$  ile gösterilir.



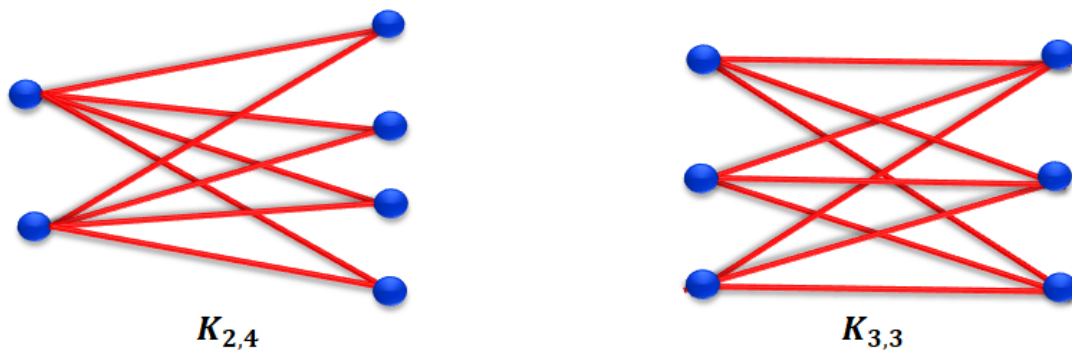
Şekil 1. 7. Çevre Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.4.** Bir  $G$  grafında bulunan herhangi iki köşe noktasını birbirine bağlayan kesinlikle bir kenarı var ise bu grafa tam graf denir.  $n$  tane köşe noktası olan bir tam grafi  $K_n$  ile gösterilir.



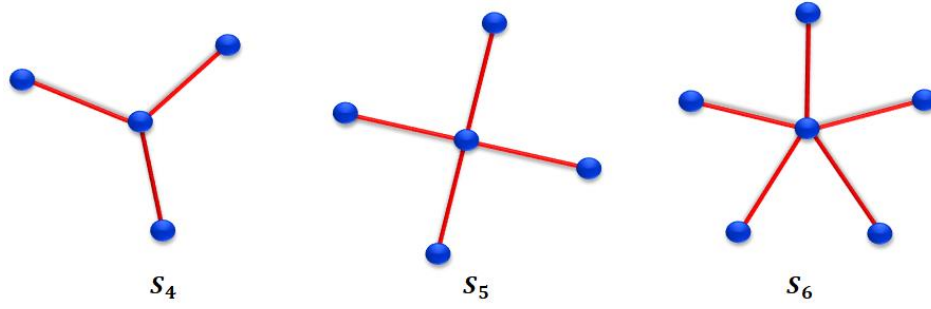
Şekil 1. 8. Tam Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.5.** Bir  $G$  grafının, köşe noktalarını  $V_1$  ve  $V_2$  kümeleri olarak ayıran ve  $V_1$ 'de bulunan köşe noktalarının kendi kümesinde bulunan köşe noktaları ile kenarı olmayıp  $V_2$ 'de bulunan köşe noktaları ile arasında kenarı varsa bu grafa iki parçalı graf denir. Eğer  $G$  grafının  $V_1$  kümesinde bulunan her bir köşe noktaları  $V_2$ 'de bulunan her köşe noktasıyla kenarı oluşturuyor ise bu grafa iki parçalı tam graf denir.  $G$  grafının  $V_1$  kümesinde bulunan  $|V_1| = s$  ve  $|V_2| = t$  olmak üzere iki parçalı tam graf  $K_{s,t}$  ile gösterilir.



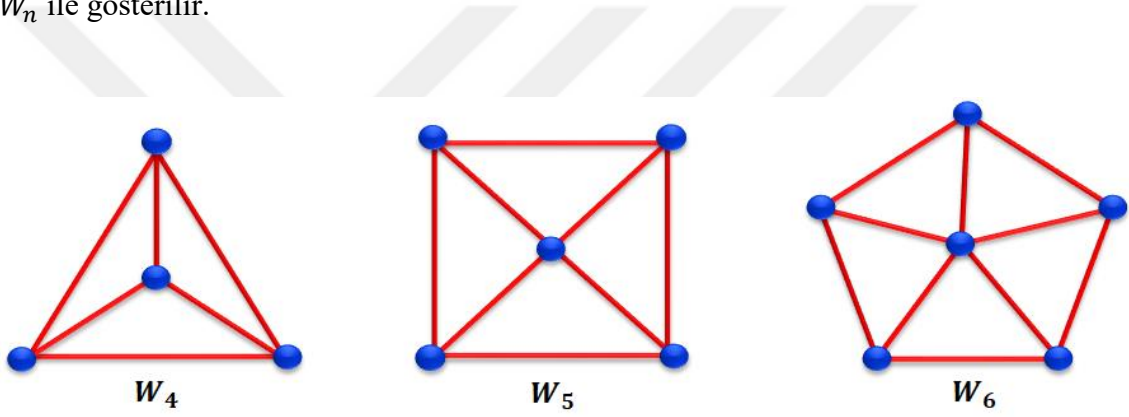
Şekil 1. 9. İki Parçalı Tam Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.6.**  $G$  bir graf olmak üzere iki parçalı grafın özel bir durumu olarak gösterilen yıldız grafı,  $V_1$  köşe noktalarının kümesinin eleman sayısının 1 olup  $V_2$  kümesinin elemanları ile kenarı oluşturuyorsa bu grafa yıldız graf denir.  $n$  tane köşe noktalı yıldız grafını  $S_n$  ile gösterilir.



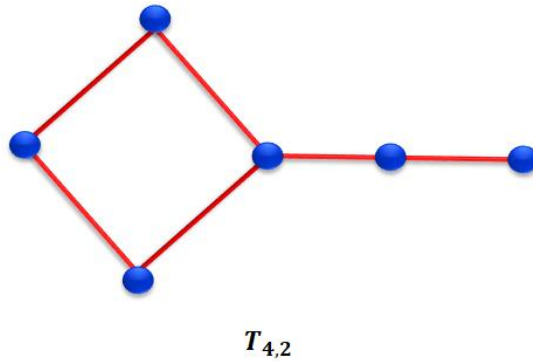
Şekil 1. 10. Yıldız Graf Örnekleri

**Tanım 1.2.7.** Bir devir grafi olan  $C_n$  grafının tüm köşe noktalarına komşu olarak yeni bir köşe noktası eklenmesi ile oluşan grafa tekerlek graf denir ve  $n$  köşeli tekerlek grafını  $W_n$  ile gösterilir.



Şekil 1. 11. Tekerlek Graf Örnekleri

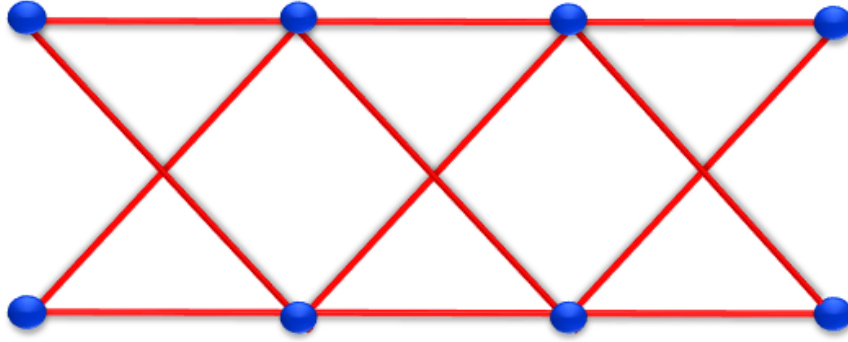
**Tanım 1.2.8.** Bir yol grafi olan  $P_n$  grafi ve  $C_n$  devir grafının birleşmesi ile oluşan grafa larva grafi denir. Ve larva grafını  $T_n$  ile gösterilir.



Şekil 1. 12. Larva Graf Örnekleri

### 1.3. Duple Graf

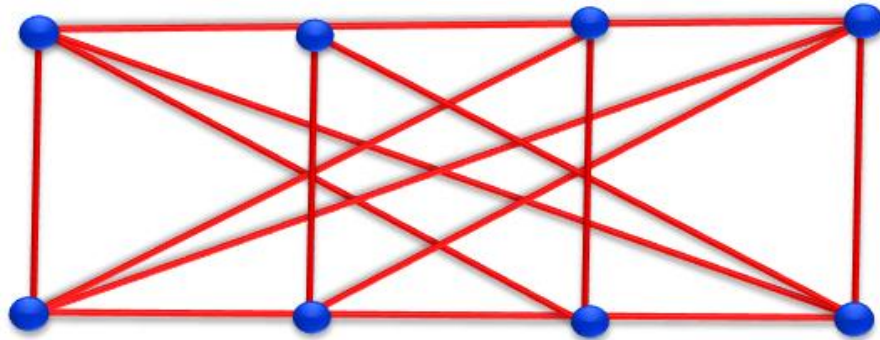
**Tanım 1.3.1.** Bir  $G$  grafi için  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  köşe kümesi,  $G$  grafinin köşe noktaları kadar etiketlenirilmiş  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  köşe noktaları ile bir kopyasını alalım. Her  $i$  için  $v_i$ 'nin denk olduğu yer  $u_i$ 'dir. Kopyasında her  $i$  için  $v_i$ 'nin komşularına  $u_i$ 'yi bağlandığında  $G$  grafinin duple grafi elde edilir. Bu grafi da  $D(G)$  ile gösterilir (Emanuele Munarini ve ark., 2008) .



