



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



SCHOUTEN-VAN KAMPEN
KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE
KENMOTSU MANİFOLDLAR

Gül Nihal BOYNUEYRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Gül Nihal BOYNUEYRİ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2022, 87 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Fatma ATEŞ

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, neredeyse Kenmotsu manifoldlar ile ilgili özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, Schouten-Van Kampen konneksiyonu tanıttıktan sonra sözü edilen bu konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Ayrıca bu manifold üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü, skalar eğrilik, concircular eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, conharmonic eğrilik tensörü gibi tanımlara yer verilip bu eğrilik tensörlerine sahip neredeyse Kenmotsu manifoldların geometrisi incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde ise Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun Ricci solitonları incelenerek, neredeyse Kenmotsu manifoldundaki Ricci soliton için eşdeğer koşulların Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre invaryant olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değme manifold, Kenmotsu manifold, Neredeyse Kenmotsu manifold, Schouten-Van Kampen konneksiyon.

ABSTRACT

MS THESIS

**NEARLY KENMOTSU MANIFOLDS ADMITTING SCHOUTEN-VAN
KAMPEN CONNECTION**

Gül Nihal BOYNUEYRİ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2022, 87 Pages

Jury

Advisor Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Fatma ATEŞ

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and a general literature information is given. In the second part, necessary basic concepts are mentioned. In the third chapter, properties about nearly Kenmotsu manifolds are given. In the fourth chapter, after the Schouten-Van Kampen connection is introduced, nearly Kenmotsu manifolds with this connection are examined. In addition, definitions such as Riemann curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature, concircular curvature tensor, projective curvature tensor, conharmonic curvature tensor defined on this manifold are included and the geometry of nearly Kenmotsu manifolds with these curvature tensors is examined. Finally, in the fifth chapter, by examining the Ricci solitons of the nearly Kenmotsu manifold with the Schouten-Van Kampen connection, it has been proved that the equivalent conditions for the Ricci soliton in the nearly Kenmotsu manifold are invariant with respect to the Schouten-Van Kampen connection.

Keywords: Contact manifold, Kenmotsu manifold, Nearly Kenmotsu manifold, Schouten-Van Kampen connection.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tez çalışmasının hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen aileme özellikle de sevgili anneme teşekkür ederim.

Gül Nihal BOYNUEYRİ
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Riemann Manifoldlar	5
2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar.....	8
2.3. Kenmotsu Manifoldlar	17
3. NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR.....	19
4. SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR	21
5. SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDUNUN RİCCİ SOLİTONLARI	70
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	73
7. KAYNAKLAR	74

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

L	Lie türevi
g	Riemann metriği
ξ	Yapı vektör alanı
S	Ricci tensörü
λ	Sabit
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	2. temel form
$\chi(M)$	Vektör alanları uzayı
∇	Levi-Civita Koneksiyonu
R	Riemann eğrilik tensörü
μ, η	Skalar
Q	Ricci operatörü
P	Projektif eğrilik tensör alanı
C	Concircular eğrilik tensör alanı
K	Conharmonic eğrilik tensör alanı
ϕ	(1,1)-tipinde tensör alanı
Φ	Temel 2-form
$T_p M$	Tanjant uzayı
N	Nijenhuis torsiyon tensörü

1.GİRİŞ

Değme geometri iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerinde çalışmalarıyla doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton, Darboux gibi önemli matematikçilerin bu alanda çalışmaları olmuştur. Değme geometrinin köklerine 1872'de rastlamak mümkündür. Lie'nin değme transformasyonu diferansiyel denklem sistemleri çalışmalarında geometrik bir araç olarak kullanılmıştır. Değme geometrinin optik, termodinamik ve mekanikte uygulamalarına rastlanmaktadır [29].

1940'larda, Ehresmann ve Hopf neredeyse değme manifoldları ortaya koymuştur; bunlar her bir tanjant uzaydaki düzgün lineer kompleks yapılar ile donanımlı çift boyutlu manifoldlardır [15].

Değme Riemann manifoldlar farklı bilim alanlarında da uygulamaları olan geniş bir kitle tarafından çalışılan bir konudur. Konu hakkındaki en önemli kaynak, Blair' in "Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds" adlı kitabıdır. Konu, simplektik geometri ve karmaşık geometri ile de yakından ilgilidir. Değme formun sıfır olduğu yatay alt demet üzerinde, değme formun diferansiyeli simplektik form verir. Değme Riemann yapıdaki tensör, yine yatay alt demet üzerinde hemen hemen karmaşık yapı verir. Değme manifold tanımlandıktan sonra, genel yaklaşım hemen hemen değme yapıları çalışmaktır [4].

Neredeyse değme manifoldlar, simplektik manifoldlar ve birçok matematik ve fizik uygulaması ile yakından ilişkilidir [3]. Diğer taraftan, tek boyutlularda, neredeyse değme manifoldlar Boothby ve Wang tarafından 1950'lerde ortaya konmuştur [6].

1969 yılında S. Tanno [50], otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, neredeyse değme metrik manifoldları üç sınıfa ayırmıştır. Bu durumda c sabit φ –kesitsel eğriliği olmak üzere;

- Eğer $c > 0$ ise; Riemann manifoldunun sabit φ –kesitsel eğriliğine sahip birhomojen Sasakian manifoldu olduğunu,
- $c = 0$ ise ; Riemann manifoldunun sabit φ –kesitsel eğriliğe sahip Kaehlermanifoldu ile bir çemberin yada bir doğrunun çarpım manifoldu olduğunu,

- $c < 0$ ise ; Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin katlı çarpımından oluştuğunu göstermiştir.

Kenmotsu [27], çalışmalarında Tanno'nun bu ayrımlarını tüm yönleriyle inceleyerek, hemen hemen değme metrik manifold olan bir Kenmotsu manifoldu tanımlamıştır.

M , $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve $\varphi: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, $(1,1)$ tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form ve g metrik tensör olmak üzere;

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \eta(\xi) = 1$$

şartlarını sağlayan hemen hemen değme yapısı,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad \forall X, Y \in \chi(M) \text{ için,}$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

şartlarını sağlıyorsa, $(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna hemen hemen değme metrik manifold denir [27].

Eğer $(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ değme manifoldu,

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

şartını sağlıyorsa M ye Kenmotsu manifold denir [27].

$(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu,

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X = -\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y$$

koşulunu sağlıyorsa bu manifolda neredeyse Kenmotsu manifold denir [27]. Buradaki ∇ , Levi-Civita konneksiyonudur. Açıkça görülür ki her Kenmotsu manifold bir neredeyse Kenmotsu manifolddur, ancak tersi doğru değildir. Eğer neredeyse

Kenmotsu manifold bir Kenmotsu manifold değil ise buna strict neredeyse Kenmotsu manifoldu denir [33].

Kenmotsu manifoldlar ve neredeyse Kenmotsu manifoldlar üzerinde günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları ([8], [23], [28], [33], [41], [44]) dır.

Schouten-Van Kampen konneksiyonu, holomorfik olmayan manifoldları incelemek için tanıtılmıştır ve afin konneksiyon ile verilen diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde paralellik yoluyla dağılımları korur ([2], [24], [42]). Olszak, Schouten-Van Kampen konneksiyonunu hemen hemen değme metrik manifoldları için incelemiştir ve Schouten-Van Kampen konneksiyonu ile hemen hemen değme metrik manifoldların bazı sınıflarını karakterize edip, bu konneksiyonu kabul eden belirli eğrilik özelliklerini kurmuştur [38]. Son zamanlarda ise Ghosh [19], Sasakian manifoldlar da ve Yıldız ve diğerleri ([35], [55]) f -Kenmotsu manifoldlar da bu konneksiyonu incelemiştirler. 1971'de Kenmotsu tarafından tanıtılan Kenmotsu manifoldları [27], birçok yazar tarafından kapsamlı bir şekilde incelemiştir ([39], [40], [47]).

1982'de Hamilton [22], diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde kanonik bir metrik bulmak için Ricci flow kavramını tanıttığından beri, Ricci flow, Riemann manifoldlarının incelenmesi için güçlü bir araç haline gelmiştir. Ricci flow kavramına benzer bir çözüm olarak düşünülen Ricci soliton, bir M manifoldu üzerinde g Riemann metriği ve V vektör alanı ile birlikte,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (1.1)$$

ile verilir. Burada L_V , V boyunca Lie türevine, S Ricci tensörüne, λ ise herhangi bir sabite karşılık gelmektedir. λ nın negatif, sıfır veya pozitif olma durumuna göre Ricci soliton, genişleyen, durgun yada büzülen olarak adlandırılır. Bir Ricci solitona, M manifoldu üzerinde bazı f düzgün fonksiyonların gradyanı V vektör alanı ise gradyan Ricci soliton denir. Sharma, K -kontakt geometrisinde Ricci solitonlar üzerine çalışmaya başlamıştır [43] ve Tolga ve diğerleri [51], f -Kenmotsu manifoldlarında tanımlanan Ricci solitonların yapısını yarı simetrik metrik olmayan bir konneksiyon ile açıklamışlardır [51]. De ve diğerleri ([1], [9]), Nagaraja ve diğerleri [30], [31] ([32],) ve

Sharma ve diğeri ([43], [45]), değme metrik manifoldlarında Ricci solitonları birçok farklı yönlerden kapsamlı bir şekilde incelemişlerdir.

Ayrıca son yıllarda pek çok yazar, matematiğin yanında fizikte de çok önemli bir yeri olan normal (para) neredeyse değme metrik Kenmotsu manifoldların simetri ve eğrilik tensörlerinin özellikleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [11], [13], [16], [17], [36], [48]).

