

T.C
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

**BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ,
PERİYODİKLİĞİ VE GLOBAL ASİMPOTİK
KARARLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Saniye ERGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ

Konya - 2012



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Saniye ERGİN
	Numarası	095201011003
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Çözümleri, Periyodikliği ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma	

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.


Öğrencinin imzası



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Saniye ERGİN		
	Numarası	095201011003		
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği		
	Programı	Tezli Yüksek Lisans <input checked="" type="checkbox"/>	Doktora	<input type="checkbox"/>
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ		
Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Gözlemleri, Periyodikliği ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma			

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan başlıklı bu çalışma 18...1...06...2012 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Doç. Dr. Ramazan Karataş	Danışman	
Doç. Dr. Süleyman SOLAK	Üye	
Yrd. Doç. Dr. Ahmet Cihangir	Üye	

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ yönetiminde yapılarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans tez konusunu bana teklif eden, çalışmalarım boyunca karşılaştığım zor durumlarda yardımlarını esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren ve tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ' a teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Saniye ERGİN

Konya, 2012



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Saniye ERGİN
	Numarası	095201011003
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ
Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Çözümleri, Periyodikliği ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma	

ÖZET

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

Üçüncü bölümde $x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}}$ fark denkleminin global asimptotik

kararlılığı ve periyodikliği, dördüncü bölümde de $x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{n-i}}$ fark

denkleminin çözümleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemi, Fark Denkleminin Çözümleri, Periyodiklik, Kararlılık



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Saniye ERGİN
	Numarası	095201011003
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ
Tezin İngilizce Adı	A Study on Solutions, Periodicity and Global Asymptotic Behaviour of Some Difference Equations	

SUMMARY

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems about difference equations are given.

In the second section, we gave information about some difference equations which is studied before.

In the third section, the global asymptotic stability and periodicity of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b+c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}}$ are investigated. In the fourth section, the

solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{n-i}}$ are investigated.

Key Words : Difference Equation, Solutions of Difference Equation, Periodicity, Stability

İÇİNDEKİLER

Bilimsel Etik Sayfası	ii
Tez Kabul Formu	iii
Önsöz	iv
Özet	v
Summary	vi

1. BÖLÜM

FARK DENKLEMİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER	1
---	---

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR	5
---	---

3. BÖLÜM

3.1 $x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}}$ Fark Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı.....	8
3.2 Nümerik Sonuçlar	21

4. BÖLÜM

4.1 $x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{l=0}^k x_{n-i}}$ Fark Denkleminin Çözümleri	23
Sonuç ve Öneriler	35
Kaynaklar	36
Özgeçmiş.....	40

1. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

denklemini bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir. (Kocic ve Ladas,1993)

Tanım 1.2. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n \geq -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan p en küçük pozitif tam sayıdır. (Kocic ve Ladas,1993)

Tanım 1.3. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır. (Kocic ve Ladas,1993)

Tanım 1.4. (1.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

şartını sağlayan \bar{x} noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir. (Kocic ve Ladas,1993)

Tanım 1.5. \bar{x} , (1.1) denkleminin denge noktası ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$ olmak üzere;

(i) Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası kararlıdır denir.

(ii) \bar{x} denge noktası kararlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise \bar{x} denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı ve çekim noktası ise \bar{x} denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(vi) Eğer

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

ve bazı $N \geq 1$ sayıları için

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktasına repeller denir. (Kocic ve Ladas,1993)

Tanım 1.6. (1.1) denkleminde elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) y_{n-i} \quad (1.2)$$

denkleminde, \bar{x} denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir. (Kocic ve Ladas,1993)

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(i) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise \bar{x} denge noktası kararsızdır. (Kocic ve Ladas,1993)

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Fark denklemlerinin yeni çalışma alanlarından olan global asimptotik kararlılık ile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış oldukça fazla sayıda çalışma vardır.

Devault ve Galminas (1999), yaptıkları çalışmada; $x_{-1}, x_0, A \in (0, \infty)$ ve $p > 1$ için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^p}, n = 0, 1, \dots$ denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Çınar (2004), $x_{-1}, x_0, a, b > 0$ şartları altında $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2005), α, β ve başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Sobilo ve Migda (2006), $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b + cx_n x_{n-1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$ denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı incelemiştir.

Elabbasy ve arkadaşları (2007), $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma \prod_{i=0}^k x_{n-i}}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Hamza ve arkadaşları (2007), $x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}}{B + C \prod_{i=1}^k x_{n-2i}}$ fark denkleminin negatif olmayan denge noktasının asimptotik kararlılığını çalışmışlardır.

