T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONOMİAL KATSAYILAR İLE TANIMLI VİETORİS SAYILARI VE UYGULAMALARI

Müzeyyen AKMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Kasım - 2024
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Müzeyyen AKMAN tarafından hazırlanan "*FİBONOMİAL KATSAYILAR İLE TANIMLI VİETORİS SAYILARI VE UYGULAMALARI*" adlı tez çalışması 11.11.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN	______________
Danışman	
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER	______________
Üye	
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU	______________

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../ .../20.. gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY

FBE Müdürü

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2211 Yurt İçi Lisansüstü burs programı ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Müzeyyen AKMAN
12.11.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONOMİAL KATSAYILAR İLE TANIMLI VİETORİS SAYILARI VE UYGULAMALARI

Müzeyyen AKMAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2024, 44 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Vietoris sayıları, topoloji alanında ortaya çıkan bir sayı dizisi olsa da son yıllarda cebir alanında da Vietoris sayıları ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmaların bazılarında Catalan sayıları ile ilişkisi, üreteç fonksiyonları ve matris gösterimleri elde edilmiştir.

Bu tezde, Vietoris sayıları Fibonomial katsayılar kullanılarak tanımlanmıştır. Elde edilen bu yeni sayı dizisi için bazı özdeşlikler ve rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, Fibo-Vietoris kuaterniyonları tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Catalan Sayıları, Fibonacci Sayıları, Fibonomial Katsayılar, Vietoris Sayıları, Kuaterniyonlar.

ABSTRACT

MS THESIS

VIETORIS NUMBERS VIA FIBONOMIAL COEFFICIENTS AND APPLICATIONS

Müzeyyen AKMAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTIN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2024, 44 Pages

Jury
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Although Vietoris numbers are an emerging concept in topology, there have been many studies of Vietoris numbers in algebra in recent years. In some of these studies, the relation to Catalan numbers, generating functions and matrix representations has been established.

In this work, Vietoris numbers are defined in terms of Fibonomial coefficients. Some identities and recurrence relations have been obtained for the new resulting sequence of numbers. Furthermore, Fibo-Vietoris quaternions are also defined and some of their properties are studied.

Keywords: Catalan Numbers, Fibonacci Numbers, Fibonomial Coefficients, Vietoris Numbers, Quaternions.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim üyesi, Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER'in yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım süresince çok değerli vakitlerini ayırıp; beni her aşamasında destekleyen, bilgileriyle çalışmama yön veren kıymetli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Süreç boyunca daima beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans egitimim boyunca 2210-Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu ile bana sagladığı destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkürü bir borç bilirim.

Müzeyyen AKMAN

KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
!	: Faktöriyel sembolü
v_n	: $n-$inci Vietoris sayısı
$\{v_n\}$	: Vietoris sayı dizisi
F_n	: $n-$inci Fibonacci sayısı
$\{F_n\}$	: Fibonacci sayı dizisi
L_n	: $n-$inci Lucas sayısı
$\{L_n\}$	: Lucas sayı dizisi
C_n	: $n-$inci Catalan sayısı
$C_{n,F}$	: $n-$inci Fibo-Catalan sayısı
$\binom{n}{k}_F$	: Fibonomial katsayı
V_n	: $n-$inci Fibo-Vietoris sayısı
$\mathbb{V}_n$	: $n-$inci Fibo-Vietoris kuaterniyonu

1. GİRİŞ

Avusturyalı bir matematikçi olan Leopold Vietoris'in topoloji ve cebirsel topoloji alanlarında önemli katkıları vardır. Cebirsel topolojinin önemli konularından birisi ise Vietoris teoremidir. Vietoris teoremi topolojik uzayların homojenliği hakkında önemli sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Bu nedenle cebirsel topolojideki katkılarının bir ifadesi olarak teoreme Leopold Vietoris'in adı verilmiştir. Vietoris dizisi, ilk kez 1958 yılında ünlü Vietoris teoremi ile ortaya çıkan bir rasyonel sayı dizisidir. Topoloji alanında ortaya çıksa da cebir ile olan ilişkisi keşfedildiğinden bu yana Vietoris sayı dizisine olan ilgi giderek artmıştır.

Literatürde sayı dizileri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğunluğu elemanları tam sayılar olan sayı dizileri ile ilgili olsa da elemanları rasyonel sayılar olan diziler ile ilgili de çalışmalar yapılmıştır. Tam sayı dizileri ile ilgili yapılan çalışmalar ve bu dizilerin özellikleri ayrıntılı olarak (Benjamin ve Plott, 2008; Dunlap, 1997; Gould, 1971; Koshy, 2001; Shapiro, 1976) kaynaklarından incelenebilir. Şimdi, rasyonel sayı dizisi olan Vietoris sayı dizisi ile ilgili yapılan çalışmaların bazılarını inceleyelim.

Sangal ve Swaminathan, özellikle analitik fonksiyonlardan tek değer fonksiyonlarının bazı geometrik özelliklerini, katsayıları Vietoris sayılarının genelleştirilmiş hali olan kosinüs ve sinüs toplamlarını kullanarak bulmayı amaçlamışlardır. Ayrıca, genelleştirilmiş Cesaro tipi polinomların geometrik özelliklerini incelemişlerdir (Sangal ve Swaminathan, 2017).

Cação ve arkadaşları, homojen hiperkompleks Appell polinomları hakkında yeni bilgiler vermeyi amaçlamışlardır. Bu sebeple Appell polinomlarını genelleştirilmiş hiperkompleks geometrik serisi şeklinde tanımlamışlardır. Appell polinomları ve Vietoris sayıları arasındaki ilişkiyi belirleyip üreteç fonksiyonunu elde etmişlerdir (Cação vd., 2018).

Genelleştirilmiş Vietoris sayı dizileri, matematiksel araştırmalarda kullanılan önemli bir araçtır ve çeşitli uygulama alanlarına sahiptir. Cação ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş Vietoris sayı dizileri için bir üreteç fonksiyonu verilmiş ve Catalan sayıları için bir rekürans bağıntısı elde edilmiştir (Cação vd., 2019).

Catarino ve Almeida, Vietoris sayı dizisinin özelliklerini incelemiş ve Catalan sayıları ile ilişkisini vermişlerdir. Ayrıca, bu sayı dizisini üreten özel matrisler vermişlerdir ve determinantı Vietoris sayıları olan matrisler üzerinde çalışmışlardır (Catarino ve Almeida, 2022).

Cação ve arkadaşları, trigonometrik toplamlar ve hiperkompleks yöntemlerle Vietoris sayı dizisinin genelleştirmelerini elde etmişlerdir. Bu genelleştirmeleri elde ederken Jacobi polinomlarını ve genelleştirilmiş Appell polinomlarını kullanmışlardır (Cação vd., 2023).

Gürses ve arkadaşları, bu çalışmalarında Vietoris sayı dizisinin bazı sayı dizileri ile arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Ayrıca determinantı Vietoris hibrit sayısının elemanlarını veren matrisleri incelemişlerdir (Gürses vd., 2024).

1915 yılında Fontene tek sayfalık bir bildiri ile binom katsayılarında doğal sayılar yerine reel ya da karmaşık sayılar kullanılmasını önermiştir. Araştırmacılar bu bildiri aracılığı ile Fontene'nin fikrini araştırmışlardır. Böylece genelleştirilmiş binomial katsayıların bir sınıfı olan Fibonomial katsayıları ortaya çıkmıştır. Bu katsayılar, olasılık teorisi, istatistik gibi birçok uygulama alanına sahiptir. Fibonomial katsayılar, hem Fibonacci hem de binomial katsayıların kombinasyonunu içeren matematiksel yapılar olarak karşımıza çıkmaktadır. Şimdi literatürde Fibonomial katsayılar ile ilgili çalışmaların bazılarını inceleyelim.

Trojovsky, Fibonomial katsayılar için Fibonacci sayılarının $k-$ıncı kuvvetlerinin üreteç fonksiyonu ile ilgili olan bazı yeni özdeşlikler elde etmiştir. $n > 3$ için elde ettiği özdeşliklerde, ilgili çarpımların bu değerler için genişletilmesinin karmaşık ve özdeşlikleri oluşturmak için son derece kapsamlı olacağını belirtmiştir (Trojovský, 2007).

Krot, Rota'nın $\psi-$genişletilmiş sonlu operatör hesaplaması olan Fibonomial analizin temel tanım ve teoremlerini vermiştir. Bunlardan bazıları birinci genişletme teoremi (First Expansion Theorem), İzomorfizm Teoremi, $F-$Lagrange ve $F-$Rodrigues formülleri şeklindedir (Krot, 2004b).

Kwansniewski, Fibonomial katsayıların kombinatoryal yorumlarından bahsetmiştir. Ayrıca Fibonomial olanlar da dahil olmak üzere, kümülatif bağlantı sabitlerine örnekler vermiştir (Kwasniewski, 2005).

Krot, Genişletilmiş Sonlu Operatör Hesabı'nın (FOC) özel bir durumu olan Sonlu Fibonomial Operatör Hesabı (FFOC) ile ilgili temel tanımları ve gösterimleri vermiştir. Ayrıca Kwansniewski'nin elde ettiği özellikleri kullanarak Fibonomial katsayıların kombinatoryal yorumlarını vermiştir (Krot, 2004a).

Pascal matrisleri, elemanları binom katsayıları tarafından oluşturulan sonsuz alt üçgen matrislerdir. Tuglu ve arkadaşları, elemanları Fibonomial katsayılar ile tanımlı Pascal matrislerinin Riordan gösterimlerini incelemişlerdir. Riordan gösterimini elde ederken bir problemle karşılaşmışlardır ve problemi çözmek için yeni bir ikili işlem tanımlamışlardır. Tanımlanan bu ikili işlemi kullanarak Riordan sıraları ile Fibonomial katsayılar arasında bir ilişki kurmuşlar ve bu tür Pascal matrislerinin bir F-Riordan çifti ile temsil edilebileceğini göstermişlerdir (Tuglu vd., 2014).

Benjamin ve Plott, Fibonomial katsayıları ve genelleştirmelerini açıklamak için kombinatoryal yöntem kullanmışlardır. Fibonomial katsayıların payı, her biri tam sayı olmak üzere paydasının bir katı olacak şekilde kademeli olarak tamsayıların toplamı şeklinde hesaplanmaktadır. Benjamin ve Plott bu iddiayı biraz değiştirerek, sonucu Fibonacci sayılarından keyfi Lucas dizilerine kadar genişletmişlerdir (Benjamin ve Plott, 2008).