Tezin ikinci bölümünde manifoldlar ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Üç alt başlıktan oluşan bu bölümde, ilk olarak Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir ve son olarak Kenmotsu manifoldunun tanımı verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümde; neredeyse Kenmotsu manifoldlarının kısa bir incelenmesinden sonra, dördüncü bölümde Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skalar eğrilik ile ilgili ifadeler elde edilmiştir. Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun eğrilik özellikleri çalışılmış ve bu Kenmotsu manifoldunun hiperbolik uzaya izomorf olma koşulları ispatlanmıştır.

Tezin son bölümünde; Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldundaki Ricci solitonun durgun olması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Ayrıca Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre, C^* concircular eğrilik tensörü, P^* projektif eğrilik tensörü ve K^* conharmonic eğrilik tensörüne sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Riemann Manifolddar

Tanım 2.1.1. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki C^* vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den R ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, R)$ olmak üzere, M üzerinde,

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik, 2-lineer g metriğine Riemann metriği denir. g ile birlikte tanımlanan M ye de Riemann manifoldu adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir. Eğer g metriği non-dejenere, simetrik ve 2-lineer ise g metriğine pseudo(semi)-Riemann metriği, M ye de pseudo(semi)-Riemann manifoldu denir. Pseudo-Riemann manifoldu Riemann manifoldunun genelleştirilmiştir [49].

Tanım 2.1.2. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir afin (lineer) konneksiyon denir [52].

Tanım 2.1.3. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

şartları sağlanıyorsa ∇ ya Levi-Civita konneksiyonu denir [52].

Tanım 2.1.4. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ile tanımlı R fonksiyonu M üzerinde (1,3)-tipinde bir tensör alanıdır ve M nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $R(X, Y)Z = 0$ olması durumunda M manifolduna flat manifold denir. R Riemann eğrilik tensörü,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$$

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z),$$

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y),$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

şartlarını sağlar [52].

Tanım 2.1.5. (M, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsun. M üzerinde,

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

olarak tanımlı $(0,2)$ -tipindeki S tensör alanına Ricci eğrilik tensörü denir. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $S(X, Y) = 0$ olması durumunda M manifolduna Ricci-flat manifold denir [52].

Tanım 2.1.6. (M, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifold ve S , M üzerinde Ricci eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, M nin bir lokal ortonormal bazı olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i),$$

ile tanımlı r fonksiyonuna M nin skalar eğriliği denir [52].

Tanım 2.1.7. (M, g) bir Riemann manifoldu ve S , M üzerinde Ricci eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) + \mu \eta(X) \eta(Y)$$

olacak şekilde μ ve η skalarleri varsa M ye η -Einstein manifoldu denir. Eğer $\mu = 0$ ise M ye Einstein manifoldu denir [12].

Tanım 2.1.8 M $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifold olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve Q Ricci operatörü olmak üzere, M üzerindeki $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, M nin P projektif eğrilik tensör alanı,

$$P(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{1}{n-1} \{g(Y, W)QX - g(X, W)QY\},$$

denklemleri ile verilir.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $P(X, Y)W = 0$ olması durumunda M manifolduna projektif flat manifold denir [52].

Tanım 2.1.9. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. R , Riemann eğrilik tensörü ve r , M nin skalar eğriliği olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, M nin C concircular eğrilik tensör alanı,

$$C(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{r}{n(n-1)} \{g(Y, W)X - g(X, W)Y\},$$

denklemleri ile verilir.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $C(X, Y)W = 0$ olması durumunda M manifolduna concircularly flat manifold denir [52].

Tanım 2.1.10. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve r , M nin skalar eğriliği olmak üzere M üzerindeki $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, M nin K conharmonic eğrilik tensör alanı,

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} \{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\},$$

denklemleri ile verilir. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $K(X, Y)Z = 0$ olması durumunda M manifolduna conharmonic flat manifold denir [25].

2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Tanım 2.2.1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, (1,1) tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η için, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M ye bir hemen hemen değme manifold denir [54].

Tanım 2.2.2. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.2.2)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, ϕ, ξ, η, g yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme metrik manifold denir [54].

Tanım 2.2.3. M , $(2n + 1)$ -boyutlu manifold üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı ϕ dönüşümüne, hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir [54].

Tanım 2.2.4. (M^{2n+1}, g) Riemann manifold ve (x_1, x_2, \dots, x_n) , M^{2n+1} nin lokal koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M^{2n+1} üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M^{2n+1} üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^{2n+1} üzerinde metrik tensörün determinantıdır [46].

Tanım 2.2.5. (M^{2n+1}, g) Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} üzerinde bir hacim form mevcut ise M^{2n+1} ye yönlendirilebilirdir denir [18].

Tanım 2.2.6. M^{2n+1} diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer w , 1-form ise, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y]$$

dır. Eğer w , 2-form ise,

$$3dw(X, Y, Z) = X(w(Y, Z)) + Y(w(Z, X)) + Z(w(X, Y)) \\ - w([X, Y], Z) - w([Y, Z], X) - w([Z, X], Y)$$

dır [54].

Önerme 2.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ , Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(i) (\nabla_X \phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$$

$$(ii) (\nabla_X \phi)(Y, Z) + (\nabla_X \phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$$

$$(iii) (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \phi)(\xi, \phi Y)$$

$$(iv) 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$(v) 3d\phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\bigoplus_{X, Y, Z}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$, $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ olmak üzere, M nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman δ operatörü,

$$\delta\eta = - \sum_{i=1}^{2n+1} \{(\nabla_{X_i} \eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir [20].

Tanım 2.2.7. M^{2n+1} bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^{2n+1} nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^{2n+1} üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifoldda bir hemen hemen kompleks manifold denir [54].

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O

zaman, $M \times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı,

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alan; t , R nin bir koordinatı ve f , $M \times R$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times R$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı,

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir [54].

Tanım 2.2.8. M^{2n+1} bir diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alana F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [14].

J , M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8. yardımıyla M^{2n+1} üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü,

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklindedir [54].

Tanım 2.2.9. (M^{2n+1}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [54].

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n+1} \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [54].

Önerme 2.2.2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir M Riemann manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul,

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [54].

Tanım 2.2.11. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifoldda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifoldda ise Hermit manifoldu denir [3].

Tanım 2.2.12. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna, hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifoldda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifoldda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir

Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır [3].

Tanım 2.2.13. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) , bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı,

$$d\phi = 0 \text{ } (\phi, \text{kapalıdır}), d\eta = 0 \text{ } (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifoldda kosimplektik manifold denir [26], [37].

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır [37].

Önerme 2.2.3. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde,

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y) + (\nabla_X\phi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi = 0$$

eşitliği geçerlidir [37].

Örnek 2.2.2. E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normal C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J ,

$$J: E^4 \rightarrow E^4$$

$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ , S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, \xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi) = 1$ dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile,

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir. Burada,

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için,

$$g(X, \xi)\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere,

$$g(X, \xi) = \lambda \xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$= J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J\left(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}\right) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_1 \\ -\lambda p_4 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_2 \\ -\lambda p_1 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_3 \\ -\lambda p_2 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman,

$$\phi(\phi X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)C, \xi)$$

$$= 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) , yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur [3].

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla^2}B$ ikinci kovaryant türevi,

$$(\overline{\nabla^2}B)(Z, W, X, Y) = (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z, W)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X^\perp \left((\overline{\nabla_Y} B)(Z, W) \right) - (\overline{\nabla_Y} B)(\nabla_X Z, W) \\
&\quad - (\overline{\nabla_X} B)(Z, \nabla_Y W) - (\overline{\nabla_{XY}} B)(Z, W)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [7].

2.3. Kenmotsu Manifoldlar

Bu bölümde Kenmotsu manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

M bir hemen hemen değme metrik yapı (ϕ, ξ, η, g) ile verilmiş $(2n + 1)$ -boyutlu manifold M olsun. $\chi(M)$, M manifoldunun tanjant uzayı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

denklemleri ile verilen ϕ , M nin temel 2-formu olsun. M manifoldu ve (ϕ, ξ, η, g) metrik yapısı için aşağıdaki durumlar sağlanır:

- i) $d\eta = 0$ ve $d\phi = 0$ ise (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektiktir.
- ii) (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektik ve normal (yani $\nabla_\phi = 0$) ise (M, ϕ, ξ, η, g) kosimplektiktir [27].

M , $\sigma_t: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları ile birlikte verilen $\{U_t\}$ açık örtüsüne sahip olsun. Her U_t üzerinde,

$$\phi_t = \phi, \xi_t = e^{\sigma_t} \xi, \eta_t = e^{-\sigma_t} \eta, g_t = e^{-2\sigma_t} g,$$

ile tanımlı $(\phi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ hemen hemen değme metrik yapısı kosimplektik (veya hemen hemen kosimplektik) olsun. Bu durumda M , lokal konformal kosimplektik (veya lokal konformal hemen hemen kosimplektik) manifolddur [46]. Bir f -Kenmotsu manifoldu, normal ve lokal conformal hemen hemen kosimplektik manifold olan bir hemen hemen değme metrik manifoldu olarak tanımlanır [34].

Tanım 2.3.1. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

eşitliği sağlanırsa, (M, ϕ, ξ, η, g) manifolduna Kenmotsu manifold denir [46].

3. NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir M manifolduna, eğer bu manifold $(1,1)$ -tipinde ϕ tensör alanı, ξ yapı vektör alanı, η -1formdan oluşan ve g Riemann metrik ile uyumlu olan (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapıya sahip ise hemen hemen değme metrik manifold denir. $(\phi, \xi, \eta), \forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki verilen özellikleri sağlar.

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \phi\xi = 0, g(X, \xi) = \eta(X), \eta(\xi) = 1, \eta \circ \phi = 0, \quad (3.1)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.2)$$

Tanım 3.1. Bir hemen hemen değme metrik manifold,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X, \phi Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \quad (3.3)$$

ile verilen denklemi sağlarsa, bu manifolda Kenmotsu manifold denir [5]. Burada ∇, g nin Riemann konneksiyonudur.

