T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİSİ ÜZERİNE BİR META – SENTEZ ÇALIŞMASI

DİLEK TÜRKOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

Konya – 2017

KONYA

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	**Dilek TÜRKOĞLU**
	Numarası	**128302051001**
	Ana Bilim / Bilim Dalı	**İlköğretim / Matematik Eğitimi**
	Programı	**Tezli Yüksek Lisans**
	Tezin Adı	**Cebirsel Düşünme Becerisi Üzerine Bir Meta – Sentez Çalışması**

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Dilek TÜRKOĞLU

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi
A1-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Telefon: (0 332) 324 7660 Faks : 0 332 324 5510
Elektronik Ağ: www.konya.edu.tr E-Posta: ebil@konya.edu.tr

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

KONYA

YÜKSEK LİSANS TEZ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	**Dilek TÜRKOĞLU**
	Numarası	**128302051001**
	Ana Bilim/Bilim Dalı	**İlköğretim / Matematik Eğitimi**
	Programı	**Tezli Yüksek Lisans**
	Tez Adı	**Cebirsel Düşünme Becerisi Üzerine Bir Meta – Sentez Çalışması**

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan **Cebirsel Düşünme Becerisi Üzerine Bir Meta – Sentez Çalışması** başlıklı bu çalışma **07 / 09 / 2017** tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR	**Danışman**	
Doç. Dr. Erhan ERTEKİN	**Üye**	
Doç. Dr. Mustafa DOĞAN	**Üye**	

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi
A1-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Telefon: (0 332) 324 7660 Faks : 0 332 324 5510
Elektronik Ağ: www.konya.edu.tr E-Posta: ebil@konya.edu.tr

ÖZET

Cebirsel düşünme üzerine son yıllarda yapılan araştırmaların çoğunda cebirsel düşünme ve işlem becerilerinin yetersiz olduğu görülmüştür. Bu durum ise cebirsel düşünme becerisi üzerine araştırma yapmaya yöneltmiştir. Araştırmanın amacı; cebirsel düşünme becerisi ile ilgili yapılan çalışmaları, meta-sentez yöntemi ile cebirsel düşünmede ön koşul beceriler ve kritik süreç açısından incelemektir. Bu bağlamda, Yüksek Öğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi resmi sitesinin veri tabanından "cebir" ve "cebirsel düşünme" anahtar kelimeleri kullanılarak yapılan tarama sonucu yayınlandığı 2005-2016 yılları arasında cebir ile ilgili erişime açık 472 yüksek lisans tezi ile erişime açık 160 doktora tezine, Eğitim Araştırma ve Bilgi Merkezi olan ERIC veri tabanından "algebraic thinking" anahtar kelimesi aranarak erişime açık olan 59 teze, "algebra" kelimesi aranarak ise erişime açık 958 teze, Ulusal Akademik Ağ ve Bilgi Merkezi olan ULAKBİM resmi sitesinin veri tabanından "cebirsel düşünme" anahtar kelimesi kullanılarak 55 teze ulaşılmıştır. Ulaşılan tezlerden dahil edilme kriterlerine uygun olan 23 çalışma incelenmiş ve sonuçlar araştırmacı önerileriyle desteklenerek sunulmuştur. İncelenen çalışmaların büyük kısmında cebirsel düşünmede, ön koşul beceriler için örüntü genellemelerinin ve kritik süreç olarak da 4-12 yaş aralığının belirtildiği görülmüştür. Bu nedenle, cebirsel düşünme becerisinin gelişimi için okul öncesinden itibaren cebirsel düşünmenin temeli olan örüntü genelleme etkinlikleriyle cebire giriş yapılması yararlı olacaktır. Ayrıca okul öncesi ve ilkokul müfredatlarında örüntülere kavramsal ve işlemsel anlamayı geliştirecek şekilde kapsamlı olarak yer verilmelidir.

Anahtar Kelimeler: Cebir, Cebirsel Düşünme, Örüntü, Meta-Sentez Metodu.

ABSTRACT

Algebraic thinking skills and algebraic achievements seem to be inadequate in the most of the researches in recent years. This leds to the research into algebraic thinking skills. Purpose of research, examine algebraic thinking in terms of prerequisite skills and critical process. In this study, meta-synthesis method was used. In this context, it has been reached published 472 masters dissertation and 160 doctoral dissertation related to algebra which published between 2005 and 2016 by using keywords "algebra" and "algebraic thinking" from the database of Council of Higher Education National Science Center. By searching key word "algebraic thinking" from database ERIC reached 59 dissertation and by searching key word “algebra” reached 958 dissertation. Using key word "algebraic thinking" from database ULAKBİM reached 55 dissertation. 23 research which suitable for inclusion criteria in study are examined and presented with support of researcher. In the large part of studies examined, it has been found that both pattern generalizations for prerequisite skills and critical period is between 4-12 years for algebraic thinking. To improve algebraic thinking skills, it will be useful to begin algebra with pattern activities from beginning of the pre-school because pattern activities have important role in development of algebraic thinking. Therefore, patterns should be comprehensively included in pre-school and primary school curriculum to develop both conceptual and procedural meaning.

Key Words: Algebra, Algebraic Thinking, Pattern, Meta-Synthesis Method.

ÖNSÖZ

Matematiğin çalışma alanlarından birisi olan cebir, birkaç bin yıldır öğrenmenin konusu olmuştur. Çalışma konumuz olan cebirsel düşünme, matematik öğretiminde popüler araştırma alanlarından birisidir. Bu konu ile ilgili çalışmaların artarak devam ettiğini görmekteyiz.

Bu araştırma ile cebirsel düşünme becerisini kritik süreç ve cebirsel düşünmede ön koşul beceriler açısından inceleyerek literatüre katkıda bulunmak amaçlanmıştır. Çalışma sonuçları araştırmacı önerileriyle desteklenerek verilmiştir.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; araştırmanın amacı ve önemi ile araştırmanın problemi ve alt problemlerine yer verilmiştir. İkinci bölümde; cebir, cebirin yapısı, cebirsel düşünme ile ilgili kuramsal bilgiler ve literatür taraması yer almaktadır. Üçüncü bölümde araştırmanın yöntemi; dördüncü bölümde araştırma bulguları; beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler bulunmaktadır.

Araştırmamın her anında bana destek olan ve yardımlarını hiç esirgemeyen değerli tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca yaşamımın her döneminde olduğu gibi yüksek lisans eğitimimde ve tez çalışmalarımda beni destekleyen değerli babama, anneme ve eşime çok teşekkür ederim.

Dilek TÜRKOĞLU
AĞUSTOS – 2017

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Matematiksel düşünme, matematiği öğrenmede önemli rol oynamaktadır. Matematiğin; aritmetik, cebir, geometri ve olasılık gibi alanlarına göre matematiksel düşünme farklı biçimler almaktadır (Dindyal, 2003). Düşünme ise öğretilebilen zihinsel bir süreç olup, muhakeme etme becerisidir (Çubukcu, 2004). Matematik soyut bir bilim olduğundan soyutlama yapabilmeyi gerektiren cebir ile tam anlamını bulmaktadır (Altun, 2005).