Şekil 1. 13.  $D(P_4)$  Duple Graf Örneği

### 1.4. Eş Duple Graf

**Tanım 1.4.1.** Bir  $G$  grafinin köşe noktalarının kümesi  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve aynı köşe nokta sayısı kadar etiketlenirilmiş bir  $G$  grafinin kopyasını  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  olarak alalım. Her  $i$  için  $v_i$  köşe noktası diğer köşe noktaları ile komşu değil ise kopyasında komşu olmadığı köşe noktaları ile bağlanmasıyla oluşan grafa eş duple graf denir. Ve eş duple grafi  $CD(G)$  ile gösterilir (Gürbüz, 2020) .



Şekil 1. 14.  $CD(P_4)$  Eş Duple Graf Örneği

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu tezin bu kısımda Zagreb indeksleri ile ilgili literatürde var olan önemli çalışmalarını ayrıntılı bir şekilde ele alacağız.

### 2.1. Zagreb İndeksleri Üzerine Yapılan Çalışmalar

(Gutman ve Trinajstić, 1972) “*Graph Theory and molecular orbitals: Total  $\pi$  – electron energy of alternant hydrocarbons*” olarak isim verildiği bu çalışmada birinci Zagreb indeksi tanımlanmıştır. Birinci Zagreb indeksi  $\pi$  elektronun enerjisinin incelenmesi graf teori ve kimyasal matematik alanlarında mühim yere sahip olmuştur.

(I.Gutman, 1975) “*Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes*” isimli çalışmasında diğer araştırmalarının doğrultusunda ikinci Zagreb indeksini tanımlanmış. İkinci Zagreb indeksi ile ilgili bir çok özellik incelenmiş ve kanıtlanmıştır.

(Balaban, 1983) “*Topological indices for structure-activity correlations*” isimli çalışmasında topolojik indekslerin molekül oluşumları üzerindeki etkileri gösterilmiş. Zagreb indeksleri dahil bir çok topolojik indekslerin açıklamaları yapılmıştır.

(Das ve Gutman, 2004) “*Some properties of the second Zagreb index*” isimlendirdiği bu araştırmada ikinci Zagreb indeksi ve tamamlayıcısı arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. İkinci Zagreb indeksinin bazı özellikleri incelenmiştir.

(Das ve Gutman, 2004) “*The first Zagreb index 30 years after*” isimli çalışmasında birinci Zagreb indeksinin kimyasal graf teori ile ilişkili olduğunu ve bazı matematiksel özellikleri incelenmiştir. Birinci Zagreb indeksi için alt ve üst sınırlar gösterilmiştir.

(Das ve ark., 2009), “*New upper bounds on Zagreb indices*” adı verilen çalışmada bir grafın birinci Zagreb indeksleri üzerinde köşe sayısı, kenar sayısı, maksimum tepe noktası, maksimum ikinci tepe noktası ve minimum tepe noktası için üst sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlardan yararlanılarak ikinci Zagreb indeksi için de üst sınırlar incelenmiştir.

(Ashrafi ve ark., 2009) “*The first and second Zagreb indices of some graph operations*” adı verilen çalışmada kartezyen çarpım, birleşme, ayrılma ve simetrik graflar için birinci ve ikinci Zagreb indeksleri gösterilmiş. Birinci ve ikinci Zagreb indeksi için kesin sonuçlara yer verilmiştir.

(R. Todeschini, 2010) “*New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees*” adı verilen bu çalışmada matematik ve kimya bilimi için mühim yere sahip olan çarpımsal Zagreb indeksi moleküler yapılarının graf teori sistemindeki köşe derecelerinin türetilerek tanımlanmıştır.

(Ashrafi ve ark., 2010) “*The Zagreb coindices of graph operation*” adı verilen bu çalışma da eş Zagreb indekslerinin kimyasal graf teoriden farklı olarak matematiksel graf teori altında incelenmiştir. Eş Zagreb indeksleri için yeni sonuçlar incelenmiştir.

(Ashrafi ve ark., 2011) “*Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices*” adı verilen bu çalışmada eş Zagreb indekslerinin, Zagreb indekslerinin tanımlarından yararlanılarak tanımlanmıştır. Bazı özel graflar için eş Zagreb indekslerinin sınırları belirtilmiştir. İlâveten ekstremal graflar gösterilmiştir.

(Ranjini ve ark., 2011) “*On the Zagreb indices of the line graphs of the subdivision graphs*” adı verilen bu çalışmada larva grafi, tekerlek grafi ve merdiven grafinin alt grafları yol grafi olarak gösterilmiştir. Gösterilen yol grafinin Zagreb indeksleri incelenmiştir.

(Das ve Trinajstić, 2011) “*Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices*” adı verilen bu çalışmada önemli graf türleri üzerinde Zagreb eksantrik indeks ve Zagreb indeksleri sonuçları karşılaştırılmıştır. Zagreb eksantrik indeksinin sonuçlarının birinci Zagreb indeksinin sonuçlarından fazla olup olmadığı incelenmiştir.

(Gutman, 2011) “*Multiplicative Zagreb indices of trees*” adı verilen bu çalışmada önemli bir graf çeşit olan ağaç grafi üzerinde çarpımsal Zagreb indeksleri

gösterilmiştir ve extremal ağaç graflar için birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri hesaplanmıştır.

(**Hao, 2011**) “*Theorems about Zagreb Indices and Modified Zagreb Indices*” adı verilen çalışmada modified birinci ve ikinci Zagreb indeksleri incelenmiştir. Modified birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile ilgili sınırlar bulunmuştur.

(**Das ve ark., 2013**) “*Some properties of the Zagreb eccentricity indices*” adı verilen bu çalışma da birinci ve ikinci Zagreb eksantirikleri için alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. İlaveten uç değer (extremal) grafları için birinci ve ikinci eksantirikleri özellikleri gösterilmiştir.

(**Xu ve ark., 2013**) “*On the multiplicative Zagreb coindex of Graphs*” adı verilen bu çalışmada birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eş indeksleri tanımlanmıştır. Birinci ve ikinci Zagreb eş indeksleri için alt ve üst sınırları içeren özellikleri incelenmiştir. Uç değer (extremal) grafları için birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eş indeksleri hesaplanmıştır.

(**Eliasi, 2012**) “*Multiplicative versions of first Zagreb index*” adı verilen bu çalışmada birinci Zagreb indeksinin hesaplanması için verilen alternatif formülü düzenleyerek çarpımsal Zagreb indeksi hesaplanmıştır. Hesaplanan çarpımsal Zagreb indeksi belirli sayıda köşeleri olan graflar için minimum olduğu gösterilmiştir.

(**Cevik ve ark., 2013**) “*The multiplicative Zagreb indices of graph operations*” adı verilen bu çalışma da çarpımsal Zagreb indeksleri için Kartezyen çarpım, taç çarpım, grafların birleşmesi ve ayrılması durumları incelenerek üst sınırları elde edilmiştir. Ek olarak bazı graf türleri için indeksler incelenmiştir.

(**Gutman ve ark., 2015**) “*On Zagreb indices and coindices*” adı verilen çalışma da özel graf türlerinin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile graf türlerinin tamamlayıcılarının eş Zagreb indeksleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

(**Gutman, 2017**) “*On hyper-Zagreb index and coindex*” adı verilen çalışma da hyper-zagreb indeksi ve hyper eş Zagreb indeksi hesaplanmıştır. Bu çalışmada ek olarak

özel grafların tamamlayıcısı için eş indeksler incelenmiştir. Ek olarak bu çalışmada forgotten indeksine de yer verilmiştir.

**(Das ve ark., 2016)** “*On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs*” adı verilen bu çalışmada ise birinci Zagreb indeksi, grafların ve ağaç graflarının köşe sayıları, düzensizlik indeksi, maksimum dereceleri ve ekstremal graflar için alt ve üst sınırları belirlenmiştir. Çarpımsal Zagreb eş indeksleri için alt ve üst sınırlar elde edilmiş ve ekstremal grafları özellikleri gösterilmiştir. Bu çalışmalara ek olarak birinci Zagreb indeksi, narumi-katayama indeksi, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile graf katsayıları arasında bazı ilişkilendirmeler yapılmıştır.

**(Cangul ve ark., 2017)** “*New formulae for Zagreb indices*” adı verilen bu çalışmada birinci ve ikinci Zagreb indeksleri, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indekslerini temel graf sınıfları için köşe derece sayısının az olması ya da çok olması durumları değerlendirilerek incelenmiştir.

**(Maden ve Nacaroglu, 2017)** “*The Upper Bounds for Multiplicative Sum Zagreb Index of Some Graph Operations*” adı verilen bu çalışma da kökleşmiş çarpım, taç çarpım, tensör çarpım, güçlü çarpım, Kartezyen çarpım ve hiyerarşik çarpımlar için çarpımsal toplam Zagreb indeksi incelenmiş. İncelenen bu indeksler ile ilgili üst sınırlar gösterilmiştir.

**(Akgunes, 2018)** “*A Further Note on the Graph of Monogenic Semigroups*” adı verilen bu çalışmada monojenik yarı gruplar için graf parametreleri hesaplanmıştır. Bu parametrelere ek olarak birinci çarpımsal Zagreb indeksi ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksi hesaplanmış. Ve son olarak Narumi-Katayama indeksi hesaplanarak sonuçları belirtilmiştir.