Sagan ve Savage, binom katsayılarının Lucas dizileri ile ilgili olan bir benzerini tanımlamışlar ve özelliklerini incelemişlerdir (Sagan ve Savage, 2010).

Benjamin ve Reiland, Fibonomial katsayıların iki kombinatoryal özelliğini elde etmişlerdir (Benjamin ve Reiland, 2014).

Seibert ve Trojovský, Fibonomial katsayılar için yeni özdeşlikler elde etmişlerdir. Bu özdeşlikler Fibonacci sayılarının $k-$ıncı kuvvetinin üreteç fonksiyonuyla bağlantılıdır ve ispatlarında bu üreteç fonksiyonunu kullanmışlardır (Seibert ve Trojovský, 2005).

Gould, daha önce $q-$binom katsayıları için bulunan tüm sonuçları, Fontene-Ward binom katsayıları için en genel duruma genelleştirmiştir. Ayrıca, Fibonomial katsayılar için de geçerli sonuçlar elde etmiştir (Gould, 1969).

Marques ve Trojovský, Fibonomial katsayılar arasında çeşitli özdeşlikleri sağlatmışlar ve toplamlarını incelemişlerdir. İşaretli Fibonomial katsayılar için yeni bir özdeşlik bulmuşlardır (Marques ve Trojovský, 2014).

Hoggatt, binom katsayılarının tamsayı dizisi ile ilişkili olduğunu göstermiştir ve bu gösterimi Fibonacci dizisi kullanarak genelleştirmiştir. Genelleştirilmiş binomial katsayıların özel bir durumu olan Fibonomial katsayıları tanımlamıştır (Hoggatt Jr, 1967).

Alexanderson ve Klosinski, Gauss binom katsayılarının Fibonacci benzeri olan Fibonomial katsayıları tanıtmış ve özelliklerini incelemişlerdir (Alexanderson ve Klosinski, 1974).

Kuaterniyonlar, ilk defa Sir William Rowan Hamilton tarafından üç boyutlu sayı sistemi olarak tanımlanmıştır. Ancak bu haliyle tanımlanan küme çarpma işlemine göre kapalılık özelliğini sağlamadığından dört boyutlu sayı sistemi olarak tanımlanmıştır. Kuaterniyonlar matematikte ve çeşitli uygulamalı bilim dallarında önemli bir yere sahiptir. Üç boyutlu uzayda dönme işleminde kolaylık sağladığı için daha çok bilgisayar grafiklerinde ve uzay mekaniğinde kullanım alanı bulmuştur. Kuaterniyonlar ile ilgili genel tanım ve özelliklere (Ozdemir, 2020) ve (Horadam, 1993) kaynaklarından ulaşılabilir. Ayrıca, kuaterniyonların temel tanım ve özelliklerini kullanarak bazı özel sayı dizilerinin kuaterniyonları elde edilmiştir. Bu tanımlamalarda tam sayı ya da rasyonel sayı dizileri kullanılmıştır. Şimdi yapılan bu çalışmaların bazılarını verelim.

Iyer, Fibonacci ve Lucas sayıları ile Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki var olan ilişkilerin bir listesini vermiştir (Iyer, 1969).

Halici, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını ele almıştır. Bu kuaterniyonların üreteç fonksiyonlarını, Binet formüllerini vermiş ve bazı toplam formüllerini elde etmiştir (Halici, 2012).

Çimen ve İpek, Pell ve Pell-Lucas sayılarıyla tanımlı kuaterniyonları ele almışlardır. Ayrıca, bu kuaterniyonların toplam formüllerini ve Binet formüllerini elde etmişlerdir (Cimen ve İpek, 2016).

Catarino ve Vasco, $k-$Pell ve $k-$Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanımlamışlardır. Bu sayı dizisinin elemanları kullanılarak elde edilen sağ circulant, sol circulant ve tridiagonal matrisleri ele almışlardır. Bu matrislerin determinantının Pell, Pell-Lucas, $k-$Pell ve $k-$Pell-Lucas kuaterniyon dizisinin $n-$inci terimine eşit olduğunu göstermişlerdir (Catarino ve Vasco, 2018).

Cação ve arkadaşları, kuaterniyonların üreteçlerini içeren yeni bir özdeşlik ele almışlardır. Bu özdeşlik ile bir sayı dizisi elde etmişlerdir ve Vietoris'in adıyla da anılan teoremdeki katsayı dizisiyle aynı olduğunu göstermişlerdir. Böylelikle Vietoris sayı dizisinin dağınık görünen reel, kompleks ve hiperkompleks analiz konularını birleştirdiğini göstermişlerdir (Cação vd., 2017).

Mangueira ve arkadaşları, hybrid Leonardo kuaterniyonlarını araştırmışlardır. Bu dizinin, karakteristik denklemi, Fibonacci kuaterniyonları ile arasındaki ilişkisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve genelleştirmesi elde edilmiştir. Ayrıca, Leonardo'nun hybrid kuaterniyonlarını içeren özdeşlikler verilmiştir (Mangueira vd., 2022).

Catarino ve Almeida, bileşenleri Vietoris sayıları olan kuaterniyonları tanımlamışlar ve bazı özelliklerini ele almışlardır. Bu dizi için ikinci ve üçüncü dereceden rekürans bağıntılarını ve Binet formülünü elde etmişlerdir. Üreteç fonksiyonu tanımlayıp, bazı üç bant matrisler yardımı ile dizinin elemanlarını bulmuşlardır (Catarino ve Almeida, 2021).

Almeida ve Catarino, bu çalışmalarında, bileşenleri Vietoris sayıları olan bir eliptik biquaternionik dizi tanımlamışlar ve bazı özelliklerini ele almışlardır. Bu dizinin üreteç fonksiyonu ve bazı özdeşliklerini vermişlerdir (Almeida ve Catarino, 2023).

Şentürk, Vietoris'in genelleştirilmiş kuaterniyonik dizisini tanımlamıştır. Ayrıca bu dizinin Catalan ve Binet benzeri formülleri, üreteç fonksiyonu ve rekürans bağıntılarını elde etmiştir (Senturk, 2023).

Bu tezde, literatürde yapılan çalışmalar ışığında Fibonomial katsayılar kullanılarak Vietoris sayıları tanımlanmış ve kısaca Fibo-Vietoris sayısı olarak adlandırılmıştır. Tanımlanan bu sayıların özellikleri ve Fibo-Catalan sayıları ile arasındaki ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca, Fibo-Vietoris sayıları kullanılarak tanımlanan kuaterniyonların bazı özellikleri elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, Fibonacci, Lucas ve Vietoris sayı dizileri tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca Catalan sayıları ve Fibo-Catalan sayıları ile ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 *$n \geq 1$ için*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

rekürans bağıntısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlı $\{F_n\}$ dizisine Fibonacci sayı dizisi denir (Dunlap, 1997).

Fibonacci sayı dizisinin elemanları

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

dir (Dunlap, 1997).

Fibonacci dizisinin elemanlarının sağladığı bazı özellikler

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1} \tag{2.1}$$

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \tag{2.2}$$

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \tag{2.3}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{2.4}$$

$$F_n = F_{\frac{n+1}{2}}^2 + F_{\frac{n-1}{2}}^2 \tag{2.5}$$

dir (Koshy, 2001).

Tanım 2.2 $n \geq 1$

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

rekürans bağıntısı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan $\{L_n\}$ dizisine Lucas sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Lucas sayı dizisinin ilk birkaç elemanını

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots$$

şeklinde verebiliriz (Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{2.6}$$

$$5F_n = L_{n-1} L_{n+1} \tag{2.7}$$

$$L_n = F_{n-1} F_{n+1} \tag{2.8}$$

$$L_{m+n} = F_{m+1} L_n + F_m L_{n-1} \tag{2.9}$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{2.10}$$

özdeşlikleri vardır (Koshy, 2001; Benjamin ve Quinn, 1999).

Tanım 2.3 $n \geq k \geq 0$ *için*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara Binom katsayıları denir (Spivey, 2019).

Binom katsayılarının sağladığı bazı özellikler

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n-1 \geq k \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n \geq k \geq 0$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \quad n \geq m \geq k \geq 0$$

şeklindedir (Spivey, 2019).

Tanım 2.4 $n \geq 0$ *tam sayıları için* c_n *ile gösterilen ve*

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!}$$

şeklinde tanımlanan sayıya $n-$*inci Catalan sayısı denir (Gould, 1971).*

Tanım 2.5 $n \geq m \geq 1$ *için*

$$\binom{n}{m}_F = \frac{F_n!}{F_m! F_{n-m}!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara Fibonomial katsayılar denir (Trojovský, 2007).

Fibonomial katsayılarının sağladığı bazı özellikler

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n}{F_{n-k}}\binom{n-1}{k}_F \tag{2.11}$$

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F \tag{2.12}$$

$$\binom{n}{k}_F = F_{n-k+1}\binom{n-1}{k-1}_F + F_{k-1}\binom{n-1}{k} \tag{2.13}$$

dir (Benjamin ve Plott, 2008; Krot, 2004a).

Tanım 2.6 *$n \geq 0$ için $C_{n,F}$ ile gösterilen ve*

$$C_{n,F} = \frac{1}{F_{n+1}}\binom{2n}{n}_F = \frac{1}{F_{n+1}}\frac{F_{2n}!}{F_n!F_n!} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanan sayıya $n-$inci Fibo-Catalan sayısı denir (Shapiro, 1976).

Fibo-Catalan sayı dizisinin bir kaç elemanını

$$0, 1, 3, 20, 364, 136136, 2097018, 674740506, 568965009030, \ldots$$

şeklinde verebiliriz.

Teorem 2.1 *$C_{n,F}$, $n-$inci Fibo-Catalan sayısı olmak üzere*

$$C_{n,F} = \frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n}C_{n-1,F} \tag{2.15}$$

dir (Killpatrick, 2023).