Cebir, kelime anlamıyla ayrık parçaları birleştirmektir. Bundan dolayı farklı bilim dallarını bir araya getirebilme özelliğine sahiptir. Cebirin birçok farklı görevi vardır. Cebir; bazen sembolik bir dil, bazen denklem çözmede bir araç, bazen de öğretim programında bir öğrenme alanıdır (Dede ve Argün, 2003: 180). Bu yüzden bilim adamları cebirin farklı birçok tanımını yapmışlardır. Kieran (1992)'a göre cebir; matematiksel durumları temsil etmek için kullanılan bir araçtır. Lacampagne (1995) ve Driscoll (1999)'e göre matematiksel durumları ifade etme dili olan cebir, Vance (1998)'e göre ise matematiksel düşüme yollarından biridir. Vance'ın bu tanımı ile birlikte, cebirin anlamını kapsayan cebirsel düşünme kavramı ortaya çıkmıştır.

Matematik için kritik öneme sahip olan cebirsel düşünme; sembolik ifadelerin gösterimlerini kullanma ve açıklama, matematiksel durumlarda modelleri kullanma, muhakeme etme, değişkenleri anlama, gösterimler arasında dönüşüm yapma gibi becerileri içerir (Kaf, 2007). Trybulski (2007)'e göre cebirsel düşünme; cebirsel ifadelerin ve matematiksel fonksiyonların manipulasyonlarını içeren işlemsel becerilerden oluşan cebirin önemli bir parçasıdır. Hawker ve Cowley (1997)'e göre cebirsel düşünme; örüntülerin gösterimini, yapılanmasını, genelleştirmelerle düşünmeyi gerektirir. Greenes ve Findell (1998)'e göre ise cebirsel düşünme; matematiksel durumları değişkenlerle ifade edebilmeyi, orantısal akıl yürütebilmeyi, örüntüleri genelleyebilmeyi, yeniden temsil edebilmeyi, fonksiyonları anlamayı içerir. Lawrence ve Hennessy (2002)'e göre cebirsel düşünme; durum ve olayları matematiksel dille açıklayabilme, tahmin edebilme ve yorumlayabilme için ihtiyaç duyulan anlayışlardan oluşur. Cebirsel düşünme; sadece cebir çalışmalarıyla değil matematiksel düşünmenin kullanıldığı problem çözme, çoklu gösterimlerden yararlanma ve akıl yürütme gibi birçok becerileri içermektedir (Çelik, 2007: 8).

Cebir ve cebirsel düşünme, gerçek yaşamda karşımıza çıkabilecek problemlerin çözümünden diğer bilimsel alanlarındaki problemlerin çözümleri de dahil olmak üzere birçok yerde kullanılmaktadır. Öğrencilerde cebirsel düşünmenin gelişimi, cebirde iyi bir alt yapı oluşturmakla yakından ilişkilidir (Yenilmez ve Teke, 2008: 232). Cebir alanındaki gelişmeler, cebirsel düşünmenin gelişimini de desteklemekte ve etkilemektedir.

Cebirsel düşünme becerisinin cebir eğitiminde önemli yeri olmasına rağmen, ülkemizde cebirsel düşünmeye yönelik çalışmalara pek rastlanmamaktadır. Son yıllarda cebirsel düşünme üzerine yönelik çalışmalara yönelinilmekle birlikte halen cebiri anlama ve cebirsel düşünme becerisinde sıkıntılar yaşanmaktadır (Baki, 1998).

1.1. Problem Durumu

Araştırmanın problemi; "Cebirsel düşünme becerisinin gelişiminde önemli rol oynayan faktörler nelerdir?" biçiminde ifade edilebilir.

1.2. Alt Problemler

Araştırmanın problemi aşağıdaki gibi alt problemlere ayrılabilir:

- Cebirsel düşünme becerilerinin ön koşul yeterlilikleri ve bunlarla bağlantılı kavram yanılgıları nelerdir?
- Cebirsel düşünme becerisinin kazanımı için kritik süreç hangi yaş aralığına karşılık gelmektedir?
- Cebirsel düşünme becerisini kazandırmada cebirsel kavramlar müfredatta hangi yaş aralıklarında ve hangi sırada verilmelidir?

1.3. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Günlük hayatta cebirsel düşünmenin sınırlı kullanıma sahip olduğu düşünülse de cebirsel düşünme matematiğin tamamı üzerinde etkili olan unsurlardan biridir. Cebirsel düşünme; yaşamda karşımıza çıkabilecek problemlerin çözümlerinden, diğer bilimlerdeki problemlerin çözümlerine kadar her yerde kullanılmaktadır.

Cebirsel düşünme, cebir için önemli olan soyut düşünme kapısını aralamakla kalmaz, aynı zamanda diğer bilimlere de katkıda bulunur.

İncelenen çalışmalarda; öğrencilerde cebirsel düşünme becerisinin ve cebirsel işlem becerilerinin yetersiz olduğu anlaşılmaktadır. Öğrencilerde cebirsel kavramların oluşmasıyla ilgili yaşanan zorluklar üzerine çok sayıda türkçe çalışmanın olmasına karşılık, cebirsel düşünme üzerine yapılan çalışmalar daha çok uluslararası literatürde görülmektedir. Bu bağlamda, cebirsel düşünme becerisi önemli bir araştırma konusu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Araştırmanın amacı; cebirsel düşünme becerisi ile ilgili yapılan çalışmalardan dahil edilenleri, cebirsel düşünmede ön koşul beceriler ve kritik süreç açısından meta-sentez yöntemi ile incelemektir. İnceleme sonuçları, araştırmacı önerisiyle desteklenerek verilecektir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Cebirin Tanımı

Cebir için yapılan bazı tanımlar literatürden alınmış ve kronolojik olarak aşağıda verilmiştir.

Booth (1986)'a göre milattan önce 1800 yıllardan beri var olan cebirin temel amacı; ilişkilerin ve işlemlerin zihinsel süreçleri ile ilgilenmek, problemleri zihinsel süreçlerle ilişkilendirerek çözebilmek ve bilinenlerden yola çıkarak yeni ilişkiler geliştirmektir.

Kieran (1992) cebirin; sayısal ilişki ve özellikleri gösteren, nicelikleri ve sayıları sembollerle temsil edebilen, denklem çözümlerini sembolleştiren ve hesaplamada yapabilen bir araç olduğunu belirtmiştir.

Sutherland ve Rojano (1993)'a göre ise cebir; matematiksel durum ve düşünceleri açıklamak için kullanılan sembolik bir dildir.

Harvey ve ark. (1995) cebiri; sayıların toplamlarını, çarpımlarını ve kuvvetlerini manipüle etme sanatı olarak ifade etmiştir.

Sfard (1995) cebiri; sembollerle hesaplama yapma bilimi olarak tanımlamıştır.