Tanım 3.2. Eğer bir hemen hemen değme metrik manifold M ,

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = -\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y \quad (3.4)$$

eşitliğini sağlarsa neredeyse Kenmotsu manifold olarak adlandırılır [44].

Teorem 3.1. Her $(2n + 1)$ -boyutlu (M, ϕ, ξ, η, g) neredeyse Kenmotsu manifold aşağıda verilen önemli özellikleri sağlar [44].

$$(\nabla_X \eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.5)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \quad (3.6)$$

$$R(\xi, X)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (3.7)$$

$$S(X, \xi) = -2n\eta(X) \quad (3.8)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y) \quad (3.9)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X) \quad (3.10)$$

$$\nabla_{\xi}\xi = 0 \quad (3.11)$$

Tanım 3.3. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için g Riemann metriği olmak üzere, projektif eğrilik tensörü P ve conharmonic eğrilik tensörü K sırasıyla,

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (3.12)$$

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)r(X) - g(X, Z)r(Y)] \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır.

4. SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde Schouten-Van Kampen konneskiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır.

Tanım 4.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Schouten-Van Kampen konneskiyonu ∇^* , Levi-Civita konneskiyonu ∇ ile $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi + (\nabla_X \eta)(Y)\xi \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [21].

Önerme 4.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M üzerinde Schouten-Van Kampen konneskiyonu,

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (4.2)$$

şeklindedir.

İspat :

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)(Y) &= \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X g(Y, \xi) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= \eta(\nabla_X Y) + g(Y, \nabla_X \xi) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= g(Y, \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade (4.1) de yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^* Y &= \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi + g(Y, \nabla_X \xi)\xi \\
&= \nabla_X Y + \eta(Y)\phi^2 X - g(Y, \phi^2 X)\xi \\
&= \nabla_X Y + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) - g(Y, -X + \eta(X)\xi)\xi \\
&= \nabla_X Y - \eta(Y)X + \eta(Y)\eta(X)\xi + g(Y, X)\xi - g(Y, \eta(X)\xi)\xi \\
&= \nabla_X Y - \eta(Y)X + \eta(Y)\eta(X)\xi + g(Y, X)\xi + \eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= \nabla_X Y - \eta(Y)X + g(Y, X)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.2. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. ∇^* Schouten-Van Kampen konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X^* \xi = 0 \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.2) de $Y = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^* \xi &= \nabla_X \xi + g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X \\
&= \nabla_X \xi + \eta(X)\xi - X \\
&= X - \eta(X)\xi + \eta(X)\xi - X \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.3. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. g Riemann metriği olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R^* Riemann eğrilik tensörü,

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y. \quad (4.4)$$

eşitliği ile verilir.

İspat : $R^*(X, Y)Z = \nabla_X^* \nabla_Y^* Z - \nabla_Y^* \nabla_X^* Z - \nabla_{[X, Y]}^* Z$

İfadesinde (4.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_X^* \nabla_Y^* Z &= \nabla_X^* [\nabla_Y Z + g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y] \\ &= \nabla_X^* \nabla_Y Z + \nabla_X^* g(Y, Z)\xi - \nabla_X^* \eta(Z)Y \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X + \nabla_X (g(Y, Z)\xi) + g(X, g(Y, Z))\xi \\ &\quad - \eta((g(Y, Z)\xi)X - \nabla_X (\eta(Z)Y) - g(X, \eta(Z)Y)\xi + \eta(\eta(Z)Y)X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X (g(Y, Z)\xi) &= \nabla_X (g(Y, Z))\xi + g(Y, Z)\nabla_X \xi \\ &= g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi + g(Y, Z)\nabla_X \xi \\ &= g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi + g(Y, Z)X - g(Y, Z)\eta(X)\xi \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X (\eta(Z)Y) &= \nabla_X g(Z, \xi)Y \\ &= (\nabla_X g(Z, \xi))Y + g(Z, \xi)\nabla_X Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(\nabla_X Z, \xi)Y + g(Z, \nabla_X \xi)Y + \eta(Z)\nabla_X Y \\
&= \eta(\nabla_X Z)Y + g(Z, X - \eta(X)\xi)Y + \eta(Z)\nabla_X Y \\
&= \eta(\nabla_X Z)Y + g(X, Z)Y - \eta(X)\eta(Z)Y + \eta(Z)\nabla_X Y \dots \dots \dots (2)
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

(1) ve (2) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^* \nabla_Y^* Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X + g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi \\
&+ g(Y, Z)X - g(Y, Z)\eta(X)\xi + g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(Y, Z)X - \eta(\nabla_X Z)Y \\
&- g(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Z)\nabla_X Y - g(X, Y)\eta(Z)\xi + \eta(Z)\eta(Y)X
\end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^* \nabla_Y^* Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X + g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi \\
&- \eta(\nabla_X Z)Y - g(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Z)\nabla_X Y - g(X, Y)\eta(Z)\xi \\
&+ \eta(Z)\eta(Y)X
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\nabla_Y^* \nabla_X^* Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + g(Y, \nabla_X Z)\xi - \eta(\nabla_X Z)Y + g(\nabla_Y X, Z)\xi + g(X, \nabla_Y Z)\xi \\
&- \eta(\nabla_Y Z)X - g(Y, Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(Z)\nabla_Y X - g(Y, X)\eta(Z)\xi \\
&+ \eta(Z)\eta(X)Y
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\nabla_{[X,Y]}^* Z = \nabla_{[X,Y]} Z + g([X, Y], Z)\xi - \eta(Z)[X, Y]$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} R^*(X, Y)Z &= \nabla_X^* \nabla_Y^* Z - \nabla_Y^* \nabla_X^* Z - \nabla_{[X,Y]}^* Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X + g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi \\ &\quad - \eta(\nabla_X Z)Y - g(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Z)\nabla_X Y - g(X, Y)\eta(Z)\xi \\ &\quad + \eta(Z)\eta(Y)X - \nabla_Y \nabla_X Z - g(Y, \nabla_X Z)\xi + \eta(\nabla_X Z)Y - g(\nabla_Y X, Z)\xi \\ &\quad - g(X, \nabla_Y Z)\xi + \eta(\nabla_Y Z)X + g(Y, Z)X - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(Z)\nabla_Y X \\ &\quad + g(Y, X)\eta(Z)\xi - \eta(Z)\eta(X)Y - \nabla_{[X,Y]} Z - g([X, Y], Z)\xi + \eta(Z)[X, Y] \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

elde edilir.

Önerme 4.4. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R^* , Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$R^*(X, Y)\xi = 0 \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.4) te $Z = \xi$ alınarak

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(X, Z)Y + g(Y, Z)X$$

$$\begin{aligned} R^*(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi - g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X \\ &= R(X, Y)\xi - \eta(X)Y + \eta(Y)X \\ &= \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)Y + \eta(Y)X \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.5. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun S^* Ricci tensörü ve g Riemann metriği olmak üzere $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S^*(Y, Z) = S(Y, Z) + 2ng(Y, Z). \quad (4.6)$$

eşitliği ile verilir.

İspat :

$$S^*(Y, Z) = \sum_{i=1}^{2n+1} R^*(e_i, Y, Z, e_i)$$

eşitliği göz önünde bulundurularak, (4.4) ifadesi W ile çarpılıp toplam alınırsa,

$$R^*(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R^*(e_i, Y, Z, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} (R(e_i, Y, Z, e_i) + g(Y, Z)g(e_i, e_i) - g(e_i, Z)g(Y, e_i))$$

$$S^*(Y, Z) = \sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, Y, Z, e_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} g(Y, Z)g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, Z)g(Y, e_i)$$

$$\begin{aligned}
&= S(Y, Z) + (2n + 1)g(Y, Z) - g(Y, Z) \\
&= S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.6. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü, g Riemann metriği tanımlı olsun. Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun Ricci operatörü Q^* olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$Q^*X = QX + 2nX \quad (4.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.6) kullanılarak,

$$S^*(X, Y) = S(X, Y) + 2ng(X, Y)$$

$$g(Q^*X, Y) = g(QX, Y) + 2ng(X, Y)$$

$$g(Q^*X, Y) = g(QX + 2nX, Y)$$

$$Q^*X = QX + 2nX$$

elde edilir.

Önerme 4.7. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü tanımlı olsun. r^* ve r sırasıyla Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun ve Levi-Civita konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun skalar eğrilikleri olmak üzere,

$$r^* = r + 2n(2n + 1) \quad (4.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.6) da X ve Y 'ye göre toplam alınırsa,

$$S^*(X, Y) = S(X, Y) + 2ng(X, Y)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S^*(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) + 2n \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i)$$

$$r^* = r + 2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Yukarıda verilen özelliklerinden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü R^* ve Ricci tensörü S^* , $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$i) R^*(X, Y)Z = -R^*(Y, X)Z,$$

$$ii) R^*(X, Y, Z, W) + R^*(Y, X, Z, W) = 0,$$

$$iii) R^*(X, Y, Z, W) + R^*(X, Y, W, Z) = 0,$$

$$iv) R^*(X, Y)Z + R^*(Y, Z)X + R^*(Z, X)Y = 0,$$

$$v) S^* \text{ simetriktir.}$$

İspat :

$$i) R^*(X, Y)Z = -R^*(Y, X)Z$$

için,

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$R^*(Y, X)Z = R(Y, X)Z + g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$R^*(X, Y)Z + R^*(Y, X)Z = R(X, Y)Z + R(Y, X)Z$$

bulunur.

$$R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$$

olduğundan,

$$R^*(X, Y)Z + R^*(Y, X)Z = 0$$

elde edilir.

$$ii) R^*(X, Y, Z, W) + R^*(Y, X, Z, W) = 0$$

için,

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, X, W, Z) = 0$$

olduğundan,

$$R^*(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)$$

$$R^*(Y, X, Z, W) = R(Y, X, Z, W) + g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, W) + R^*(Y, X, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) + R(Y, X, Z, W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$iii) R^*(X, Y, Z, W) + R^*(X, Y, W, Z) = 0$$

için,

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) = 0$$

olduğundan,

$$R^*(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)$$

$$R^*(X, Y, W, Z) = R(X, Y, W, Z) + g(Y, W)g(X, Z) - g(X, W)g(Y, Z)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$R^*(X, Y, Z, W) + R^*(X, Y, W, Z) = R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) = 0$$

elde edilir.

$$iv) R^*(X, Y)Z + R^*(Y, Z)X + R^*(Z, X)Y = 0$$

için,

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

olduğundan,

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$R^*(Y, Z)X = R(Y, Z)X + g(Z, X)Y - g(Y, X)Z$$

$$R^*(Z, X)Y = R(Z, X)Y + g(X, Y)Z - g(Z, Y)X$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$R^*(X, Y)Z + R^*(Y, Z)X + R^*(Z, X)Y = 0$$

elde edilir.

v) S^* simetriktir.

$$S^*(X, Y) = S(X, Y) + 2ng(X, Y)$$

$$S^*(Y, X) = S(Y, X) + 2ng(Y, X)$$

eşitlikleri için,

$$S(X, Y) = S(Y, X), g(X, Y) = g(Y, X)$$

olduğundan,

$$S^*(X, Y) = S^*(Y, X)$$

elde edilir.