İspat Fibo-Catalan sayısının tanımından

$$\begin{aligned} C_{n,F} &= \frac{1}{F_{n+1}}\binom{2n}{n}_F = \frac{1}{F_{n+1}}\frac{F_{2n}!}{F_n!F_n!} \\ &= \frac{1}{F_{n+1}}\frac{F_{2n}F_{2n-1}F_{2n-2}!}{F_nF_{n-1}!F_nF_{n-1}!} \\ &= \frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n}C_{n-1,F} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.7 *$k \geq 0$ için k-ıncı elemanı*

$$v_k = \frac{1}{2^k}\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanan diziye Vietoris sayı dizisi denir (Catarino ve Almeida, 2022).

Vietoris sayı dizisinin bir kaç elemanı

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \ldots$$

şeklindedir (Catarino ve Almeida, 2022).

Vietoris sayı dizisinin üreteç fonksiyonu $0 < |x| < 1$ için

$$g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} v_s x^s = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}$$

dir (Cação vd., 2019).

Teorem 2.2 *v_n ve c_n sırasıyla $n-$inci Vietoris ve Catalan sayıları olsun. $n \geq 0$ için*

$$v_{2n} = \frac{n+1}{2^{2n}} c_n$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Teorem 2.3 *v_n, $n-$inci Vietoris sayısı olsun. O zaman $n \geq 1$ için*

$$v_{2n} = \frac{2n-1}{2n} v_{2n-2}$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Teorem 2.4 *v_n ve c_n sırasıyla $n-$inci Vietoris ve Catalan sayıları olsun. O zaman*

$$v_n v_{n+2} - (v_n)^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}} v_n c_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \quad k \geq 0 \\ -\frac{1}{2^{n+2}} v_{n+1} c_{\frac{n+1}{2}}, & n = 2k-1, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Teorem 2.5 *v_n, $n-$inci Vietoris sayısı olmak üzere $n \geq 1$ için*

$$v_{n+2} v_{n-2} - (v_n)^2 = \begin{cases} \frac{2}{n(n+2)} v_n v_{n-2}, & n = 2k, \quad k \geq 1 \\ \frac{2}{(n+1)(n+3)} v_{n-1} v_{n+1}, & n = 2k-1, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Teorem 2.6 *v_n, $n-$inci Vietoris sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için*

$$v_{2n+2} = \frac{1}{4} v_{2n} + \frac{1}{4} v_{2n-1} + \frac{2n-1}{4(n+1)} v_{2n-2}$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Sonuç 2.1 *v_n, $n-$inci Vietoris sayısı olmak üzere $n \geq 1$ için*

$$v_{2n+2} = \frac{1}{2} v_{2n} + \frac{2n-1}{4(n+1)} v_{2n-2}$$

dir (Catarino ve Almeida, 2022).

Şimdi, kompleks sayıların genelleştirilmesi düşüncesiyle yola çıkılarak 1843 yılında Hamilton tarafından keşfedilen dört boyutlu bir sayı sistemi olan kuaterniyonların temel tanım ve özelliklerini verelim.

Tanım 2.8 *q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar olmak üzere $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde yazılan ve*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

eşitliklerini sağlayan sayılara kuaterniyon denir (Ozdemir, 2020).

Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonunun vektörel kısmı $v_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve skaler kısmı $s_q = q_0$ ile gösterilir. Yani her kuaterniyonu bir skaler ve bir vektörün toplamı olarak $q = s_q + v_q$ şeklinde yazabiliriz. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = s_q + v_q$ kuaterniyonunun eşleniği

$$\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k = s_q - v_q$$

şeklinde tanımlanır. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = s_q + v_q$ kuaterniyonunun normu ise

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

dir. Kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir ve bu kümenin elemanlarına da kuaterniyon denir. $\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesinde $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonları için toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\, i + (p_2 + q_2)\, j + (p_3 + q_3)\, k$$

ve

$$\begin{aligned} pq \quad = \quad & (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)\, i \\ & + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)\, j + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)\, k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Ozdemir, 2020).

$\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesi, tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur. Çarpma işlemine göre birim elemanı $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ dır. Ayrıca çarpma işlemine göre birleşme özelliği olup değişme özelliği mevcut değildir. Dolayısıyla $\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesi birimli ancak değişmeli olmayan bir halkadır ve kuaterniyonlar halkası olarak adlandırılır. $\mathbb{H}$ kuaterniyon halkasında sıfırdan farklı herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi tektir ve

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2} = \frac{q_0}{|q|^2} - \frac{q_1}{|q|^2} i - \frac{q_2}{|q|^2} j - \frac{q_3}{|q|^2} k$$

dir. Bu nedenle $\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesi aykırı cisim olarak da adlandırılır. Kuaterniyonların geometrik ilişkileri ve reküransları ile ilgili daha geniş bilgiye (Ozdemir, 2020; Horadam, 1993) kaynaklarından ulaşılabilir.

3. FİBO-VİETORİS SAYILARI

Bu bölümde, ilk olarak Fibonomial katsayılar kullanılarak Vietoris sayıları tanımlanacaktır. Bu sayılar Fibo-Vietoris sayıları olarak adlandırılacaktır. Daha sonra bu sayıların özellikleri ve Fibo-Catalan sayıları ile ilişkisi verilecektir.

Tanım 3.1 *$n = 0, 1, 2, \ldots$ için V_n ile gösterilen ve*

$$V_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}_F \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan sayıya $n-$inci Fibo-Vietoris sayısı denir.

$\{V_n\}_{n\geq 0}$ Fibo-Vietoris dizisinin elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
V_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{65}{32}$	$\frac{455}{64}$	$\frac{1547}{64}$	$\frac{17017}{128}$ ...

Teorem 3.1 *V_n, F_n ve $C_{n,F}$ sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris, Fibonacci ve Fibo-Catalan sayıları olmak üzere*

$$V_{2n} = \frac{F_{n+1}}{2^{2n}}C_{n,F} \tag{3.2}$$

ve

$$V_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}}{2^{2n+1}}C_{n,F} \tag{3.3}$$

dir.

İspat Fibo-Catalan sayısının tanımı ve (3.1) ifadesi kullanılırsa

$$V_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}_F = \frac{1}{2^{2n}}\frac{F_{n+1}}{F_{n+1}}\binom{2n}{n}_F = \frac{F_{n+1}}{2^{2n}}C_{n,F}$$

ve

$$\begin{aligned} V_{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n+1}{n}_F = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{F_{2n+1}!}{F_{n+1}!F_n!} \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{F_{2n+1}F_{2n}!}{F_{n+1}F_n!F_n!} = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{F_{2n+1}}{F_{n+1}}\binom{2n}{n}_F \\ &= \frac{F_{2n+1}}{2^{2n+1}}C_{n,F} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2 *V_n, $C_{n,F}$ ve F_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris, Fibo-Catalan ve Fibonacci sayıları olmak üzere*

$$V_{2n-1} = \frac{F_n F_{n+1}}{2^{2n-1} F_{2n}} C_{n,F} \tag{3.4}$$

dir.

İspat (3.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} V_{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n}_F = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{F_{2n-1}!}{F_n! F_{n-1}!} \\ &= \frac{F_{2n} F_{n+1} F_n}{F_{2n} F_{n+1} F_n} \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{F_{2n-1}!}{F_n! F_{n-1}!} \\ &= \frac{F_n F_{n+1}}{2^{2n-1} F_{2n}} \frac{F_{2n}!}{F_{n+1} F_n! F_n!} \end{aligned}$$

olur. (2.14) eşitliği kullanılarak

$$V_{2n-1} = \frac{F_n F_{n+1}}{2^{2n-1} F_{2n}} C_{n,F}$$

elde edilir.

Teorem 3.3 *V_n, $n-$inci Fibo-Vietoris sayısı ve F_n, $n-$inci Fibonacci sayısı olsun. O zaman*

$$V_{2n} = \frac{F_{2n} F_{2n-1}}{4(F_n)^2} V_{2n-2} \tag{3.5}$$

ve

$$V_{2n+1} = \frac{F_{2n} F_{2n+1}}{4 F_n F_{n+1}} V_{2n-1} \tag{3.6}$$

dir.

İspat V_{2n}, $(2n)-$inci Fibo-Vietoris sayısı ve $C_{n,F}$, $n-$ inci Fibo-Catalan sayısı olmak üzere (3.2) ifadesinden

$$C_{n,F} = \frac{2^{2n}}{F_{n+1}} V_{2n}$$

dir. Burada (2.15) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{2^{2n}}{F_{n+1}} V_{2n} = \frac{F_{2n} F_{2n-1}}{F_{n+1} F_n} C_{n-1,F}$$

olur. (3.2) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n} F_{2n-1}}{F_n} \frac{2^{2n-2}}{F_n} V_{2n-2} &= 2^{2n} V_{2n} \\ V_{2n} &= \frac{F_{2n} F_{2n-1}}{4(F_n)^2} V_{2n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca V_{2n+1}, $(2n+1)-$inci Fibo-Vietoris sayısı için (3.3) ifadesinden

$$C_{n,F} = \frac{2^{2n+1}}{F_{2n+1}} V_{2n+1}$$

dir. Burada (2.15) ifadesinden

$$\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n} C_{n-1,F} = \frac{2^{2n+1}}{F_{2n+1}} V_{2n+1}$$

olur. Bu eşitlikte (3.3) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n} \frac{2^{2n-1}}{F_{2n-1}} V_{2n-1} &= \frac{2^{2n+1}}{F_{2n+1}} V_{2n+1} \\ V_{2n+1} &= \frac{F_{2n}f_{2n+1}}{4F_nF_{n+1}} V_{2n-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 *V_n, F_n ve L_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris, Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere*

$$V_{2n} = \frac{F_{2n}}{2F_n} V_{2n-1} = \frac{L_n}{2} V_{2n-1} \tag{3.7}$$

$$V_{2n-1} = \frac{F_{2n-1}F_{2n-2}}{4F_nF_{n-1}} V_{2n-3} = \frac{F_{2n-1}L_{n-1}}{4F_n} V_{2n-3} \tag{3.8}$$

$$V_{2n+2} = \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2} V_{2n} \tag{3.9}$$

$$V_{2n+3} = \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}} V_{2n+1} \tag{3.10}$$

$$V_{2n-3} = \frac{2F_{n-1}}{F_{2n-2}} V_{2n-2} \tag{3.11}$$

$$V_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}} V_{2n} \tag{3.12}$$

$$V_{2n-1} = \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}} V_{2n} \tag{3.13}$$