Usiskin (1997) cebiri; bilinmeyenleri, formülleri, örüntüleri, yer tutucuları ve ilişkileri içeren beş ana bileşenden oluşan matematiksel bir dil olarak tanımlamıştır.

Vance (1998) ise cebiri; genelleştirilmiş aritmetik olarak tanımlamıştır.

MacGregor ve Stacey (1999) cebiri; niceliksel ilişkileri anlamak ve açıklayabilmek için kullanılan matematiksel bir dil olduğunu belirtmiştir.

Witzel ve ark. (2003) ise cebiri; soyutlama yapabilme yani soyut düşünceye giriş için ilk basamak olduğunu ifade etmişlerdir.

Baki (2008)'de cebiri; işlemleri kullanarak problem çözme, genelleme yapma, sayılar arası ilişkileri anlama ve soyut yapıları inceleme olarak tanımlamıştır.

Akkan (2009) ise cebiri; sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren, değişkenleri, örüntüleri ve sembolleri içeren matematiksel dil olarak tanımlamıştır.

Cebire ilişkin yapılan tanımların farklı olması, cebirin farklı görevlerinin olduğunu göstermektedir.

Örneğin; cebir sembolik bir dil olarak düşünüldüğünde; Sutherland ve Rojano (1993)'a göre, olay ve durumları açıklamak için kullanılan matematiksel bir dil olarak görülebilir. Bir öğrenme alanı olarak düşünüldüğünde ise cebire; öğrencilerin derste denklemleri çözebilme, sembol ve değişkenleri anlayabilmesi olarak bakılabilir. Kısacası cebir, günlük yaşamda hissedilebilecek şekilde vardır ve ileri matematiğe kapı açıcı konumdadır (Choike, 2000).

2.2. Cebirin İçeriği

Cebirin yapısının incelenmesi, cebiri anlayabilmek için önem taşımaktadır. Cebirin yapısı; cebirin dili ve cebirin içeriği biçiminde iki boyutta incelenebilir.

2.2.1. Cebirin Dili

Cebirin anlamsal yönünü, kullanılan sembolleri ve sembollerin anlamını içerir. Cebirin söz-dizimsel yönü ise kullanılan sembolün matematiksel işlevini belirtir (Wagner, 1981). Cebirin zor gelmesinin nedeni, kullanılan sembollerin anlamını bilmemek yani anlamsal yönünün zayıflığı olabilir (Philipp, 1992).

2.2.2. Cebirin İçeriği ve Tarihsel Gelişimi

Cebirin içeriğinin belirlenebilmesi için cebirin tarihsel gelişim sürecinin bilinmesi yararlı olabilir. Cebirin tarihsel gelişim süreci üç evrede incelenebilir. Şimdi bunları sırasıyla verelim.

2.2.2.1. Söz İle İfade Edilmesi

Bu aşamada, bilinmeyeni göstermek için sembol veya işaret kullanımı yoktur.

2.2.2.2. Sembol – Söz Karışımı İle İfade Edilmesi

Harfler; bilinmeyen nicelikler yerine kullanılmaktadır ve bu durum 3. yüzyıldan 17. yüzyıla kadar devam etmiş ve pek de değişmemiştir. Bu süre zarfında cebirciler, bilinmeyenleri göstermek için kullanılan harfleri tanımak için çalışmalar yapmışlardır (Kieran, 1992). Cebir; Harezmi tarafından bir bilim dalı olarak tanımlanmış ve onun El-Cebir isimli kitabının adından dolayı, Avrupada bu bilim dalının isminin algebr veya algebra olarak yerleşmesine neden olmuştur (Akın ve Desay, 1994; Stallings, 2000). Harezmi çalışmalarında daha çok cebirin söz basamağını kullanıp, sembol basamağından uzak durmuştur (Mankiewich, 2000).

2.2.2.3. Sembol İle İfade Edilmesi

Yunan ve Hintli matematikçilerin eserlerini inceleyen Müslüman matematikçilerin çalışmalarıyla sembol basamağı ortaya çıkmaya başlamıştır. Sembolik cebirde köklü değişiklik, 17. yüzyıldan sonra Avrupalı matematikçilerin Diophantus'un çalışmalarını inceleyip bilinmeyen nicelikler için kullanılan sembollerin bilinen nicelikler içinde kullanılmaya başlanması ile olmuştur. Daha sonra değişken kavramını içeren fonksiyon kavramı; ilk önce girdi - çıktı bağlantısını gösteren işlemsel bir yapı iken, daha sonra reel sayılar arasındaki birebir eşlemeyi temsil etmiş, daha sonraki yüzyılda ise iki küme arasındaki yapısal ilişkiyi gösteren bir kavram olmuştur. Kieran (1992) ve Stallings (2000)'e göre semboller; bu şekilde, kademeli olarak işlemsellikten kavramsallığa doğru değişime uğramıştır. Bu durum; cebirde değişime ve cebirde soyut bir dilin kullanılmasına neden olmuştur.

2.3. Matematiksel Düşünme

Matematiksel düşünme; bazı durumlar üzerinde çalışma, genelleme ve ikna etme şeklinde dört temel süreci ortaya çıkarır. Matematiksel düşünme, bireyin çevresini anlama ve kontrol altında tutmak için topladığı bilgileri organize eden ve işleyen bir araçtır (Burton, 1984). Matematiksel düşünme; aritmetiksel düşünme, geometrik düşünme, cebirsel düşünme gibi düşünme çeşitlerini kapsamaktadır.

2.4. Cebirsel Düşünmenin Tanımı

Cebir alanındaki gelişmeler, cebirsel düşünme becerilerinin de gelişimini sağlamıştır. Bazı araştırmacıların cebirsel düşünme tanımları ise şöyledir.

Kieran ve Chalouh (1993)'e göre cebirsel düşünme; temeli matematiksel muhakeme ve sembolleri anlamlandırma olan işlemsel anlamı, inşa etme ve matematiksel akıl yürütmeler ile ilgilidir.

Herbert ve Brown (1997)'e göre cebirsel düşünme; kelimeleri, tabloları, grafikleri ve denklemleri kullanarak matematiksel bilgiyi anlama, bilinmeyenleri bulma, fonksiyonel ilişkiyi anlamlandırma, matematiksel bulguları yorumlama ve çeşitli durumları analiz etmek için matematiksel sembolleri kullanmaktır.

Hawker ve Cowley (1997)'e göre cebirsel düşünme; örüntülerin gösterimi ve yapılanması ile genelleme yapabilmeyi gerektirir.

Greenes ve Findell (1998)’e göre cebirsel düşünme; farklı gösterimleri kullanarak cebirsel ilişkileri tanımlamayı, değişken ve eşitlik kavramlarını anlamayı, orantısal akıl yürütmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını, tümevarımsal ve tümdengelimsel çıkarımları içerir.

Vance (1998)’e göre cebirsel düşünme; farklı temsilleri, genellemeleri, değişkenleri ve işlemlerdeki ilişkilerden elde edilen soyutlamaları içeren akıl yürütme yoludur.

