



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE  
BİR ÇALIŞMA**

**Vildan ÇALIŞKAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Ocak-2021  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Vildan ÇALIŞKAN tarafından hazırlanan “BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 27/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

.....

#### Danışman

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Vildan ÇALIŞKAN

Tarih: 27/01/2021

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Vildan ÇALIŞKAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2021, 37 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Gümüş ve Soykan tarafından 2016 yılında yayımlanmış olan “Global character of a six-dimensional nonlinear system of difference equations” başlıklı makale ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde; başlangıç şartları ile  $A$  birer pozitif bulanık sayı,  $(z_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi ve  $p$  bir tam sayı olmak üzere,  $z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^p}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  bulanık fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise; çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık sayı, Bulanık fark denklemi, Sınırlılık, Asimptotik davranış

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**A STUDY ON THE FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS**

**Vildan ÇALIŞKAN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**2021, 37 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI**

**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

This study consists of five sections.

In the first section; general definitions and theorems related to fuzzy sets, fuzzy numbers and difference equations are given.

In the second section; informations about some of the studies regarding the fuzzy difference equations studied before are given.

In the third section; the article entitled “Global character of a six-dimensional nonlinear system of difference equations” published by Gümüş and Soykan in 2016 is discussed.

In the fourth section; we define the fuzzy difference equation  $z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^p}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  where the initial conditions and  $A$  are positive fuzzy numbers,  $(z_n)$  is a sequence of positive fuzzy numbers and  $p$  is a positive integer. Also, the existence, the boundedness and the asymptotic behavior of the positive solutions of this equation are investigated and some numerical examples which verify our theoretical results are given.

In the fifth section, some conclusions and suggestions are given.

**Keywords:** Fuzzy number, Fuzzy difference equation, Boundedness, Asymptotic behavior

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmam sırasında değerli bilgilerini benimle paylaşan, ne zaman ihtiyaç duysam kıymetli zamanını ayırıp sabırla bana faydalı olmak için elinden gelenin fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU hocama teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan bu hayattaki en büyük şansım olan aileme, özellikle sevgili anneme sonsuz teşekkürler ederim.

Vildan ÇALIŞKAN  
KONYA-2021

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar .....	1
1.1.1. Bulanık Kümeler.....	1
1.1.2. Bulanık Sayılar .....	7
1.2. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler .....	11
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>18</b>
<b>3. <math>u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}}{\beta + \gamma v_{n-2}^p}, v_{n+1} = \frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}^p}</math> FARK DENKLEM SİSTEMİ</b> .....	<b>23</b>
<b>4. <math>z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1 + z_{n-2}^p}</math> BULANIK FARK DENKLEMİ</b> .....	<b>25</b>
4.1. Nümerik Örnekler .....	31
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>34</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>35</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>37</b>

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

### 1.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar

Bu kısımda; bulanık kümeler ve bulanık sayılar ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

#### 1.1.1. Bulanık Kümeler

**Tanım 1.1.1.1.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme olmak üzere,  $A \subset X$  olsun.

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1.1.1)$$

şeklinde tanımlanan  $X_A : X \rightarrow \{0,1\}$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin karakteristik (üyelik) fonksiyonu denir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.1.2.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $I = [0,1]$  olmak üzere,  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu ile karakterize edilen

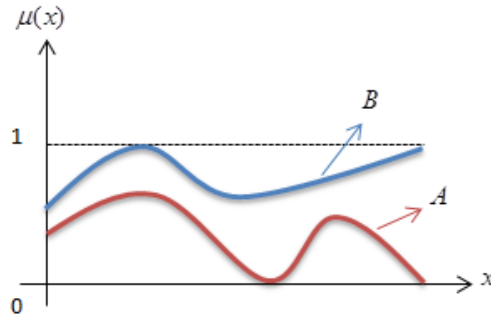
$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \quad (1.1.1.2)$$

kümesine  $X$  de bir bulanık (fuzzy) küme denir. Burada,  $\mu_A$  ya  $A$  bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) \in I$  değerine  $x$  in  $A$  ya ait olma derecesi adı verilir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.1.3.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ ,  $c \in [0,1]$  olmak üzere, her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) = c$  ile karakterize edilen  $A$  bulanık kümesine sabit bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.1.4.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A$  ile  $B$  kümeleri  $X$  de iki bulanık küme olsun. Her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  ise  $A$  ve  $B$  ye eşit bulanık kümeler denir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.1.5.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A$  ile  $B$  kümeleri  $X$  de iki bulanık küme olsun. Her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  ise  $B$  bulanık kümesi  $A$  bulanık kümesini kapsar denir ve  $A \subset B$  ( $A \leq B$ ) ile gösterilir (Zadeh, 1965).



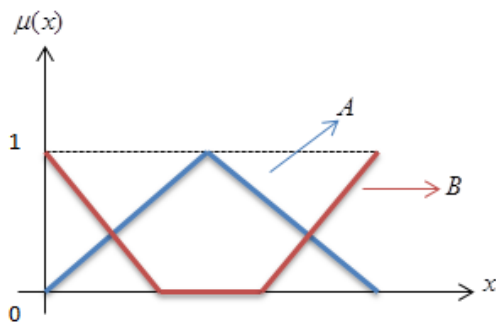
Şekil 1.1.1.1.  $B$  bulanık kümesinin  $A$  bulanık kümesini kapsaması

**Tanım 1.1.1.6.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A, B, C$  kümeleri  $X$  de üç bulanık küme olmak üzere,

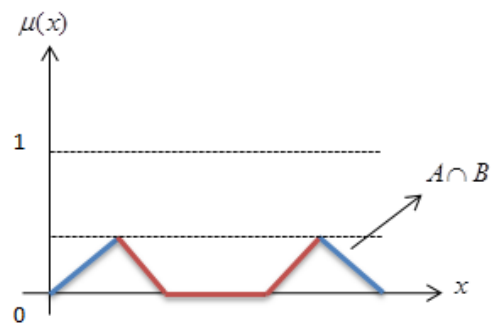
$$\{(x, \mu_C(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \quad (1.1.1.3)$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $A$  ve  $B$  bulanık kümelerinin kesişimi denir ve  $A \cap B$  ( $A \wedge B$ ) şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

**Uyarı 1.1.1.1.**  $A \cap B$  bulanık kümesi  $A$  ve  $B$  bulanık kümeleri tarafından kapsanan en büyük bulanık kümedir.



Şekil 1.1.1.2.  $A$  ve  $B$  bulanık kümeleri



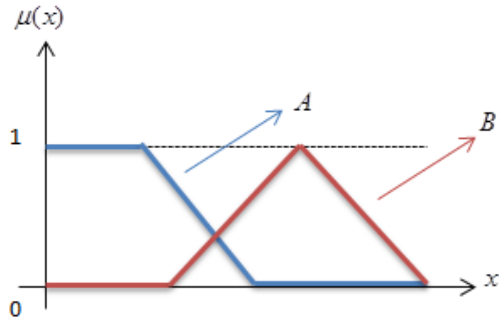
Şekil 1.1.1.3.  $A$  ve  $B$  bulanık kümelerinin kesişimi

**Tanım 1.1.1.7.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A, B, C$  kümeleri  $X$  de üç bulanık küme olmak üzere,

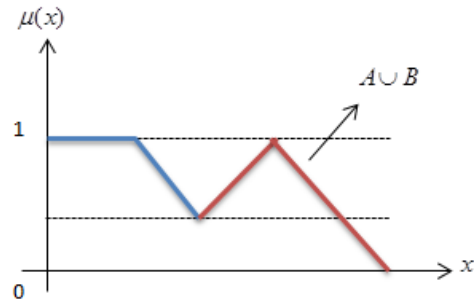
$$\{(x, \mu_C(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \quad (1.1.1.4)$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $A$  ve  $B$  bulanık kümelerinin birleşimi denir ve  $A \cup B$  ( $A \vee B$ ) şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