İspat Fibo-Vietoris sayısının tanımından

$$V_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}_F = \frac{1}{2^{2n}}\frac{F_{2n}!}{F_n!F_n!}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{F_{2n}}{F_n}\frac{F_{2n-1}!}{F_n!F_{n-1}!}$$

$$= \frac{F_{2n}}{2F_n}V_{2n-1}$$

elde edilir. (2.6) ifadesinden

$$V_{2n} = \frac{L_nF_n}{2F_n}V_{2n-1} = \frac{L_n}{2}V_{2n-1}$$

olur. Benzer şekilde

$$V_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}_F = \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{F_{2n-1}!}{F_n!F_{n-1}!}$$

$$= \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^{2n-3}}\frac{F_{2n-1}F_{2n-2}}{F_nF_{n-1}}\frac{F_{2n-3}!}{F_{n-1}!F_{n-2}!}$$

$$= \frac{F_{2n-1}F_{2n-2}}{4F_nF_{n-1}}V_{2n-3}$$

olup, (2.6) ifadesi kullanılarak

$$V_{2n-1} = \frac{F_{2n-1}F_{n-1}L_{n-1}}{4F_nF_{n-1}}V_{2n-3} = \frac{F_{2n-1}L_{n-1}}{4F_n}V_{2n-3}$$

elde edilir. Fibo-Vietoris sayısının tanımı kullanılarak

$$V_{2n+2} = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}_F = \frac{1}{2^{2n+2}}\frac{F_{2n+2}!}{F_{n+1}!F_{n+1}!}$$

$$= \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}\frac{F_{2n}!}{2^{2n}F_n!F_n!} = \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}V_{2n},$$

$$V_{2n+3} = \frac{1}{2^{2n+3}}\binom{2n+3}{n+1}_F = \frac{1}{2^{2n+3}}\frac{F_{2n+3}!}{F_{n+1}!F_{n+2}!}$$

$$= \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}}\frac{F_{2n+1}!}{2^{2n+1}F_n!F_{n+1}!}$$

$$= \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}}V_{2n+1},$$

$$V_{2n-3} = \frac{1}{2^{2n-3}}\binom{2n-3}{n-1}_F = \frac{2F_{2n-2}F_{n-1}}{2F_{2n-2}F_{n-1}}\frac{1}{2^{2n-3}}\frac{F_{2n-3}!}{F_{n-1}!F_{n-2}!}$$

$$= \frac{2F_{n-1}F_{2n-2}!}{F_{2n-2}2^{2n-2}F_{n-1}!F_{n-1}!} = \frac{2F_{n-1}}{F_{2n-2}}V_{2n-2}$$

ve

$$V_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}_F = \frac{2F_{2n}F_n}{2F_{2n}F_n}\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{F_{2n-1}!}{F_n!F_{n-1}!}$$

$$= \frac{2F_nF_{2n}!}{F_{2n}2^{2n}F_n!F_n!} = \frac{2F_n}{F_{2n}}V_{2n}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.9) ve (3.11) ifadelerinden

$$V_{2(n+2)-3} = \frac{2F_{n+2-1}}{F_{2(n+2)-2}}V_{2(n+2)-2}$$

$$V_{2n+1} = \frac{2F_{n+1}}{F_{2n+2}}V_{2n+2}$$

$$V_{2n+1} = \frac{2F_{n+1}}{F_{2n+2}}\frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}V_{2n} = \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}$$

elde edilir.

Teorem 3.4 *V_n, $C_{n,F}$ ve F_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris, Fibo-Catalan ve Fibonacci sayıları olsun. O zaman*

$$V_nV_{n+2} - (V_n)^2 = \begin{cases} \frac{F_{n+2}F_{n+1}-4(F_{\frac{n+2}{2}})^2}{2^{n+2}F_{\frac{n+2}{2}}}V_nC_{\frac{n}{2},F}, & n = 2k, \quad k \geq 0 \\ \\ \frac{F_{n+2}F_{n+1}-4F_{\frac{n+3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}{2^{n+2}F_{n+1}}V_nC_{\frac{n+1}{2},F}, & n = 2k-1, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

dir.

İspat $n = 2k$ için (3.5) ifadesinden

$$V_nV_{n+2} - (V_n)^2 = V_{2k}V_{2k+2} - (V_{2k})^2 = V_{2k}(V_{2k+2} - V_{2k})$$

olur. (3.9) ifadesinden

$$V_{2k}\left(\frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2}V_{2k} - V_{2k}\right) = V_{2k}\left(\frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2} - 1\right)V_{2k}$$

dir. Son eşitlikte (3.2) ifadesi kullanılırsa

$$V_nV_{n+2}-(V_n)^2 = V_{2k}\left(\frac{F_{2k+2}F_{2k+1}-4F_{k+1}^2}{4F_{k+1}^2}\right)\frac{F_{k+1}}{2^{2k}}C_{k,F}$$

$$= \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}-4F_{k+1}^2}{2^{2k+2}F_{k+1}}V_{2k}C_{k,F}$$

$$= \frac{F_{n+2}F_{n+1}-4F_{\frac{n+2}{2}}^2}{2^{n+2}F_{\frac{n+2}{2}}}V_nC_{\frac{n}{2},F}$$

elde edilir. Benzer şekilde $n = 2k-1$ için (3.6) ifadesinden

$$V_nV_{n+2}-(V_n)^2 = V_{2k-1}V_{2k+1}-(V_{2k-1})^2 = V_{2k-1}(V_{2k+1}-V_{2k-1})$$

olur. Burada (3.12) ifadesi kullanılırsa

$$V_{2k-1}\left(\frac{F_{2k+1}F_{2k}}{4F_{k+1}F_k}V_{2k-1}-V_{2k-1}\right) = V_{2k-1}\left(\frac{F_{2k+1}F_{2k}}{4F_{k+1}F_k}-1\right)V_{2k-1}$$

dır. (3.4) eşitliği kullanılarak

$$V_nV_{n+2}-(V_n)^2 = V_{2k-1}\left(\frac{F_{2k+1}F_{2k}-4F_{k+1}F_k}{4F_{k+1}F_k}\right)\frac{F_{k+1}F_k}{2^{2k-1}F_{2k}}C_{k,F}$$

$$= \frac{F_{2k+1}F_{2k}-4F_{k+1}F_k}{2^{2k+1}F_{2k}}V_{2k-1}C_{k,F}$$

$$= \frac{F_{n+2}F_{n+1}-4F_{\frac{n+3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}{2^{n+2}F_{n+1}}V_nC_{\frac{n+1}{2},F}$$

elde edilir.

Örnek 3.1 $n = 4$ *için*

$$V_4V_6-V_4^2 = \left(\frac{F_6F_5-4F_3^2}{2^6F_3}\right)V_4C_{2.F} = \left(\frac{40-16}{128}\right)\frac{9}{8} = \frac{27}{128}$$

dir. Benzer şekilde $n = 3$ *için*

$$V_3V_5-V_3^2 = \left(\frac{F_5F_4-4F_3F_2}{2^5F_4}\right)V_3C_{2,F} = \left(\frac{15-8}{96}\right)\frac{3}{4} = \frac{7}{128}$$

dir.

Teorem 3.5 V_n, $n-$*inci Fibo-Vietoris sayısı ve* F_n, $n-$*inci Fibonacci sayısı ve* $k \geq 1$ *olmak üzere*

$$V_{n+2}V_{n-2}-(V_n)^2 = \begin{cases} \left(\frac{F_{n+2}F_{n+1}}{4F_{\frac{n+2}{2}}^2}-\frac{F_nF_{n-1}}{4F_{\frac{n}{2}}^2}\right)V_nV_{n-2}, & n = 2k \\ \\ \left(\frac{F_{n+2}F_{\frac{n-1}{2}}}{F_{\frac{n+3}{2}}F_{n-1}}-\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)V_{n+1}V_{n-1}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

dir.

İspat $n = 2k$ için

$$V_{n+2}V_{n-2} - (V_n)^2 = V_{2k+2}V_{2k-2} - (V_{2k})^2$$

olur. (3.9) ve (3.6) ifadeleri kullanılırsa

$$V_{2k+2}V_{2k-2} - (V_{2k})^2 = \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2}V_{2k}V_{2k-2} - \frac{F_{2k}F_{2k-1}}{4F_k^2}V_{2k}V_{2k-2}$$

$$= \left(\frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2} - \frac{F_{2k}F_{2k-1}}{4F_k^2}\right)V_{2k}V_{2k-2}$$

$$= \left(\frac{F_{n+2}F_{n+1}}{4F_{\frac{n+2}{2}}^2} - \frac{F_nF_{n-1}}{4F_{\frac{n}{2}}^2}\right)V_nV_{n-2}$$

elde edilir. Eğer $n = 2k - 1$ ise

$$V_{n+2}V_{n-2} - (V_n)^2 = V_{2k+1}V_{2k-3} - (V_{2k-1})^2$$

dir. (3.12) ifadesinden

$$V_{2n-1} = \frac{F_{2n-1}}{2F_n}V_{2n-2}$$

dir. Burada (3.11) ve (3.12) kullanılırsa

$$V_{2k+1}V_{2k-3} - (V_{2k-1})^2 = \frac{2F_{2k+1}F_{k-1}}{2F_{k+1}F_{2k-2}}V_{2k}V_{2k-2} - \frac{2F_{2k-1}F_k}{2F_{2k}F_k}V_{2k}V_{2k-2}$$

$$= \left(\frac{F_{2k+1}F_{k-1}}{F_{k+1}F_{2k-2}} - \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}\right)V_{2k}V_{2k-2}$$

$$= \left(\frac{F_{n+2}F_{\frac{n-1}{2}}}{F_{\frac{n+3}{2}}F_{n-1}} - \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)V_{n+1}V_{n-1}$$

elde edilir.

Örnek 3.2 $n = 6$ *için*

$$V_8V_4 - V_6^2 = \left(\frac{F_8F_7}{4F_4^2} - \frac{F_6F_5}{4F_3^2}\right)V_6V_4 = \left(\frac{273}{36} - \frac{40}{16}\right)\frac{45}{128} = \frac{915}{512}$$

dir. Benzer şekilde $n = 5$ *için*

$$V_7V_3 - V_5^2 = \left(\frac{F_7F_2}{F_4F_4} - \frac{F_5}{F_6}\right)V_6V_4 = \left(\frac{13}{9} - \frac{5}{8}\right)\frac{45}{128} = \frac{295}{1024}$$

dir.