(4.6) eşitliğinden Teorem 4.2. elde edilir:

Teorem 4.2. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -

boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve R^* Riemann eğrilik tensörü, S^* Ricci tensörü M üzerinde tanımlı olsun. M nin Ricci flat olması için gerek ve yeter şart M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre bir Einstein manifoldu olmasıdır.

(4.4) ifadesinden aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.8. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için $R^*(X, Y)Z = 0$ ise,

$$R(X, Y, Z, U) = g(X, Z)g(Y, U) - g(Y, Z)g(X, U) \quad (4.9)$$

dir.

Teorem 4.3. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M nin eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart M nin Levi-Civita konneksiyonuna göre $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına izomorf olmasıdır.

İspat: Önerme 4.8. den ispat açıktır.

Tanım 4.2. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre concircular eğrilik tensörü C^* , $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)Z = R^*(X, Y)Z - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}. \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır [53].

Tanım 4.3. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* concircular eğrilik tensörü olmak üzere, eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $C^*(X, Y)\xi = 0$ ise Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip bir M neredeyse Kenmotsu manifolduna ξ -concircularly flattır denir.

Önerme 4.9. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde C^* concircular eğrilik tensörü, r ve R sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik ve Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip bir M neredeyse Kenmotsu manifoldunda ξ -conccircularly eğrilik tensörü, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)\xi = \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}R(X, Y)\xi$$

eşitliğini sağlar.

İspat: Tanım 4.3. ve Önerme 4.4. den ispat açıktır.

Önerme 4.10. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* concircular eğrilik tensörü, g Riemann metriği, R ve r sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü ve skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$- \frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.11)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.10) da (4.8) ve (4.4) kullanılırsa,

$$C^*(X, Y)Z = R^*(X, Y)Z - \frac{r^*}{2n(2n + 1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

bulunur. Bu eşitlikte,

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

ve

$$r^* = r + 2n(2n + 1)$$

yazılırsa,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$- \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

elde edilir.

Önerme 4.11. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* Concircular eğrilik tensörü, R ve r sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü ve skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)\xi = \frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)}R(X, Y)\xi \quad (4.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.1) kullanılarak (4.11) de $Z = \xi$ alınırsa,

$$C^*(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi + g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y$$

$$- \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y\}$$

olur. Bu eşitlikte

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

eşitliği kullanılırsa,

$$C^*(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X + \eta(Y)X - \eta(X)Y - \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılarak,

$$C^*(X, Y)\xi = \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}R(X, Y)\xi$$

elde edilir.

Böylece, (4.4), (4.8), (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve C^* concircular eğrilik tensörü M üzerinde tanımlı olsun. r Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik ve r^* ise Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip skalar eğrilik olmak üzere, M manifoldunda aşağıda verilen üç koşul denktir:

i) M ξ - concircularly flat,

ii) $r = -2n(2n + 1)$,

iii) $r^* = 0$.

İspat:

i) \Rightarrow *ii)*: Eğer M ξ -concircularly flat ise $C^*(X, Y)\xi = 0$ dir.

$$C^*(X, Y)\xi = 0$$

ise

$$r + 2n(2n + 1) = 0$$

dir. Dolayısıyla,

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

ii) \Rightarrow iii): $r = -2n(2n + 1)$ ise

$$\begin{aligned} r^* &= r + 2n(2n + 1) \\ &= -2n(2n + 1) + 2n(2n + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) \Rightarrow i): Eğer $r^* = 0$ ise

$$r^* = r + 2n(2n + 1) = 0$$

$$C^*(X, Y)\xi = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, M ξ -conircularly flattır.

Tanım 4.4. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* concircular eğrilik tensörü ve g Riemann metriği olmak üzere, eğer $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$g(C^*(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi W) = 0. \quad (4.13)$$

eşitliği sağlanırsa M ye ϕ -conircularly flat denir.

Önerme 4.12. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu ϕ -conircularly flat neredeyse Kenmotsu manifold ve C^* concircular eğrilik tensörü M üzerinde tanımlı olsun. R^* Riemann eğrilik tensörü, g Riemann metriği ve r^* skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$g(R^*(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi W) = \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W) - g(\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W)\} \quad (4.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.13) te (4.10) kullanılırsa,

$$g\left(R^*(\phi X, \phi Y)\phi Z - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\phi Y, \phi Z)\phi X - g(\phi X, \phi Z)\phi Y\}, \phi W\right) = 0$$

$$g(R^*(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi W) - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W)$$

$$-g(\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W)\} = 0$$

$$g(R^*(\phi X, \phi Y)\phi Z, \phi W) = \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W)$$

$$-g(\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W)\}$$

elde edilir.

Önerme 4.13. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu ϕ -conircularly flat neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının lokal ortonormal bazları $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2n+1}\}$ olsun. g Riemann metriği, R^* Riemann eğrilik tensörü ve r^* skalar eğrilik olmak üzere $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\sum_{i=1}^{2n} g(R^*(\phi e_i, \phi Y)\phi Z, \phi e_i) = \frac{r^*}{2n(2n+1)} \sum_{i=1}^{2n} \{g(\phi Y, \phi Z)g(\phi e_i, \phi e_i) - g(\phi e_i, \phi Z)g(\phi Y, \phi e_i)\} \quad (4.15)$$

dir.

İspat: (3.9) eşitliğinde $X = W = e_i$ alınır ve $1 \leq i \leq 2n + 1$ olmak üzere, i ye göre toplam alınarak ispat tamamlanır.

Önerme 4.14. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu ϕ -conircularly flat neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde R^* Riemann eğrilik tensörü tanımlı olsun. S^* Ricci tensörü, g Riemann metriği, r^* skalar eğrilik ve $\{\phi e_1, \phi e_2, \phi e_3, \dots, \phi e_{2n+1}\}$ de lokal ortanormal bazlar olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S^*(\phi X, \phi Y) = \frac{r^*(2n-1)}{2n(2n+1)} g(\phi X, \phi Y) \quad (4.16)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.15) sayesinde,

$$\sum_{i=1}^{2n} g(R^*(\phi e_i, \phi X)\phi Y, \phi e_i) = \frac{r^*}{2n(2n+1)} \sum_{i=1}^{2n} \{g(\phi X, \phi Y)g(\phi e_i, \phi e_i) - g(\phi e_i, \phi Y)g(\phi X, \phi e_i)\}$$

eşitliğinde sol tarafa $R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi)$, sağ tarafa $g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi)$ ekleyip çıkarılırsa,

$$R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi) - R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi) + \sum_{i=1}^{2n} R^*(\phi e_i, \phi X, \phi Y, \phi e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\phi X, \phi Y)g(\phi e_i, \phi e_i) - g(\phi e_i, \phi Y)g(\phi X, \phi e_i)\}$$

$$+g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi) - g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} S^*(\phi X, \phi Y) - R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi) &= \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{2ng(\phi X, \phi Y) - g(\phi X, \phi Y) \\ &\quad +g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi)\} + g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi) \\ &\quad -g(\xi, \phi Y)g(\phi X, \xi) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S^*(\phi X, \phi Y) - R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi) = \frac{r^*}{2n(2n+1)} (2n-1)g(\phi X, \phi Y)$$

olarak bulunur ve

$$R^*(\xi, \phi X, \phi Y, \xi) = 0$$

olduğundan,

$$S^*(\phi X, \phi Y) = \frac{r^*(2n-1)}{2n(2n+1)} g(\phi X, \phi Y)$$

elde edilir.

Önerme 4.15. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n+1)$ -boyutlu ϕ -concurcularly flat neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü ve r^* skalar eğriliği tanımlı olsun. S ve r sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü ve skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(\phi X, \phi Y) + 2ng(\phi X, \phi Y) = \frac{(r+2n(2n+1))(2n-1)}{2n(2n+1)}g(\phi X, \phi Y) \quad (4.17)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.16) da (3.1), (4.6) ve (4.8) kullanılırsa,

$$S^*(\phi X, \phi Y) = \frac{r^*(2n-1)}{2n(2n+1)}g(\phi X, \phi Y)$$

eşitliği için,

$$S^*(\phi X, \phi Y) = S(\phi X, \phi Y) + 2ng(\phi X, \phi Y)$$

ve

$$r^* = 2n(2n+1)$$

olduğundan,

$$S(\phi X, \phi Y) + 2ng(\phi X, \phi Y) = \frac{(r+2n(2n+1))(2n-1)}{2n(2n+1)}g(\phi X, \phi Y)$$

elde edilir.