**Uyarı 1.1.1.2.**  $A \cup B$  bulanık kümesi  $A$  ve  $B$  bulanık kümelerini kapsayan en küçük bulanık kümedir.



Şekil 1.1.1.4. A ve B bulanık kümeleri

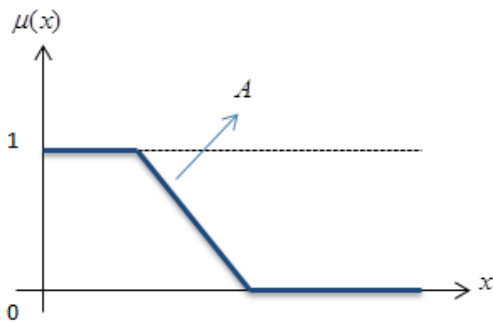


Şekil 1.1.1.5. A ve B bulanık kümelerinin birleşimi

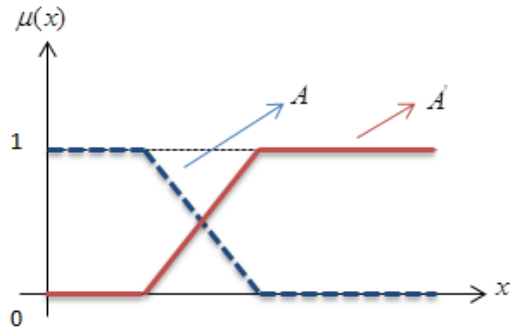
**Tanım 1.1.1.8.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme olmak üzere,

$$\{(x, \mu_{A'}(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)\} \quad (1.1.1.5)$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $A$  kümesinin tümleyeni denir ve  $A'$  ile gösterilir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.1.6. A bulanık kümesi



Şekil 1.1.1.7. A bulanık kümesinin tümleyeni

**Tanım 1.1.1.9.**  $X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $A$  ile  $B$  kümeleri  $X$  de iki bulanık küme olmak üzere,

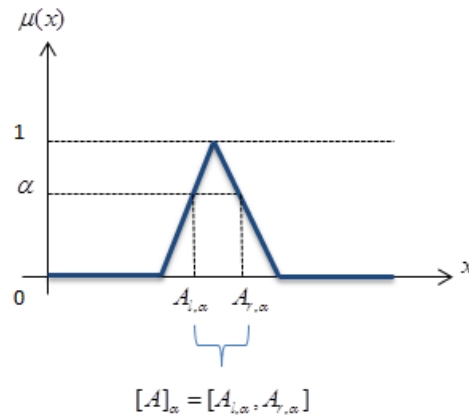
$$\{(x, \mu_{A \setminus B}(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A \setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \quad (1.1.1.6)$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $A$  bulanık kümesinin  $B$  bulanık kümesinden farkı denir ve  $A \setminus B$  ile gösterilir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.1.10.**  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme ve  $\alpha \in (0,1]$  olsun.  $A$  kümesinin  $\alpha$  - kesimi  $[A]_\alpha$  ile gösterilir ve

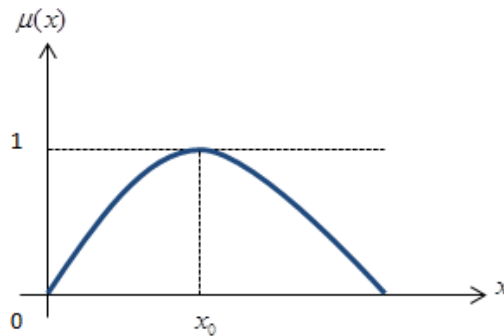
$$[A]_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1.1.1.7)$$

şeklinde tanımlanır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



**Şekil 1.1.1.8.**  $A$  bulanık kümesinin  $\alpha$  -kesimi

**Tanım 1.1.1.11.**  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme olsun. Eğer en az bir  $x_0 \in X$  için  $\mu_A(x_0) = 1$  ise  $A$  bulanık kümesi normaldir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



**Şekil 1.1.1.9.**  $A$  normal bulanık kümesi

**Tanım 1.1.1.12.**  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme olsun.  $A$  bulanık kümesinin destek (dayanak) kümesi

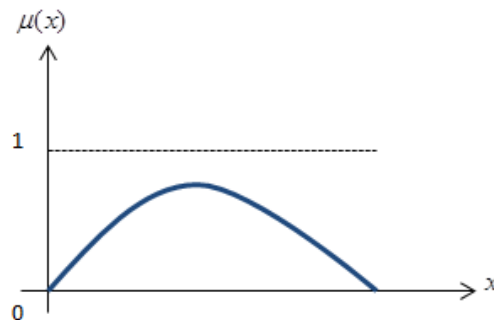
$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \quad (1.1.1.8)$$

şeklinde tanımlanır (Bede, 2013).

**Tanım 1.1.1.13.**  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme olsun. Eğer her  $\lambda \in [0,1]$  ve her  $x_1, x_2 \in X$  için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \quad (1.1.1.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $A$  bulanık kümesi bulanık dışbükeydir (bulanık konvektir) denir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.1.10.  $A$  konveks bulanık kümesi

**Teorem 1.1.1.1.**  $A$  ve  $B$  bulanık kümeleri dışbükey ise  $A \cap B$  bulanık kümesi de dışbükeydir (Zadeh, 1965).

**Teorem 1.1.1.2.**  $A$  bulanık kümesinin dışbükey olması için gerek ve yeter şart her  $\alpha \in (0,1]$  için  $[A]_\alpha$  kümesinin klasik anlamda dışbükey olmasıdır (Zadeh, 1965).

**Uyarı 1.1.1.3.**

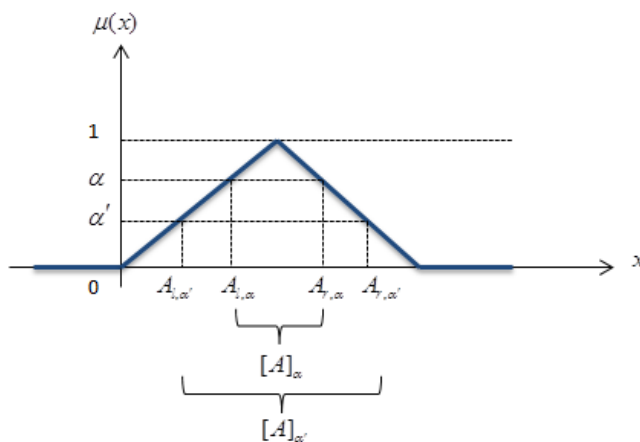
- (i) Bir bulanık kümenin  $\alpha$ -kesimlerine karşılık gelen aralıklar ayırık aralıkların birleşimi değil, yalnız bir aralığa eşit ise bu bulanık küme konvektir.
- (ii)  $A$  bulanık kümesinin  $\alpha$ -kesim kümesi olan  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  aralığı için

$$\alpha' < \alpha \text{ ise } [A]_{\alpha'} \subset [A]_\alpha,$$

yani

$$\alpha' < \alpha \text{ ise } A_{l,\alpha'} \leq A_{l,\alpha} \text{ ve } A_{r,\alpha} \leq A_{r,\alpha'}$$

şartı sağlanıyorsa ve  $A$  bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu sürekli ise  $A$  bulanık kümesi konvektir.

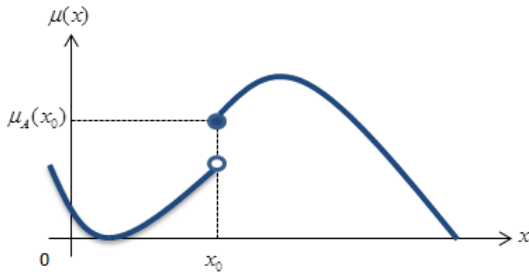


Şekil 1.1.1.11.  $A$  konveks bulanık kümesi

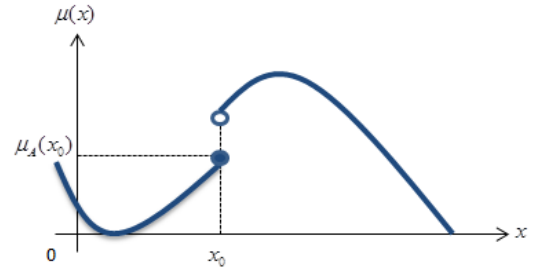
**Tanım 1.1.1.14.**  $A$  kümesi  $X$  de bir bulanık küme olsun.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve  $|x - x_0| < \delta$  şartını sağlayan her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) < \mu_A(x_0) + \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\mu_A$  ile karakterize edilen  $A$  bulanık kümesi  $x_0$  noktasında üst-yarı süreklidir.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve  $|x - x_0| < \delta$  şartını sağlayan her  $x \in X$  için  $\mu_A(x_0) - \varepsilon < \mu_A(x)$  olacak şekilde  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\mu_A$  ile karakterize edilen  $A$  bulanık kümesi  $x_0$  noktasında alt-yarı süreklidir (Bede, 2013).