Hu ve Li (2007), $x_{n+1} = \frac{x_n}{a + a_0x_n + \dots + a_kx_{n-k}}$ denkleminin çözümlerinin

global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Hamza ve Khalaf-Allah (2008), A, B, C negatif olmayan reel sayılar olmak

üzere k ve l negatif olmayan tamsayı, $l < k$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{A \prod_{i=l}^k x_{n-2i-1}}{B + C \prod_{i=l}^{k-1} x_{n-2i}}$ fark

denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Elabbasy ve Elsayed (2009), $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-l} x_{n-k}}{bx_{n-p} + cx_{n-q}}$ fark denkleminin

çözümlerini incelemiştir.

Elsayed (2009), $x_{n+1} = ax_n \frac{bx_n^2}{cx_n + dx_{n-1}}$ fark denklemini incelemiştir.

İrıcının ve Stević (2009), A, p, q ve r pozitif sayılar olmak üzere

$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^q x_{n-2}^r}$ fark denkleminin pozitif çözümleri incelenmiştir.

Shojaei ve arkadaşları (2009), $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-2}}{\beta + \gamma x_{n-2} x_{n-1} x_n}$ 3.dereceden fark

denkleminin lokal ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Yalçınkaya ve Çınar (2009), $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{b + cx_n^p}$ fark denkleminin global

asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Karataş (2010), α, b, c ve başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere k ve l tamsayı, $l \leq k+1$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{ax_{n-2l}}{b + c \prod_{i=0}^{k+1} x_{n-2i}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Karataş (2010), A, B, C negatif olmayan parametreler, başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar ve k, m negatif olmayan tamsayılar $m \leq k+1$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{Ax_{n-m}}{B + C \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}$, $n = 0, 1, \dots$ negatif olmayan denge noktasındaki global davranışını incelemiştir.

Karataş (2010), $x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ fark denklemini incelemiştir.

Atasever ve Yalçınkaya (2010), $x_{n+1} = \frac{x_{n-(3k+2)}}{1 + bx_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Battaloğlu ve arkadaşları (2010), fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Elsayed (2010), $x_{n+1} = ax_{n-1} + \frac{bx_{n-1}x_{n-3}}{cx_{n-1} + dx_{n-3}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Karataş ve Gelişken (2011), a, b, c negatif olmayan parametreler, başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar ve k negatif olmayan tamsayı $r, s \geq 1$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{b + cx_{n-k}^r x_{n-(2k+1)}^s}$, $n = 0, 1, \dots$ fark denkleminin negatif olmayan denge noktasındaki global davranışını incelemiştir.

Stević (2012), $x_n = \frac{x_{n-k}}{b + cx_{n-1} \dots x_{n-k}}$ fark denkleminin çözümleri incelemiştir.

3.BÖLÜM

$$3.1 \quad x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}} \quad \text{Fark Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı}$$

Bu bölümde $a > 0$, $a \leq b$, a ve b negatif olmayan tamsayılar ve başlangıç şartları negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}} \quad (3.1.1)$$

fark denkleminin global asimptotik kararlılığı inceleyeceğiz. (3.1.1) denkleminde

$$x_n = \left(\frac{b}{c} \right)^{\frac{1}{k+1}} y_n$$

değişken değiştirmesi ile $\gamma = \frac{a}{b} > 0$ olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots \quad (3.1.2)$$

fark denklemi elde edilir. (3.1.2) denklemi ile (3.1.1) denklemi aynı karaktere sahip olduğundan (3.1.2) denklemi incelenir.

(3.1.1) denkleminin denge noktaları:

$$\bar{y} = \frac{\gamma \bar{y}}{1 + \bar{y}^{k+1}} \Rightarrow \bar{y}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{y}_2 = (\gamma - 1)^{\frac{1}{k+1}}$$

şekindedir.

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-p}}(\bar{y}, \dots, \bar{y}) = \frac{\gamma \left[1 + y_{n-1} y_{n-3} \dots y_{n-(2k+1)} \right] - \left[y_{n-1} y_{n-3} \dots y_{n-(2k+1)} \right] \gamma y_{n-p}}{\left[1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)} \right]^2} = \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-(2k+1)}}(\bar{y}, \dots, \bar{y}) = \frac{-\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2}$$

$$z_{n+1} = \frac{-\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} z_{n-1} + \dots + \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} z_{n-p} + \dots - \frac{-\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} z_{n-(2k+1)} = 0$$

$$z_{n+1} + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \left[z_{n-1} + z_{n-3} + \dots + z_{n-(2k+1)} \right] - \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} z_{n-p} = 0$$

$$z_{n+1} + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \left[\sum_{i=0}^k z_{n-(2i+1)} - z_{n-p} \right] - \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} z_{n-p} = 0 \quad (3.1.3)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklemden

$$\lambda^{2k+2} - \frac{\partial f}{\partial z_n}(\bar{y}, \dots, \bar{y}) \lambda^{2k+1} - \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}(\bar{y}, \dots, \bar{y}) \lambda^{2k} - \dots - \frac{\partial f}{\partial z_{n-(2k+1)}}(\bar{y}, \dots, \bar{y}) \lambda^0 = 0$$