Teorem 3.6 *k ve j negatif olmayan tam sayılar, V_n $n-$inci Fibo-Vietoris sayısı ve F_n, $n-$ inci Fibonacci sayısı olmak üzere*

$$V_lV_{n+1}-V_{l+1}V_n=\begin{cases}\left(\frac{F_{n+1}}{2F_{\frac{n+2}{2}}}-\frac{F_{l+1}}{2F_{\frac{l+2}{2}}}\right)V_lV_n, & l=2k, n=2j\\ \left(\frac{F_{n+1}F_n}{4F^2_{\frac{n+1}{2}}}-\frac{F_{l+1}F_n}{4F_{\frac{l+2}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}\right)V_lV_{n-1}, & l=2k, n=2j+1\\ \left(\frac{F_lF_{n+1}}{4F_{\frac{l+1}{2}}F_{\frac{n+2}{2}}}-\frac{F_{l+1}F_l}{4F^2_{\frac{l+1}{2}}}\right)V_{l-1}V_n, & l=2k+1, n=2j\\ \frac{F_lF_n}{8F_{\frac{l+1}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}\left(F_{\frac{n+3}{2}}+F_{\frac{n-1}{2}}-(F_{\frac{l+3}{2}}+F_{\frac{l-1}{2}})\right)V_{l-1}V_{n-1}, & l=2k+1, n=2j+1\end{cases}$$

dir.

İspat Eğer $l=2k, n=2j$ ise

$$V_lV_{n+1}-V_{l+1}V_n=V_{2k}V_{2j+1}-V_{2k+1}V_{2j}$$

dir. (3.12) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}V_lV_{n+1}-V_{l+1}V_n&=\frac{F_{2j+1}}{2F_{j+1}}V_{2k}V_{2j}-\frac{F_{2k+1}}{2F_{k+1}}V_{2k}V_{2j}\\&=\left(\frac{F_{2j+1}}{2F_{j+1}}-\frac{F_{2k+1}}{2F_{k+1}}\right)V_{2k}V_{2j}=\left(\frac{F_{n+1}}{2F_{\frac{n+2}{2}}}-\frac{F_{l+1}}{2F_{\frac{l+2}{2}}}\right)V_lV_n\end{aligned}$$

olur. Şimdi $l=2k, n=2j+1$ için

$$V_lV_{n+1}-V_{l+1}V_n=V_{2k}V_{2j+2}-V_{2k+1}V_{2j+1}$$

dir. (3.9) ve (3.12) ifadelerinden

$$\begin{aligned}V_lV_{n+1}-V_{l+1}V_n&=\frac{F_{2j+2}F_{2j+1}}{4F^2_{j+1}}V_{2k}V_{2j}-\frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{4F_{k+1}F_{j+1}}V_{2k}V_{2j}\\&=\left(\frac{F_{2j+2}F_{2j+1}}{4F^2_{j+1}}-\frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{4F_{k+1}F_{j+1}}\right)V_{2k}V_{2j}\\&=\left(\frac{F_{n+1}F_n}{4F^2_{\frac{n+1}{2}}}-\frac{F_{l+1}F_n}{4F_{\frac{l+2}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}\right)V_lV_{n-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $l=2k+1, n=2j$ ise

$$V_lV_{n+1} - V_{l+1}V_n = V_{2k+1}V_{2j+1} - V_{2k+2}V_{2j}$$

dir. Burada (3.9) ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} V_lV_{n+1} - V_{l+1}V_n &= \frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{4F_{k+1}F_{j+1}}V_{2k}V_{2j} - \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2}V_{2k}V_{2j} \\ &= \left(\frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{4F_{k+1}F_{j+1}} - \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}}{4F_{k+1}^2}\right)V_{2k}V_{2j} \\ &= \left(\frac{F_lF_{n+1}}{4F_{\frac{l+1}{2}}F_{\frac{n+2}{2}}} - \frac{F_{l+1}F_l}{4F_{\frac{l+1}{2}}^2}\right)V_{l-1}V_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $l = 2k+1, n = 2j+1$ için

$$V_lV_{n+1} - V_{l+1}V_n = V_{2k+1}V_{2j+2} - V_{2k+2}V_{2j+1}$$

dir. (3.9) ve (3.12) ifadelerinden

$$\begin{aligned} V_lV_{n+1} - V_{l+1}V_n &= \frac{F_{2k+1}F_{2j+2}F_{2j+1}}{8F_{k+1}F_{j+1}^2}V_{2k}V_{2j} - \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}F_{2j+1}}{8F_{k+1}^2F_{j+1}}V_{2k}V_{2j} \\ &= \left(\frac{F_{2k+1}F_{2j+2}F_{2j+1}}{8F_{k+1}F_{j+1}^2} - \frac{F_{2k+2}F_{2k+1}F_{2j+1}}{8F_{k+1}^2F_{j+1}}\right)V_{2k}V_{2j} \\ &= \frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{8F_{k+1}F_{j+1}}\left(\frac{F_{2j+2}}{F_{j+1}} - \frac{F_{2k+2}}{F_{k+1}}\right)V_{2k}V_{2j} \end{aligned}$$

olur. Burada (2.3) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} V_lV_{n+1} - V_{l+1}V_n &= \frac{F_{2k+1}F_{2j+1}}{8F_{k+1}F_{j+1}}\big(F_{j+2} + F_j - (F_{k+2} + F_k)\big)V_{2k}V_{2j} \\ &= \frac{F_lF_n}{8F_{\frac{l+1}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}\big(F_{\frac{n+3}{2}} + F_{\frac{n-1}{2}} - (F_{\frac{l+3}{2}} + F_{\frac{l-1}{2}})\big)V_{l-1}V_{n-1} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3 *$l = 2$ ve $n = 2$ için*

$$V_2V_3 - V_3V_2 = \left(\frac{F_3}{2F_2} - \frac{F_3}{2F_2}\right)V_2V_2 = \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{2}\right)\frac{1}{16} = 0$$

dir. Benzer şekilde $l = 2$ ve $n = 3$ için

$$V_2V_4 - V_3V_3 = \left(\frac{F_4F_3}{4F_2^2} - \frac{F_3F_3}{4F_2F_2}\right)V_2V_2 = \left(\frac{6}{4} - \frac{4}{4}\right)\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

olduğu görülür.

$l=5$ ve $n=2$ alınırsa

$$V_5V_3-V_6V_2=\left(\frac{F_5F_3}{4F_3F_2}-\frac{F_6F_5}{4F_3^2}\right)V_4V_2=\left(\frac{10}{8}-\frac{40}{16}\right)\frac{3}{32}=\frac{-15}{128}$$

dir. Son olarak $l=7$ ve $n=5$ için

$$\begin{aligned}V_7V_6-V_8V_5&=\frac{F_7F_5}{8F_4F_3}\big(F_4+F_2-(F_5+F_3)\big)V_6V_4\\&=\frac{65}{48}\left(4-7\right)\frac{45}{128}=\frac{-2925}{2048}\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.7 *V_n ve F_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris ve Fibonacci sayısı olmak üzere $n\geq 1$ için*

$$V_{2n+2}=\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{16F_{n+1}F_n}\big(F_{n+2}^2+F_n^2\big)V_{2n-2}+\frac{1}{4}(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1})V_{2n}$$

dir.

İspat (3.1) ve (2.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}V_{2n+2}&=\frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}_F=\frac{1}{2^{2n+2}}\left(F_{n+2}\binom{2n+1}{n}_F+F_n\binom{2n+1}{n+1}_F\right)\\&=\frac{1}{2^{2n+2}}\left(F_{n+2}\left(F_{n+2}\binom{2n}{n-1}_F+F_{n-1}\binom{2n}{n}_F\right)\right)\\&\quad+F_n\left(F_{n+1}\binom{2n}{n}_F+F_n\binom{2n}{n+1}_F\right)\\&=\frac{1}{2^{2n+2}}F_{n+2}^2\binom{2n}{n-1}_F+\frac{1}{2^{2n+2}}F_{n+2}F_{n-1}\binom{2n}{n}_F\\&\quad+\frac{1}{2^{2n+2}}F_nF_{n+1}\binom{2n}{n}_F+\frac{1}{2^{2n+2}}F_n^2\binom{2n}{n+1}_F\end{aligned}$$

olur. (2.12) ifadesinden

$$\begin{aligned}V_{2n+2}&=\frac{1}{2^{2n+2}}F_{n+2}^2\binom{2n}{n-1}_F+\frac{1}{2^{2n+2}}F_n^2\binom{2n}{n-1}_F\\&\quad+\frac{1}{4}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}_F\left(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (2.11) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}V_{2n+2}&=\frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n-1}{n-1}_F\frac{F_{2n}}{F_{n+1}}\big(F_{n+2}^2+F_n^2\big)+\frac{1}{4}(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1})V_{2n}\\&=\frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n-2}{n-1}_F\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n}\big(F_{n+2}^2+F_n^2\big)+\frac{1}{4}(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1})V_{2n}\end{aligned}$$

$$V_{2n+2} = \frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}_F \frac{1}{16}\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{F_{n+1}F_n}\left(F_{n+2}^2+F_n^2\right)+\frac{1}{4}(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1})V_{2n}$$

$$= \frac{F_{2n}F_{2n-1}}{16F_{n+1}F_n}\left(F_{n+2}^2+F_n^2\right)V_{2n-2}+\frac{1}{4}(F_{n+2}F_{n-1}+F_nF_{n+1})V_{2n}$$

olur.

Örnek 3.4 $n = 2$ *için*

$$V_6 = \frac{F_4F_3}{16F_3F_2}\left(F_4^2+F_2^2\right)V_2+\frac{1}{4}\left(F_4F_1+F_2F_3\right)V_4$$

$$= \frac{6}{32}\left(9+1\right)+\frac{1}{4}\left(3+2\right)\frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

olduğu açıktır.

Şimdi, Fibonacci sayıları için verilen Cassini özdeşliğine benzer bir özdeşliği Fibo-Vietoris sayıları için verelim.

Teorem 3.8 V_n *ve* F_n *sırasıyla* $n-$*inci Fibo-Vietoris ve Fibonacci sayısı olmak üzere* $n \geq 1$ *için*

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{F_{n+1}+(-1)^{\frac{n}{2}}}V_n^2, & n = 2k \\ \frac{F_{n-1}}{F_n}V_n^2, & n = 2k+1 \end{cases}$$

dir.