Şekil 1.1.1.12. Üst-yarı sürekli (Alt-yarı sürekli değil)



Şekil 1.1.1.13. Üst-yarı sürekli değil (Alt-yarı sürekli)

## 1.1.2. Bulanık Sayılar

**Tanım 1.1.2.1.**  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen  $\mathbb{R}$  nin bir  $A$  bulanık kümesi;

- (i)  $A$  bulanık kümesi normaldir.
- (ii)  $A$  bulanık kümesi konvektir.
- (iii)  $\mu_A$  üst-yarı sürekli.
- (iv)  $\text{supp}(A)$  kümesinin kapanışı kompaktır.

özelliklerini sağlıyorsa,  $A$  ya bir bulanık (fuzzy) sayı denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).  $\mathbb{R}$  deki tüm bulanık sayıların kümesi  $F(\mathbb{R})$  ile gösterilir.

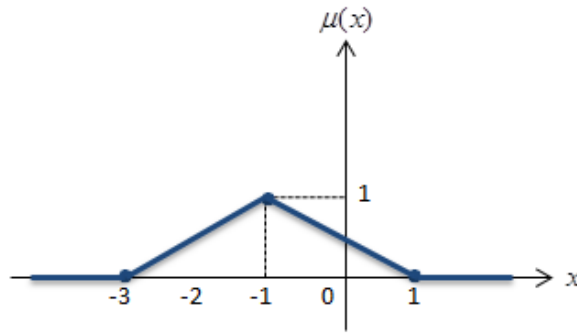
**Tanım 1.1.2.2.** Eğer  $\text{supp}(A) \subset (0, \infty)$  ise  $A$  bulanık sayısı pozitiftir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

**Uyarı 1.1.2.1.** Bulanık sayıların  $\alpha \in (0,1]$  için  $\alpha$ -kesimleri  $[A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  şeklindeki kapalı aralıklardır. Bulanık sayılar konveks olduğundan  $\alpha$ -kesimlerine karşılık gelen aralıklar ayrık aralıkların birleşimi değil yalnız bir aralığa eşittir.

**Örnek 1.1.2.1.**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{x+3}{2}, & -3 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu ile karakterize edilen  $A$  bulanık kümesi bir bulanık sayıdır ve grafiği



**Şekil 1.1.2.1.**  $A$  bulanık sayısı

şeklindedir.  $\frac{x+3}{2} = \alpha$  ise  $x = 2\alpha - 3$  ve  $\frac{1-x}{2} = \alpha$  ise  $x = 1 - 2\alpha$  olduğundan  $A$  bulanık kümesinin  $\alpha$ -kesimi  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}] = [2\alpha - 3, 1 - 2\alpha]$  olarak bulunur. Bu durumda,  $\alpha = 0.5$  için  $[A]_{0.5} = [A_{l,0.5}, A_{r,0.5}] = [-2, 0]$  elde edilir.

**Uyarı 1.1.2.2.** Bulanık sayılarda aritmetik işlemler, sayıların  $\alpha$ -kesimleri üzerinden tanımlanır.

**Tanım 1.1.2.3.**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olsun. Her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ve  $B$  bulanık sayılarının toplamı

$$A + B = [A]_\alpha + [B]_\alpha = [A_{l,\alpha} + B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha} + B_{r,\alpha}] \quad (1.1.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için  $A + B$  nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A+B}(z) = \bigcup_{z=x+y} (\mu_A(x) \cap \mu_B(y)) \quad (1.1.2.2)$$

şeklindedir.

**Tanım 1.1.2.4.**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olsun. Her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ve  $B$  bulanık sayıları için çıkarma işlemi

$$A - B = [A]_\alpha - [B]_\alpha = [A_{l,\alpha} - B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha} - B_{l,\alpha}] \quad (1.1.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için  $A - B$  nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A-B}(z) = \bigcup_{z=x-y} (\mu_A(x) \cap \mu_B(y)) \quad (1.1.2.4)$$

şeklindedir.

**Tanım 1.1.2.5.**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olsun. Her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ve  $B$  bulanık sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned} A \times B &= [A]_\alpha \times [B]_\alpha \\ &= [\min\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\}, \max\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\}] \end{aligned} \quad (1.1.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için  $A \times B$  nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A \times B}(z) = \bigcup_{z=x.y} (\mu_A(x) \cap \mu_B(y)) \quad (1.1.2.6)$$

şeklindedir. Özel olarak,  $A$  ile  $B$  bulanık sayıları  $\mathbb{R}^+$  da tanımlı ise

$$A \times B = [A]_\alpha \times [B]_\alpha = [A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}] \quad (1.1.2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 1.1.2.6.**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olsun.  $A$  ile  $B$  bulanık sayıları  $\mathbb{R}^+$  da tanımlı ve  $B_{l,\alpha} \cdot B_{r,\alpha} > 0$  ise  $A$  ve  $B$  bulanık sayıları için bölme işlemi

$$A/B = [A]_\alpha / [B]_\alpha = \left[ \frac{A_{l,\alpha}}{B_{r,\alpha}}, \frac{A_{r,\alpha}}{B_{l,\alpha}} \right] \quad (1.1.2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için  $A/B$  nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A/B}(z) = \bigcup_{z = \frac{x}{y}} (\mu_A(x) \cap \mu_B(y)) \quad (1.1.2.9)$$

şeklindedir.

**Tanım 1.1.2.7. (a)**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olmak üzere, her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  bulanık sayısının boyu

$$\|A\| = \sup \left\{ \max \left\{ |A_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha}| \right\} \right\} \quad (1.2.10)$$

şeklinde ve  $A$  ile  $B$  bulanık sayıları arasındaki uzaklık

$$D(A, B) = \sup \left\{ \max \left\{ |A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}| \right\} \right\} \quad (1.2.11)$$

şeklinde tanımlanır.

**(b)**  $(x_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi ve  $x$  bir bulanık sayı olmak üzere,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$  olması için gerek ve yeter şart  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$  olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

**Tanım 1.1.2.8.**  $A$  ile  $B$  iki bulanık sayı ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $A$  ile  $B$  nin  $\alpha$ -kesimleri sırasıyla,  $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$  ve  $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$  olmak üzere,

$$MIN(A, B) = \left[ \min \{A_{l,\alpha}, B_{l,\alpha}\}, \min \{A_{r,\alpha}, B_{r,\alpha}\} \right] \quad (1.1.2.12)$$

ve

$$MAX(A, B) = \left[ \max \{A_{l,\alpha}, B_{l,\alpha}\}, \max \{A_{r,\alpha}, B_{r,\alpha}\} \right] \quad (1.1.2.13)$$

şeklinde tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

**Tanım 1.1.2.9.** Eğer her  $n \geq n_0$  için  $MIN(x_n, C) = C$  ve  $MAX(x_n, D) = D$  olacak şekilde  $C$  ve  $D$  bulanık sayıları varsa  $(x_n)$  bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

**Tanım 1.1.2.10.**  $(x_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi ve  $x$  bir pozitif bulanık sayı olsun. Eğer her  $n \geq n_0$  için

$$MIN(x_m, x) = x_m \text{ ve } MIN(x_s, x) = x \quad (1.1.2.14)$$

veya

$$MIN(x_m, x) = x \text{ ve } MIN(x_s, x) = x_s \quad (1.1.2.15)$$

olacak şekilde  $s, m \geq n_0$  şartını sağlayan  $s, m$  doğal sayıları varsa  $(x_n)$  dizisi  $x$  civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

## 1.2. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 1.2.1.** Bir  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $\Delta$  fark operatörü (ileri fark) veya  $x$  in birinci mertebeden (basamaktan) farkı,

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.2.2.**  $n \in \mathbb{N}_0$  bağımsız değişken ve  $x$  bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (1.2.2)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.  $f$  bir fonksiyon olmak üzere, (1.2.2) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.2.3)$$

formunda ise normal fark denklemi adını alır. Normal fark denklemi,  $g$  ve  $h$  fonksiyon olmak üzere,

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^{k-1} x(n)) \quad (1.2.4)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = h(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.2.5)$$

formlarında da yazılabilir (Soykan ve ark., 2017).