$$\lambda^{2k+2} + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \lambda^{2k} + \dots - \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \lambda^{2k+1-p} + \dots + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} = 0$$

$$\lambda^{2k+2} + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} [\lambda^{2k} + \lambda^{2k-2} + \dots + 1] - \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \lambda^{2k+1-p} = 0$$

$$\lambda^{2k+2} + \frac{\gamma \bar{y}^{k+1}}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \left[\sum_{i=0}^k \lambda^{2k-2i} - \lambda^{2k+1-p} \right] - \frac{\gamma}{(1 + \bar{y}^{k+1})^2} \lambda^{2k+1-p} = 0 \quad (3.1.4)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki (3.1.3) eşitliğinden $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası için

$$z_{n+1} - \gamma z_{n-p} = 0, n = 0, 1, \dots$$

lineer denklemi elde edilir. (3.1.4) eşitliğinden $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası için

$$\lambda^{2k+2} - \gamma \lambda^{2k+1-p} = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Buradan,

$$\lambda^{2k+1-p} (\lambda^{p+1} - \gamma) = 0 \text{ olup } \lambda = 0 \text{ ve } \lambda = \sqrt[p+1]{\gamma} \text{ bulunur.}$$

(i) Her λ için $|\lambda| < 1$ olduğundan $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası Teorem 1.2 den lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $\gamma > 1$ ise, $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında kararsız olduğu görülür.

(iii) $\bar{y}_2 = (\gamma - 1)^{\frac{1}{k+1}}$ denge noktasında lineer denklemi

$$z_{n+1} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{(1+\gamma-1)^2} \left[\sum_{i=0}^k z_{n-(2i+1)} - z_{n-p} \right] - \frac{\gamma}{(1+\gamma-1)^2} z_{n-p} = 0$$

$$z_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left[\sum_{i=0}^k z_{n-(2i+1)} - z_{n-p} \right] - \frac{1}{\gamma} z_{n-p} = 0$$

elde edilir. $\bar{y}_2 = (\gamma-1)^{\frac{1}{k+1}}$ denge noktası için karakteristik denklem;

$$\lambda^{2k+2} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{(1+\gamma-1)^2} \left[\sum_{i=0}^k \lambda^{2k-2i} - \lambda^{2k+1-p} \right] - \frac{\gamma\lambda^{2k+1-p}}{(1+\gamma-1)^2} = 0$$

$$\lambda^{2k+2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left[\sum_{i=0}^k \lambda^{2k-2i} - \lambda^{2k+1-p} \right] - \frac{1}{\gamma} \lambda^{2k+1-p} = 0$$

elde edilir.

Bu denklemin en az bir kökü $(-\infty, -1)$ olup

$$\bar{y}_2 = (\gamma-1)^{\frac{1}{k+1}}$$

noktasında kararsızdır.

Teorem 3.1.2 Eğer $\gamma < 1$ ise (3.1.2) denklemi $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında global asimptotik karardır.

İspat. Teorem 3.1.1 (i)'den $\gamma < 1$ şartı altında (3.1.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında lokal asimptotik kararlı olduğu açıktır.

O halde (3.1.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında global asimptotik kararlı olması için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

olduğu gösterilmelidir. $\{y_n\}$ çözümleri negatif olamayacağından

$$y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-i}} \leq \gamma y_{n-p}$$

$$y_{n+1} \leq \gamma y_{n-p}$$

alınır.

$s = 0, 1, \dots$ için

$$y_{s(p+1)+1} \leq \gamma^{s+1} y_{-p}$$

$$y_{s(p+1)+2} \leq \gamma^{s+1} y_{-(p-1)}$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$$y_{s(p+1)+p+1} \leq \gamma^{s+1} y_0$$

olur. Eğer $\gamma < 1$ ise, o zaman

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma^{s+1} = 0$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

bulunur. O halde (3.1.2) denklemi $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında global asimptotik kararlıdır.

Sonuç 3.1.1. $\gamma=1$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.2) denkleminin her çözümü sınırlıdır.

İspat. (3.1.2) denkleminin bir çözümü $\{y_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ olsun.

$$y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots$$

denkleminden

$$y_{n+1} \leq \gamma y_{n-p}$$

bulunur. O zaman $s = 0, 1, \dots$ için Teorem 3.1.2 nin ispatından

$$y_{s(p+1)+1} \leq y_{-p}$$

$$y_{s(p+1)+2} \leq y_{-(p-1)}$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$$y_{s(p+1)+p+1} \leq y_0$$

olduğu görülür. Bu yüzden $A = \max\{y_{-p}, \dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0\}$ tarafından (3.1.2) denkleminin her çözümü üstten sınırlıdır.