İspat $n = 2k$ için (3.8) ve (3.12) kullanılırsa

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = V_{2k-1}V_{2k+1} - V_{2k}^2$$

$$= \frac{2F_kF_{2k+1}}{2F_{2k}F_{k+1}}V_{2k}^2 - V_{2k}^2$$

$$= \left(\frac{F_kF_{2k+1}}{F_{2k}F_{k+1}} - 1\right)V_{2k}^2$$

olur. (2.3) eşitliğinden

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = \left(\frac{F_kF_{2k+1}}{F_k(F_{k+1}+F_{k-1})F_{k+1}} - 1\right)V_{2k}^2$$

$$= \left(\frac{F_{2k+1}}{F_{k+1}^2+F_{k-1}F_{k+1}} - 1\right)V_{2k}^2$$

elde edilir. (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 &= \left(\frac{F_{k+1}^2 + F_k^2}{F_{k+1}^2 + (-1)^k + F_k^2} - 1 \right) V_{2k}^2 \\ &= \left(\frac{F_{k+1}^2 + F_k^2 - F_{k+1}^2 - (-1)^k - F_k^2}{F_{k+1}^2 + (-1)^k + F_k^2} \right) V_{2k}^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{F_{k+1}^2 + (-1)^k + F_k^2} V_{2k}^2 = \frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{F_{n+1} + (-1)^{\frac{n}{2}}} V_n^2 \end{aligned}$$

olur. Eğer $n = 2k+1$ ise

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = V_{2k}V_{2k+2} - V_{2k+1}^2$$

dir. (3.9) ve (3.12) ifadelerinden

$$\begin{aligned} V_{2k}V_{2k+2} - V_{2k+1}^2 &= \frac{2F_{k+1}F_{2k+2}}{2F_{2k+1}F_{k+1}} V_{2k+1}^2 - V_{2k+1}^2 \\ &= \left(\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}} - 1 \right) V_{2k+1}^2 \\ &= \frac{F_{2k+2} - F_{2k+1}}{F_{2k+1}} V_{2k+1}^2 \end{aligned}$$

olur. Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısından

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} V_{2k+1} = \frac{F_{n-1}}{F_n} V_n^2$$

elde edilir.

Örnek 3.5 $n = 4$ *için*

$$V_3V_5 - V_4^2 = \frac{(-1)^3}{F_5 + (-1)^2} V_4^2 = \frac{-1}{5+1} \left(\frac{3}{8} \right)^2 = \frac{-3}{128}$$

dir. Benzer şekilde $n = 5$ *için*

$$V_4V_6 - V_5^2 = \frac{F_4}{F_5} V_5^2 = \frac{3}{5} \left(\frac{15}{32} \right)^2 = \frac{135}{1024}$$

olur.

Teorem 3.9 m *ve* n *pozitif tam sayılar olmak üzere*

$$V_{m+n+1} = \begin{cases} \frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}} V_{m+n}, & m = 2k, n = 2l \\ \frac{\left(F_{\frac{m+n+3}{2}} + F_{\frac{m+n-1}{2}} \right) F_{m+n}}{4F_{\frac{m+n+1}{2}}} V_{m+n-1}, & m = 2k+1, n = 2l \\ \frac{\left(F_{\frac{m+n+3}{2}} + F_{\frac{m+n-1}{2}} \right) F_{m+n}}{4F_{\frac{m+n+1}{2}}} V_{m+n-1}, & m = 2k, n = 2l+1 \\ \frac{F_{m+n+1}F_{m+n}F_{m+n-1}}{8F_{\frac{m+n}{2}}^2} V_{m+n-2}, & m = 2k+1, n = 2l+1 \end{cases}$$

dir.

İspat (3.1) ifadesinden

$$V_{m+n+1}=\frac{1}{2^{m+n+1}}\binom{m+n+1}{\lfloor\frac{m+n+1}{2}\rfloor}_F$$

elde edilir. Son eşitlikte $m=2k$, $n=2l$ için

$$\begin{aligned}V_{2k+2l+1}&=\frac{1}{2^{2k+2l+1}}\binom{2k+2l+1}{k+l}_F\\&=\frac{F_{2k+2l+1}}{2F_{k+l+1}}\frac{1}{2^{2k+2l}}\frac{F_{2k+2l}!}{F_{k+l}!F_{k+l}!}\\&=\frac{F_{2k+2l+1}}{2F_{k+l+1}}V_{2k+2l}=\frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}}V_{m+n}\end{aligned}$$

olur. Eğer $m=2k+1, n=2l$ ise

$$\begin{aligned}V_{2k+2l+2}&=\frac{1}{2^{2k+2l+2}}\binom{2k+2l+2}{k+l+1}_F\\&=\frac{F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}\frac{1}{2^{2k+2l}}\frac{F_{2k+2l}!}{F_{k+l}!F_{k+l}!}\\&=\frac{F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}V_{2k+2l}\end{aligned}$$

elde edilir. (2.3) ifadesinden

$$\begin{aligned}&=\frac{F_{k+l+1}\big(F_{k+l+2}+F_{k+l}\big)F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}V_{2k+2l}\\&=\frac{\big(F_{k+l+2}+F_{k+l}\big)F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}}V_{2k+2l}\\&=\frac{\big(F_{\frac{m+n+3}{2}}+F_{\frac{m+n-1}{2}}\big)F_{m+n}}{4F_{\frac{m+n+1}{2}}}V_{m+n-1}\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $m=2k, n=2l+1$ için

$$\begin{aligned}V_{2k+2l+2}&=\frac{1}{2^{2k+2l+2}}\binom{2k+2l+2}{k+l+1}_F\\&=\frac{F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}\frac{1}{2^{2k+2l}}\frac{F_{2k+2l}!}{F_{k+l}!F_{k+l}!}\\&=\frac{F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}V_{2k+2l}\end{aligned}$$

dir. (2.3) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
V_{2k+2l+2} &= \frac{F_{k+l+1}\big(F_{k+l+2}+F_{k+l}\big)F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}^2}V_{2k+2l}\\
&= \frac{\big(F_{k+l+2}+F_{k+l}\big)F_{2k+2l+1}}{4F_{k+l+1}}V_{2k+2l}\\
&= \frac{\big(F_{\frac{m+n+3}{2}}+F_{\frac{m+n-1}{2}}\big)F_{m+n}}{4F_{\frac{m+n+1}{2}}}V_{m+n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Son olarak $m = 2k+1$, $n = 2l+1$ için

$$
\begin{aligned}
V_{2k+2l+3} &= \frac{1}{2^{2k+2l+3}}\binom{2k+2l+3}{k+l+1}_F\\
&= \frac{F_{2k+2l+3}F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{8F_{k+l+1}^2}\frac{1}{2^{2k+2l}}\frac{F_{2k+2l}!}{F_{k+l}!F_{k+l}!}\\
&= \frac{F_{2k+2l+3}F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+1}}{8F_{k+l+1}^2}V_{2k+2l}\\
&= \frac{F_{m+n+1}F_{m+n}F_{m+n-1}}{8F_{\frac{m+n}{2}}^2}V_{m+n-2}
\end{aligned}
$$

dir.

Örnek 3.6 $m = 2$ *ve* $n = 2$ *için*

$$V_5 = \frac{F_5}{2F_3}V_4 = \frac{15}{32}$$

olduğu görülür. Eğer $m = 3$ *ve* $n = 2$ *ise*

$$V_6 = \frac{(F_4+F_2)F_5}{4F_3}V_4 = \frac{15}{16}$$

dır. Benzer şekilde $m = 4$ *ve* $n = 3$ *alınırsa*

$$V_8 = \frac{(F_5+F_3)F_7}{4F_4}V_6 = \frac{455}{64}$$

olduğu açıktır. Son olarak $m = 1$ *ve* $n = 1$ *için*

$$V_3 = \frac{F_3F_2F_1}{8F_1^2}V_0 = \frac{1}{4}$$

dir.

4. FİBO-VİETORİS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde, Fibo-Vietoris sayıları kullanılarak tanımlanan kuaterniyonlar göz önüne alınacaktır. Ayrıca, Fibo-Vietoris kuaterniyonlarının sağladığı bazı özdeşlikler elde edilecektir.

Tanım 4.1 *V_n, $n-$inci Fibo-Vietoris sayısı olmak üzere*

$$\mathbb{V}_n = V_n + V_{n+1}i + V_{n+2}j + V_{n+3}k \tag{4.1}$$

sayısına $n-$inci Fibo-Vietoris kuaterniyonu denir.

İlk bir kaç Fibo-Vietoris kuaterniyonları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

n	$\mathbb{V}_n$
0	$1 + \frac{1}{2}i + j\frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k$
1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{3}{8}k$
2	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{3}{8}j + \frac{15}{32}k$
3	$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i + \frac{15}{32}j + \frac{15}{16}k$
$\vdots$	$\vdots$

Teorem 4.1 *$C_{n,F}$, $\mathbb{V}_n$, F_n ve L_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Catalan, Fibo-Vietoris kuaterniyonu, Fibonacci ve Lucas sayısı olsun. O zaman*

$$\mathbb{V}_{2n} = \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}F_{2n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{n+1}}{2^{2n}}C_{n,F}$$

ve

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(1 + \frac{L_{n+1}}{2}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+2}}j + \frac{L_{n+2}L_{n+1}F_{2n+3}}{8F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}}{2^{2n+1}}C_{n,F}$$

dir.