Kaput(1999)’a göre cebirsel düşünme; örüntülerle genelleme yapma, matematiksel ilişkilerle genelleme yapma, varsayımlarda bulunma ve bunları formal dil ile ifade etme sürecidir.

Driscoll, (1999)’e göre cebirsel düşünme; değişkenler arasındaki ilişkiyi nicel durumlarla temsil ederek açıklayabilme kapasitesidir.

NCTM (2000)’e göre cebirsel düşünme; matematiksel modeller kullanarak nicel ilişkileri temsil etmeyi, matematiksel olay ve durumları yeniden göstermeyi, analiz etmeyi, fonksiyonları anlamayı ve çeşitli durumlardaki değişimi analiz etmeyi içerir.

Lawrence ve Hennessy (2002)’e göre cebirsel düşünme; yaşam durumlarını açıklayabilmek için verileri matematiksel dil ile yorumlamada ihtiyaç duyulan anlayış kümesinden oluşmaktadır.

Kriegler (2004)’e göre cebirsel düşünme; genelleştirilmiş aritmetiğin, fonksiyonların ve matematiksel modellemelerin bir aracı olan cebirsel fikirlerden ve matematiksel düşünmeden oluşan bir yapıdır.

Kieran (2004)’a göre cebirsel düşünme; çeşitli sembolleri kullanarak niceliksel durumları ilişkisel olarak analiz etme becerisidir.

Kaf (2007)’a göre cebirsel düşünme; modellerle çalışma, gösterimleri kullanarak matematiksel düşünmeleri açıklama ve düzenleme, gösterimler arasında dönüşümler yapma, akıl yürütme gibi matematiksel becerileri içeren düşünme sürecidir.

Trybulski (2007)’e göre cebirsel düşünme; cebirsel ifadelerin ve matematiksel fonksiyonların işlem becerilerinden oluşur.

Çelik (2007)'e göre cebirsel düşünme; matematiksel düşünmenin özel bir biçimi olup matematiksel düşünme kullanılarak matematiksel akıl yürütme, problem çözme, farklı gösterimlerden yararlanma ve gibi becerileri içerir.

Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2011)'a göre ise cebirsel düşünme; örüntü ve fonksiyonları keşfetmeyi, genelleme yapmayı, matematiksel fikirleri sembol sistemini kullanarak biçimlendirmeyi içerir.

Kaya ve Keşan (2014)'a göre cebirsel düşünme; cebirsel ilişkiler arasında semboller yardımıyla bağ kurmayı, cebirsel ilişkilerdeki somut ve soyut kavramları tanımlayabilmeyi, çoklu temsilleri kullanabilmeyi ve akıl yürütme ile sonuca ulaşabilmeyi temsil eder.

Sonuç olarak cebirsel düşünmenin; içerisinde birçok matematiksel beceriyi bulundurmakla beraber öncelikli olarak nicelikler arasındaki ilişkileri belirleme, farklı gösterimleri kullanma, harfli sembollerin anlamı ve kullanımı, eşittir işaretinin anlamı ve kullanımı, genelleme yapma, işlemlerin tersi gibi kavramlarla bağlantılı olduğu söylenebilir. Bu kavramlar ise fonksiyonel düşünme ve genelleştirilmiş aritmetik yaklaşımları ile yakından ilişkilidir.

2.5. Cebirsel Düşünmenin Tarihsel Açıdan Oluşumu ve Gelişimi

Cebirin de diğer bilimler gibi kendisine özgü tarihsel gelişimi vardır. Cebirin tarihsel gelişim sürecini ortaya koymak, cebir alanındaki çalışmalara ve cebir öğretimine katkı sağlayacaktır.

İşlem ile anlam arasındaki ilişki, en yoğun olarak ve en açık şekilde matematiğin cebir dalında mevcuttur. Adını Harezmi'nin kitabındaki Al Cabr sözcüğünden alan cebir, aritmetiğin genelleştirilmiş şekli olarak düşünülebilir (Amerom, 2003; Brezina, 2006; Katz, 2007). Cebir; sayı genellemesiyle, değişkenle ve fonksiyonla ilgilenir (Carraher, Brizuela ve Earnest, 2006: 90). Ayrıca Amerom (2003)'a göre cebir; değişkenlerle, bilinmeyenlerle ve niceliklerle ilgili akıl yürütmeyi, durumlar arasındaki değişimi tanımlamayı gerektirir. Cebirin gelişim sürecinin üç aşamada gerçekleştiği belirtilmektedir. Bu aşamalar; cebirsel ifadelerin, cebirsel problemlerin ve çözümlerinin düz yazı biçiminde yazıldığı ilk dönem, cebirsel ifadelerin gösterimlerinde kısaltmaların kullanıldığı ikinci dönem ve sembollerin kullanıldığı üçüncü yani son dönem olarak ifade edilmektedir. Bu dönemler; Eski Mısır'da, Babilliler'de, Eski Yunan'da, Eski Hindistan'da, İslam Dünyası'nda ve Batı'da cebirin tarihsel gelişimi olarak da ele alınmıştır.

Eski Mısırlıların; doğrusal olmayan denklemleri orantısal düşünme, yanlışı deneme yolu ve karekök alma işlemini kullanarak çözdükleri görülür (Lumpkin, 1997). Eski Mısır'da çeşitli denklemler ve çözüm yöntemleri biliniyor olmasına rağmen cebirin bugünkü anlamda bir bilim olduğunu söylemek zordur (Smith, 1925).

Babilliler; Eski Mısırlılardan aldıkları cebiri geliştirerek, ikinci dereceden denklemler ve doğrusal denklem sistemleriyle uğraşmışlardır. Babilliler; denklem sistemlerinin çözümünü, Eski Mısır'da olduğu gibi düz yazı biçiminde ifade etmişlerdir. Yaptıkları çözümlerde; hem oranlama yöntemini, hem de geometrik düşünme yapısını kullanmışlardır. Sonuç olarak; Babillilerin denklem sistemlerini geometrik düşünmeyi kullanarak çözdükleri ve bu çözümleri düz yazı formatında ifade ettikleri söylenebilir. Bunun yanında Babilliler; içinde en, boy, alan gibi kavramlar olan cebirsel problemlerle de uğraşmışlardır (Baki ve Bütüner, 2011: 203).

Eski Yunan'da matematikte özellikle de cebirde öne çıkan isim Euclid'dir. Euclid'in kullandığı akıl yürütme biçimi, Babillilerin düşünce biçimine benzemektedir. Bu durum ise Eski Yunan'daki matematik bilginlerinin Babillilerden etkilenmiş olma olasılığını güçlendirir (Katz, 2007; NCTM, 2006). Euclid'in Elementler kitabındaki önermeler ve Eski Yunan cebiri aynı Babillilerde olduğu gibi geometrik düşünce yapısı ile gösterilmiştir. Babillilerde ve Euclid'in döneminde cebirin geometrikselleştirildiği ve cebir kavramının henüz ortaya çıkmadığı söylenebilir. M.S. 250'lerde yaşamış olan Yunanlı Diophantus cebir alanında önemli çalışmaları olan bir diğer matematik bilginidir. Euclid'in cebiri geometrikleştirme çabalarına karşılık, Diophantus cebiri sembolleştirmeye ve analitik hale sokmaya çalışmıştır (Cajori, 2007). Cebir alanına Diophantus'un yaptığı en önemli katkı, cebirsel gösterimlerde kısaltmaları kullanmasıdır. Diophantus tarafından kullanılan kısaltmalar ve modern gösterim örnekleri Tablo 2.5.1 de verilmiştir (Stalling, 2000; Oliver, 2007).