Sonuç 3.1.2. $y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots$ denkleminin başlangıç şartlarını

$y_{-i} (i = 0, 1, 2, 3)$ ardışık herhangi ikisi 0 olduğunu kabul edelim, o zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $\gamma > 1$ ise, o zaman (3.1.2) denkleminin sıfır dışında her çözümü sınırsızdır.

(ii) Eğer $\gamma = 1$ ise, o zaman (3.1.2) denklemi $p+1$ periyotlu periyodik çözümlere sahiptir.

İspat. (i) (3.1.2) denkleminin bir çözüm $\{y_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ olsun.

$$y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots$$

denklemden ve kabulümüzden

$$y_{n+1} = \gamma y_{n-p}$$

elde edilir. O zaman $s = 0, 1, \dots$ için

$$y_{s(p+1)+1} = \gamma^{s+1} y_{-p}$$

$$y_{s(p+1)+2} = \gamma^{s+1} y_{-(p-1)}$$

• •

• •

• •

$$y_{s(p+1)+p+1} = \gamma^{s+1} y_0$$

elde ederiz. Eğer $\gamma > 1$ ise, o zaman

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma^{s+1} = \infty$$

ve (3.1.2) denkleminin sıfır dışında her çözümü sınırsızdır.

(ii) Eğer $\gamma=1$ ise,

$$y_{n+1} = \gamma y_{n-p}$$

olup (i) den $s = 0, 1, \dots$ için

$$y_{s(p+1)+1} = y_{-p}$$

$$y_{s(p+1)+2} = y_{-(p-1)}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array}$$

$$y_{s(p+1)+p+1} = y_0$$

olarak bulunur. (3.1.2) denkleminin $p+1$ periyotlu çözümlere sahip olduğunu görülür.

Örnek (3.1.1) fark denkleminde a, b, c ve başlangıç şartları negatif olmayan sayılar, $k \geq 1$, $p > 0$ ve $p \leq k$ olmak üzere $p = 3$ olarak alınırsa,

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-3}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots \quad (3.1.5)$$

fark denklemi elde edilir. Bu (3.1.5) denkleminde

$$x_n = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{k+1}} y_n$$

değişken değiştirilmesi ile $\gamma = \frac{\alpha}{b} > 0$ için (3.1.5) denklemini düzenlersek

$$y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-3}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}, n = 0, 1, \dots \quad (3.1.6)$$

fark denklemi elde edilir. O zaman (3.1.6) denkleminin denge noktaları:

$$\bar{y} = \frac{\gamma \bar{y}}{1 + \bar{y}^{k+1}} \Rightarrow \bar{y}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{y}_2 = (\gamma - 1)^{\frac{1}{k+1}}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.1.3. (3.1.6) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $\gamma < 1$ ise, (3.1.6) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $\gamma > 1$ ise, (3.1.6) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında kararsızdır.

İspat. (3.1.6) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasındaki lineer denklemi

$$z_{n+1} - \gamma z_{n-3} = 0, n = 0, 1, \dots$$

(3.1.6) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasındaki karakteristik denklemi

$$\lambda^{2k+2} - \gamma \lambda^{2k-2} = 0$$

olur.

Her λ için $|\lambda| < 1$ olduğundan $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası Teorem 1.2'den lokal asimptotik kararlıdır.

Eğer $\gamma > 1$ ise, $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında kararsız olduğu bulunur.

Sonuç 3.1.4. $\gamma < 1$ olduğunu kabul edelim, o zaman (3.1.6) denklemi $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında global asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.1.6) denkleminin bir çözümü $\{y_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ olsun. Sonuç 3.1.3 den (3.1.6) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında lokal asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. $\bar{y}_1 = 0$ denge noktasında global asimptotik kararlı olması için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

olduğu gösterilmelidir. (3.1.6) denkleminde

$$y_{n+1} \leq \gamma y_{n-3}$$

elde ederiz. O zaman $m = 0, 1, \dots$ için

$$y_{4m+1} \leq \gamma^{m+1} y_{-3}$$

$$y_{4m+2} \leq \gamma^{m+1} y_{-2}$$

$$y_{4m+3} \leq \gamma^{m+1} y_{-1}$$

$$y_{4m+4} \leq \gamma^{m+1} y_0$$

yazılır. Eğer $\gamma < 1$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma^{m+1} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

bulunur ki ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.1.5 $\gamma=1$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.6) denkleminin her çözümü sınırlıdır.

İspat. (3.1.6) denkleminin bir çözümü $\{y_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ olsun. (3.1.6) denkleminde

$$y_{n+1} \leq \gamma y_{n-3}$$

bulunur. O zaman $m = 0, 1, \dots$ için Sonuç 3.1.4 nin ispatından

$$y_{4m+1} \leq y_{-3}$$

$$y_{4m+2} \leq y_{-2}$$

$$y_{4m+3} \leq y_{-1}$$

$$y_{4m+4} \leq y_0$$

olduğu görülür.