Önerme 4.16. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n+1)$ -boyutlu ϕ -conircularly flat neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü ve r^* skalar eğriliği tanımlı olsun. S ve r sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü ve skalar eğrilik, g Riemann metriği olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y) + \left\{2n - \frac{(r+2n(2n+1))(2n-1)}{2n(2n+1)}\right\}g(\phi X, \phi Y) = 0. \quad (4.18)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat: (4.17) de (3.2) kullanılırsa,

$$S(\phi X, \phi Y) + 2ng(\phi X, \phi Y) = \frac{(r + 2n(2n + 1)(2n - 1))}{2n(2n + 1)}g(\phi X, \phi Y)$$

$$S(\phi X, \phi Y) + \left\{ 2n - \frac{(r + 2n(2n + 1)(2n - 1))}{2n(2n + 1)} \right\} g(\phi X, \phi Y) = 0$$

eşitliği için,

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y)$$

olduğundan,

$$S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y) + \left\{ 2n - \frac{(r + 2n(2n + 1)(2n - 1))}{2n(2n + 1)} \right\} g(\phi X, \phi Y) = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.17. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu ϕ -conircularly flat neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü ve r^* skalar eğriliği tanımlı olsun. r Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik olmak üzere,

$$r = -2n \tag{4.19}$$

dır.

İspat: (4.18) de toplam alınarak ispat kolayca tamamlanır.

Önerme 4.18. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü, R^* Riemann eğrilik tensörü ve r^* skalar eğriliği tanımlı olsun. R Levi-Civita konneksiyonuna sahip

Riemann eğrilik tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü ve g Riemann metriği olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{2n+1} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.20)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$C^*(X, Y)Z = R^*(X, Y)Z - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

eşitliğinde,

$$r^* = r + 2n(2n+1)$$

ve

$$R^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

eşitlikleri kullanılıp (4.19) eşitliği (4.10) da yazılırsa,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$\begin{aligned} & - \frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & = R(X, Y)Z + \left[1 - \frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)} \right] \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & = R(X, Y)Z + \left[1 - \frac{-2n}{2n(2n+1)} - 1 \right] \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R(X, Y)Z + \frac{2n}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\
&= R(X, Y)Z + \frac{1}{2n+1} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.18. den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5. Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip M neredeyse Kenmotsu manifoldu, concircularly flat ve M üzerinde, Levi-Civita konneksiyonuna sahip R Riemann eğrilik tensörü, g Riemann metriği, S^* Ricci tensörü, R^* Riemann eğrilik tensörü ve r^* skalar eğriliği tanımlı olsun. M nin sabit kesit eğriliğinin $-\frac{1}{2n+1}$ olması için gerek ve yeter şart C^* concircular eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır.

Tanım 4.5. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n+1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S^* Ricci tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için $C^*.S^*$ ifadesi,

$$(C^*(X, Y).S^*)(Z, U) = S^*(C^*(X, Y)Z, U) + S^*(Z, C^*(X, Y)U) \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.19. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n+1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde R^* Riemann eğrilik tensörü tanımlı olsun. S^* Ricci tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü, g Riemann metriği ve S , r ve R sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü, skalar eğrilik ve Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
C^*S^* &= S \left(R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, U \right) \\
&+ S \left(Z, R(X, Y)U - \frac{r}{2n(2n+1)} \{g(Y, U)X - g(X, U)Y\} \right)
\end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.21) dikkate alınıp, (4.21) de (4.10) ve (4.6) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
C^* . S^* &= S^*(C^*(X, Y)Z, U) + S^*(Z, C^*(X, Y)U) \\
&= S(C^*(X, Y)Z, U) + 2ng(C^*(X, Y)Z, U) + S(Z, C^*(X, Y)U) \\
&\quad + 2ng(Z, C^*(X, Y)U) \\
&= S\left(R^*(X, Y)Z - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, U\right) \\
&\quad + 2ng\left(R^*(X, Y)Z - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, U\right) \\
&\quad + S\left(Z, R^*(X, Y)U - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(Y, U)X - g(X, U)Y\}\right) \\
&\quad + 2ng\left(Z, R^*(X, Y)U - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(Y, U)X - g(X, U)Y\}\right) \\
&= S(R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\
&\quad - \frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, U) \\
&\quad + 2ng(R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\
&\quad - \frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, U) \\
&\quad + S(Z, R(X, Y)U + g(Y, U)X - g(X, U)Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(Y,U)X-g(X,U)Y\} \\
& +2ng(Z,R(X,Y)U+g(Y,U)X-g(X,U)Y) \\
& -\frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(Y,U)X-g(X,U)Y\}
\end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
C^*.S^* &= S\left(R(X,Y)Z-\frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\},U\right) \\
& +2ng\left(R(X,Y)Z-\frac{r}{2n+1}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\},U\right) \\
& +S(Z,R(X,Y)U-\frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,U)X-g(X,U)Y\}) \\
& +2ng\left(Z,R(X,Y)U-\frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,U)X-g(X,U)Y\}\right)
\end{aligned}$$

olur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
C^*.S^* &= S\left(R(X,Y)Z-\frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\},U\right) \\
& +S\left(Z,R(X,Y)U-\frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,U)X-g(X,U)Y\}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.20. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n+1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S^* Ricci tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü ve $C^* = 0$ olmak üzere $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için,

$$S^*(C^*(X, Y)Z, U) + S^*(Z, C^*(X, Y)U) = 0 \quad (4.23)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 4.21. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S^* Ricci tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü ve $C^* = 0$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S^*(Z, C^*(X, Y)\xi) = 0 \quad (4.24)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.23) eşitliğinde $U = \xi$ alınıp (4.6) kullanılırsa,

$$S^*(C^*(X, Y)Z, \xi) + S^*(Z, C^*(X, Y)\xi) = 0$$

$$S(C^*(X, Y)Z, \xi) + 2ng(C^*(X, Y)Z, \xi) + S^*(Z, C^*(X, Y)\xi) = 0$$

$$-2n\eta(C^*(X, Y)Z) + 2n\eta(C^*(X, Y)Z) + S^*(Z, C^*(X, Y)\xi) = 0$$

$$S^*(Z, C^*(X, Y)\xi) = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.22. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer $C^* = 0$ ise, S^* Ricci tensörü ve r Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)} S^*(Z, \eta(X)Y - \eta(Y)X) = 0 \quad (4.25)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.24) eşitliğinde (3.1) ve (4.11) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& S^*(Z, R(X, Y)\xi + g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y \\
& - \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y\}) = 0 \\
& S^*(Z, \eta(X)Y - \eta(Y)X + \eta(Y)X - \eta(X)Y \\
& - \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y\}) = 0 \\
& S^*\left(Z, -\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{\eta(Y)X - \eta(X)Y\}\right) = 0 \\
& \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} S^*(Z, \eta(X)Y - \eta(Y)X) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.23. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü tanımlı olsun. Eğer $C^* = 0$ ise, S ve r sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü ve skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\frac{r+2n(2n+1)}{2n(2n+1)} \{S(Y, X) + 2ng(Y, X)\} = 0 \quad (4.26)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.25) eşitliğinde X ve ξ yer değiştirilip (3.1) ve (4.6) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} S^*(Y, X - \eta(X)\xi) = 0 \\
& \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} S^*(Y, X) - \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \eta(X)S^*(Y, \xi) = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} S^*(Y, X) = 0$$

$$\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{S(X, Y) + 2ng(X, Y)\} = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.24. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü tanımlı olsun. Eğer $C^* = 0$ ise r Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik olmak üzere,

$$r = -2n(2n + 1) \tag{4.27}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.26) eşitliğinde Y ve Z ye göre toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \{S(e_i, e_i) + 2ng(e_i, e_i)\} \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} = 0$$

$$\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) + 2ng(e_i, e_i) = 0$$

$$\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} (r + 2n(2n + 1)) = 0$$

$$\left(\frac{r}{2n(2n + 1)} + 1 \right) (r + 2n(2n + 1)) = 0$$

$$\frac{r^2}{2n(2n + 1)} + 2r + 2n(2n + 1) = 0$$

$$r^2 + 2r2n(2n + 1) + (2n(2n + 1))^2 = 0$$

$$(r + (2n(2n + 1)))^2 = 0$$

olur ve dolayısıyla,

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Önerme 4.25. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde R^* Riemann eğrilik tensörü, S^* Ricci tensörü, C^* concircular eğrilik tensörü tanımlı olsun. Eğer $C^* = 0$ ise, S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z) \quad (4.28)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.22) ve (4.27) eşitliklerinden,

$$S(R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y, U)$$

$$+ S(Z, R(X, Y)U + g(Y, U)X - g(X, U)Y) = 0$$

$$S(R(X, Y)Z, U) + g(Y, Z)S(X, U) - g(X, Z)S(Y, U) + S(Z, R(X, Y)U)$$

$$+ g(Y, U)S(Z, X) - g(X, U)S(Z, Y) = 0$$

S nin simetriligi ve lineerligi kullanilrsa,

$$S(R(\xi, Y)Z, \xi) + g(Y, Z)S(\xi, \xi) - g(\xi, Z)S(Y, \xi)$$

$$+ S(Z, R(\xi, Y)\xi) + g(Y, \xi)S(Z, \xi) - g(\xi, \xi)S(Z, Y) = 0$$

$$-2n\eta(R(\xi, Y)Z) - g(Y, Z)2n\eta(\xi) + 2n\eta(Z)\eta(Y) + 2n\eta(R(\xi, Y)Z)$$

$$-2n\eta(Y)\eta(Z) - \eta(\xi)S(Y, Z) = 0$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = -2ng(X, Y)$$

eşitliği sağlanırsa M , Einstein manifold olur.