Tablo 2.5.1. Modern Gösterimlerin Eski Yunan ve Diophantus Kısaltmaları

Modern Gösterimi	**Eski Yunan Kısaltmaları**	**Modern Gösterimi**	**Diophantus Kısaltmaları**
Bilinmeyen (x)	$\sum$	$-x$	ς⋀
Bilinmeyenin karesi (x^2)	Δ^{Υ}	$4x$	Σδ
Bilinmeyenin küpü (x^3)	K^{Υ}	$(3x^2)$	$\Delta^{\Upsilon}\gamma$

Kaynak: Stalling, 2000; Oliver, 2007

Aryabhata (525), Brahmagupta (628), Mahavira (850) ve Bhaskara (1150) başta olmak üzere Hintli matematikçiler aritmetik ve cebir alanında önemli çalışmalar yapmışlardır. Hint matematiği, Bhaskara'dan sonraki süreçte bir duraklama sürecine girmiştir. Hintli matematikçiler cebirsel ifadelerin gösterimlerinde kısaltmaları kullanmışlardır. Cebirsel gösterimlerde kısaltma kullanımına Diophantus'tan sonra, Hintli Matematikçi Brahmagup'ta (M.S. 628) devam etmiştir. Brahmagupta'nın kullandığı kısaltmalar Tablo 2.5.2 de gösterilmiştir (Stallings, 2000; Oliver, 2007).

Tablo 2.5.2. Brahmagupta Kısaltmaları

Sembol	Bha	yα	kα	k(a)	Ru	yα kα 6 bha	k(a) 5ru 2
Modern Gösterim	Çarpım	x	Y	√	Tamsayı	6xy	$\sqrt{5}-2$

Kaynak: Stallings, 2000; Oliver, 2007

Hint cebirinde negatif sayıların bugünkü anlamda doğru şekilde kullanılmış olması dikkat çekicidir. Negatif sayıyı, o sayının üstüne konulan nokta ile göstermişlerdir (NCTM, 2006). Hintli matematik bilginleri negatif sayıları ve irrasyonel sayıları keşfetmişlerdir. Cebir kavramının ortaya çıkmasında; Eski Mısırda kullanılan "yanlışı deneme yolu" ile Eski Yunanlılar ve Hintlilerin kullandığı "cebirsel denklemlerin geometrik yolla çözümü" etkili olsa da cebir kavram olarak bu günkü anlamına İslam dünyasındaki çalışmalarla ulaşmış ve oradan da Batı dünyasına aktarılmıştır.

İslam dünyasında, 780 – 847 yılları arasında yaşayan Harezmi'nin cebirde en önemli kişi olduğu söylenebilir. Harezmi sayı sisteminin ilk şeklini Hindistan'dan alarak Arap sayı sistemini geliştirmiştir. Dokuzuncu yüzyılda Harezmi tarafından kullanılan sayıların bir uyarlaması günümüz matematiğinde kullanılmaktadır. Harezmi'nin Al Kitab Fi Hisab Al Cabr Wal Muqabalah isimli kitabı; 15-16. yüzyılda cebir çalışmaları için en önemli kaynaklardan birisi olmuştur. Kitaptaki Al Cabr terimi; İngilizce ve Fransızcaya algebra olarak geçmiş ve Türkçede de cebir olarak kullanılmıştır. Harezmi'nin kitabına kullandığı çözüm yöntemlerinin Arapçada isminin Al Khwarizm olması nedeniyle Avrupadaki matematikçiler Harezmi'nin yöntemleri anlamında algorithm deyimini kullanmışlardır (Arndt, 1983; Baki, 1992; Baki, 2008). Harezmi denklemleri, "al-jabr" ve "al-muqabala" denilen iki yöntem kullanarak çözmüştür. Al-jabr terimi; tamamlama anlamına gelmektedir. Al-muqabala terimi ise denkleme anlamına gelmektedir. Geometrik düşünce kullanılarak yapılan cebirsel çözümler, Harezmi'den önce de mevcuttur. Ancak cebirin geometriden ayrılması ve matematiğin müstakil bir dalı olarak ortaya konması, Harezmi'nin en büyük başarılarından biridir (Brezina, 2006).

İslam dünyasında Harezmi'den sonra cebirle uğraşan matematik bilginlerinden bazıları; İbn-i Türk, Sabit bin Kurra, Abu Kamil, Al-Karaji, Al-Samaw'al, Ömer Hayyam ve Şerafeddin Tusi'dir. İslam Dünyasında, üçüncü dereceden denklemleri sınıflandıran ve çözümlerini geometrik yolla yapan ilk matematikçi 1048 – 1131 yılları arasında yaşamış olan Ömer Hayyam'dır. Daha sonra Batı Dünyasında; 16. yüzyılda Hayyam'ın çözümlerinden yararlanan Cardano, üçüncü dereceden denklemlerin çözümü için yeni yöntemler geliştirmiştir (Baki, 2008). İslam dünyasında cebir alanındaki keşifler, ilerleyen süreçlerde de Batılı matematikçiler tarafından alınarak geliştirilmiştir.

Cebirin, batı dünyasına geçişi Harezmi'nin eserleri sayesinde olmuştur. Yazdığı kitapta; başta Harezmi ve İslam dünyasının matematik bilginlerinin yaptıkları çalışmalarından yararlanan İtalyan matematikçi Fibonacci, Avrupa'nın ilk matematikçilerindendir (Katz, 1998; Ifrah, 2003). Genel olarak o dönem abaküsçülerinin tümü, Harezmi'nin çalışmalarını inceleyerek ve dikkate alarak cebire yönelmişlerdir. Avrupa'da özellikle de İtalya'da cebirin gelişimi; İslam dünyasının etkisiyle sonraki zamanlarda da devam etmiştir. 14. ve 15. yüzyıllar arasında Fransa, Almanya, İngiltere ve Portekiz'de cebirde yapılan çalışmalar Tablo 2.5.3 de özetlenmiştir (Katz, 1998).