**Tanım 1.2.3.** Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir (Soykan ve ark., 2017).

**Tanım 1.2.4.**  $\mathbb{N}_0$  üzerinde tanımlı bir  $x(n)$  fonksiyonu her  $n \in \mathbb{N}_0$  için (1.2.2) denklemini sağlıyorsa, bu durumda  $x(n)$  fonksiyonuna  $\mathbb{N}_0$  üzerinde (1.2.2) denkleminin bir çözümü denir.  $k$ . mertebeden bir fark denkleminin,  $\varphi$  ve  $\psi$  fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(n, x(n), c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (1.2.6)$$

veya

$$x(n) = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (1.2.7)$$

şeklinde  $k$  tane  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  keyfi sabit içeren çözüme genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Soykan ve ark., 2017).

**Teorem 1.2.1.**  $I$  reel sayıların bir aralığı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.8)$$

fark denkleminin bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.5.** Eğer (1.2.8) denkleminde  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$  ise  $\bar{x}$  noktasına (1.2.8) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.6.** Eğer her  $n > 0$  için  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J$  iken  $x_n \in J$  olacak şekilde bir  $J \subseteq I$  alt aralığı varsa, bu  $J$  aralığına (1.2.8) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.7.** (1.2.8) denkleminin bir denge noktası  $\bar{x}$  olmak üzere;

- (i) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  olmak üzere, her  $\varepsilon > 0$  için  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$  iken her  $n \geq 1$  için  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası kararlıdır denir.
- (ii) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- (iii) Eğer her  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise  $\bar{x}$  denge noktasına çekim noktası denir.
- (iv) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve çekim noktası ise  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- (v) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.
- (vi) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$  ve bazı  $N \geq -k$  sayıları için  $|x_N - \bar{x}| \geq r$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.8.** (1.2.8) fark denkleminin bir çözümü  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  olsun. Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $n \geq -k$  için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $p$  periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif  $p$  tam sayısına da asal periyot denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.9.** Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü er geç  $p$  periyotludur denir ve  $p$  bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.10.**  $I$  reel sayıların bir aralığı,  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $i = 0, 1, \dots, k$  olmak üzere,  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  fonksiyonunun  $x_i$  lere göre kısmi türevlerinin  $\bar{x}$  denge noktasındaki değerleri

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (1.2.9)$$

olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.10)$$

denklemine (1.2.8) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir. (1.2.10) denkleminde elde edilen

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k q_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.2.11)$$

polinom denklemine ise (1.2.8) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

### **Teorem 1.2.2. (Linear Kararlılık Teoremi)**

(i) Eğer (1.2.11) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (1.2.11) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.11.** (1.2.8) denkleminin bir denge noktası  $\bar{x}$  olsun.  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından büyük veya eşit,  $x_{l-1} < \bar{x}$  ve  $x_{m+1} < \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde,  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından küçük,  $x_{l-1} \geq \bar{x}$  ve  $x_{m+1} \geq \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.12.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinin elemanlarının hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.13.**  $\{x_n - \bar{x}\}$  dizisi salınımlı ise  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $\bar{x}$  denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.2.14.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde her  $n$  için  $P \leq x_n \leq Q$  olacak şekilde  $P$  ve  $Q$  reel sayıları varsa  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Teorem 1.2.3.**  $I$  ile  $J$  birer reel sayı aralığı,  $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I$  ve  $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J$  sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her  $(x_{-i}, y_{-i}) \in I \times J$  başlangıç şartı ve  $n \in \mathbb{N}_0$  için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} &= g(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

fark denklem sisteminin bir tek  $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

**Tanım 1.2.15.** Eğer (1.2.12) denklem sisteminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}), \bar{y} = g(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}) \quad (1.2.13)$$

ise  $(\bar{x}, \bar{y})$  noktasına (1.2.12) sisteminin denge noktası denir.

(1.2.12) fark denklem sistemi

$$X_n = (x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k})^T, \quad F : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1}$$

ve

$$F \begin{pmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k-1} \\ g(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

olmak üzere,

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.15)$$

vektör formunda yazılabilir. Eğer (1.2.12) sistemi  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasına sahip ise (1.2.15) sisteminin denge noktasının  $\bar{X} = (\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y})^T$  şeklinde olduğu açıktır (Kocic ve Ladas, 1993).

Bu çalışmada, herhangi bir vektörün veya matrisin normu  $\|\dots\|$  ile ve (1.2.15) sisteminin bir başlangıç şartı  $X_0 \in I^{k+1} \times J^{k+1}$  şeklinde gösterilecektir.

**Tanım 1.2.16.** (1.2.15) sisteminin bir denge noktası  $\bar{X}$  olmak üzere;

(i) Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$  iken her  $n \geq 1$  için  $\|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  varsa  $\bar{X}$  denge noktası kararlıdır denir. Aksi takdirde,  $\bar{X}$  denge noktası kararsızdır.

(ii) Eğer  $\bar{X}$  denge noktası kararlı ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $X_n \rightarrow \bar{X}$  olacak şekilde  $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{X}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer  $n \rightarrow \infty$  iken  $X_n \rightarrow \bar{X}$  ise  $\bar{X}$  denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer  $\bar{X}$  denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası ise  $\bar{X}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır denir (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.2.15) fark denklem sisteminin  $\bar{X}$  denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi;  $F$  dönüşümünün  $\bar{X}$  denge noktasındaki Jacobian matrisi  $J_F$  olmak üzere,

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.16)$$

şeklindedir ve (1.2.15) sisteminin  $\bar{X}$  denge noktası civarındaki karakteristik polinomu  $a_0 > 0$  olmak üzere,

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2(k+1)} + a_1^{2k+1} \lambda + \dots + a_{2k+1} \lambda + a_{2(k+1)} \quad (1.2.17)$$

şeklinde yazılabilir (Kocic ve Ladas, 1993).

**Teorem 1.2.4.** (1.2.15) sisteminin bir denge noktası  $\bar{X}$  olsun. Eğer  $J_F$  Jacobian matrisinin tüm öz değerleri  $\bar{X}$  denge noktası için  $|\lambda| < 1$  açık birim diskinde ise  $\bar{X}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer öz değerlerden en az biri için  $|\lambda| > 1$  ise  $\bar{X}$  denge noktası kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir:

Deeba ve arkadaşları (1996);  $w, q, x_0$  bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = wx_n + q, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Deeba ve Korvin (1999);  $a, b, m, C_{-1}, C_0$  bulanık sayılar ve  $(C_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$C_{n+1} = C_n - abC_{n-1} + m, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemiştir. Bu denklem kandaki karbondioksit oranını belirleyen lineer olmayan bir modelin lineerleştirilmiş halidir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos (2002a);  $A, B, x_0$  bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, salınımlılığını, sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos (2002b);  $A$  bir bulanık sayı ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,  $m \in \{1, 2, \dots\}$  için

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}}, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelenmiştir.