**(Cangul ve ark., 2018)** “*Narumi–Katayama index of the subdivision graphs*” adı verilen çalışmada özel graf çeşitlerin subdivision grafları bulunmuş ve subdivision grafların narumi-katayama indeksleri hesaplanmıştır.

### 3. ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde kimyasal hesaplamalar ve matematik için önemli rol oynayan zagreb indeksleri tanıtılmış ve örnekler verilmiştir.

#### 3.1. Birinci Zagreb İndeksi

**Tanım 3.1.1.** Topolojik indekslerden biri olan birinci zagreb indeksi, bir  $G$  grafının köşe noktalarının derecelerinin karesinin toplanmasına denir. Ve birinci zagreb indeksi

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^2$$

olarak tanımlanır. Birinci zagreb indeksi kenarlarının üzerindeki toplam olarak ifade edilebilir. Bu durumda;

$$M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]$$

şeklinde de tanımlanabilir (Gutman ve Trinajstic, 1972; Balaban, 1983).

#### 3.2. İkinci Zagreb İndeksi

**Tanım 3.2.1.** Birinci zagreb indeksinden sonra gelen ve topolojik indeks olan ikinci zagreb indeksi, bir  $G$  grafında iki köşe noktasını komşu yapan kenarının derecelerinin çarpımlarının toplanması olarak tanımlanır. İkinci zagreb indeksi

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

şeklinde gösterilir (Gutman ve Trinajstic, 1972; Balaban, 1983).

### 3.3. Forgotten İndeksi

**Tanım 3.3.1.** Topolojik indekslerden biri olan birinci zagreb indeksinin düzenlenmesi ile elde edilen forgotten indeksi köşe noktalarının derecelerinin üçüncü kuvvetlerinin toplanması ile bulunur. Forgotten indeksi;

$$F(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^3$$

şeklinde yazılabilir (Gutman, 2017).

### 3.4. Hyper Zagreb İndeksi

**Tanım 3.4.1.** Birinci zagreb indeksinin kenarları üzerindeki toplam formülü olarak gösteriminin düzenlenmesi ile hyper zagreb indeksi ortaya çıkmıştır. Hyper zagreb indeksi;

$$HZ(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2$$

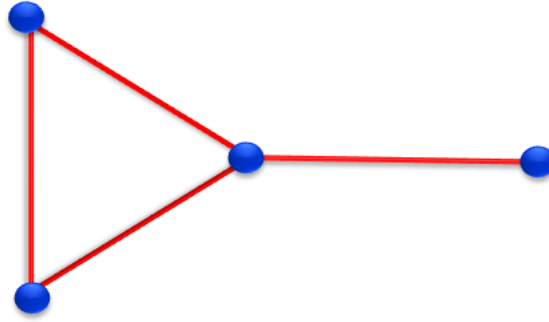
olarak gösterilir (Gutman, 2017).

**Teorem 3.4.1.**  $G$  bir graf olmak üzere  $G$  grafının hyper zagreb indeksini, forgotten indeksi ve ikinci zagreb indeksini kullanarak hesaplayabiliriz. Öyle ki;

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

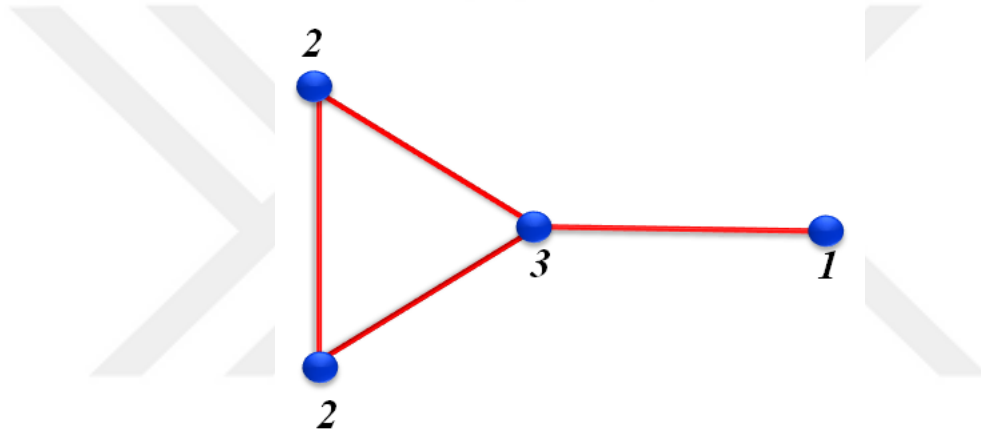
olarak bulunur (Gutman, 2017).

**Örnek. 3.1.** Aşağıda verilen  $G$  larva grafın birinci zagreb indeksini, ikinci zagreb indeksini, forgotten indeksini ve hyper zagreb indeksini hesaplayalım.



Şekil 3. 1. Larva Grafı

Şekil 3.1.'de verilen larva grafının köşe noktalarının derecelerini bulalım.



Şekil 3. 2. Larva Grafının Dereceleri

$G$  larva grafının birinci zagreb indeksini bulmak için Şekil 3.2.'de verilen  $G$  larva grafının köşe derecelerinin karelerinin toplamalıyız. O halde;

$$M_1(G) = 1^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$$

$$M_1(G) = 18$$

olarak bulunur.  $G$  larva grafının ikinci zagreb indeksini bulmak için Şekil 3.2.'de verilen  $G$  larva grafında kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerini çarpıp toplayalım. O halde;

$$M_2(G) = 1.3 + 3.2 + 2.2 + 3.2$$

$$M_2(G) = 19$$

olarak bulunur.  $G$  larva grafının forgotten indeksini bulmak için Şekil 3.2.'de verilen  $G$  larva grafında köşe noktalarının derecelerinin üçüncü kuvvetlerini toplamalıyız. O halde;

$$F(G) = 1^3 + 3^3 + 2^3 + 2^3$$

$$F(G) = 44$$

olarak bulunur. Ve son olarak  $G$  larva grafının hyper zagreb indeksini Teorem 3.4.1.'de verdiğimiz eşitlikten faydalanarak hesaplayalım.

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

Yukarıda verilen eşitlikten hyper zagreb indeksini hesaplanabilmesi için forgotten indeksi ve ikinci Zagreb indeksini kullanacağız. Bu durumda;

$$HZ(G) = 44 + 2 \cdot 19$$

$$HZ(G) = 82$$

olarak bulunur.

### 3.5. Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

**Tanım 3.5.1.** Bir  $G$  grafının köşe noktalarının derecelerinin karelerinin birbiri ile çarpılmasına birinci çarpımsal zagreb indeksi denir. Birinci çarpımsal zagreb indeksi;

$$\pi_1(G) = \prod_{u \in V(G)} d_G(u)^2$$

olarak gösterilir (Todeschini ve Cosonni, 2010).

### 3.6. İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

**Tanım 3.6.1.** Bir  $G$  grafında, kenarını oluşturan iki köşe noktasının derecelerinin çarpımlarının birbirleri ile çarpılmasına ikinci çarpımsal zagreb indeksi denir. İkinci çarpımsal zagreb indeksi;

$$\pi_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

olarak gösterilir (Todeschini ve Consonni, 2010).

### 3.7. Birinci Modified Zagreb İndeksi

**Tanım 3.7.1.** Bir  $G$  grafının, birinci zagreb indeksinin düzenlenmesi ile oluşan birinci modified zagreb indeksi, köşe noktalarının derecelerinin karesinin çarpıma göre tersinin alınıp toplanmasına denir. Birinci modified zagreb indeksi;

$$M'_1(G) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d_G(u)^2}$$

olarak gösterilir (Hao, 2011).

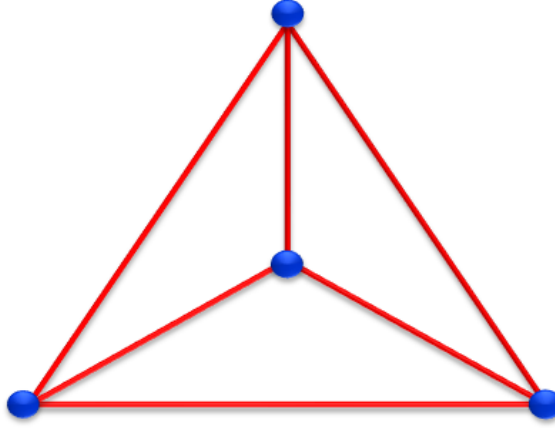
### 3.8. İkinci Modified Zagreb İndeksi

**Tanım 3.8.1.** Bir  $G$  grafının kenarını oluşturan iki köşe noktasının derecelerinin çarpımlarının, çarpma işlemine göre terslerinin alınıp toplanmasına ikinci modified zagreb indeksi denir . İkinci modified zagreb indeksi;

$$M'_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{d_G(u)d_G(v)}$$

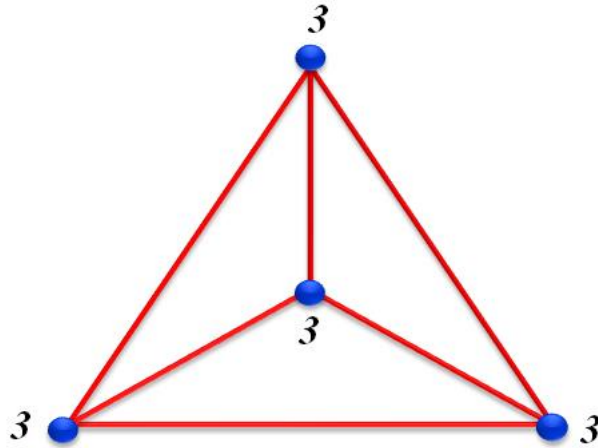
olarak gösterilir (Hao, 2011).