Bu yüzden $A = \max\{y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0\}$ tarafından (3.1.6) denkleminin her çözümü üstten sınırlıdır.

Sonuç 3.1.6 (3.1.6) denkleminin başlangıç şartlarını y_{-i} ($i = 0, 1, 2, 3$) ardışık herhangi ikisi 0 olduğunu kabul edelim, o zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $\gamma > 1$ ise, o zaman (3.1.6) denkleminin sıfır dışında her çözümü sınırsızdır.

(ii) Eğer $\gamma=1$ ise, o zaman (3.1.6) denklemi 4 periyotlu periyodik çözümlere sahiptir.

İspat. (i) (3.1.6) denkleminin bir çözümü $\{y_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ olsun. (3.1.6) denkleminden

$$y_{n+1} = \gamma y_{n-3}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $m = 0, 1, \dots$ için

$$y_{4m+1} = \gamma^{m+1} y_{-3}$$

$$y_{4m+2} = \gamma^{m+1} y_{-2}$$

$$y_{4m+3} = \gamma^{m+1} y_{-1}$$

$$y_{4m+4} = \gamma^{m+1} y_0$$

elde ederiz. Eğer $\gamma > 1$ ise, o zaman

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma^{m+1} = \infty$$

ve (3.1.6) denkleminin sıfır dışında her çözümü sınırsızdır.

(ii) Eğer $\gamma=1$ ise, (i) den (3.1.6) denklemi 4 periyotlu periyodik çözümlere sahip olduğu açıktır.

3.2 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde bazı parametrelerin özel değerleri için birkaç sayısal sonuçlar verilmiştir.

Örnek 3.2.1. (3.1.2) denklemi ve $p = 3$, $k = 2$, $\gamma = 0.3$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 2$, $y_{-2} = 1$, $y_{-1} = 4$, $y_0 = 3$ olsun. O zaman Sonuç 3.1.4 için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	y_n	n	y_n
1	0,0122448979	33	$7,6158838 \cdot 10^{-7}$
14	0,0004825164	41	$6,8542954 \cdot 10^{-8}$
23	0,0026557092	46	$3,1657873 \cdot 10^{-8}$
28	0,0006211050	50	$9,4973620 \cdot 10^{-9}$

Örnek 3.2.2. (3.1.2) denklemi ve $p = 3$, $k = 2$, $\gamma = 5$, $y_{-5} = 7$, $y_{-4} = 6$, $y_{-3} = 1$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 4$ olsun. O zaman $\bar{y}_1 = 0$ için aşağıdaki sonuçların kararsız olduğunu elde ederiz:

n	y_n	n	y_n
1	0,333333333	27	43732,0390
14	0,002004385	34	$2,40140 \cdot 10^{-10}$
19	1749,286550	43	$2,73325 \cdot 10^7$
21	0,0000081014	50	$6,14759 \cdot 10^{-16}$

Örnek 3.2.3. (3.1.2) denklemi ve $p = 3$, $k = 3$, $\gamma = 1$, $y_{-7} = 1$, $y_{-6} = 2$, $y_{-5} = 0.1$, $y_{-4} = 0.2$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 5$, $y_{-1} = 0.3$, $y_0 = 6$, olsun. O zaman Sonuç 3.1.5 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	y_n	n	y_n
1	3,571428	25	1,328736
11	0,135316	34	0,017096
17	1,413484	44	1,677136
20	1,685496	50	0,017040

Örnek 3.2.4. (3.1.2) denklemi ve $p=3$, $k=2$, $\gamma=2$, $y_{-5}=5$, $y_{-4}=3$, $y_{-3}=2$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=0$, $y_0=0$ olsun. O zaman Sonuç 3.1.6 (i) için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	y_n	n	y_n
3	0	24	0
6	12	34	1536
13	32	39	0
21	128	50	24576

Örnek 3.2.5. $y_{n+1} = \frac{\gamma y_{n-p}}{1 + \prod_{i=0}^k y_{n-(2i+1)}}$, $n=0,1,\dots,49$ ve $p=3$, $k=2$, $\gamma=1$, $y_{-5}=3$,

$y_{-4}=4$, $y_{-3}=0$, $y_{-2}=0$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ olsun. O zaman Sonuç 3.1.6 (ii) için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	y_n	n	y_n
1	0	5	0
2	0	6	0
3	2	7	2
4	1	8	1

4. BÖLÜM

$$\mathbf{4.1} \quad x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{n-i}} \quad \mathbf{\text{Fark Denkleminin Çözümleri}}$$

Bu bölümde $a > 0$, k pozitif bir tamsayı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}, \dots, x_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{n-i}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

fark denkleminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.1. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $n = 0, 1, 2, \dots$ için (4.1) denkleminin bütün çözümleri

$$x_{(k+1)n+1} = \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^n (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}, \quad (4.2)$$

$$x_{(k+1)n+2} = \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - 2x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+2)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}, \quad (4.3)$$

• •
• •
• •

$$x_{(k+1)n+k} = \frac{x_{-1} (a - (k-1)x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i + k - 1)x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{(a - kx_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i + k)x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}, \quad (4.s+1)$$

$$x_{(k+1)n+k+1} = \frac{x_0 (a - kx_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i + k)x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{(a - (k+1)x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i + k + 1)x_0 x_{-1} \dots x_{-k})} \quad (4.s+2)$$

şeklindedir.