Papaschinopoulos ve Stefanidou (2003);  $k \in \mathbb{N}_1$  ve  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  için  $p_i$  ler pozitif sabitler ve  $A_i$  ler ile  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{x_{n-i}^{p_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2005);  $k \in \mathbb{N}$  ve  $z_{-k}, z_{-k+1}, \dots, z_0$  başlangıç şartları ile  $\alpha, \beta$  pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$z_{n+1} = \max \left\{ \frac{\alpha}{z_n}, \frac{\alpha}{z_{n-1}}, \dots, \frac{\alpha}{z_{n-k}} \right\} \text{ ve } z_{n+1} = \max \left\{ \frac{\alpha}{z_n}, \frac{\beta}{z_{n-1}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denklemlerinin çözümlerini incelemiştir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006);  $k, m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $d = \max\{k, m\}$ ,  $i \in \{-d, -d+1, \dots, 0\}$  için  $x_i$  ler ve  $A_0, A_1$  pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_0}{x_{n-k}} + \frac{A_1}{x_{n-m}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Zhang ve arkadaşları (2012);  $A, B$  pozitif bulanık sayılar,  $x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n + x_{n-1}}{B + x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lineer olmayan bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Hatır ve arkadaşları (2014);  $A, B, x_0$  ve  $x_{-1}$  bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, sınırlılığını, salınımlı davranışını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

He ve arkadaşları (2014);  $(A_n)$  periyodik bir bulanık sayı dizisi ve  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $d = \max\{k, m\}$  için  $x_{-d}, x_{-d+1}, \dots, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_n}{x_{n-m}}, x_{n-k} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Zhang ve arkadaşları (2014);  $A, B$  ve  $x_0$  pozitif bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{A + x_n}{B + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Zhang ve arkadaşları (2015);  $A$  ve  $x_0, x_{-1}, x_{-2}$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

üçüncü mertebeden rasyonel bulanık fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, sürekliliğini ve global davranışını incelemiştir.

Khastan (2017);  $w, q$  pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_n = wx_{n-1} + q, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve global davranışını incelemiştir.

Wang ve arkadaşları (2017);  $A, B, C, D$  ve  $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}x_{n-2}}{D + Bx_{n-3} + Cx_{n-4}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve global davranışını incelemiştir.

Khastan (2018);  $\beta$  bir pozitif bulanık sayı ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \beta x_n (1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lojistik fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Lavanya ve Lovenia (2018);  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  için  $A_i, B_i$  ve  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar,  $p_i$  ler pozitif sabitler olmak üzere,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i x_n + x_{n-i}}{B_i x_{n-i}^{p_i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Rahman ve arkadaşları (2018);  $A, B$  ile  $x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{A + Bx_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden rasyonel bulanık fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Sun ve arkadaşları (2018);  $d = \max\{m, r\}$  için  $z_{-d}, z_{-d+1}, \dots, z_{-1}$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar ve  $(\alpha_n)$  periyodik bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$z_n = \max\left\{\frac{1}{z_{n-m}}, \frac{\alpha_n}{z_{n-r}}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Wang ve Zhang (2018);  $A, B, C$  ile  $x_0$  başlangıç şartı pozitif bulanık sayılar ve  $(x_n)$  bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + Bx_n e^{-Cx_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve pozitif denge noktasının kararlılığını incelemişlerdir.

Wang ve arkadaşları (2019);  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $A$  ve  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{A}{x_{n-1}}, \dots, \frac{A}{x_{n-(k-1)}}, x_{n-k} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Han ve arkadaşları (2020);  $m, k \in \mathbb{N}$  için  $C$  ve  $x_i$  ( $i \in \mathbb{Z}(-m-k, -1)$ ) başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_n = \max \left\{ C, \frac{x_{n-m-k}}{x_{n-m}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Sun ve arkadaşları (2020);  $k \in \mathbb{N}_1$  için  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin uygun koşullar için global asimptotik davranışını incelemişlerdir.

$$3. \quad u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}}{\beta + \gamma v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}^p} \quad \text{FARK DENKLEM SİSTEMİ}$$

Bu bölümde; Gümüş ve Soykan'ın 2016 yılında yayımlanmış olan “*Global character of a six-dimensional nonlinear system of difference equations*” başlıklı makalesi ele alınmıştır.

Bu çalışmada;  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p$  parametreleri ve  $u_{-i}, v_{-i}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}}{\beta + \gamma v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}^p} \quad (3.1)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

(3.1) fark denklem sistemi  $u_n = (\beta_1 / \gamma_1)^{1/p} x_n$ ,  $v_n = (\beta / \gamma)^{1/p} y_n$ ,  $r = \alpha / \beta$ ,  $s = \alpha_1 / \beta_1$  değişken değiştirmeleri ile

$$x_{n+1} = \frac{rx_{n-1}}{1 + y_{n-2}^p}, \quad y_{n+1} = \frac{sy_{n-1}}{1 + x_{n-2}^p}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir.

**Teorem 3.1.** (3.2) fark denklem sisteminin denge noktaları için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i)  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (0, 0)$  her zaman (3.2) fark denklem sisteminin denge noktasıdır.
- (ii) Eğer  $r > 1$  ve  $s > 1$  ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = ((s-1)^{1/p}, (r-1)^{1/p})$  denge noktasına sahiptir.
- (iii) Eğer  $r > 1$  ve  $s = 1$  ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (0, (r-1)^{1/p})$  denge noktasına sahiptir.
- (iv) Eğer  $r = 1$  ve  $s > 1$  ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = ((s-1)^{1/p}, 0)$  denge noktasına sahiptir.

- (v) Eğer  $r \in (0,1)$ ,  $s=1$  ve  $1/p$  bir pozitif çift sayı ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_4, \bar{y}_4) = (0, (r-1)^{1/p})$  denge noktasına sahiptir.
- (vi) Eğer  $r=1$ ,  $s \in (0,1)$  ve  $1/p$  bir pozitif çift sayı ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_5, \bar{y}_5) = ((s-1)^{1/p}, 0)$  denge noktasına sahiptir.
- (vii) Eğer  $r, s \in (0,1)$  ve  $1/p$  bir pozitif çift sayı ise (3.2) fark denklem sistemi  $(\bar{x}_6, \bar{y}_6) = ((s-1)^{1/p}, (r-1)^{1/p})$  denge noktasına sahiptir.

**Teorem 3.2.**

- (i) Eğer  $r < 1$  ve  $s < 1$  ise  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  sıfır denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- (ii) Eğer  $r > 1$  ve  $s > 1$  ise  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  sıfır denge noktası kararsızdır.

**Teorem 3.3.**

- (i) Eğer  $r > 1$  ve  $s > 1$  ise  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  pozitif denge noktası kararsızdır.
- (ii) Eğer  $r < 1$ ,  $s < 1$  ve  $1/p$  bir pozitif çift sayı ise  $(\bar{x}_6, \bar{y}_6)$  pozitif denge noktası kararsızdır.

**Teorem 3.4.** Eğer  $r < 1$  ve  $s < 1$  ise  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır.

**Teorem 3.5.** Eğer  $r, s \in (1, \infty)$  ise (3.2) fark denklem sistemi sınırsız çözümlere sahiptir.

$$4. \quad z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^p} \quad \text{BULANIK FARK DENKLEMİ}$$

Bu bölümde; başlangıç şartları ile  $A$  birer pozitif bulanık sayı,  $(z_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi ve  $p$  bir tam sayı olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^p}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1)$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

**Lemma 4.1.**  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sürekli bir fonksiyon ve  $A, B, C$  bulanık sayılar ise her  $\alpha \in (0,1]$  için  $[f(A,B,C)]_\alpha = f([A]_\alpha, [B]_\alpha, [C]_\alpha)$  dir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

**Teorem 4.1.**  $A$  ve  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar ise (4.1) denkleminin bir tek pozitif  $(z_n)$  çözümü vardır.