**Örnek 3.2.** Aşağıda verilen  $G$  tekerlek grafının birinci çarpımsal zagreb indeksini, ikinci çarpımsal zagreb indeksini, birinci modified zagreb indeksini ve ikinci modified zagreb indeksini hesaplayalım.



Şekil 3. 3. Tekerlek Grafı

İlk olarak Şekil 3.3.'te verilen tekerlek grafının köşe noktalarının derecelerini bulalım.



Şekil 3. 4. Tekerlek Grafının Dereceleri

$G$  tekerlek grafının birinci çarpımsal zagreb indeksini bulmak için Şekil 3.4.'te verilen  $G$  tekerlek grafının köşe noktalarının derecelerinin karelerini çarpmalıyız. O halde;

$$\pi_1(G) = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$$

$$\pi_1(G) = 1024$$

olarak bulunur.  $G$  tekerlek grafının ikinci çarpımsal zagreb indeksini bulmak için Şekil 3.4.'te verilen  $G$  tekerlek grafında kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerini çarpımlarını çarpmalıyız. O halde ;

$$\pi_2(G) = 3.3 \times 3.3 \times 3.3 \times 3.3 \times 3.3 \times 3.3$$

$$\pi_2(G) = 9^6$$

olarak bulunur.  $G$  tekerlek grafının birinci modified zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 3.4.'te verilen tekerlek grafının köşe noktalarının derecelerinin karelerinin çarpmaya göre tersinin alarak toplanmalıyız. O halde;

$$M_1'(G) = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$M_1'(G) = \frac{4}{9}$$

olarak bulunur.  $G$  tekerlek grafının ikinci modified Zagreb indeksinin bulunması için kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerini çarparak çarpma işleminin tersi olacak şekilde düzenleyip toplamalıyız. O halde;

$$M_2'(G) = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3}$$

$$M_2'(G) = \frac{6}{9}$$

olarak hesaplanır.

### 3.9. Narumi-Katayama İndeksi

**Tanım 3.9.1.** Bir  $G$  grafının köşe noktalarının derecelerinin çarpımına narumi-katayama indeksi denir ve narumi-katayama indeksi;

$$NK(G) = \prod_{u \in V(G)} d_G(u)$$

olarak gösterilir (Ascioglu ve Cangul, 2018) .

### 3.10. Birinci Zagreb Eş İndeksi

**Tanım 3.10.1.** Bir  $G$  grafında, kenarı oluşturmayan köşelerinin derecelerinin toplamına birinci zagreb eş indeksi denir. Birinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_1(G)} = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]$$

olarak gösterilir (Ashrafi ve ark, 2010).

**Teorem 3.10.1.** Bir  $G$  grafının  $n$  tane köşe noktası ve  $m$  tane kenarı olsun. Bu durumda Birinci Zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_1(G)} = 2m(n - 1) - M_1(G)$$

olarak bulunur (Ashrafi ve ark, 2010).

### 3.11. İkinci Zagreb Eş İndeksi

**Tanım 3.11.1.** Bir  $G$  grafında, kenarı oluşturmayan köşelerinin derecelerinin çarpımına ikinci zagreb eş indeksi denir. İkinci zagreb eş indeksi

$$\overline{M_2(G)} = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

olarak gösterilir (Ashrafi ve ark, 2010).

**Teorem 3.11.1.** Bir  $G$  grafının  $n$  tane köşe noktası ve  $m$  tane kenarı olsun. Bu durumda ikinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_2(G)} = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2}M_1(G)$$

olarak gösterilir (Ashrafi ve ark, 2010).

### 3.12. Hyper-Zagreb Eş İndeksi

**Tanım 3.12.1.** Hyper zagreb eş indeksi, bir  $G$  grafında kenarı oluşturmayan iki köşe noktasının derecelerinin toplamının karesi şeklinde tanımlanmıştır. Hyper Zagreb eş indeksi

$$\overline{HZ(G)} = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2$$

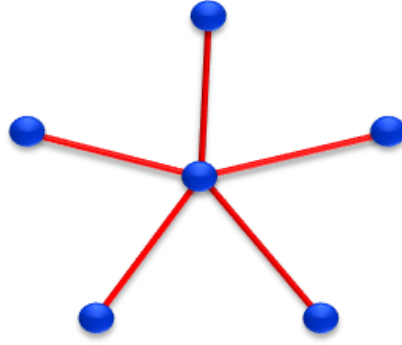
olarak gösterilir (Gutman, 2017) .

**Teorem 3.12.1.** Bir  $G$  grafının  $n$  tane köşe noktası ve  $m$  tane kenarı olsun. O halde hyper zagreb eş indeksi

$$\overline{HZ(G)} = 4m^2 + (n - 2)M_1(G) - HZ(G)$$

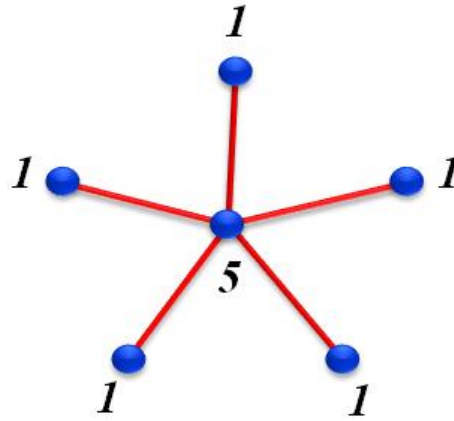
olarak bulunur (Gutman, 2017) .

**Örnek 3.3.** Aşağıda verilen bir  $G$  yıldız grafi için narumi-katayama indeksini , birinci zagreb eş indeksini, ikinci zagreb eş indeksi ve hyper zagreb eş indeksini hesaplayalım.



Şekil 3. 5. Yıldız Grafi

İlk olarak Şekil 3.5.'te verilen yıldız grafinin köşe noktalarının derecelerini bulalım.



Şekil 3. 6. Yıldız Grafının Dereceleri

$G$  yıldız grafinin narumi katayama indeksini bulmak için Şekil 3.6.'da verilen yıldız grafinin köşe noktalarının derecelerinin çarpmalıyız. O halde;

$$NK(G) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 5$$

$$NK(G) = 5$$

olarak bulunur.  $G$  yıldız grafinin birinci zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.10.1.'de verdiğimiz ;

$$\overline{M_1(G)} = 2m(n-1) - M_1(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının köşe sayısı ve kenar sayısını ve son olarak birinci zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının köşe sayısı 6 olduğunu ve kenar sayısı ise 5 olduğunu görürüz. Birinci zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 3.6.'da verilen  $G$  yıldız grafının derecelerinin karelerini alarak toplamalıyız. Bu durumda birinci zagreb indeksini ;

$$M_1(G) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$$

$$M_1(G) = 30$$

olarak buluruz. Bu durumda Şekil 3.6.'da verilen  $G$  yıldız grafının birinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_1(G)} = 2.5. (6 - 1) - 30$$

$$\overline{M_1(G)} = 20$$

olarak bulunur. Şekil 3.5.'te aldığımız  $G$  yıldız grafının ikinci Zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.11.1.'de verilen;

$$\overline{M_2(G)} = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2} M_1(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının kenar sayısını, birinci zagreb indeksini ve son olarak ikinci zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının birinci zagreb indeksinin 30 olduğunu ve kenar sayısının 5 olduğunu görürüz. Son olarak ikinci zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 3.6.'da verilen  $G$  yıldız grafında kenarları birleştiren köşelerini derecelerinin çarpımlarını alarak toplamalıyız. Bu durumda ikinci zagreb indeksi;

$$M_2(G) = 5.1 + 5.1 + 5.1 + 5.1 + 5.1$$

$$M_2(G) = 25$$

olarak bulunur. Bu durumda ikinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_2(G)} = 2 \cdot (5^2) - 25 - \frac{1}{2} 30$$

$$\overline{M_2(G)} = 10$$

olarak bulunur. Şekil 3.5.'te aldığımız  $G$  yıldız grafının hyper Zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.12.1.'de verilen;

$$\overline{HZ(G)} = 4m^2 + (n - 2)M_1(G) - HZ(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının köşe sayısını, kenar sayısını, birinci zagreb indeksini ve son olarak ise hyper zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 3.5.'te verilen  $G$  yıldız grafının birinci zagreb indeksinin 30 , köşe sayısının 6 , kenar sayısının 5 olduğunu görürüz. Son olarak hyper zagreb eş indeksinin hesaplamak için Şekil 3.6.'da verilen  $G$  yıldız grafının hyper zagreb indeksini hesaplamalıyız. Hyper zagreb indeksinin hesaplanması için Teorem 3.4.1.'de verdiğimiz

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

eşitlikten faydalanmalıyız. Bu eşitlikten hyper zagreb eş indeksini hesaplayabilmemiz için forgotten indeksi ve ikinci zagreb indeksini kullanacağız.  $G$  grafının ikinci zagreb indeksinin 10 olduğunu biliyoruz. O halde  $G$  grafının forgotten indeksini hesaplayalım.  $G$  grafının forgotten indeksi;

$$F(G) = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 5^3$$

$$F(G) = 130$$

olarak bulunur. O halde hyper zagreb indeksi;

$$HZ(G) = 130 + 2.25$$

$$HZ(G) = 180$$

olarak bulunur. Bu durumda  $G$  yıldız grafının hyper zagreb eş indeksi;

$$\overline{HZ(G)} = 4 \cdot (5)^2 + (6 - 2)30 - 180$$

$$\overline{HZ(G)} = 40$$

olarak bulunur.