İspat. İspatımızı tümevarım metodu ile yapalım. (4.1) denkleminde $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{ax_{-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{-i}} = \frac{ax_{-k}}{a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}$$

elde edilir. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{ax_{-(k-1)}}{a - \prod_{i=0}^k x_{1-i}} = \frac{ax_{-(k-1)}}{a - x_1 x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}} \\ &= \frac{ax_{-(k-1)}}{a - \frac{ax_{-k}}{a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}} x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}} \\ &= \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{ax_{-(k-2)}}{a - \prod_{i=0}^k x_{2-i}} = \frac{ax_{-(k-2)}}{a - x_2 x_1 x_0 \dots x_{-(k-2)}} \\
 &= \frac{ax_{-(k-2)}}{a - \frac{x_{-(k-1)}(a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}} \frac{ax_{-k}}{a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}} x_0 \dots x_{-(k-2)}} \\
 &= \frac{x_{-(k-2)}(a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - 3x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}
 \end{aligned}$$

bulunur. Basit iterasyon yöntemiyle

$$x_4 = \frac{x_{-(k-3)}(a - 3x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - 4x_0 x_{-1} \dots x_{-k}},$$

$$x_5 = \frac{x_{-(k-4)}(a - 4x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - 5x_0 x_{-1} \dots x_{-k}},$$

.

.

.

$$x_{k+1} = \frac{x_0(a - kx_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - (k+1)x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}$$

olduğu görülür.

Yukarıda elde ettiğimiz eşitliklerden iddiamızın $n=0$ için doğru olduğu açıktır. Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

O zaman (4.2), (4.3), ..., (4.s+2) eşitliklerinden

$$x_{(k+1)n-k} = \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})},$$

$$x_{(k+1)n-(k-1)} = \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - 2x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+2)x_0x_{-1}\dots x_{-k})},$$

• •

• •

• •

$$x_{(k+1)n-1} = \frac{x_{-1} (a - (k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - kx_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k)x_0x_{-1}\dots x_{-k})},$$

$$x_{(k+1)n} = \frac{x_0 (a - kx_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - (k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.1) denklemini ve yukarıdaki eşitliklerden

$$x_{(k+1)n+1} = \frac{ax_{(k+1)n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{(k+1)n-i}}$$

olup

$$x_{(k+1)n+1} = \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})} \\ = \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - (k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

$$= \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})} \\ = \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-k} \prod_{i=2}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{\prod_{i=2}^n (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

$$= \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})} \\ = \frac{a - (k+1)nx_0x_{-1}\dots x_{-k} - x_0x_{-1}\dots x_{-k}}{a - (k+1)nx_0x_{-1}\dots x_{-k}}$$

$$= \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^{n-1} (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})} \times$$

$$\frac{a - (k+1)nx_0x_{-1}\dots x_{-k}}{a - ((k+1)n+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}}$$

$$= \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^n (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

elde edilir. Yani

$$x_{(k+1)n+1} = \frac{ax_{-k} \prod_{i=1}^n (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

elde edilir. Yine (4.1) denkleminde

$$x_{(k+1)n+2} = \frac{ax_{(k+1)n-(k-1)}}{a - \prod_{i=1}^{k-1} x_{(k+1)n-i}}$$

yazabiliriz. Buradan son eşitliği de kullanarak

$$x_{(k+1)n+2} = \frac{ax_{(k+1)n-(k-1)}}{a - \prod_{i=1}^{k-1} x_{(k+1)n-i}}$$

$$= \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - 2x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+2)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

$$= \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-k} \prod_{i=1}^n (a - (k+1)ix_0x_{-1}\dots x_{-k})}{(a - ((k+1)n+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}) (a - (k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+k+1)x_0x_{-1}\dots x_{-k})}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a} \\
&= \frac{(a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{a - \frac{ax_0 x_{-1} \dots x_{-k}}{a - ((k+1)n+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{(a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^{n-1} (a - ((k+1)i+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})} \times \\
& \frac{a - ((k+1)n+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}{a(a - ((k+1)n+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}
\end{aligned}$$

$$\frac{a - ((k+1)n+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k}}{a(a - ((k+1)n+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{(a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}
\end{aligned}$$

olup

$$x_{(k+1)n+2} = \frac{x_{-(k-1)} (a - x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}{(a - 2x_0 x_{-1} \dots x_{-k}) \prod_{i=1}^n (a - ((k+1)i+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-k})}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4), (4.5), ..., (4.s+2) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilebilir.