Önerme 4.26. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde S^* Ricci tensörü tanımlı olsun. C^* concircular eğrilik tensörü ve R Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, $C^* = 0$ olması halinde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.29)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (4.27) eşitliği (4.11) de kullanılırsa,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$- \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

eşitliğinde,

$$r = -2n(2n + 1)$$

yazılırsa,

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$- \frac{-2n(2n + 1) + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

$$C^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

elde edilir.

Dolayısıyla, yukarıda verilen eşitliklerden ve (4.4), (4.8) ve (4.12) kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* concircular eğrilik tensörü, S ve S^* sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip ve Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $C^*S^* = 0$ olması için gerek ve yeter şart $S(X, Y) = -2ng(X, Y)$ olmasıdır. Ayrıca eğer $C^* = 0$ ise M , $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzaya izomorf olur.

Teorem 4.7. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. C^* concircular eğrilik tensörü, S^* Ricci tensörü ve r Levi-Civita konneksiyonuna sahip, r^* ise Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip skalar eğrilikler olmak üzere, eğer M neredeyse Kenmotsu manifoldunda $C^*S^* = 0$ sağlanırsa, aşağıdaki durumlar denktir:

i) M ξ -concircularly flattır,

ii) $r = -2n(2n + 1)$ dir,

iii) $r^* = 0$ dir.

İspat :

i) \Rightarrow ii): M ξ -conircularly flat olsun. O halde $C^*(X, Y)\xi = 0$ dir.

$$C^*(X, Y)\xi = \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}R(X, Y)\xi$$

olduğundan,

$$\frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}R(X, Y)\xi = 0$$

$$r + 2n(2n + 1) = 0$$

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

ii) \Rightarrow iii): $r = -2n(2n + 1)$ ise

$$r^* = r + 2n(2n + 1)$$

$$r^* = -2n(2n + 1) + 2n(2n + 1)$$

$$r^* = 0$$

elde edilir.

iii) \Rightarrow i): $r^* = 0$ ise

$$r^* = r + 2n(2n + 1)$$

olduğundan,

$$r + 2n(2n + 1) = 0$$

olur ve

$$C^*(X, Y)\xi = \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)} R(X, Y)\xi$$

ifadesinde

$$C^*(X, Y)\xi = 0$$

olur ve dolayısıyla M , ξ -conccircularly flattır.

Tanım 4.4. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde R^* Riemann eğrilik tensörü ve S^* Ricci tensörü olmak üzere, M üzerinde projektif eğrilik tensörü P^* , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$P^*(X, Y)Z = R^*(X, Y)Z - \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\} \quad (4.30)$$

denklemleri ile tanımlanır.

Önerme 4.27. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde P^* projektif eğrilik tensörü, R^* Riemann eğrilik tensörü ve S^* Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $P^* = 0$ olması halinde,

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\} \quad (4.31)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 4.28. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde projektif eğrilik tensörü P^* tanımlıysa ve $P^* = 0$ ise, R ve S sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü ve Ricci tensörü olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\ &= \frac{1}{2n} [\{S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)\}g(X, W) - \{S(X, Z) + 2ng(X, Z)\}g(Y, W)] \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\}$$

eşitliği için (4.4) kullanılırsa,

$$R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y = \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.6) eşitlikleri (4.31) de yazılırsa ve eşitliğin her iki tarafı W ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\ &= \frac{1}{2n} [\{S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)\}g(X, W) - \{S(X, Z) + 2ng(X, Z)\}g(Y, W)] \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.29. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde projektif eğrilik tensörü P^*

tanımlı ise S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) = 2n\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\} \quad (4.33)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.32) de $W = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Z, \xi) + g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi) \\ &= \frac{1}{2n} [\{S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)\}g(X, \xi) - \{S(X, Z) + 2ng(X, Z)\}g(Y, \xi)] \\ &+ \eta(R(X, Y)Z) + g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \\ &= \frac{1}{2n} S(Y, Z)\eta(X) + g(Y, Z)\eta(X) - \frac{1}{2n} (S(X, Z)\eta(Y) - g(X, Z)\eta(Y)) \\ &g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X) + g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \\ &= \frac{1}{2n} \{S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y)\} + g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$0 = S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) + 2n\{g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)\}$$

$$S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) = 2n\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\}$$

elde edilir.

Önerme 4.30. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve M üzerinde projektif eğrilik tensörü P^*

tanımlı olsun. S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z) \quad (4.34)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat: (4.33) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa,

$$S(Y, Z)\eta(\xi) - S(\xi, Z)\eta(Y) = 2n\{g(\xi, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(\xi)\}$$

eşitliği elde edilir ve (3.1) kullanılıp S ve g nin lineerliği göz önüne alınırsa,

$$S(Y, Z) + 2n\eta(Z)\eta(Y) = 2n\eta(Z)\eta(Y) - 2ng(Y, Z)$$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir.

Önerme 4.31. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun ve M üzerinde projektif eğrilik tensörü P^* tanımlı olsun. r Levi-Civita konneksiyonuna sahip skalar eğrilik olmak üzere,

$$r = -2n(2n + 1) \quad (4.35)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.34) eşitliğinde toplam alınarak,

$$S(e_i, e_i) = -2ng(e_i, e_i)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = -2n \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i)$$

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Önerme 4.32. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $P^* = 0$ ise R^* , M üzerinde Riemann eğrilik tensörü olmak üzere,

$$R^* = 0 \tag{4.36}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.31) de (4.34) kullanılırsa,

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\}$$

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n} \{S(Y, Z)X + 2ng(Y, Z)X - S(X, Z)Y - 2ng(X, Z)Y\}$$

ifadesinde (4.34) kullanılırsa,

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n} \{-2ng(Y, Z)X + 2ng(Y, Z)X + 2ng(X, Z)Y - 2ng(X, Z)Y\}$$

$$R^*(X, Y)Z = 0$$

olur ve dolayısıyla,

$$R^* = 0$$

elde edilir. Bu nedenle aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 4.8. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde projektif eğrilik tensörünün sıfır olması eğrilik tensörünün sıfır olmasına yol açar.

Önerme 4.33. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R ve S sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü ve Ricci tensörü, P^* ise M üzerinde projektif eğrilik tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\} \quad (4.37)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.30) da (4.4) ve (4.6) kullanılarak,

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

olduğundan,

$$- \frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X + 2ng(Y, Z)X - S(X, Z)Y - 2ng(X, Z)Y\}$$

$$= R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y - \frac{1}{2n}S(Y, Z)X$$

$$-g(Y, Z)X + \frac{1}{2n}S(X, Z)Y + g(X, Z)Y$$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\}$$

elde edilir.

Önerme 4.34. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde P^* projektif eğrilik tensörü, S^* Ricci tensörü olmak üzere $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için, $(P^*(X, Y).S^*)(Z, U) = 0$ eşitliği sağlanırsa,

$$S^*(P^*(X, Y)Z, U) + S^*(Z, P^*(X, Y)U) = 0 \quad (4.38)$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 4.35. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S^* ve P^* sırasıyla M üzerinde Ricci tensörü ve projektif eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (4.38) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa,

$$S^*(P^*(\xi, X)Y, Z) + S^*(Y, P^*(\xi, X)Z) = 0 \quad (4.39)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 4.36. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer $(P^*(X, Y).S^*)(Z, U) = 0$ ise S^* M üzerinde Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S^*(X, Y)\eta(Z) + S^*(X, Z)\eta(Y) = 0. \quad (4.40)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.37) eşitliği kullanılırsa,

$$P^*(\xi, Y)Z = \eta(Z)Y - g(Y, Z)\xi - \frac{1}{2n}\{S(Y, Z)\xi + 2n\eta(Z)Y\}$$

$$= \eta(Z)Y - g(Y, Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y$$

$$P^*(\xi, Y)Z = -g(Y, Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y, Z)\xi$$

olur ve dolayısıyla,

$$P^*(\xi, Y)U = -g(Y, U)\xi - \frac{1}{2n}S(Y, U)\xi$$

elde edilir.

Bu iki eşitlik (4.39) da yazılırsa,

$$S^*\left(-g(Y, Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y, Z)\xi, U\right) + S^*\left(Z, -g(Y, U)\xi - \frac{1}{2n}S(Y, U)\xi\right) = 0$$

$$-g(Y, Z)S^*(\xi, U) - \frac{1}{2n}S^*(S(Y, Z)\xi, U) - g(Y, U)S^*(Z, \xi) - \frac{1}{2n}S^*(Z, S(Y, U)\xi) = 0$$

$\xi = Y Z = U$ alınır,

$$-\eta(U)S^*(Y, Z) - \eta(Z)S^*(Y, U) - \frac{1}{2n}S^*(S(\xi, U)\xi, U) - \frac{1}{2n}S^*(U, S(\xi, U)\xi) = 0$$

olur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S^*(Y, Z)\eta(U) + S^*(Y, U)\eta(Z) = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.37. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer $(P^*(X, Y).S^*)(Z, U) = 0$ ise S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y)\eta(Z) + S(X, Z)\eta(Y) + 2n\{g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y)\} = 0 \quad (4.41)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (4.6) eşitliği (4.40) da kullanılırsa,

$$S^*(X, Y)\eta(Z) + S^*(X, Z)\eta(Y) = 0$$

$$\{S(X, Y) + 2ng(X, Y)\}\eta(Z) + \{S(X, Z) + 2ng(X, Z)\}\eta(Y) = 0$$

$$S(X, Y)\eta(Z) + S(X, Z)\eta(Y) + 2n\{g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y)\} = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.38. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer $(P^*(X, Y).S^*)(Z, U) = 0$ ise S ve r , sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü ve skalar eğrilik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = -2ng(X, Y) \quad (4.42)$$

ve

$$r = -2n(2n + 1) \quad (4.43)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.41) eşitliğinde $U = \xi$ alınıp X ve Y ye göre toplam alınırsa,

$$S(X, Y)\eta(\xi) + S(X, \xi)\eta(Y) + 2n\{g(X, Y)\eta(\xi) + g(X, \xi)\eta(Y)\} = 0$$

$$S(X, Y) + S(X, \xi)\eta(Y) + 2n\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} = 0$$

$$S(X, Y) - 2n\eta(X)\eta(Y) + 2n\{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} 2n\eta(e_i)\eta(e_i) + 2n \sum_{i=1}^{2n+1} \{g(e_i, e_i) + \eta(e_i)\eta(e_i)\} = 0$$

$$r - 2n + 2n(2n + 1) + 2n = 0$$

$$r = -2n(2n + 1)$$

olur ve

$$S(X, Y) - 2n + 2ng(X, Y) + 2n = 0$$

olduğundan,

$$S(X, Y) = -2ng(X, Y)$$

elde edilir.