#### 4. EŞ DUBLE GRAFLARININ ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde özel grafların eş double grafları gösterilmiş ve eş double grafların zagreb indeksleri hesaplanmıştır.

**Lemma 4.1.** Özel graf türlerinden herhangi bir  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını  $n_c$  ve kenar sayısını  $m_c$  ile gösterelim. Bu durumda eş double grafın köşe sayısı;

$$n_c = 2n$$

ve eş double grafın kenar sayısı;

$$m_c = n^2$$

olarak bulunur.

**İspat.**  $G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bir  $G$  grafının köşe sayısına  $n$  ve kenar sayısına  $m$  olarak gösterelim.  $G$  grafının eş double grafının köşe noktalarının sayısı Tanım 1.4.1. gereğince  $G$  grafının kopyasını da göz önünde alarak eş double grafın köşe nokta sayısının  $2n$  olduğu açıktır. O halde Teorem 1.1.1. eşitliğinden ;

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2m$$

olduğunu biliyoruz. Bir  $G$  grafının eş double grafının kenar sayısı için, Teorem 1.1.1'de verilen eşitlik doğrultusunda her bir köşe derecelerinin toplamını bulmalıyız. Bir  $G$  grafında komşu olmayan  $x$  tane köşe olsun.  $G$  grafının  $n - x$  tane komşuluğu olduğunu görürüz. Bu bilgiler doğrultusunda  $G$  grafının eş double grafında  $x$  tane ve  $G$  grafında ise  $n - x$  tane komşuluğu olduğu için derecesi  $n$  olur. Teorem 1.1.1.'de verilen eşitliği düzenlediğimizde;

$$\sum_{u \in V(G)} 2n \times n = 2n^2$$

$$2n^2 = 2m_c$$

$$m_c = n^2$$

elde ederiz.

#### 4.1. Eş Duple Grafların Birinci Zagreb İndeksi

**Teorem 4.1.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının birinci zagreb indeksleri;

$$M_1(CD(G)) = \begin{cases} 2n^3 & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1, s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

**İspat.** Bölüm 1.2.'de verilen özel graf çeşitlerinden herhangi bir  $G$  grafını ele alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş duple grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulalım. O halde Lemma 4.1.'den eş duple grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgiler ışığında aldığımız  $G$  eş duple grafımızın köşe sayısının  $2n$  ve bir köşelerinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. Birinci zagreb indeksi bir grafın köşe derecelerinin karelerinin toplamı alınarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş duple grafının birinci zagreb indeksi;

$$M_1(CD(G)) = \sum_{u \in V(G)} n^2 = 2n \times n^2 = 2n^3$$

olarak hesaplanır.

#### 4.2. Eş Duple Grafların İkinci Zagreb İndeksi

**Teorem 4.2.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının ikinci zagreb indeksleri;

$$M_2(CD(G)) = \begin{cases} n^4 & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Özel graf çeşitlerinin tanımladığımız Bölüm 1.2.'den bir  $G$  grafını ele alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulalım. Lemma 4.1.'de verilen eşitlikten eş double grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgiler ışığında aldığımız  $G$  özel grafımızın kenar sayısı  $n^2$  ve bir köşelerinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. İkinci zagreb indeksi kenarı oluşturan köşe derecelerinin çarpımının toplamı alınarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının ikinci zagreb indeksi;

$$M_2(CD(G)) = \sum_{u \in V(G)} n^2 \times n^2 = n^4$$

olarak ispatlanır.

### 4.3. Eş Double Grafların Forgotten İndeksi

**Teorem 4.3.1.** Bazı özel grafların eş double graflarının forgotten indeksleri;

$$F(CD(G)) = \begin{cases} 2n^4 & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Herhangi özel bir  $G$  grafi alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulalım. O halde Lemma 4.1.'de verilen eşitlikten  $G$  grafımızın, eş double grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgiler ışığında aldığımız  $G$  özel grafımızın köşe sayısının  $2n$  ve bir

köşelerinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. Forgotten indeksi bir grafın köşe derecelerinin üçüncü kuvvetlerinin toplamı alınarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının forgotten indeksi;

$$F(CD(G)) = \sum_{u \in V(G)} n^3 = 2n \times n^3 = 2n^4$$

olarak ispatlanır.

#### 4.4. Eş Double Grafların Hyper-Zagreb İndeksi

**Teorem 4.4.1** Bazı özel grafların eş double graflarının hyper zagreb indeksi;

$$HZ(CD(G)) = \begin{cases} 4n^4 & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \quad s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Hyper zagreb indeksinin hesaplanması için Teorem 3.4.1.'de verdiğimiz

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

eşitliğinden faydalanalım. Bölüm 1.2.'den aldığımız herhangi özel bir  $G$  grafi alalım. Aldığımız özel  $G$  eş double grafının hyper zagreb indeksini bulabilmek için yukarıda verilen denklemde eş double grafımızın forgotten indeksini ve ikinci zagreb indeksini bulmalıyız. Teorem 4.3.1.'den aldığımız  $G$  özel grafının forgotten indeksinin  $2n^4$  ve Teorem 4.2.1.'den ikinci zagreb indeksinin  $n^4$  olduğunu biliyoruz. Bu durumda  $G$  grafının, eş double grafının hyper zagreb indeksi;

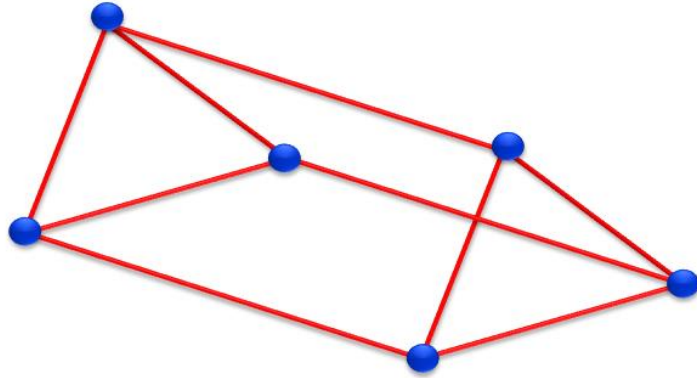
$$HZ(CD(G)) = 2n^4 + 2n^4$$

yani;

$$HZ(CD(G)) = 4n^4$$

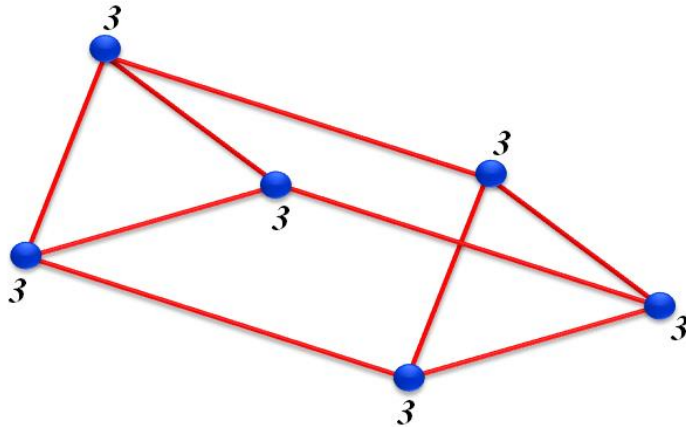
olarak bulunur.

**Örnek 4.1.** Aşağıda verilen  $C_3$  çevre eş double grafi için birinci zagreb indeksini, ikinci zagreb indeksini, forgotten indeksini ve hyper zagreb indeksini hesaplayalım.



Şekil 4. 1.  $CD(C_3)$  Çevre Eş Double Grafi

Öncelikle Şekil 4.1.'de verilen çevre eş double grafının köşe noktalarının derecelerini bulmalıyız.



Şekil 4. 2.  $CD(C_3)$  Çevre Eş Double Grafının Derecesi

$C_3$  çevre eş double grafi birinci Zagreb indeksini bulmak için Şekil 4.2.'de  $C_3$  çevre eş double grafının köşe derecelerinin karelerinin toplamalıyız. O halde ;

$$M_1(CD(C_3)) = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$$

$$M_1(CD(C_3)) = 54$$

olarak bulunur.  $C_3$  çevre eş double grafi ikinci zagreb indeksini bulmak için için Şekil 4.2.'de verilen  $C_3$  çevre eş double grafinin kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerini çarpıp toplayalım. O halde;

$$M_2(CD(C_3)) = 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3$$

$$M_2(CD(C_3)) = 81$$

olarak bulunur.  $C_3$  çevre eş double grafinin forgotten indeksini bulmak için Şekil 4.2.'de verilen  $C_3$  çevre eş double grafinin köşe noktalarının derecelerinin üçüncü kuvvetlerini toplamalıyız. O halde;

$$F(CD(C_3)) = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3$$

$$F(CD(C_3)) = 162$$

olarak bulunur. Ve son olarak  $C_3$  çevre eş double grafinin hyper zagreb indeksini Teorem 3.4.1.'de verdiğimiz eşitlikten faydalanarak hesaplayalım.

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

Yukarıda verilen eşitlikten  $C_3$  çevre eş double grafinin hyper zagreb indeksini hesaplayabilmemiz için  $C_3$  çevre eş double grafinin forgotten indeksi ve  $C_3$  çevre eş double grafinin ikinci zagreb indeksini kullanacağız. Bu durumda;

$$HZ(CD(C_3)) = 162 + 2 \cdot 81$$

$$HZ(CD(C_3)) = 324$$

olarak bulunur.