Örnek 4.1. (4.1) denkleminde $a=1$ ve $k=5$ olarak kabul edilirse

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 - x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} x_{n-4} x_{n-5}}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemlerin bütün çözümleri

$$x_{6n+1} = \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^n [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]},$$

$$x_{6n+2} = \frac{x_{-4} (1 - x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 2x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+2)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]},$$

$$x_{6n+3} = \frac{x_{-3} (1 - 2x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+2)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 3x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+3)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]},$$

$$x_{6n+4} = \frac{x_{-2} (1 - 3x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+3)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 4x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+4)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]},$$

$$x_{6n+5} = \frac{x_{-1} (1 - 4x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+4)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 5x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+5)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]},$$

$$x_{6n+6} = \frac{x_0 (1 - 5x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+5)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 6x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+6)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}$$

şeklinindedir.

İspat. Denklemde $n = 0$ alınırsa

$$x_1 = \frac{x_5}{1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$$

elde edilir. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_4}{1 - x_1 x_0 x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{x_4}{1 - \frac{x_5}{1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} x_0 x_1 x_2 x_3 x_4} \\ &= \frac{x_4}{1 - \frac{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}} \\ &= \frac{x_4 (1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)}{1 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda $n = 2$ için

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_3}{1 - x_2 x_1 x_0 x_1 x_2 x_3} \\ &= \frac{x_3}{1 - \frac{x_4 (1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)}{1 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \frac{x_5}{1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} x_0 x_1 x_2 x_3} \\ &= \frac{x_3}{1 - \frac{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{1 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}} = \frac{x_3 (1 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)}{1 - 3x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \end{aligned}$$

Benzer şekilde x_4, x_5 ve x_6

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_2}{1 - x_3 x_2 x_1 x_0 x_1 x_2} \\ &= \frac{x_2}{1 - \frac{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{1 - 3x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}} = \frac{x_2 (1 - 3x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)}{1 - 4x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \end{aligned}$$

$$x_5 = \frac{x_1}{1 - x_4 x_3 x_2 x_1 x_0 x_1}$$

$$= \frac{x_{-1}}{1 - \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}}{1 - 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}}} = \frac{x_{-1} (1 - 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5})}{1 - 5x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitliklerden iddiamızın $n=0$ için doğru olduğu görülür.

Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x_{6n-5} = \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}{(1 - x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+1) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]},$$

$$x_{6n-4} = \frac{x_{-4} (1 - x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+1) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}{(1 - 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+2) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]},$$

$$x_{6n-3} = \frac{x_{-3} (1 - 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+2) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}{(1 - 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+3) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]},$$

$$x_{6n-2} = \frac{x_{-2} (1 - 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+3) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}{(1 - 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+4) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]},$$

$$x_{6n-1} = \frac{x_{-1} (1 - 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+4) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}{(1 - 5x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+5) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5}]}$$

$$x_{6n} = \frac{x_0 (1 - 5x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 5)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - 6x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 6)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}$$

şeklinde yazılabilir. Denklemimizden ve yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} x_{6n+1} &= \frac{x_{6n-5}}{1 - x_{6n}x_{6n-1}x_{6n-2}x_{6n-3}x_{6n-4}x_{6n-5}} \\ &= \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]} \\ &= \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{1 - \frac{(1 - 6x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 6)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}} \\ &= \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1 - x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]} \\ &= \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=2}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{1 - \frac{\prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i + 6)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=2}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1-x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]} \\
= & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=2}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{1 - \prod_{i=2}^n [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1-x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]} \\
= & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \prod_{i=2}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{1 - \frac{(1-6nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=2}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1-x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]} \times \\
& \frac{1 - 6nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1 - 6nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} - x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^n [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1-x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}
\end{aligned}$$

olup

$$x_{6n+1} = \frac{x_{-5} \prod_{i=1}^n [1 - (6i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}{(1-x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}) \prod_{i=1}^n [1 - (6i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}]}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerin de doğru olduğu gösterilebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-p}}{b + c \prod_{i=0}^k x_{n-(2i+1)}} \text{ ve } x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{a - \prod_{i=0}^k x_{n-i}}$$

fark denklemleri tanımlanmış, tanımlanan bu fark denklemlerinin çözümleri incelenmiş ve bu çözümlerle ilgili özellikler verilmiştir. Yeni yapılacak çalışmalarda yukarıdaki fark denklemlerinin ışığında yeni fark denklemleri tanımlanabilir ve tanımlanan denklemlerin çözümleri üzerine çalışılabilir. Ayrıca yeni tanımlanacak fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı, kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Kocic V. L., Ladas G.,1993, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of High Order with Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Devault R. and Galminas L., 1999, Global stability of $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^p}$, $n = 0, 1, \dots$,

Journal of Mathematical Analysis and Applications, 231, 459-466

Cinar C.,2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + b x_n x_{n-1}}$

, Applied Mathematics and Computation, 156, 587-590.