Önerme 4.39. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. P^* , M üzerinde projektif eğrilik tensörü ve R Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $P^*S^* = 0$ ise,

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (4.44)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.30) eşitliğinde (4.43) yazılırsa,

$$P^*(X, Y)Z = R^*(X, Y)Z - \frac{1}{2n} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y\}$$

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$-\frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X + 2ng(Y, Z)X - S(X, Z)Y - 2ng(X, Z)Y\}$$

$$P^*(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$-\frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X + 2ng(Y, Z)X - S(X, Z)Y - 2ng(X, Z)Y\}$$

olur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} P^*(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\} \\ &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}\{-2ng(Y, Z)X + 2ng(X, Z)Y\} \\ &= R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.9. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M üzerinde P^* projektif eğrilik tensörü ve S^* Ricci tensörü, S ise Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $P^*S^* = 0$ olması için gerek ve yeter şart $S(X, Y) = -2ng(X, Y)$ olmasıdır. Üstelik eğer $P^* = 0$ ise $M, H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına izomorf olur.

Tanım 4.5. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R^* , S^* ve Q^* sırasıyla M üzerinde Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve Ricci operatörü olmak üzere, M üzerinde K^* conharmonic eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} K^*(X, Y)Z &= R^*(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1}\{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y \\ &\quad + g(Y, Z)Q^*X - g(X, Z)Q^*Y\} \end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Önerme 4.40. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R^* , S^* ve Q^* sırasıyla M üzerinde Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve Ricci operatörü olmak üzere, eğer M üzerinde $K^* = 0$ olursa, (4.45) eşitliğinden, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R^*(X, Y)Z = \frac{1}{2n-1} \{S^*(Y, Z)X - S^*(X, Z)Y + g(Y, Z)Q^*X - g(X, Z)Q^*Y\} \quad (4.46)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 4.41. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Conharmonic eğrilik tensörü $K^* = 0$ ise S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} &g(R(X, Y)Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\ &= \frac{1}{2n-1} [\{S(Y, Z) + 4ng(Y, Z)\}g(X, W) - \{S(X, Z) + 4ng(X, Z)\}g(Y, W) \\ &+ S(X, W)g(Y, Z) - S(Y, W)g(X, Z)] \end{aligned} \quad (4.47)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.4), (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.46) da kullanılıp eşitlik W ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{2n-1} \{S^*(Y, Z)g(X, W) - S^*(X, Z)g(Y, W) + g(Y, Z)S^*(X, W) \\ &\quad - g(X, Z)S^*(Y, W)\} \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
& R(X, Y, Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\
&= \frac{1}{2n-1} \{ (S(Y, Z) + 2ng(Y, Z))g(X, W) \\
&\quad - (S(X, Z) + 2ng(X, Z))g(Y, W) \\
&\quad + (S(X, W) + 2ng(X, W))g(Y, Z) \\
&\quad - (S(Y, W) + 2ng(Y, W))g(X, Z) \}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
& g(R(X, Y)Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\
&= \frac{1}{2n-1} [\{ S(Y, Z) + 4ng(Y, Z) \} g(X, W) - \{ S(X, Z) + 4ng(X, Z) \} g(Y, W) \\
&\quad + S(X, W)g(Y, Z) - S(Y, W)g(X, Z)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.42. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Conharmonic eğrilik tensörü $K^* = 0$ ise S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) - 2n\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\} = 0 \quad (4.48)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.47) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa,

$$g(R(X, Y)Z, \xi) + g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi)$$

$$= \frac{1}{2n-1} [\{S(Y, Z) + 4ng(Y, Z)\}g(X, \xi) - \{S(X, Z) + 4ng(X, Z)\}g(Y, \xi) \\ + S(X, \xi)g(Y, Z) - S(Y, \xi)g(X, Z)]$$

olarak bulunur ve bu eşitlik için (4.9) kullanılırsa,

$$g(X, Z)g(Y, \xi) - g(Y, Z)g(X, \xi) + g(Y, Z)g(X, \xi) - g(X, Z)g(Y, \xi) \\ = \frac{1}{2n-1} [S(Y, Z)\eta(X) + 4ng(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) \\ - 4ng(X, Z)\eta(Y) - 2n\eta(X)g(Y, Z) + 2n\eta(Y)g(X, Z)]$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$0 = \frac{1}{2n-1} [S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) + 2ng(Y, Z)\eta(X) - 2ng(X, Z)\eta(Y)] \\ S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) - 2n\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\} = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.43. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Conharmonic eğrilik tensörü $K^* = 0$ ise S Levi-Civita konneksiyonuna sahip Ricci tensörü olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z) \quad (4.49)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat: (4.48) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa,

$$S(Y, Z)\eta(\xi) - S(\xi, Z)\eta(Y) - 2n\{g(\xi, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(\xi)\} = 0$$

$$S(Y, Z) + 2n\eta(Z)\eta(Y) - 2n\{\eta(Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\} = 0$$

olarak bulunur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

elde edilir.

Önerme 4.44. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Conharmonic eğrilik tensörü $K^* = 0$ ise r Levi-Civita konneksiyonuna sahip bir skalar eğrilik olmak üzere,

$$r = -2n(2n + 1) \quad (4.50)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.49) eşitliğinde toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = -2n \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i)$$

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Önerme 4.45. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R^* , M üzerinde Riemann eğrilik tensörü olmak üzere conharmonic eğrilik tensörü $K^* = 0$ ise

$$R^* = 0 \quad (4.51)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$S(Y, Z) = -2ng(Y, Z)$$

olduğundan,

$$S^*(Y, Z) = S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)$$

$$S^*(Y, Z) = 0$$

ve

$$S^*(Y, Z) = g(Q^*Y, Z)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak (4.46) eşitliği W ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{2n-1} \{S^*(Y, Z)g(X, W) - S^*(X, Z)g(Y, W) \\ &\quad + g(Y, Z)g(Q^*X, W) - g(X, Z)g(Q^*Y, W)\} \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{2n-1} \{S^*(Y, Z)g(X, W) - S^*(X, Z)g(Y, W) \\ &\quad + g(Y, Z)S^*(X, W) - g(X, Z)S^*(Y, W)\} \end{aligned}$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$R^* = 0$$

elde edilir. Bu nedenle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.10. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip M üzerinde conharmonic eğrilik tensörünün sıfır olması halinde eğrilik tensörü sıfırdır.

5. SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDUNUN RİCCİ SOLİTONLARI

Tanım 5.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. ∇^* Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip L^* Lie türev operatörü, S^* Ricci tensörü olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M üzerinde Ricci soliton,

$$(L_V^* g)(X, Y) + 2S^*(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada g Riemann metrik, V vektör alanı, λ ise reel skaldır.

Ricci soliton eğer;

- $\lambda < 0$ ise büzüşen,
- $\lambda = 0$ ise durağan,
- $\lambda > 0$ ise genişleyen

olarak adlandırılır.

(4.3) ifadesinden, yapı vektör alanı ξ , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip paralel vektör alanı olduğundan (5.1) denkleminin ilk terimi olan $(L_V^* g)(X, Y) = 0$ olur. Dolayısıyla M bir Einstein manifolduna indirgenir. Bu durumda teorem (4.6) ve (4.9) daki sonuçlar geçerlidir.

V vektör alanının yapı vektör alanı ξ ile lineer bağımlı olması durumunda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve ∇^* Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip (g, V, λ) Ricci solitona sahip olsun. Eğer V vektör alanı ξ ile lineer bağımlı ise manifold η -Einstein manifoldtur ve Ricci soliton ise durağandır.

İspat : V vektör alanı ξ ile lineer bağımlı ve $b \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere $V = b\xi$ olsun.

(5.1) den,

$$\begin{aligned} &bg(\nabla_X^* \xi, Y) + (Xb)\eta(Y) + bg(X, \nabla_Y^* \xi) + (Yb)\eta(X) \\ &+ 2S^*(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

yazılabilir.

(5.2) de (4.3) ve (4.6) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &bg(0, Y) + (Xb)\eta(Y) + bg(X, 0) + (Yb)\eta(X) + 2\{S(X, Y) + 2ng(X, Y)\} \\ &+ 2\lambda g(X, Y) = 0 \\ &(Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\{2n + \lambda\}g(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilir. (5.3) eşitliğinde $Y = \xi$ alınıp (3.7) kullanılırsa,

$$(Xb)\eta(\xi) + (\xi b)\eta(X) + 2S(X, \xi) + 2\{2n + \lambda\}g(X, \xi) = 0$$

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) + 2(-2n\eta(X)) + 2\{2n + \lambda\}\eta(X) = 0$$

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) - 4n\eta(X) + 4n\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0$$

$$(Xb) + \eta(X)\{\xi b + 2\lambda\} = 0$$

$$(Xb) = -\{2\lambda + \xi b\}\eta(X) \quad (5.4)$$

olur. (5.4) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa,

$$(\xi b) = -\{2\lambda + \xi b\}\eta(\xi)$$

$$(\xi b) = -2\lambda - (\xi b)$$

$$2(\xi b) = -2\lambda$$

$$(\xi b) = -\lambda \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.4) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa,

$$(Xb) = -\lambda\eta(X) \tag{5.6}$$

bulunur. (5.6) eşitliğine d uygulanırsa,

$$\lambda d\eta = 0 \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.7) ifadesi için $d\eta \neq 0$ olduğundan,

$$\lambda = 0 \tag{5.8}$$

elde edilmiş olur.