Tablo 2.5.3. Fransa, Almanya, İngiltere ve Portekiz'de Cebir İle İlgili Çalışmalar

Yazar/Ülke	Kitabın Adı/Yılı	Çalışmaları
Nicolas Chuquet (1445-1488) Fransa	Triparty 1484	Harezmi'nin ortaya koyduğu denklem çözümlerini farklı dereceli her denklem için genelleyerek cebiri İtalyan abaküsçülerinden daha ileri noktaya taşımıştır. $cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n}$ tipindeki denklemin çözümü için $x = \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}}$ kuralını ortaya koymuştur.
Christoff Rudolf (1499-1545) Almanya	Art of the Coss 1520	Art of the Coss Almanya'daki ilk kapsamlı cebir kitabıdır. Harezmi'nın denklem sınıfları yerine, Chuquet gibi denklemleri indirgeme yoluyla çözmüştür. $ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$ tipindeki denklemin çözümü için $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$ kuralını ortaya koymuştur. İlk defa modern karekök sembolünü kullanmıştır.
Michael Stifel (1487-1567) Almanya	Arithmetica Integra 1533	Avrupa'da Pascal üçgenini ilk defa ortaya koyan Matematikçidir. Kendinden önceki bilginler gibi oda negatif kökü kabul etmemiştir.
Robert Recorde (1510-1558) İngiltere	The Whetstone of White 1557	Recorde, yazdığı kitapta cebir adına orijinal bir çalışma ortaya koyamamıştır. Günümüzde kullandığımız eşittir sembolü ilk defa Recorde'nin kitabında görülmüştür.

Kaynak: Katz, 1998

1500 – 1515 yılları arasında Bologno Üniversitesinde profesör olan Scipione del Ferro (1465 – 1526), $x^2 + cx = d$ tipindeki denklemlerin çözümleri için cebirsel bir yöntem geliştirmiştir. İtalyan matematikçilerinden Niccolo Tartaglia (1499 – 1557) ise, $x^3 + bx^2 = d$ tipindeki denklemlerin çözümlerini ilk defa kendisinin bulduğunu söylemiştir.

Avrupada cebirsel gösterimlerde sembolik döneme geçişin adımları, İslam dünyasındaki cebir ile ilgili yapılan çalışmalardan faydalanılarak atılmıştır. Ancak bu geçiş bir anda olmamıştır (Kvasz, 2006). Fransız matematikçi Viete (1540 – 1603) sembolik döneme geçişin mimarıdır. 1637 yılında yayınladığı eserinde Descartes (1596 – 1650), bugün kullanılan sembollere benzer semboller kullanmıştır. Descartes; bilinmeyenleri x, y ve z ile ifade etmiş, x^2' yi xx, x^3 'ü ise xxx olarak yazmış, eşittir sembolünü ise günümüzden farklı olarak $\propto$ sembolü ile göstermiştir. Descartes kitabında; üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümlerini, Ömer Hayyam'ın yaptığına benzer şekilde, ancak onunkinden farklı olarak denklemlerin yanlış (negatif) köklerinin de olabileceğini belirterek yapmıştır (Heeffer, 2008). Gabriel Cramer (1704 – 1752) ile Langrange (1736 – 1813) nin denklemler teorisi; Galois (1811 – 1832)'in cebirsel denklemler teorisi; Euler (1707-1783)'in ve Gauss (1777 – 1855)'un karmaşık sayıları düzlemde noktalar ile göstermesi ve analiz üzerine yaptıkları çalışmalar cebirin gelişmesini sağlamıştır (Baki ve Bütüner, 2011: 222).

2.6. Cebirsel Düşünme Becerisinin Ön Koşulları

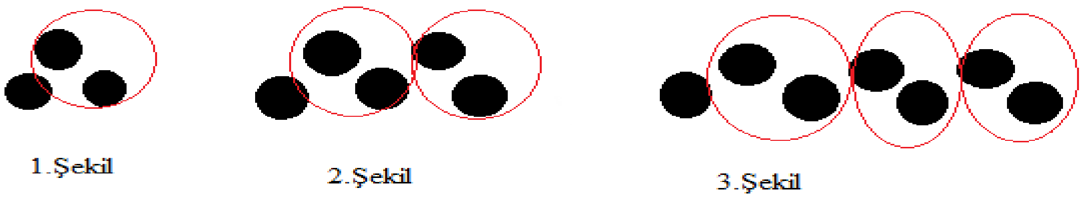
Welder (2007), cebir için dokuz tane ön koşul beceri alanı tanımlamıştır. Bu ön koşul içerikler alanlarını ise; sayısal işlemler, oran ve orantı, işlemde öncelik, eşitlik, örüntüler, cebirsel semboller, cebirsel denklemler, fonksiyonlar ile grafikler olarak belirlemiştir. Bu ön koşul içeriklerden sekiz tanesi Matematiğin Genel ve Temel Standartları (CCSSM)'nın ortaokul için ön koşul olan temel içerikler ile uyumludur. CCSSM'ye göre cebir için ön koşul içerikler ise; örüntüler, oran ve orantı, sayı sistemleri, denklem ve ifadeler ile foksiyonlar olarak kabul edilmiştir. Bu ön koşul içerikler literatüre bağlı olarak aşağıda verilmiştir.

2.6.1. Örüntüler

Örüntü; sayı veya geometrik şekillerin tekrarlayan bir ilişkisidir. Vogel (2005), örüntülerin yaşamımızın pek çok yerinde kullanıldığını belirtir. Orton (1999)'a göre; örüntüler, tekrarlayan düzenler sistemidir. Zazkis ve Liljedahl (2006) ise örüntülerin, matematiğin en önemli parçası olduğunu ve diğer sanat dallarıyla uğraşanlar gibi matematikçilerin de örüntü yaratıcıları olduklarını belirtmiştir. Burns (2000)'e göre örüntülerin hem yaşamda hem de matematikte önemli yeri vardır. Reys vd. (1988)'e göre örüntüler; çocuklarda önce sayı duyusu ve matematiksel keşif yeteneğini geliştirir, daha sonra ise düşünme stratejilerinin gelişimini sağlar.

Örüntüler; sayı örüntüleri, şekil örüntüleri, doğrusal ve ikinci dereceden örüntüler, yinelemeli ve belirgin ilişkilere sahip örüntüler olarak sınıflandırılabilir (Van De Walle, 2004).

Örnek 2.6.1.1 Aşağıda Şekil 2.6.1.1 ile verilen şekil örüntüsünde; sabit olarak bir daire ve 2'li gruptan 1. şekilde 1 tane, 2. şekilde 2 tane, 3. şekilde 3 tane olduğu yönünde ortak özellik görülebilir. Bu durum, terim sayısının iki katının bir fazlası şeklinde genellenir ve $2n+1$ olarak yazılır. Bu süreç, cebirsel genelleme sürecidir. Bu ise, cebirsel düşünmeyi geliştirmektedir.



Şekil 2.6.1.1. Şekil Örüntüsü

Örüntüler; bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki bağlamında düşünüldüğü zaman aynı zamanda bir fonksiyonel ilişkidir. İlköğretimin ilk yıllarında öğretimine başlanılan örüntü kavramı, ileriki yıllarda orta öğretimde soyut düşünmenin gelişmesiyle fonksiyon kavramına basamak oluşturur.