İspat Fibo-Vietoris kuaterniyonlarının tanımında n için

$$\mathbb{V}_{2n} = V_{2n} + V_{2n+1}i + V_{2n+2}j + V_{2n+3}k$$

olur. (3.9), (3.10) ve (3.12) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{2n} &= V_{2n} + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}i + \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}V_{2n}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}kV_{2n} \\ &= \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}k\right)V_{2n}\end{aligned}$$

olur. Burada (2.6) ifadesi kullanılarak

$$\mathbb{V}_{2n} = \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}j + \frac{F_{2n+3}L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}k\right)V_{2n}$$

$$= \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}L_{n+1}F_{2n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)V_{2n}$$

elde edilir. Son olarak (3.2) göz önüne alınırsa

$$\mathbb{V}_{2n} = \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}F_{2n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{n+1}}{2^{2n}}C_{n,F}$$

olur. (4.1) ifadesinden

$$\mathbb{V}_{2n+1} = V_{2n+1} + V_{2n+2}i + V_{2n+3}j + V_{2n+4}k$$

olur. (3.9), (3.10) ve (3.12) ifadeleri kulanılarak

$$\mathbb{V}_{2n+1} = V_{2n+1} + \frac{F_{2n+2}}{2F_{n+1}}V_{2n+1}i + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}}V_{2n+1}j + \frac{F_{2n+4}F_{2n+3}F_{2n+2}}{8F_{n+1}F_{n+2}^2}V_{2n+1}k$$

$$= \left(1 + \frac{F_{2n+2}}{2F_{n+1}}i + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}}j + \frac{F_{2n+4}F_{2n+3}F_{2n+2}}{8F_{n+1}F_{n+2}^2}k\right)V_{2n+1}$$

elde edilir. Burada (2.6) ifadesinden

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(1 + \frac{F_{n+1}L_{n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+1}F_{n+2}}j + \frac{F_{2n+3}L_{n+2}F_{n+2}L_{n+1}F_{n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}^2}k\right)V_{2n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{L_{n+1}}{2}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+2}}j + \frac{F_{2n+3}L_{n+2}L_{n+1}}{8F_{n+2}}k\right)V_{2n+1}$$

olur. Son olarak (3.3) kullanılırsa

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(1 + \frac{L_{n+1}}{2}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+2}}j + \frac{L_{n+2}L_{n+1}F_{2n+3}}{8F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}}{2^{2n+1}}C_{n,F}$$

elde edilir.

Örnek 4.1 $n = 2$ *için*

$$\mathbb{V}_4 = \left(1 + \frac{F_5}{2F_3}i + \frac{L_3F_5}{4F_3}j + \frac{L_3F_5F_7}{8F_3F_4}k\right)\frac{F_3}{2^4}C_{4,F}$$

$$= \left(1 + \frac{5}{4}i + \frac{20}{8}j + \frac{260}{48}k\right)\left(\frac{728}{16}\right)$$

$$= \frac{91}{2} + \frac{455}{8}i + \frac{455}{4}j + \frac{5915}{24}k$$

dir. Benzer şekilde $n = 1$ *için*

$$\mathbb{V}_3 = \left(1 + \frac{L_2}{2}i + \frac{L_2F_5}{4F_3}j + \frac{L_3L_2F_5}{8F_3}k\right)\frac{F_3}{2^3}C_{1,F}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2}i + \frac{15}{8}j + \frac{60}{16}k\right)\frac{2}{8}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}i + \frac{15}{32}j + \frac{15}{16}k$$

dir.

Teorem 4.2 *$\mathbb{V}_n$, F_n ve L_n sırasıyla $n-$inci Fibo-Vietoris kuaterniyonu, Fibonacci ve Lucas sayısı olsun. O zaman*

$$\mathbb{V}_{2n} = \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+1}L_{n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{4F_n^2}V_{2n-2}$$

ve

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(1 + \frac{L_{n+1}}{2}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+2}}j + \frac{F_{2n+3}L_{n+2}L_{n+1}}{8F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}L_n}{2F_{n+1}}V_{2n-1}$$

dir.

İspat (4.1) ifadesinden

$$\mathbb{V}_{2n} = V_{2n} + V_{2n+1}i + V_{2n+2}j + V_{2n+3}k$$

olur. (3.9), (3.10) ve (3.12) ifadeleri kullanılarak

$$\mathbb{V}_{2n} = V_{2n} + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}i + \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}V_{2n}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}V_{2n}k$$
$$= V_{2n} + \left(i + \frac{F_{2n+2}}{2F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+2}}{4F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}$$

elde edilir. (2.6) ifadesinden

$$\mathbb{V}_{2n} = V_{2n} + \left(i + \frac{F_{n+1}L_{n+1}}{2F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}F_{n+1}L_{n+1}}{4F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}$$
$$= \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+1}L_{n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)V_{2n}$$

olur. Burada (3.5) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbb{V}_{2n} = \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}i + \frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}j + \frac{F_{2n+3}F_{2n+1}L_{n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n}F_{2n-1}}{4F_n^2}V_{2n-2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Fibo-Vietoris kuaterniyonunun tanımından

$$\mathbb{V}_{2n+1} = V_{2n+1} + V_{2n+2}i + V_{2n+3}j + V_{2n+4}k$$

olur. (3.9), (3.10) ve (3.12) ifadeleri kullanılarak

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}V_{2n}+\frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}V_{2n}i+\frac{F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}V_{2n}j+\frac{F_{2n+4}F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{16F_{n+1}^2F_{n+2}^2}V_{2n}k$$

$$= \left(\frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}+\frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}i+\frac{F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}j+\frac{F_{2n+4}F_{2n+3}F_{2n+2}F_{2n+1}}{16F_{n+1}^2F_{n+2}^2}k\right)V_{2n}$$

elde edilir. Daha sonra (2.6) ifadesinden

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(\frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}+\frac{L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}^2}i+\frac{F_{2n+3}L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+1}}{8F_{n+1}^2F_{n+2}}j+\frac{L_{n+2}F_{n+2}F_{2n+3}L_{n+1}F_{n+1}F_{2n+1}}{16F_{n+1}^2F_{n+2}^2}k\right)V_{2n}$$

$$= \left(\frac{F_{2n+1}}{2F_{n+1}}+\frac{L_{n+1}F_{2n+1}}{4F_{n+1}}i+\frac{F_{2n+3}L_{n+1}F_{2n+1}}{8F_{n+1}F_{n+2}}j+\frac{L_{n+2}F_{2n+3}L_{n+1}F_{2n+1}}{16F_{n+1}F_{n+2}}k\right)V_{2n}$$

olur. Son olarak (3.6) kullanılırsa

$$\mathbb{V}_{2n+1} = \left(1+\frac{L_{n+1}}{2}i+\frac{L_{n+1}F_{2n+3}}{4F_{n+2}}j+\frac{L_{n+2}L_{n+1}F_{2n+3}}{8F_{n+2}}k\right)\frac{F_{2n+1}L_n}{2F_{n+1}}V_{2n-1}$$

elde edilir.

Örnek 4.2 $n = 1$ *için*

$$\mathbb{V}_2 = \left(1+\frac{F_3}{2F_2}i+\frac{L_2F_3}{4F_2}j+\frac{F_5F_3L_2}{8F_2F_3}k\right)\frac{F_2F_1}{4F_1^2}V_0$$

$$= \left(1+\frac{2}{2}i+\frac{6}{4}j+\frac{30}{16}k\right)\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i+\frac{3}{8}j+\frac{15}{32}k$$

dir. Benzer şekilde $n = 2$ *için*

$$\mathbb{V}_5 = \left(1+\frac{L_3}{2}i+\frac{L_3F_7}{4F_4}j+\frac{F_7L_4L_3}{8F_4}k\right)\frac{F_5L_2}{2F_3}V_3$$

$$= \left(1+\frac{4}{2}i+\frac{52}{12}j+\frac{364}{24}k\right)\frac{15}{16}$$

$$= \frac{15}{16}+\frac{15}{8}i+\frac{65}{16}j+\frac{1365}{96}k$$

dir.

Teorem 4.3 *$\mathbb{V}_{m+n+1}$, $(m+n+1)-$inci Fibo-Vietoris kuaterniyonu olsun. Eğer m ve n pozitif çift tam sayılar olmak üzere*

$$\mathbb{V}_{m+n+1} = \left(\frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}} + \frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}}{4F_{\frac{m+n+2}{2}}}i + \frac{F_{m+n+3}F_{m+n+1}L_{\frac{m+n+2}{2}}}{8F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}j\right.$$
$$\left.+\frac{F_{m+n+3}F_{m+n+1}L_{\frac{m+n+2}{2}}L_{\frac{m+n+4}{2}}}{16F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}k\right)V_{m+n}$$

dir. m ve n pozitif tek tam sayılar ise

$$\mathbb{V}_{m+n+1} = \left(1 + i\frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}} + j\frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}}{4F_{\frac{m+n+2}{2}}} + k\frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}F_{m+n+3}}{8F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}\right)V_{m+n}$$

dir.

İspat Fibo-Vietoris kuaterniyonlarının tanımından

$$\mathbb{V}_{m+n+1} = V_{m+n+1} + V_{m+n+2}i + V_{m+n+3}j + V_{m+n+4}k$$

dir. Eğer m ve n pozitif çift tam sayılar yani $m = 2k$ ve $n = 2l$ ise

$$\mathbb{V}_{2k+2l+1} = V_{2k+2l+1} + V_{2k+2l+2}i + V_{2k+2l+3}j + V_{2k+2l+4}k$$

elde edilir. (3.9) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\mathbb{V}_{2k+2l+1} = \frac{F_{2k+2l+1}}{2F_{k+l+1}}V_{2k+2l} + \frac{F_{2k+2l+1}F_{2k+2l+2}}{4F^2_{k+l+1}}V_{2k+2l}i + \frac{F_{2k+2l+1}F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+3}}{8F^2_{k+l+1}F_{k+l+2}}V_{2k+2l}j$$
$$+\frac{F_{2k+2l+1}F_{2k+2l+2}F_{2k+2l+3}F_{2k+2l+4}}{16F^2_{k+l+1}F^2_{k+l+2}}V_{2k+2l}k$$

olur. Burada (2.6) ifadesi kullanılırsa

$$\mathbb{V}_{2k+2l+1} = \left(\frac{F_{2k+2l+1}}{2F_{k+l+1}} + \frac{F_{2k+2l+1}F_{k+l+1}L_{k+l+1}}{4F^2_{k+l+1}}i + \frac{F_{2k+2l+1}F_{k+l+1}L_{k+l+1}F_{2k+2l+3}}{8F^2_{k+l+1}F_{k+l+2}}j\right.$$
$$\left.+\frac{F_{2k+2l+1}F_{k+l+1}L_{k+l+1}F_{2k+2l+3}F_{k+l+2}L_{k+l+2}}{16F^2_{k+l+1}F^2_{k+l+2}}k\right)V_{2k+2l}$$
$$= \left(\frac{F_{2k+2l+1}}{2F_{k+l+1}} + \frac{F_{2k+2l+1}L_{k+l+1}}{4F_{k+l+1}}i + \frac{F_{2k+2l+1}L_{k+l+1}F_{2k+2l+3}}{8F_{k+l+1}F_{k+l+2}}j\right.$$
$$\left.+\frac{F_{2k+2l+1}L_{k+l+1}F_{2k+2l+3}L_{k+l+2}}{16F_{k+l+1}F_{k+l+2}}k\right)V_{2k+2l}$$

dir. $m = 2k$ ve $n = 2l$ için

$$\mathbb{V}_{m+n+1}=\left(\frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}}+\frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}}{4F_{\frac{m+n+2}{2}}}i+\frac{F_{m+n+3}F_{m+n+1}L_{\frac{m+n+2}{2}}}{8F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}j\right.$$
$$\left.+\frac{F_{m+n+3}F_{m+n+1}L_{\frac{m+n+2}{2}}L_{\frac{m+n+4}{2}}}{16F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}k\right)V_{m+n}$$

elde edilir.