(5.8) eşitliği (5.6) da kullanılırsa b nin bir sabit olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla (5.3) denkleminde,

$$-\lambda\eta(X)\eta(Y) - \lambda\eta(Y)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2(2n + \lambda)g(X, Y) = 0$$

$$-2\lambda\eta(X)\eta(Y) + 2S(X, Y) + 2(2n + \lambda)g(X, Y) = 0$$

$$S(X, Y) = -(2n + \lambda)g(X, Y) + \lambda\eta(X)\eta(Y)$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Neredeyse Kenmotsu manifoldlar üzerine hazırlanan bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Teorem. (M, ϕ, ξ, η, g) , Schouten-Van Kampen konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold ve ∇^* Schouten-Van Kampen konneksiyonuna göre (g, V, λ) Ricci solitona sahip olsun. Eğer V vektör alanı ξ ile linner bağımlı ise manifold η -Einstein manifoldtur ve Ricci soliton ise durağandır.

Teorem. Conccircular ϕ - tekrarlayan neredeyse Kenmotsu M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

Teorem. Pseudo- projektif ϕ - tekrarlayan neredeyse Kenmotsu M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

Teorem. Neredeyse Kenmotsu manifold üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip ϕ - tekrarlayan neredeyse Kenmotsu manifold yoktur.

Teorem. Neredeyse Kenmotsu M manifoldu üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip Ricci tekrarlayan neredeyse Kenmotsu manifold yoktur.

Teorem. Genelleştirilmiş ϕ - tekrarlayan neredeyse Kenmotsu M manifoldu için, p_1 ve p_2 (sırasıyla A ve B nin birim vektör alanları) ile birleştirilmiş A ve B 1-formları ile lineer bağımlıdır.

Benzer yapılar neredeyse Sasakian manifoldlar gibi diğer manifold türlerinde de incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] Bagewadi, C. S. and Ingalahalli, G., 2012, Ricci solitons in Lorentzian α -Sasakian manifolds. *Acta Mathematica. Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 28, 59–68.
- [2] Bejancu, A. and Farran, H. R., 2006, *Foliations and geometric structures*. Springer Science and Business Media, 580.
- [3] Blair, D. E., 2002, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Math. 203, Birkhauser Boston.
- [4] Blair, D. E., 2010, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Second Edition. Birkhauser, Boston, USA, 360 p.
- [5] Blair, D. E., 1976, *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 509.
- [6] Boothby, W. M. and Wang, H. C., 1958, On contact manifolds, *Ann. of Math.* 68 721–734.
- [7] Chen, B. Y., 1973, ‘Geometry of submanifolds’, Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York.
- [8] De, A., 2010, On Kenmotsu Manifold, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 2, 1-6.
- [9] De, U. C. and Matsuyama, Y., 2013, Ricci solitons and gradient Ricci solitons in a Kenmotsu manifolds. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 37, 691– 697.
- [10] De, U. C. and Shaikh, A. A., 2007, *Differential Geometry of manifolds*. Narosa Pub-lishing House, New Delhi.
- [11] De, U. C., ve Mondal, A.K., 2009, On 3-dimensional normal almost contact metric manifolds satisfying certain curvature conditions. *Commun. Korean. Math. Soc.*, 24, 265-275.
- [12] De, U. C., Yildiz, A. and Yaliniz, F., 2009, On ϕ –recurrent Kenmotsu manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 33, 17–25.
- [13] De, U. C., Yıldız, A., ve Yalınız, A.F., 2009, Locally ϕ –symmetric normal almost contact metric manifolds of dimension 3. *Appl. Math. Lett.*, 22, 723-727.
- [14] Deszcz, R., 1992, On pseudosymmetric spaces, *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A*, 44, 1–34.
- [15] Ehresmann, C., 1950, Sur les varietes presque complexes, *Proc. Int. Congr. Math.* Vol2, 412-419.
- [16] Erdem, S., 2002, On almost (para)contact (hyperbolic) metric manifolds and harmonicity of (ϕ, ϕ') –holomorphic maps between them. *Houston J. Math.*, 28, 21-45.

- [17] Erken, İ. K., 2015, On normal almost paracontact metric manifolds of dimension 3. *Facta Universitatis (NIS), Ser. Math. Inform.*, 30 (5) 777-788.
- [18] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., 2004, Riemann Geometry, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930.
- [19] Ghosh, G., 2018, On Schouten-van Kampen connection in Sasakian manifolds. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 36, 171–182.
- [20] Gonzalez, J. C. and Chinea, D., 1989, Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$, *Proc. Amer. Math.*, 105 173-184.
- [21] Halammanavar, N. G. and Devasandra, K. K. L., 2019, Kenmotsu manifolds admitting Schouten-van Kampen Connection. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 23-34.
- [22] Hamilton, R. S., 1988, The Ricci flow on surfaces. *Contemp. Math.*, 71, 237–261.
- [23] Heidari, N., Kashani, N. H. P., Najafi, B., 2017, Nearly Kaehler and Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turk J. Math.*, 201.
- [24] Ianus, S., 1971, Some almost product structures on manifolds with linear connection. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23, 305–310.
- [25] Ishii, Y., 1957, On conharmonic transformations, *Tensor N.S.*, 7, 73-80.
- [26] Janssens, D. and Vanhecke, L., 1981, Almost contact structures and curvature tensors, *Kodai Math. J.*, 4:1 1-27.
- [27] Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math-ematical Journal, Second Series*, 24, 93–103.
- [28] Küpeli Erken İ., Dacko P., Murathan C., 2015, On the Existence of Proper Nearly Kenmotsu Manifolds, *Mediterranean Journal of Mathematics Mathematics*, Vol. 37.
- [29] Küpeli Erken, İ., 2010, Paradeğme manifoldlar, Yüksek lisans tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.
- [30] Nagaraja, H. G. and Premalatha, C. R., 2012, Ricci solitons in f-Kenmotsu manifolds and 3-dimensional trans-Sasakian manifolds. *Progress in Applied Mathematics*, 3, 1–6.
- [31] Nagaraja, H. G. and Venu, K., 2016, Ricci Solitons in Kenmotsu manifolds. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 8, 29–36.
- [32] Nagaraja, H. G., Kiran Kumar, D. L. and Prasad, V. S., 2018, Ricci solitons on Kenmotsu manifolds under D-homothetic deformation, *Khayyam J. Math.*, 4, 102–109.

- [33] Najafi, B., Kashani, N. H., 2013, On Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 37.
- [34] Olszak, Z. and Rosca, R., 1991, Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, 39 315-323.,
- [35] Olszak, Z., 1989, Locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Colloq. Math.*, 57 73-87.
- [36] Olszak, Z., 1986, Normal almost contact metric manifolds of dimension three, *Ann. Polon. Math.*, XLVII, 41-50.
- [37] Olszak, Z., 1981, On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math*, 4(2) 239-250.
- [38] Olszak, Z., 2013, The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para) contact metric structure. *Publications de l'Institut Mathematique*, 94, 31–42.
- [39] Prakasha, D. G., Vanli, A. T., Bagewadi, C. S. and Patil, D. A., 2013, Some classes of Kenmotsu manifolds with respect to semi-symmetric metric connection. *Bull. Acta Mathematica Sinica, English Series*, 29, 1311–1322.
- [40] Pathak, G. and De, U. C., 2002, On a semi-symmetric connection in a Kenmotsu manifold. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 94, 319–324.
- [41] Pitiş, G., 2007, Geometry Of Kenmotsu Manifolds, Publishing House of Transilvania University of Braşov, Braşov.
- [42] Schouten, J. A. and Van Kampen, E. R., 1930, Zur Einbettungs-und Krmmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Mathematische Annalen*, 103, 752–783.
- [43] Sharma, R., 2008, Certain results on K-contact and (k, μ) –contact manifolds. *Journal of Geometry*, 89, 138–147.
- [44] Singh, G. P., Srivastava, S. K., 2016, On Einstein Nearly Kenmotsu Manifolds, *International Journal of Mathematics Research*, Volume 8, Number 1, 19-24.
- [45] Sinha, B. B. and Sharma, R., 1983, On para-A-Einstein manifolds. *Publications De L'Institut Mathematique. Nouvelle Serie*, 34, 211–215.
- [46] Spivak, M., 1965, Calculus on Manifolds, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193.
- [47] Sular, S., Ozgur, C. and De, U. C., 2008, Quarter-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold, *SUT Journal of mathematics*, 44, 297–306.
- [48] Szabo, Z. I., 1982, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y)R = 0$ the local version, *Diff. Geom.*, 17, 531-582.

- [49] Şahin, B., 2012, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [50] Tanno, S., 1969, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, *Tôhoku Math. J. 2.* 21-38.
- [51] Tolga, D., Cumali, E. and Ali, G., 2016, Ricci Solitons in f -Kenmotsu Manifolds with the semi-symmetric non-metric connection. *NTMSC*, 4, 276–284.
- [52] Yano, K. and Kon, M., 1984, *Structure on manifolds*, World Scientific.
- [53] Yano, K., 1940, Conircular geometry I. Conircular transformations. *Proceedings of the Imperial Academy*, 16, 195–200.
- [54] Yano, K., Kon, M., 1984, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp. Singapore.
- [55] Yildiz, A. 2017, f –Kenmotsu manifolds with the Schouten-van Kampen connection. *Publi. Inst. Math. (N. S)*, 102, 93–105.