2.6.2. Oran ve Orantısal İlişkiler

Orantısal akıl yürütme; öğrencilere yaşamlarında olduğu gibi bilim ve matematik alanında yardım eden büyük oluşumlardan biridir (Hoffer, 1988; Silver, 2000: 20). Matematiksel düşünmede oran ve orantı önemli rol oynamaktadır (Lesh, Post ve Behr 1988). Post vd. (1988); orantısal düşünmenin kovaryasyon, çoklu karşılaştırma ve zihinsel hafıza yeteneği içerdiğini belirtmiştir. Çoklu karşılaştırma, orantısal akıl yürütme becerisinin temelini oluşturur. Bu yüzden; çokluklardaki değişimleri anlayabilme, çoklu karşılaştırmalar ile ilgili yorum yapabilme ve karar verebilme becerileri orantısal düşünebilme becerisinin gelişiminde ve kavram yanılgılarının önlenmesinde önemlidir (Akar, 2009).

Ortaokul matematiğinin en önemli becerilerinden olan orantısal düşünme, cebirsel düşünmenin temelini oluşturmaktadır (Langrall ve Swafford, 2000). Ulusal

Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) orantısal akıl yürütmenin; çok yönlü düşünebilme becerilerini, ifadeler arasında ilişki kurabilmeyi, eşitlikler oluşturabilmeyi, grafikleri ve tabloları yorumlayabilmeyi içerdiğini vurgulamaktadır. Ayrıca, orantısal akıl yürütme, orantıdaki çarpımsal ilişkiyi anlamaya bağlıdır. Bu ise cebirde $y = mx$ biçiminde ifade edilebilir.

Örnek 2.6.2.1. "Ayşe bakkaldan 3 top, Ali ise 2 top almıştır. Ayşe toplar için 6 lira ödediğine göre, Ali'nin kaç lira ödemesi gerekir?"

Çözüm: Çözümde top sayılarının ödenecek paraya oranlarından orantı elde edilir ve içler ve dışlar arasındaki çarpımsal ilişki kullanılarak bilinmeyen bulunur.

Yani

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{c.b}{a}$ ya da $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{a.c}{b}$

orantı ise şöyle ifade edilebilir.

$$\frac{3\text{ top}}{6\text{ lira}} = \frac{2\text{ top}}{x\text{ lira}} \Rightarrow x\text{ lira} = \frac{2\text{ top}.6\text{ lira}}{3\text{ top}} = 4\text{ lira}$$

Piaget ise orantısal akıl yürütmenin; çokluklar arasındaki ilişkiyi anlama, tahmin etme ve analiz yapmayı içerdiğini vurgulamıştır. Bu yüzden orantı kavramının anlaşılması ileriki düzeylerde cebirsel düşünme için önemlidir.

2.6.3. Sayı Sistemleri

Matematiğin Genel ve Temel Standartları (CCSSM)'ına göre sayı sistemleri için içerik alanları; kesirler, ondalıklar, yüzdeler, tamsayılar, üslü sayılar, işlem önceliği, sayı özellikleri, sayıları karşılaştırma ve sıralama olarak belirtilmiştir (CCSSO, 2010a).

Kesirler; denklem çözümlerinde, eğimde ve oranların yazımında kullanıldığı için cebirde önemlidir. Cebirde başarı için önemli noktalardan biri kesirler, ondalık sayılar ve yüzdelikleri hesaplayabilmektir.

Örnek 2.6.3.1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = ?$ İşlemi gerçek hayatta nasıl bir problemin işlemsel ifadesine gelebilir?

Çözüm: Kesirlerde işlem becerisi içeren $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=?$ toplamının doğru yapılması günlük hayatta;

"Kumbaramdaki paranın; önce $\frac{1}{2}$'sini sonrada $\frac{3}{4}$'ünü harcadım. Paramın ne kadarını harcamış olurum?" vb. biçimde ifade edilebilen ve kesirleri içeren sözel denklem problemlerini çözmede önemlidir.

Öğrenciler; ondalıkları, kesirleri ve yüzdelikleri birbirine dönüştürebilmeli ve ondalık kesirlerin değerini hesaplayabilmelidir (Bottoms, 2003; Stacey ve MacGregor; 1997a: 252).

Tamsayılarda kavramsal ve işlemsel anlama, cebirde başarı için önemlidir (Darley, 2009; Peled ve Carraher, 2008; Thorpe, 1989). Peled ve Carraher (2008) çalışmalarında; tamsayı işlemleriyle ilgili sayı doğrusu ve fonksiyon grafiği kullanılmasının tamsayıyı öğrenmeye yardımcı olacağını vurgulamaktadırlar.

Cebir başarısında kritik ön koşullardan birisi de üslü sayıları anlamaktır (Bottoms, 2003). Üsler ve üslülerin kuralları; kuadratik denklemleri çözerken, köklü ve oransal ifadelerde ve fonksiyonların grafiklerini çizerken kullanılır. Thorpe (1989); üslü ifadelerin üslü fonksiyonları kavramada önemli olduğunu vurgulamıştır.

Tamsayılarda, kesirlerde ve ondalık sayılarda işlem sırası; cebirde temel becerilerdendir (Bottoms, 2003). Linchevski (1995); cebirsel tanımların, öğrencilerin işlem önceliğini kullanmayı sağlayacak fırsatlar içermesi gerektiğini vurgulamıştır.

Sayıların özelliklerini bilmek, iyi bir cebir alt yapısının oluşmasına yardımcı olur (Baroudi, 2006; Bottoms, 2003; Carpenter, Levi ve Farnsworth, 2000; Warren, 2003). Sayıları karşılaştırma ve sıralama yeteneği ise sayıları büyüklüklerine göre sıralayabilmeyi içerir.

Ondalık ve yüzdelik sayılardaki sıralama önemlidir. Çünkü bu yolla öğrenciler; eşitsizliği anladıklarını kanıtlayabilirler, sayıların değerlerini büyük ya da küçüklüklerine göre sıralayabilirler. Cebirde ise bu yetenek; denklem çözümlerinin sonuçlarını büyüklüklerine göre sıralamada önemlidir.

2.6.4. Denklemler ve İfadeler

Matematiğin Genel ve Temel Standartları (CCSSM)'ında denklemler ve ifadeleri; eşitlik, değişkenler, cebirsel denklem ve ifadeler olarak belirtilmiştir (CCSSO, 2010a). Şimdi bunlar verilecektir.

2.6.4.1. Eşitlik

Eşitlik, cebirin temel yapı taşlarından biridir. Eşitlikle ilgili kavram yanılgısı ilkokuldan başlar ve eşittir işaretinin anlamı, genellikle sorunun cevabı nedir gibi düşündürülür (Baroudi, 2006; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi ve Battey 2007; Welder, 2007; Van Dooren, Verschaffel ve Onghena 2002; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2011; Ball, Thames ve Phelps, 2008). Eşitlik kavramının anlamındaki kargaşa öğrencilerin cebirde yaşadıkları problemlerden biridir. Çünkü eşittir işareti, aritmetikte ve cebirde farklı anlamlarda kullanılmaktadır.

Eşittir işaretini öğrenciler, aritmetikte işlemsel bir sembol olarak algılamaktadır.