Benzer şekilde m ve n pozitif tek tam sayılar yani $m=2k+1$ ve $n=2l+1$ ise

$$\mathbb{V}_{2k+2l+2}=V_{2k+2l+2}+V_{2k+2l+3}i+V_{2k+2l+4}j+V_{2k+2l+5}k$$

elde edilir. (3.7) - (3.13) ifadelerinden

$$\mathbb{V}_{2k+2l+2}=V_{2k+2l+2}+\frac{F_{2k+2l+3}}{2F_{k+l+2}}V_{2k+2l+2}i+\frac{F_{2k+2l+4}F_{2k+2l+3}}{4F_{k+l+2}^2}V_{2k+2l+2}j$$
$$+\frac{F_{2k+2l+5}F_{2k+2l+4}F_{2k+2l+3}}{8F_{k+l+2}^2F_{k+l+3}}V_{2k+2l+2}k$$

olur. Burada (2.6) ifadesi kullanılırsa

$$\mathbb{V}_{2k+2l+2}=V_{2k+2l+2}+\frac{F_{2k+2l+3}}{2F_{k+l+2}}V_{2k+2l+2}i+\frac{F_{k+l+2}L_{k+l+2}F_{2k+2l+3}}{4F_{k+l+2}^2}V_{2k+2l+2}j$$
$$+\frac{F_{2k+2l+5}F_{k+l+2}L_{k+l+2}F_{2k+2l+3}}{8F_{k+l+2}^2F_{k+l+3}}V_{2k+2l+2}k$$
$$=\left(1+\frac{F_{2k+2l+3}}{2F_{k+l+2}}i+\frac{L_{k+l+2}F_{2k+2l+3}}{4F_{k+l+2}}j+\frac{F_{2k+2l+5}L_{k+l+2}F_{2k+2l+3}}{8F_{k+l+2}F_{k+l+3}}k\right)V_{2k+2l+2}$$

olur. $m=2k+1$ ve $n=2l+1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\mathbb{V}_{m+n+1}=\left(1+\frac{F_{m+n+1}}{2F_{\frac{m+n+2}{2}}}i+\frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}}{4F_{\frac{m+n+2}{2}}}j+\frac{L_{\frac{m+n+2}{2}}F_{m+n+1}F_{m+n+3}}{8F_{\frac{m+n+2}{2}}F_{\frac{m+n+4}{2}}}k\right)V_{m+n}$$

elde edilir.

Örnek 4.3 *$m=2$ ve $n=2$ için*

$$\mathbb{V}_5=\left(\frac{F_5}{2F_3}+\frac{L_3F_5}{4F_3}i+\frac{F_7F_5L_3}{8F_3F_4}j+\frac{F_7F_5L_3L_4}{16F_3F_4}k\right)V_4$$
$$=\left(\frac{5}{4}+\frac{20}{8}i+\frac{260}{48}j+\frac{1820}{96}k\right)\frac{3}{8}$$
$$=\frac{15}{32}+\frac{15}{16}i+\frac{65}{32}j+\frac{455}{64}k$$

dir. Benzer şekilde $m=1$ ve $n=1$ için

$$\mathbb{V}_3=\left(1+\frac{F_3}{2F_2}i+\frac{L_2F_3}{4F_2}j+\frac{L_2F_3F_5}{8F_2F_3}k\right)V_2$$
$$=\left(1+\frac{2}{2}i+\frac{6}{4}j+\frac{18}{16}k\right)\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i+\frac{3}{8}j+\frac{9}{32}k$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, rasyonel sayı dizisi olan Vietoris sayı dizisi ve Fibonomial katsayılar ile ilgili kaynaklar incelenmiştir. Vietoris sayıları Fibonomial katsayılar yardımıyla tanımlanmış ve bu yeni dizi Fibo-Vietoris dizisi olarak adlandırılmıştır. Elde edilen yeni sayı dizisinin sağladığı bazı özdeşlikler ve rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, katsayıları Fibo-Vietoris sayıları olan kuaterniyonlar göz önüne alınarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Vietoris sayılarının $q-$ benzeri göz önüne alınarak yeni bir rasyonel sayı dizisi tanımlanabilir. Tanımlanan bu yeni sayılar ve özellikleri Vietoris ve Fibo-Vietoris sayılarının bir genelleştirmesi olacaktır.

KAYNAKLAR

Alexanderson, G. L. ve Klosinski, L. F. (1974). Fibonacci analogue of gaussian binomial coefficients. *The Fibonacci Quarterly*, 12(2):129–132.

Almeida, R. ve Catarino, P. (2023). Elliptic biquaternionic sequence with vietoris' numbers as its components. In *International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering-ICMASE 2023*, volume 439, s. 125–146.

Benjamin, A. T. ve Plott, S. S. (2008). A combinatorial approach to fibonomial coefficients. *The Fibonacci Quarterly*, 46/47(1):7–9.

Benjamin, A. T. ve Quinn, J. J. (1999). Recounting fibonacci and lucas identities. *The College Mathematics Journal*, 30(5):359–366.

Benjamin, A. T. ve Reiland, E. (2014). Combinatorial proofs of fibonomial identities. *The Fibonacci Quarterly*, 52(5):28–34.

Catarino, P. ve Almeida, R. (2021). On a quaternionic sequence with vietoris' numbers. *Filomat*, 35(4):1065–1086.

Catarino, P. ve Almeida, R. (2022). A note on vietoris' number sequence. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(41):1–19.

Catarino, P. ve Vasco, P. (2018). On matrices with the pell, pell-lucas, k- pell and k-pell-lucas quaternions. *Analele Stiintifice ale Universitatii Al I Cuza din Iasi - Matematica*, 64:373–388.

Cação, I., Falcao, M. I., ve Malonek, H. R. (2018). *Vietoris' number sequence and its generalizations through hypercomplex function theory*, volume 23. Proceedings Book of MICOPAM.

Cação, I., Falcão, M. I., ve Malonek, H. R. (2017). On vietoris' number sequence and combinatorial identities with quaternions. In *CMMSE 2017: Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and*

Engineering, s. 480–488.

Cação, I., Falcão, M. I., ve Malonek, H. R. (2019). On generalized vietoris' number sequences. *Discrete Applied Mathematic*, 269:77–85.

Cação, I., Malonek, H. R., Falcão, M. I., ve Tomaz, G. (2023). Generalized vietoris' number sequences from real and hypercomplex points of view. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2849, s. 060012.

Cimen, C. B. ve İpek, A. (2016). On pell quaternions and pell-lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26:39–51.

Dunlap, R. A. (1997). *The golden ratio and Fibonacci numbers*. World Scientific, New Jersey.

Gould, H. W. (1969). The bracket function and fontené-ward generalized binomial coefficients with application to fibonomial coefficients. *The Fibonacci Quarterly*, 7:23–40.

Gould, H. W. (1971). *Research bibliography of two special number sequences*. Mathematica Monongoliae, 12.

Gürses, N., Saçlı, G. Y., ve Yüce, S. (2024). On vietoris' hybrid number sequence. *Turkish Journal of Mathematics*, 48(4):658–672.

Halici, S. (2012). On fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22(2):1–7.

Hoggatt Jr, V. E. (1967). Fibonacci numbers and generalized binomial coefficients. *The Fibonacci Quarterly*, 5:383–400.

Horadam, A. F. (1993). Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2):23–33.

Iyer, M. R. (1969). Some results on fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 7(2):201–210.

Killpatrick, K. (2023). Super fibocatalan numbers and generalized fibocatalan numbers. *ArXiv Preprint*, arXiv:2308.13457:1–14.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, New York.

Krot, E. (2004a). Further developements in finite fibonomial calculus. *ArXiv Preprint*, math/0410550:1–13.

Krot, E. (2004b). An introduction to finite fibonomial calculus. *Open Mathematics*, 2(5):754–766.

Kwasniewski, A. K. (2005). Fibonomial cumulative connection constants. *Bulletin of the ICA*, 44:81–92.

Mangueira, M. D. S., Alves, F. R. V., ve Catarino, P. M. M. C. (2022). Hybrid quaternions of leonardo. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, 23(1):51–62.

Marques, D. ve Trojovský, P. (2014). On some new identities for the fibonomial coefficients. *Mathematica Slovaca*, 64(4):809–818.

Ozdemir, M. (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.

Sagan, B. E. ve Savage, C. D. (2010). Combinatorial interpretations of binomial coefficient analogues related to lucas sequences. *Integers*, 10(6):697–703.

Sangal, P. ve Swaminathan, A. (2017). Geometric properties of cesaro averaging operators. *Journal of Complex Analysis*, 2017(1):1–9.

Seibert, J. ve Trojovský, P. (2005). On some identities for the fibonomial coefficients. *Mathematica Slovaca*, 55(1):9–19.

Senturk, G. Y. (2023). A generalized quaternionic sequence with vietoris' number components. *Filomat*, 37(28):9753–9768.

Shapiro, L. W. (1976). A catalan triangle. *Discrete Mathematics*, 14(1):83–90.

Spivey, M. Z. (2019). *The art of proving binomial identities*. Chapman and Hall/CRC, New York.

Trojovský, P. (2007). On some identities for the fibonomial coefficients via generating function. *Discrete Applied Mathematics*, 155(15):2017–2024.

Tuglu, N., Yesil, F., Kocer, E. G., ve Dziemiańczuk, M. (2014). The f-analogue of riordan representation of pascal matrices via fibonomial coefficients. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(1):1–6.