**İspat.**  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları için (4.1) denklemini sağlayan bir  $(z_n)$  pozitif bulanık sayı dizisinin var olduğunu kabul edelim.  $\alpha \in (0,1]$  ve  $n = -2, -1, 0, \dots$  için

$$[z_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \quad (4.2)$$

ve

$$[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}] \quad (4.3)$$

olsun. Bu durumda, (4.1)-(4.3) ve Lemma 4.1 den

$$[z_{n+1}]_\alpha = [L_{n+1,\alpha}, R_{n+1,\alpha}]$$

$$= \left[ \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^p} \right]_\alpha = \frac{[A]_\alpha [z_{n-1}]_\alpha}{[1+z_{n-2}^p]_\alpha} = \frac{[A_{l,\alpha} L_{n-1,\alpha}, A_{r,\alpha} R_{n-1,\alpha}]}{[1+L_{n-2,\alpha}^p, 1+R_{n-2,\alpha}^p]} = \left[ \frac{A_{l,\alpha} L_{n-1,\alpha}}{1+R_{n-2,\alpha}^p}, \frac{A_{r,\alpha} R_{n-1,\alpha}}{1+L_{n-2,\alpha}^p} \right]$$

olup,  $n \in \mathbb{N}_0$  ve  $\alpha \in (0,1]$  için

$$L_{n+1,\alpha} = \frac{A_{l,\alpha} L_{n-1,\alpha}}{1 + R_{n-2,\alpha}^p}, R_{n+1,\alpha} = \frac{A_{r,\alpha} R_{n-1,\alpha}}{1 + L_{n-2,\alpha}^p} \quad (4.4)$$

elde edilir.  $j = -2, -1, 0$  olmak üzere,  $(L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha})$  başlangıç şartları ve  $\alpha \in (0,1]$  için (4.4) sisteminin bir tek  $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$  çözümünün var olduğu açıktır.

(4.4) sisteminin çözümü  $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$  olmak üzere,  $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$  nin  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları için (4.1) denkleminin  $(z_n)$  çözümünü belirlediğini, yani  $n = -2, -1, 0, \dots$  ve  $\alpha \in (0,1]$  için

$$[z_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \quad (4.5)$$

olduğunu ispat edelim:

$A$  ve  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olduğundan  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$  ve  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  iken  $j = -2, -1, 0$  için

$$\begin{aligned} 0 < A_{l,\alpha_1} &\leq A_{l,\alpha_2} \leq A_{r,\alpha_2} \leq A_{r,\alpha_1} \\ 0 < L_{j,\alpha_1} &\leq L_{j,\alpha_2} \leq R_{j,\alpha_2} \leq R_{j,\alpha_1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

yazılabilir.  $n \in \mathbb{N}$  için

$$L_{n,\alpha_1} \leq L_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_1} \quad (4.7)$$

olduğunu tümevarım ile ispat edelim. (4.6) dan  $n = -2, -1, 0$  için (4.7) nin doğru olduğu açıktır. Bu durumda, (4.7) nin  $k \in \{1, 2, \dots\}$  ve  $n \leq k$  için doğru olduğunu kabul edip,  $n = k + 1$  için doğru olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (4.4), (4.6) ve (4.7) den

$$L_{k+1,\alpha_1} = \frac{A_{l,\alpha_1} L_{k-1,\alpha_1}}{1 + R_{k-2,\alpha_1}^p} \leq \frac{A_{l,\alpha_2} L_{k-1,\alpha_2}}{1 + R_{k-2,\alpha_2}^p} = L_{k+1,\alpha_2},$$

$$L_{k+1,\alpha_2} = \frac{A_{l,\alpha_2} L_{k-1,\alpha_2}}{1 + R_{k-2,\alpha_2}^p} \leq \frac{A_{r,\alpha_2} R_{k-1,\alpha_2}}{1 + L_{k-2,\alpha_2}^p} = R_{k+1,\alpha_2}$$

ve

$$R_{k+1,\alpha_2} = \frac{A_{r,\alpha_2} R_{k-1,\alpha_2}}{1 + L_{k-2,\alpha_2}^p} \leq \frac{A_{r,\alpha_1} R_{k-1,\alpha_1}}{1 + L_{k-2,\alpha_1}^p} = R_{k+1,\alpha_1}$$

olup,

$$L_{k+1,\alpha_1} \leq L_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_1} \quad (4.8)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.7) sağlanır. (4.4) ten  $\alpha \in (0,1]$  için

$$L_{1,\alpha} = \frac{A_{l,\alpha} L_{-1,\alpha}}{1 + R_{-2,\alpha}^p}, \quad R_{1,\alpha} = \frac{A_{r,\alpha} R_{-1,\alpha}}{1 + L_{-2,\alpha}^p} \quad (4.9)$$

elde edilir.  $A$  ve  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olduğundan  $A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}, L_{-1,\alpha}, R_{-1,\alpha}, L_{-2,\alpha}, R_{-2,\alpha}$  sol süreklidir. Dolayısıyla,  $L_{1,\alpha}$  ve  $R_{1,\alpha}$  nın sol sürekli olduğu görülmektedir. İterasyonla,  $n \in \mathbb{N}$  için  $L_{n,\alpha}$  ve  $R_{n,\alpha}$  nın sol sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi,  $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]}$  kümesinin kompakt olduğunu gösterelim: Bunun için  $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$  nin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.  $n=1$  olsun.  $A$  ve  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olduğundan  $j = -2, -1, 0$  için

$$[A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}] \subset [M_A, N_A] \text{ ve } [L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha}] \subset [M_j, N_j] \quad (4.10)$$

olacak şekilde  $M_A, N_A, M_j, N_j > 0$  sabitleri mevcuttur. (4.9) ve (4.10) dan  $\alpha \in (0,1]$  için

$$[L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}] \subset \left[ \frac{M_A M_{-1}}{1 + N_{-2}^p}, \frac{N_A N_{-1}}{1 + M_{-2}^p} \right] \quad (4.11)$$

elde edilir. Buradan,  $\alpha \in (0,1]$  için

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}] \subset \left[ \frac{M_A M_{-1}}{1 + N_{-2}^p}, \frac{N_A N_{-1}}{1 + M_{-2}^p} \right] \quad (4.12)$$

olduğu açıktır. (4.12) den  $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}]}$  nin kompakt ve  $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}]} \subset (0, \infty)$  olduğu görülür. İterasyonla,  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \text{ kompakt ve } \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \subset (0, \infty) \quad (4.13)$$

olduğu ispat edilebilir. (4.7), (4.13) ve  $L_{n,\alpha}$ ,  $R_{n,\alpha}$  sol sürekli olduğundan  $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$  (4.5) te tanımlanan  $(z_n)$  pozitif bulanık sayı dizisini belirler.

Son olarak,  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları için  $(z_n)$  in (4.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterelim: Her  $\alpha \in (0,1]$  için

$$[z_{n+1}]_\alpha = [L_{n+1,\alpha}, R_{n+1,\alpha}] = \left[ \frac{A_{l,\alpha} L_{n-1,\alpha}}{1 + R_{n-2,\alpha}^p}, \frac{A_{r,\alpha} R_{n-1,\alpha}}{1 + L_{n-2,\alpha}^p} \right] = \left[ \frac{Az_{n-1}}{1 + z_{n-2}^p} \right]_\alpha$$

olduğundan  $(z_n)$  pozitif bulanık sayı dizisi (4.1) denkleminin çözümüdür.  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları için (4.1) denkleminin  $(z_n)$  den farklı bir  $(\tilde{z}_n)$  çözümünün var olduğunu kabul edelim.  $\alpha \in (0,1]$  ve  $n \in \mathbb{N}_0$  için

$$[\tilde{z}_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \quad (4.14)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (4.5) ve (4.14) ten  $n = -2, -1, 0, \dots$  ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $[z_n]_\alpha = [\tilde{z}_n]_\alpha$  olduğu dolayısıyla,  $(z_n) = (\tilde{z}_n)$  olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

**Lemma 4.2.** Eğer  $r, s \in (0,1)$  ise (3.2) sisteminin bütün pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

**İspat.**  $r, s \in (0,1)$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $n \in \mathbb{N}_0$  için (3.2) sisteminden

$$0 < x_{n+1} = \frac{rx_{n-1}}{1 + y_{n-2}^p} < rx_{n-1} < x_{n-1} \quad (4.15)$$

ve

$$0 < y_{n+1} = \frac{sy_{n-1}}{1 + x_{n-2}^p} < sy_{n-1} < y_{n-1} \quad (4.16)$$

olduğu görülür. (4.15) ve (4.16) dan  $n \geq 1$  ve  $i = 0,1$  için

$$0 < x_{2n-i} < x_{-i} \text{ ve } 0 < y_{2n-i} < y_{-i} \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.** (4.1) denklemini için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A_{r,\alpha} < 1$  ise (4.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

(ii) Eğer  $A_{l,\bar{\alpha}} > 1$  olacak şekilde bir  $\bar{\alpha} \in (0,1]$  varsa (4.1) denklemini sınırsız çözümlere sahiptir.