#### 4.5. Eş Duple Grafların Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

**Teorem 4.5.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının birinci çarpımsal zagreb indeksleri;

$$\pi_1(CD(G)) = \begin{cases} n^{4n} & G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ n^{4n} & G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ n^{4n} & G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ n^{4n} & G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Özel graf çeşitlerini tanımladığımız Bölüm 1.2.'de herhangi bir  $G$  grafını seçelim. Seçtiğimiz  $G$  grafının, eş duple grafının köşe sayısını ve kenar sayısını Lemma 4.1.'de verilen eşitlikten yararlanarak bulalım. O halde grafımızın eş duple grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgiler doğrultusunda seçtiğimiz  $G$  özel grafımızın köşe sayısının  $2n$  ve bir köşelerinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. Birinci çarpımsal zagreb indeksi bir grafın köşe derecelerinin karelerinin çarpımı alınarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş duple grafının birinci çarpımsal zagreb indeksi;

$$\pi_1(CD(G)) = \prod_{v \in V(G)} (n^2) = (n^2)^{2n} = n^{4n}$$

olarak hesaplarız.

#### 4.6. Eş Duple Grafların İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

**Teorem 4.6.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının ikinci çarpımsal zagreb indeksleri;

$$\pi_2(CD(G)) = \begin{cases} n^{2n^2} \end{cases} \quad \begin{array}{ll} G = P_n, S_n & n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n & n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n & n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} & t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Temel graf çeşitlerini gösterdiğimiz Bölüm 1.2.'de herhangi bir  $G$  grafını seçelim. Seçtiğimiz  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını belirlemek için Lemma 4.1.'den kullandığımızda grafımızın eş double grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görebiliriz. Bu belirtilen bilgilere göre aldığımız  $G$  özel grafının kenar sayısı  $n^2$  ve bir köşesinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. İkinci çarpımsal zagreb indeksi kenar oluşturan köşe derecelerinin çarpımının toplamı alınarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının ikinci çarpımsal zagreb indeksi;

$$\pi_2(CD(G)) = \prod_{u,v \in E(G)} (n \times n) = (n \times n)^{n^2} = (n^2)^{n^2} = n^{2n^2}$$

olarak bulunur.

#### 4.7. Eş Double Grafların Birinci Modified Zagreb İndeksi

**Teorem 4.7.1.** Bazı özel graflarının eş double graflarının birinci modified zagreb indeksleri;

$$M'_1(CD(G)) = \begin{cases} \frac{2n}{n^2} \end{cases} \quad \begin{array}{ll} G = P_n, S_n & n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n & n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n & n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} & t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Özel graf çeşitlerinden herhangi bir  $G$  grafını ele alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulmak için Lemma 4.1. eşitliğini

kullanalım. O halde  $G$  grafımızın, eş double grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısının  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgilere göre aldığımız  $G$  özel grafımızın köşe sayısının  $2n$  ve bir köşesinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. Birinci modified zagreb indeksi bir grafın köşe derecelerinin karelerinin çarpma işlemine göre tersinin alınarak toplaması şeklinde tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının birinci modified zagreb indeksi;

$$M'_1(CD(G)) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{n^2} = 2n \times \frac{1}{n^2} = \frac{2n}{n^2}$$

olarak bulunur.

#### 4.8. Eş Double Grafların İkinci Modified Zagreb İndeksi

**Teorem 4.8.1.** Bazı özel grafların eş double graflarının ikinci modified zagreb indeksleri;

$$M'_2(CD(G)) = \begin{cases} 1 & \begin{array}{ll} G = P_n, S_n & n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n & n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n & n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} & t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

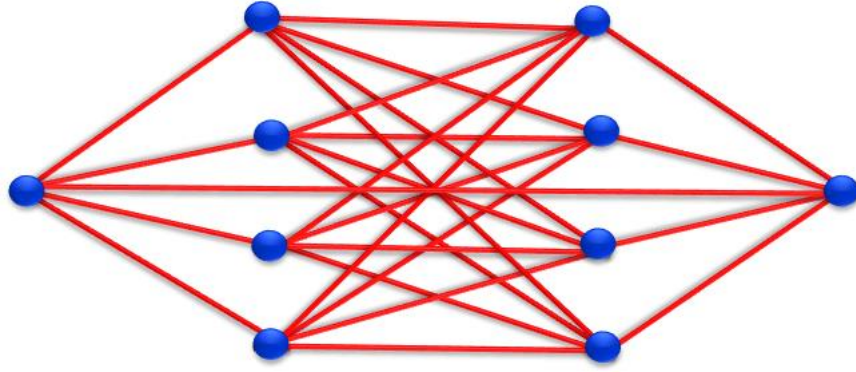
olarak hesaplanır.

**İspat.** Temel graf çeşitlerin tanımlandığı Bölüm 1.2.'den herhangi bir  $G$  grafını ele alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulalım. O halde Lemma 4.1.'den köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Aldığımız  $G$  özel grafımızın kenar sayısı  $n^2$  ve bir köşesinin derecesinin  $n$  olduğu sonucunu buluruz. İkinci modified zagreb indeksi kenarı oluşturan köşe derecelerinin çarpımının çarpmaya işlemine göre tersi alınarak toplanması olarak tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının ikinci modified zagreb indeksi;

$$M'_2(CD(G)) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{n \times n} = n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$$

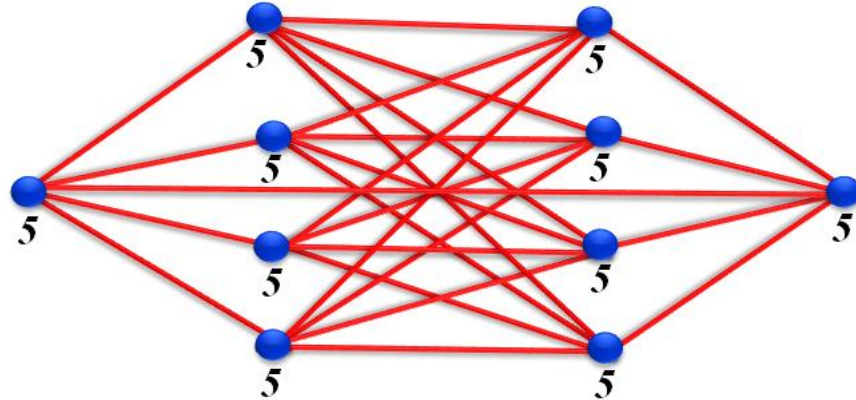
olarak hesaplanır.

**Örnek 4.2.** Aşağıda verilen  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafi için birinci çarpımsal zagreb indeksini, ikinci çarpımsal zagreb indeksini, birinci modified zagreb indeksini ve ikinci modified zagreb indeksini hesaplayalım.



Şekil 4. 3.  $CD(K_{1,4})$  İki Parçalı Eş Double Grafi

İlk olarak Şekil 4.3.'de verilen  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafinin köşe noktalarının derecelerini bulalım.



Şekil 4. 4.  $CD(K_{1,4})$  İki Parçalı Eş Double Grafinin Dereceleri

$K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafinin birinci çarpımsal zagreb indeksini bulmak için Şekil 4.4.'de verilen  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafinin köşe noktalarının derecelerinin karelerini çarpmalıyız. O halde;

$$\pi_1(\text{CD}(K_{1,4})) = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$

$$\pi_1(\text{CD}(K_{1,4})) = 5^{20}$$

olarak bulunur.  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafının ikinci çarpımsal zagreb indeksini bulmak için Şekil 4.4.'de verilen  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafında kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerinin çarpımlarını çarpmalıyız. O halde;

$$\begin{aligned} \pi_2(\text{CD}(K_{1,4})) &= 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \\ &\quad \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \times 5.5 \\ &\quad \times 5.5 \times 5.5 \end{aligned}$$

$$\pi_2(\text{CD}(K_{1,4})) = 5^{50}$$

olarak bulunur.  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafının birinci modified zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 4.4.'de verilen  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafının köşe noktalarının derecelerinin karelerinin çarpıma göre tersinin alarak toplanmalıyız. O halde;

$$M_1'(\text{CD}(K_{1,4})) = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2}$$

$$M_1'(\text{CD}(K_{1,4})) = \frac{10}{25}$$

olarak bulunur.  $K_{1,4}$  iki parçalı eş double grafını ikinci modified zagreb indeksinin bulunması için kenarlarını komşu yapan iki köşe noktasını derecelerini çarparak çarpma işleminin tersi olarak şekilde düzenleyip toplamalıyız. O halde;

$$\begin{aligned} M_2'(\text{CD}(K_{1,4})) &= \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} \\ &\quad + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} \\ &\quad + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{5.5} \end{aligned}$$

$$M_2'(CD(K_{1,4})) = 1$$

olarak hesaplanır.