El-Owaidy H. M., Ahmet A. M., Youssef A.M., 2005, On the dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$, Applied Mathematics Letters, 18(9) 1013-1018.

Andruch-Sobi lo A., Migda M., 2006, Further Properties Of The Rational

Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{b + c x_n x_{n-1}}$ Opuscula Mathematica • Vol. 26 • No. 3

Elabbasy E. M., El-Metwally H., Elsayed E. M., 2007, On the difference equation

$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma \prod_{i=0}^k x_{n-i}}$ Conc. Appl. Math. 5(2) 101-113.

Hamza A. E., Allah R. K., 2007, Global behavior of a higher order difference equation, *Journal of Mathematics and Statistics*, 3(1) 17-20.

Hu L. X., Li W. T., 2007, Global stability of a rational difference equation
Applied Mathematics and Computation 190, 1322–1327

Hamza A. E., Allah R. K., 2008, On the recursive sequence
$$x_{n+1} = \frac{A \prod_{i=l}^k x_{n-2i-1}}{B + C \prod_{i=l}^{k-1} x_{n-2i}}$$

Computers and Mathematics with Applications 56, 1726–1731

Elbbasy M., Elsayed M., 2009, Dynamics of a Rational Difference Equation
Chin. Ann. Math. 30B(2), 187–198 DOI: 10.1007/s11401-007-0456-9

Elsayed E. M., 2009, Qualitative behavior of difference equation of order two,
Mathematical and Computer Modelling, 50, 1130-1141.

Iricanin B., Stevic S., 2009, On a class of third-order nonlinear difference equations
Applied Mathematics and Computation 213, 479–483

Shojaei M., Saadati R., Adibi H., 2009, Stability and periodic character of a
rational third order difference equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 39, 1203–1209

Yalcinkaya İ., Cinar C., 2009, On the dynamics of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-k}}{b + cx_n^p} \text{ Fasciculi Mathematici, 42, 141-148.}$$

Karataş C., 2009, Bazı fark denklemlerinin çözümleri üzerine bir çalışma, 35 sayfa, Fen Bilimleri Enstitüsü, Selçuk Üniversitesi, Konya, (Yüksek Lisans Tezi)

Karataş R., 2010, Global Behavior Of A Rational Recursive Sequence, Ars Combinatoria Vol:97A, 421-428.

Karataş R., 2010, Global behavior of a higher order difference equation, Computers and Mathematics with Applications 60, 830_839

Karataş R., 2010, On The Solutions of the Recursive Sequence

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}, \text{ Fasciculimathematici, Nr 45.}$$

Atasever N., Yalçinkaya İ., 2010, On a class of difference equations, Fascucili Mathematici, 43, 13-18.

Battaloglu N., Cinar C., Yalcinkaya İ., 2010, The dynamics of the difference equation ARS Combinatoria, Vol.97, 281-288

Elsayed E.M., 2010, Qualitative Properties for a Fourth Order Rational Difference Equation, Acta Appl Math, 110: 589–604, DOI 10.1007/s10440-009-9463-z

Karataş R. ve Gelişken A., 2011, Qualitative Behavior of a Rational Difference Equation, Ars Combinatoria 100, pp. 321-326

Ergin S., 2011, Fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı üzerine bir çalışma, 22 sayfa, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Selçuk Üniversitesi, Konya, (Yüksek Lisans Semineri)

Stevic S., 2012, On the difference equation $x_n = \frac{x_{n-k}}{b + cx_{n-1} \dots x_{n-k}}$, Applied Mathematics and Computation 218, 6291–6296

T.C
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Saniye ERGİN	İmza:	
Doğum Yeri:	Denizli		
Doğum Tarihi:	06/08/1986		
Medeni Durumu:	Bekar		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Cankurtaran Ksb. İ.Ö.O.		Denizli	2000
Lise	Denizli Y.D.A. Lisesi	Fen Bilimleri	Denizli	2004
Lisans	Selçuk Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Konya	2009
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Konya	

İlgi Alanları:	Uygulamalı Matematik
İş Deneyimi:	Denizli-Bozkurt Atatürk İ.Ö.O. Matematik Öğretmeni 15.01.2010-15.06.2010 Denizli-Pamukkale İ.Ö.O. Matematik Öğretmeni 15.06.2010-
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Doç. Dr. Süleyman SOLAK Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR Yrd. Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ
Tel:	05386970806
Adres	Pamukkale İ.Ö.O.