**İspat.** (i)  $(z_n)$  bulanık sayı dizisinin (4.1) denkleminin (4.5) i sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. (4.4) ve Lemma 4.2 den  $T_\alpha = \max\{R_{-1,\alpha}, R_{0,\alpha}\}$  olmak üzere,  $n \geq 1$  için

$$[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \subset [0, T_\alpha] \quad (4.18)$$

elde edilir.  $(z_n)$  bir pozitif bulanık sayı dizisi olduğundan her  $\alpha \in (0,1]$  için

$$T_\alpha \leq T \quad (4.19)$$

olacak şekilde bir  $T > 0$  sabiti mevcuttur. Dolayısıyla,  $n \geq 1$  için  $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \subset [0, T]$  yazılabilir. Buradan,  $n \geq 1$  için  $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \subset [0, T]$  ve  $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \subseteq [0, T]$  elde edilir. Böylece (i) nin ispatı tamamlanır.

(ii)  $A_{l,\bar{\alpha}} > 1$  olacak şekilde bir  $\bar{\alpha} \in (0,1]$  nin var olduğunu kabul edelim. Eğer  $n = -2, -1, \dots$  için  $A_{l,\bar{\alpha}} = r$ ,  $A_{r,\bar{\alpha}} = s$ ,  $L_{n,\bar{\alpha}} = x_n$ ,  $R_{n,\bar{\alpha}} = y_n$  ise (4.4) sistemine Teorem 3.5 uygulanabilir. Eğer  $r = A_{l,\bar{\alpha}} > 1$  olacak şekilde bir  $\bar{\alpha} \in (0,1]$  mevcut ise o zaman  $\bar{\alpha} = \alpha$  için (4.4) sisteminin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \quad (4.20)$$

olacak şekilde  $(x_n, y_n)$  çözümü vardır. Dahası,  $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$  başlangıç şartları  $x_{-j} < y_{-j}$  eşitsizliğini sağlarsa,  $j = -2, -1, 0$  için

$$\begin{aligned} [z_j]_\alpha &= [L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha}], \quad \alpha \in (0,1] \\ [z_j]_{\bar{\alpha}} &= [L_{j,\bar{\alpha}}, R_{j,\bar{\alpha}}] = [x_j, y_j] \end{aligned} \quad (4.21)$$

olacak şekilde  $z_{-j}$  pozitif bulanık sayıları bulunabilir.  $z_{-2}, z_{-1}, z_0$  başlangıç şartları ve  $\alpha \in (0,1]$  için  $[z_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$  olmak üzere,  $(z_n)$  in (4.1) denkleminin çözümü olduğunu kabul edelim. (4.21) sağlanıyorsa ve (4.4) sisteminin çözümü  $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$  ise

$$[z_n]_{\bar{\alpha}} = [L_{n,\bar{\alpha}}, R_{n,\bar{\alpha}}] = [x_n, y_n] \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu durumda; (4.20), (4.22) den ve

$$\|z_n\| = \sup \max \left\{ |L_{n,\alpha}|, |R_{n,\alpha}| \right\} \geq \max \left\{ |L_{n,\bar{\alpha}}|, |R_{n,\bar{\alpha}}| \right\} = R_{n,\bar{\alpha}} \quad (4.23)$$

olduğundan her  $\alpha \in (0,1]$  için  $(z_n)$  in sınırsız olduğu görülür. Böylece (ii) nin ispatı da tamamlanır.

**Teorem 4.3.** Eğer her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A_{r,\alpha} < 1$  ise (4.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sifira yakınsar.

**İspat.** (4.1) denkleminin (4.2) yi sağlayan bir çözümü  $(z_n)$  ve her  $\alpha \in (0,1]$  için  $A_{r,\alpha} < 1$  olsun. Bu durumda, (4.4) sistemine Teorem 3.4 uygulanabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\alpha} = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.24) ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(z_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \max \left\{ |L_{n,\alpha} - 0|, |R_{n,\alpha} - 0| \right\} \right\} = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

#### 4.1. Nümerik Örnekler

Bu kısımda,  $p = 1$  için  $A$  parametresinin farklı değerleri dikkate alınarak (4.1) bulanık fark denklemi için bazı nümerik örnekler verilmiştir. Örneklerde kullanılacak olan başlangıç şartları

$$z_{-2}(x) = \begin{cases} 20x - 8, & 0.40 \leq x \leq 0.45 \\ 10 - 20x, & 0.45 \leq x \leq 0.50 \end{cases}$$

$$z_{-1}(x) = \begin{cases} \frac{5x - 0.50}{2}, & 0.10 \leq x \leq 0.50 \\ \frac{4.50 - 5x}{2}, & 0.50 \leq x \leq 0.90 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$z_0(x) = \begin{cases} 20x - 6, & 0.30 \leq x \leq 0.35 \\ 8 - 20x, & 0.35 \leq x \leq 0.40 \end{cases}$$

şeklinde olup, (4.1.1) den her  $\alpha \in (0,1]$  için

$$[z_{-2}]_\alpha = \left[ \frac{\alpha + 8}{20}, \frac{10 - \alpha}{20} \right]$$

$$[z_{-1}]_\alpha = \left[ \frac{2\alpha + 0.50}{5}, \frac{4.50 - 2\alpha}{5} \right] \quad (4.1.2)$$

$$[z_0]_\alpha = \left[ \frac{\alpha + 6}{20}, \frac{8 - \alpha}{20} \right]$$

ve

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [z_{-2}]_\alpha} = [0.40, 0.50]$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [z_{-1}]_\alpha} = [0.10, 0.90] \quad (4.1.3)$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [z_0]_\alpha} = [0.30, 0.40]$$

elde edilir.

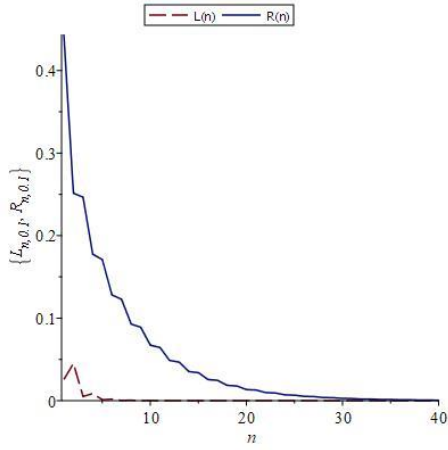
**Örnek 4.1.1.** (4.1.1) de verilen başlangıç şartları ve

$$A = \begin{cases} 4x-1, & 0.25 \leq x \leq 0.50 \\ 3-4x, & 0.50 \leq x \leq 0.75 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

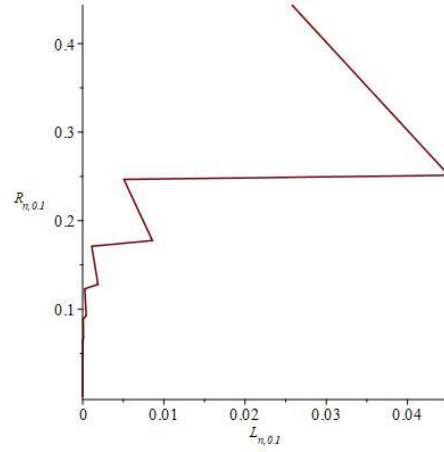
$$[A]_{\alpha} = \left[ \frac{\alpha+1}{4}, \frac{3-\alpha}{4} \right] \quad (4.1.5)$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]_{\alpha}} = [0.25, 0.75] \quad (4.1.6)$$

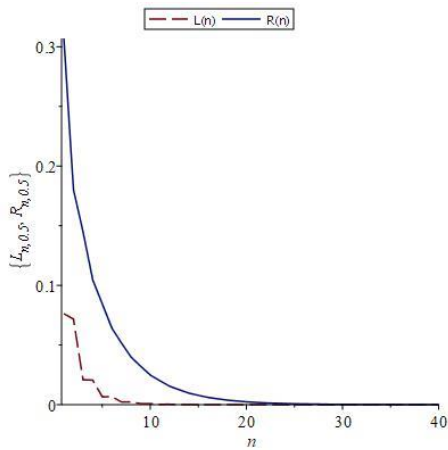
parametresi için (4.1) denkleminin çözümleri sıfıra yakınsar.