#### 4.9. Eş Double Grafların Narumi-Katayama İndeksi

**Teorem 4.9.1.** Bazı özel grafların eş double graflarının Narumi-Katayama indeksi;

$$NK(CD(G)) = \begin{cases} n^{2n} & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \quad s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Bölüm 1.2.'de verilen özel graf çeşitlerinden herhangi bir  $G$  grafını ele alalım. Aldığımız  $G$  grafının, eş double grafının köşe sayısını ve kenar sayısını bulalım. O halde  $G$  grafımızın, eş double grafının köşe kümesini  $n_c$  ve kenar kümesini  $m_c$  ile gösterelim. Bu durumda grafımızın eş double grafının köşe sayısı  $n_c = 2n$  ve kenar sayısı  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu bilgiler ışığında aldığımız  $G$  özel grafımızın köşe sayısının  $2n$  ve bir köşesinin derecesinin  $n$  olduğu sonucuna ulaşırız. Narumi-katayama indeksi bir grafın köşe derecelerinin çarpılması ile tanımlandığı için aldığımız özel bir  $G$  grafının eş double grafının narumi-katayama indeksi;

$$NK(CD(G)) = \prod_{v \in V(G)} n = (n)^{2n}$$

olarak hesaplanır.

#### 4.10. Eş Double Grafların Birinci Zagreb Eş İndeksi

**Teorem 4.10.1** Bazı özel grafların graflarının birinci Zagreb eşindeksleri;

$$\overline{M_1(CD(G))} = \begin{cases} 2n^2(n-1) & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \ s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** Birinci Zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.10.1.'da verdiğimiz

$$\overline{M_1(G)} = 2m(n-1) - M_1(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Teorem 3.10.1.'de verilen eşitlikteki köşe sayısı olarak verilen  $n$ 'i ve kenar sayısı olarak verilen  $m$ 'i, Bölüm 1.2.'den aldığımız herhangi özel bir  $G$  grafın eş double grafının köşe sayısını  $n_c$  ve kenar sayısını  $m_c$  olacak şekilde düzenleyelim. O halde ;

$$\overline{M_1(CD(G))} = 2m_c(n_c - 1) - M_1(G)$$

olur. Bölüm 1.2.'den aldığımız özel  $G$  grafının eş double grafının birinci zagreb eş indeksini bulabilmek için yukarıda verilen denklemden grafımızın eş double grafının köşe sayısı olan  $n_c$ 'i, kenar sayısı olan  $m_c$ 'i ve birinci zagreb indeksini bulmalıyız. Teorem 4.1.1. eşitliğinden aldığımız  $G$  özel grafının birinci Zagreb indeksinin  $2n^3$  olduğunu ve Lemma 4.1. den  $G$  grafının eş double grafının köşe sayısının  $n_c = 2n$  ve kenar sayısının da  $m_c = n^2$  olduğunu sonucuna ulaşıyoruz. Bu durumda  $G$  grafının, eş double grafının birinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_1(CD(G))} = 2n^2(2n - 1) - 2n^3$$

$$\overline{M_1(CD(G))} = 4n^3 - 2n^2 - 2n^3$$

$$\overline{M_1(CD(G))} = 2n^3 - 2n^2 = 2n^2(n - 1)$$

olarak bulunur.

#### 4.11. Eş Duple Grafların İkinci Zagreb Eş İndeksi

**Teorem 4.11.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının ikinci zagreb eşindeksleri;

$$\overline{M_2(CD(G))} = \begin{cases} n^3(n-1) & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \quad s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

**İspat.** İkinci zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.11.1.'de verilen

$$\overline{M_2(G)} = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2}M_1(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Teorem 3.11.1. eşitliğindeki köşe sayısı olarak verilen  $n$ 'i ve kenar sayısı olarak verilen  $m$ 'i, Bölüm 1.2.'den aldığımız herhangi özel bir  $G$  grafin eş duple grafinin köşe sayısını  $n_c$  ve kenar sayısını  $m_c$  olacak şekilde düzenleyelim. Daha sonra O halde Teorem 3.11.1.'de verilen eşitlik ;

$$\overline{M_2(CD(G))} = 2m_c^2 - M_2(G) - \frac{1}{2}M_1(G)$$

şeklinde olur. Bölüm 1.2.'den aldığımız özel  $G$  grafinin eş duple grafinin ikinci zagreb eş indeksini bulabilmek için yukarıda verilen denklemde grafinin eş duple grafinin kenar sayısı olan  $m_c$ 'i, birinci zagreb indeksini ve ikinci zagreb indeksini bulmalıyız. Teorem 4.1.1. eşitliğinden aldığımız bir  $G$  özel grafinin eş duple grafinin birinci Zagreb indeksinin  $2n^3$  olduğunu ve Teorem 4.2.1. eşitliğinden aldığımız bir  $G$  özel grafinin eş duple grafinin ikinci Zagreb indeksinin  $n^4$  olduğunu ve son olarak Lemma 4.1.'den eş duple grafinin kenar sayısının da  $m_c = n^2$  olduğunu görürüz. Bu durumda  $G$  grafinin, eş duple grafinin İkinci Zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_2(CD(G))} = 2(n^2)^2 - n^4 - \frac{1}{2}2n^3$$

olur. Dolayısıyla;

$$\overline{M_2(CD(G))} = n^4 - n^3$$

$$\overline{M_2(CD(G))} = n^3(n - 1)$$

olarak hesaplanır.

#### 4.12. Eş Duple Grafların Hyper-Zagreb Eş İndeksi

**Teorem 4.12.1.** Bazı özel grafların eş duple graflarının hyper zagreb eşindeksleri ;

$$\overline{HZ(CD(G))} = \begin{cases} 4n^3(n - 1) & \begin{array}{l} G = P_n, S_n \quad n \geq 2 \text{ ise} \\ G = C_n, K_n \quad n \geq 3 \text{ ise} \\ G = W_n \quad n \geq 4 \text{ ise} \\ G = K_{t,s}, T_{t,s} \quad t \geq 1 \quad s \geq 2 \text{ ise} \end{array} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

**İspat.** Hyper Zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.12.1.'de verilen

$$\overline{HZ(G)} = 4m^2 + (n - 2)M_1(G) - HZ(G)$$

eşitliğinden yararlanalım. Özel graf çeşitlerini gösterdiğimiz Bölüm 1.2.'den aldığımız herhangi bir  $G$  grafın, eş duple grafının köşe kümesini  $n_c$  ve kenar kümesini  $m_c$  ile göstererek yukarıda verilen eşitliği düzenleyelim. O halde Teorem 3.12.1.'de verilen eşitlik;

$$\overline{HZ(CD(G))} = 4m_c^2 + (n_c - 2)M_1(CD(G)) - HZ(CD(G))$$

şeklinde olur. Aldığımız özel  $G$  grafinin eş double grafinin hyper zagreb eş indeksini bulabilmek için yukarıda verilen denklemde grafımızın eş double grafinin köşe noktası olan  $n_c$ 'yi, kenar sayısı olan  $m_c$ 'i, birinci zagreb indeksini ve hyper zagreb indeksini bulmalıyız. Teorem 4.1.1. eşitliğinden aldığımız  $G$  özel grafinin birinci Zagreb indeksinin  $2n^3$  olduğunu ve Teorem 4.4.1.'den  $G$  özel grafinin eş double grafinin hyper zagreb indeksinin  $4n^4$  olduğunu, son olarak Lemma 4.1.'den eş double grafinin köşe sayısının  $n_c = 2n$  ve kenar sayısının da  $m_c = n^2$  olduğunu sonucuna ulaşıyoruz. Bu durumda  $G$  grafinin, eş double grafinin hyper Zagreb eş indeksi;

$$\overline{HZ(CoD(G))} = 4(n^2)^2 + (2n - 2)2n^3 - 4n^4$$

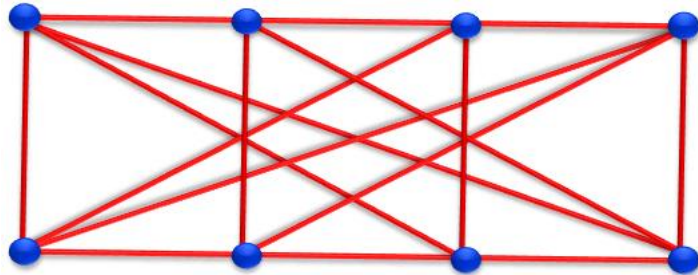
$$\overline{HZ(CoD(G))} = 4n^4 + 4n^4 - 4n^3 - 4n^4$$

$$\overline{HZ(CoD(G))} = 4n^4 - 4n^3$$

$$\overline{HZ(CoD(G))} = 4n^3(n - 1)$$

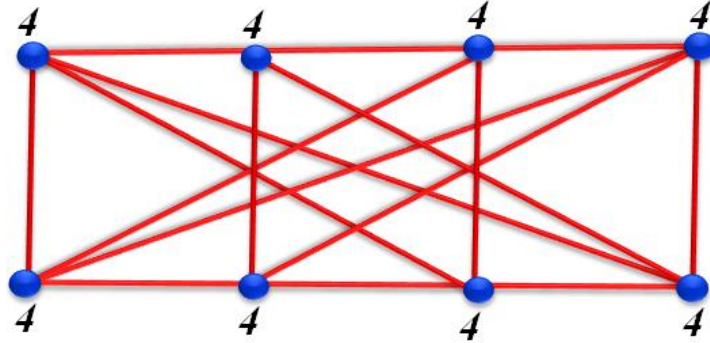
olarak bulunur.

**Örnek 4.3.** Aşağıda verilen  $P_4$  yol eş double grafi için narumi-katayama indeksini, birinci zagreb eş indeksini, ikinci zagreb eş indeksini ve hyper zagreb eş indeksini hesaplayalım.



Şekil 4. 5.  $CD(P_4)$  Yol Eş Double Grafi

İlk olarak Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafi köşe noktalarının derecelerini bulalım.



Şekil 4. 6.  $CD(P_4)$  Yol Eş Double Grafının Dereceleri

$P_4$  yol eş double grafi için narumi katayama indeksini bulmak için Şekil 4.6.'da verilen grafinin köşe noktalarının derecelerinin çarpmalıyız. O halde;

$$NK((CD(P_4))) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

$$NK((CD(P_4))) = 4^8$$

olarak bulunur.  $P_4$  yol eş double grafının birinci zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.10.1.'de verdiğimiz ;

$$\overline{M_1(G)} = 2m(n-1) - M_1(G)$$

eşitlikten yararlanalım. Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının köşe sayısı, kenar sayısını ve son olarak ise birinci zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının köşe sayısı 8 olduğunu ve kenar sayısı ise 16 olduğunu görürüz. Son olarak birinci zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 4.6.'da verilen  $P_4$  yol eş double grafının derecelerinin karelerini alarak toplamalıyız. Bu durumda birinci Zagreb indeksi;

$$M_1((CD(P_4))) = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$$

$$M_1((CD(P_4))) = 128$$

olarak buluruz. Bu durumda birinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_1((CD(P_4)))} = 2.16. (8 - 1) - 128$$

$$\overline{M_1((CD(P_4)))} = 96$$

olarak bulunur.  $P_4$  yol eş double grafı için ikinci Zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.11.1.'de verilen

$$\overline{M_2(G)} = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2}M_1(G)$$

eşitlikten yararlanalım. Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının kenar sayısını, birinci zagreb indeksini ve son olarak ise ikinci Zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının birinci zagreb indeksinin 128 olduğunu ve kenar sayısının 16 olduğunu görürüz. Son olarak ikinci zagreb indeksini hesaplamak için Şekil 4.6.'da verilen  $P_4$  yol eş double grafında kenarları birleştiren köşelerini derecelerinin çarpımlarını alarak toplamalıyız. Bu durumda ikinci Zagreb indeksi;

$$M_2(CD(P_4)) = 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4 + 4.4$$

$$M_2(CD(P_4)) = 256$$

olarak bulunur. Bu durumda ikinci zagreb eş indeksi;

$$\overline{M_2(CD(P_4))} = 2. (16^2) - 256 - \frac{1}{2}128$$

$$\overline{M_2(CD(P_4))} = 192$$

olarak bulunur. Şekil 4.5.'te aldığımız  $P_4$  yol eş double grafının hyper zagreb eş indeksinin hesaplanması için Teorem 3.12.1.'de verilen

$$\overline{HZ(G)} = 4m^2 + (n - 2)M_1(G) - HZ(G)$$

eşitlikten yararlanalım. Şekil 4.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının köşe sayısını, kenar sayısını, birinci zagreb indeksini ve son olarak ise hyper zagreb indeksini hesaplamalıyız. Şekil 3.5.'te verilen  $P_4$  yol eş double grafının birinci zagreb indeksinin 128, köşe sayısının 8, kenar sayısının 16 olduğunu görürüz. Son olarak hyper zagreb eş indeksinin hesaplamak için Şekil 4.6.'da verilen  $P_4$  yol eş double grafının hyper zagreb indeksini hesaplamalıyız. Hyper zagreb indeksinin bulunabilmesi için Teorem 3.4.1. verdiğimiz

$$HZ(G) = F(G) + 2M_2(G)$$

eşitliğinden yola çıkarak hesaplamalıyız. Yukarıda verilen eşitlikten hesaplayabilmemiz için forgotten indeksi ve ikinci zagreb indeksini kullanacağız.  $P_4$  yol eş double grafının ikinci Zagreb indeksinin 256 olduğunu biliyoruz. O halde  $P_4$  yol eş double grafının forgotten indeksini hesaplayalım.  $P_4$  yol eş double grafının forgotten indeksi;

$$F(\text{CD}(P_4)) = 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$$

$$F(\text{CD}(P_4)) = 512$$

olarak bulunur. O halde  $P_4$  yol eş double grafının hyper zagreb indeksi;

$$HZ(\text{CD}(P_4)) = 512 + 2.256$$

$$HZ(\text{CD}(P_4)) = 1024$$

olarak bulunur. Bu durumda  $P_4$  yol eş double grafının hyper zagreb eş indeksi;

$$\overline{HZ(\text{CD}(P_4))} = 4 \cdot (16)^2 + (8 - 2)128 - 1024$$

$$\overline{HZ(\text{CD}(P_4))} = 768$$

olarak bulunur.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada ilk olarak matematik bilim için önemli olan graf teorisinde kullanılan özel graf türlerinin eş duble grafları verilmiştir. Daha sonra özel graf türlerinin eş duble graflarının;

- Birinci Zagreb indeksi,
- İkinci Zagreb indeksi,
- Forgotten indeksi,
- Hyper-Zagreb indeksi,
- Birinci Çarpımsal Zagreb indeksi,
- İkinci çarpımsal Zagreb indeksi,
- Birinci Modified Zagreb indeksi,
- İkinci modified Zagreb indeksi,
- Narumi-Katayama indeksi,
- Birinci Zagreb eş indeksi,
- İkinci Zagreb eş indeksi,
- Hyper Zagreb eş indeksi

hesaplanmıştır.

### 5.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında yapılan hesaplamalar ışığında graf teori alanında çalışma yapmak isteyen araştırmacılar için eş duble graf türlerine benzer graf türleri araştırılabilir. Bulunan graf türü üzerinde indeks hesaplamaları yapılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Akgunes, N., 2018, A further note on the Graph of Monogenic Semigroups, *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1), 49-53
- Ascioglu, M. and Cangul, I. N., 2018, Narumi-katayama index of the subdivision graphs, *Journal of Taibah University for science*, 12(4), 401-408.
- Ashrafi, A. R., Došlić, T. and Hamzeh, A. 2010, The Zagreb coindices of graph operation., *Discrete applied mathematics*, 158, 1571-1578.
- Ashrafi, A. R., Khalifeh M. and Yousefi-Azari H., 2009, The first and second Zagreb indices of some graph operations, *Discrete Applied Mathematics*, 157, 804-811.
- Ashrafi, A.R., Doslic, T. and Hamzeh, A., 2011, Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65, 85–92.
- Balaban, A. T., Motoc, I., Bonchev, D. and Mekenyan, O., 1983, Topological indices for structure-activity correlations, *Topics Curr. Chem.*, 114, 21-55.
- Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M. and Cevik, A. S., 2017, New formulae for Zagreb indices, *AIP Conference Proceedings*, 1863, 1-5.
- Das K. C. and Gutman I., 2004, Some properties of the second Zagreb index, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 52, 103–112.
- Das K. C. and Gutman I., 2004, The first Zagreb index 30 years after, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50, 83–92.
- Das, K.C. and Trinajstić, N., 2011, Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices, *Comput. Math. Appl.*, 62, 1758–1764.

- Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N. and Cevik, A. S., 2016, On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 24 (1), 153-176.
- Das, K.C., Gutman, I. and Zhou, B., 2009, New upper bounds on Zagreb indices, *J. Math. Chem.*, 46, 514–521.
- Das, K.C., Lee, D. and Graovac, A., 2013, Some properties of the Zagreb eccentricity indices, *Ars Mathematica Contemporanea*, 46, 117-125.
- Das, K. Ch., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N. and Cevik, A. S., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *Journal of Inequalities and Applications*, 90, 1-14.
- Eliasi, M., Iranmanesh, A. and Gutman, I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68 (1), 217-230.
- Gross, J. L., Yellen, J. and Zhang, P., 2013, *Handbook of graph theory*, Chapman and Hall/CRC.
- Gutman, I. and Trinajstić, N. 1972, Graph theory and molecular orbitals, Total  $\phi$ -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17 (4), 535-538.
- Gutman, I., Trinajstić, N. and Wilcox Jr, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *The Journal of Chemical Physics*, 62 (9), 3399-3405.
- Gutman I., 2011, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 1, 13–19.
- Gutman, I., Furtula, B., Vukićević, Ž., K. and Popivoda G., 2015, On Zagreb Indices and Coindices, *MATCH-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 74(1), 5-16.

- Gutman, I., 2017, On hyper-zagreb index and coindex, *Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques*, 42, 1-8.
- Gurbuz, R., 2020, Co Double Graflar Üzerine Bazı Parametreler, Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Hao, T., 2011, Theorems about Zagreb indices and modified Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65, 659-670.
- Munarini E., Cippo P., Scagliola A., Salvi N., 2008, Double Graphs.
- Nacaroglu, Y. and Maden, A. D., 2017, The upper bounds for multiplicative sum Zagreb index of some graph operations. *Journal of Mathematical Inequalities*, 11 (3), 749-761
- Ranjini, P. S., Lokesha, V. and Cangül, I. N., 2011, On the Zagreb indices of the line graphs of the subdivision graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (3), 699-702.
- Todeschini, R. and Consonni, V., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 64 (2), 359-372.
- Xu, K., Das, K. C. and Tang, K., 2013, On the multiplicative Zagreb coindex of graphs, *Opuscula Mathematica*, 33, 191-204.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Beyza URLU  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : KONYA – 15.02.1996  
**Telefon** : 05076850900  
**Faks** : -  
**e-mail** : beyzaaurluu@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Cemil Keleşoğlu Anadolu Lisesi	2014
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi	2018
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi	
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2018	Yüzde Yüz Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni

### UZMANLIK ALANI

### YABANCI DİLLER

### BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

### YAYINLAR