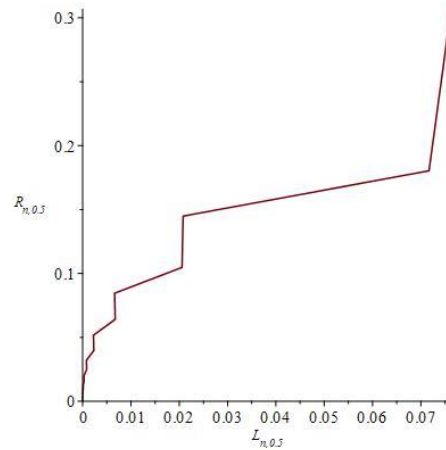
Şekil 4.1.1.  $\alpha = 0.1$



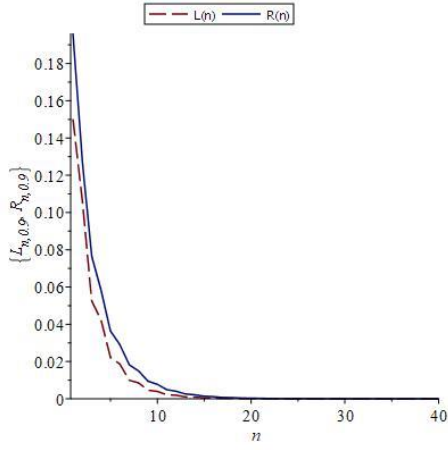
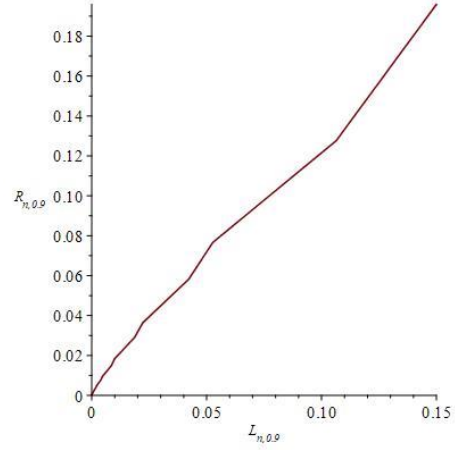
Şekil 4.1.2.  $\alpha = 0.1$



Şekil 4.1.3.  $\alpha = 0.5$



Şekil 4.1.4.  $\alpha = 0.5$

Şekil 4.1.5.  $\alpha = 0.9$ Şekil 4.1.6.  $\alpha = 0.9$ 

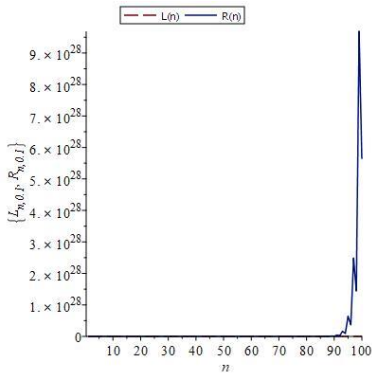
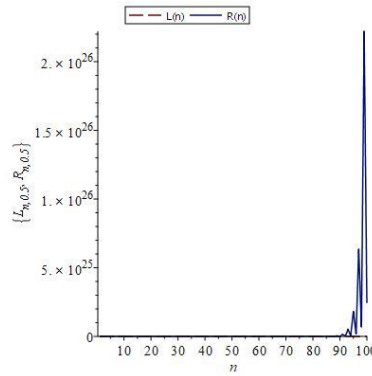
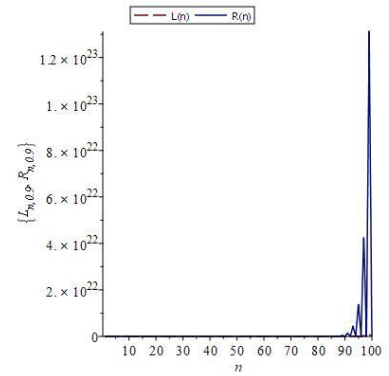
**Örnek 4.1.2.** (4.1.1) de verilen başlangıç şartları ve

$$A = \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

$$[A]_{\alpha} = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \quad (4.1.8)$$

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]_{\alpha} = [2, 4] \quad (4.1.9)$$

parametresi için (4.1) denklemini sınırsız çözümlere sahiptir.

Şekil 4.1.7.  $\alpha = 0.1$ Şekil 4.1.8.  $\alpha = 0.5$ Şekil 4.1.9.  $\alpha = 0.9$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; literatürde var olan bulanık fark denklemlerinin ışığında  $A$  parametresi ve başlangıç şartları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1 + z_{n-2}^p}, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış, bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, çözümlerin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen teorik sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda, bu çalışmada incelenen denklemdeki parametre sayısı ve merteye artırılarak daha genel denklemler tanımlanabilir. Tanımlanan yeni denklemlerin çözümlerinin varlığı ve çözümlerin davranışı incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Bede, B., 2013, *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer, New York.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, *Fark Denklemleri*, Gazi Kitapevi, Ankara.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Deeba, E. Y., De Korvin, A. and Koh, E. L., 1996, A fuzzy difference equation with an application, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2, 365-374.
- Deeba, E. Y. and De Korvin, A., 1999, Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO<sub>2</sub> level in the blood, *Applied Mathematics Letters*, 12, 33-40.
- Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, World Scientific, Singapore.
- Gümüş, M. and Soykan, Y., 2016, Global character of a six-dimensional nonlinear system of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 6842521, 7 pages.
- Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation  $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$ , *Advances in Difference Equations*, 673, 10 pages.
- Hatir, E., Mansour, T. and Yalcinkaya, İ., 2014, On a fuzzy difference equation, *Utilitas Mathematica*, 93, 135-151.
- He, Q., Tao, C., Sun, T., Liu, X. and Su, D., 2014, Periodicity of the positive solutions of a fuzzy max-difference equation, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 760247, 4 pages.
- Khastan, A., 2017, New solutions for first order linear fuzzy difference equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 156-166.
- Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.
- Klir, G. and Yuan, B., 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Kluwer Academic Publishers, London.
- Lavanya, A. P. and Lovenia, J. D. L., 2018, Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations, *Tamsui Oxford Journal of Informational and Mathematical Sciences*, 32(2), 27-37.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation  $x_{n+1} = A + B / x_n$ , *Soft Computing*, 6, 456-461.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation  $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$ , *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.

Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2005, Behavior of the positive solutions of fuzzy max-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2005, 153-172.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max-difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.

Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation  $z_n = \max\{1 / z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$ , *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.

Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation  $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$ , *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.

Wang, C., Su, X., Liu, P., Hu, X. and Li, R., 2017, On the dynamics of a five-order fuzzy difference equation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 3303-3319.

Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.

Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications*, 7(2), 13-18.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2012, Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9, 1-12.

Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2014, On first-order fuzzy Ricatti difference equation, *Information Sciences*, 270, 226-236.

Zhang, Q., Liu, J. and Luo, Z., 2015, Dynamical behavior of a third-order rational fuzzy difference equation, *Advances in Difference Equations*, 2015, 18 pages.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Vildan ÇALIŞKAN  
**Uyruğu** : T.C  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Meram / Konya, 1995  
**Telefon** : 0506 119 81 07  
**e-mail** : caliskanv95@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Atatürk Anadolu Kız Meslek Lisesi, Meram, Konya	2014
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2018
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2021

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2017-2018	Yüzde Yüz Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2018-2019	Yıldız Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2019-	Bilgi Dünyası Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni

### UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

### YABANCI DİLLER

İngilizce (Orta Düzey)