Cebirde ise durum daha farklı algılanmaktadır. Şöyleki; $7+5+9=?$ vb. sorularda eşittir işareti, ilişkisel bir sembol olarak kullanılırken $2(x+1)=2x+2$ vb. ifadelerde eşittir işareti, iki ifadenin aynılığını belirtir.

Yapılan birçok araştırma; öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel bir sembol değil de işlem belirten bir sembol olarak gördüklerini ortaya koymuştur (Falkner, Levi ve Carpenter, 1999). Baroudi (2006) çalışmasında; öğrencilerin birçoğunun eşittir işaretinin anlamını, sonucunu gösterdiğini düşündüklerini belirtmiştir.

Örneğin; $6+c=?$ vb. ifadelerde öğrencilerin büyük çoğunluğu; eşittir işaretini görünce sayısal sonuç belirten bir şeye eşit olmak zorunda olduğunu düşünmekte ve sonucu $6+c$ olarak yazmakta zorlanmaktadır.

Cebiri öğrenme sürecinde ilerleme; çok adımlı eşitlikler ve eşitsizliklerin çözümünde yeterli seviyeye ulaşmaya bağlıdır. Eğer öğrenciler eşit işaretinin kavramsal anlamını bilip denklemlerdeki eşitliği anlayabilirlerse denklemlerin çözümlerini daha kolay yapabilirler (Falkner vd., 1999: 233).

2.6.4.2. Değişkenler

Cebirin temelini, değişken kavramı oluşturmaktadır (Philipp, 1992). Percy Nunn (1919)'a göre; değişkenleri keşfetmek matematiğin en önemli başarılarından biridir. Cebirin temel kavramlarından olan değişkenler ve denklemler, cebirsel düşünmenin oluşumunu sağlar (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2005). Aritmetiğin temelinde sayı kavramı varken cebir ve tüm yüksek matematiğin temelinde değişken kavramı vardır (Wagner, 1981).

Örnek 2.6.4.2.1. "Hangi sayının 4 katının bir fazlası başka bir sayının 5 katına eşittir?" biçiminde verilen sözel cebir problemini matematiksel denklem olarak ifade etmek için değişkenleri doğru kullanmak gerekli ve önemlidir. Bu problemin uygun matematiksel ifadesi $4x+1=5y$ şeklinde yazılabilir.

Arcavi ve Schoenfeld (1988)'e göre değişken kavramı, aritmetikten cebire geçişte temel oluşturmaktadır. Cebirsel işlemlerde öğrencilerin değişkenlerin işlevlerini doğru anlamaları önemlidir. Çünkü değişken kavramı cebirin temel unsurlarından biridir ve tam anlaşılmadığı zaman öğrencilerin cebirde başarısızlığına neden olmaktadır.

Örnek 2.6.4.2.2. Değişkenlerin sayı gibi değerler alabileceği kavranmadığında $a+b+c=a+z+c$ ifadesinin doğru olup olamayacağı anlaşılamamaktadır. Çünkü öğrenciler b ile z harflerinin aynı sayı değerini alamayacağını, yani farklı harflerin sayı değerlerinin farklı olduğunu düşünmektedirler. Benzer şekilde değişken yerine kullanılan harflerin alfabedeki sırasına göre değer aldığını düşünen öğrenciler; $a=7$, $c=9$ ise b nin 8 değerini alacağını savunmaktadırlar. Bu durum ise cebir başarısını etkilemektedir.

Temel işlemlerden öteye geçmek için öğrenciler, diğer cebirsel kavramlara başlamadan önce değişken kavramını iyice anlamalıdır (Schoenfeld ve Arcavi, 1988). Değişken kavramı ile eşittir kavramları cebirin temelini oluşturmasına rağmen bu kavramların öğretiminde genellikle kavramsal yönü ihmal edilmekte ve işlemsel yönü daha çok vurgulanmaktadır.

2.6.4.3. Cebirsel Denklemler ve İfadeler

Linchevski (1995), ön cebir müfredatını 4 kategoriye ayırmıştır. Bunları;

- Harflerin yerine sayısal değer verip çözümü doğrulama,
- Eşdeğer denklemlerde yerine koymayı anlama,
- Bilişsel şemayı inşa etme,
- Denklemleri çözme

biçiminde ifade etmiştir.

Cebirsel denklemlerle ilgili bu dört alan ortaokul müfredatında bulunmaktadır. Bottoms (2003)'a göre bir bilinmeyenli, bir ve iki adımlı denklemleri çözmek cebir bilgisinin ön koşuludur.

Örnek 2.6.4.3.1. $b-12=8$, $\frac{x}{4}=5$, $2x+5=7$ vb. cebirsel denklemleri çözmek temel cebir bilgisindendir.

İleri matematik konularının anlaşılabilmesi, denklem kavramının kazanımına ve denklemlerin çözülebilmesine bağlıdır (Dede, 2005). Cebirsel denklemi çözmek; sözel hikaye problemleri, sözel denklem problemleri, sembol denklem problemleri gibi birçok formu içerir (Van Amerom, 2003). Birçok öğretmen ve araştırmacı ise sözel denklem problemlerinin, sembol denklem problemlerine göre daha zor olduğunu belirtmektedir (Nathan ve Koedinger, 2000).

Örnek 2.6.4.3.2. Öğrenciler; "Ebrar'ın yaşı Esila'nın yaşından 5 fazladır. Ebrar 7 yaşında olduğuna göre Esila kaç yaşındadır?" vb. biçimde ifade edilen sözel ifadeli problemlerin çözümlerinde, "$\triangleleft + 5 = 7$" vb. biçimde ifadesi verilen problemlerin çözümlerinde olduğundan daha çok zorlanmaktadırlar.

2.6.5. Fonksiyonlar

Fonksiyon kavramı matematiğin en önemli bileşenlerinden biridir (Ellis, 2011; Peled ve Carraher, 2008) ve cebir dahil olmak üzere matematiğin tümüne yayılmış haldedir (Willoughby, 1997). Sajka (2003); fonksiyon kavramının matematiğin temel kavramlarından biri olduğunu belirtmiştir. NCTM (1989; 2000); fonksiyon kavramının, ortaokul ve lise matematiğinin temeli ve diğer kavramların da düzenleyicisi olduğunu belirtmiştir. Biehler, Scholz ve Winkelman (1993)'e göre fonksiyonlar; matematiğin tümünde vardır ve diğer kavramların öğretiminin önemli bir parçasıdır.

Fonksiyonel düşünme, nicelikler arası ilişkiyi içerir. Nicelikler arası ilişki ise cebirsel düşünmenin özüdür. Blanton ve Kaput (2004)'a göre fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünme biçimlerinden biridir.

Örnek 2.6.5.1 Aşağıda Tablo 2.6.5.1 ile rastgele değerler ile oluşturulmuş bir girdi-çıktı tablosu verilmiştir.

Tablo 2.6.5.1. Girdi-Çıktı Değerleri

Girdi Değerleri (x)	Çıktı Değerleri (y)
3	13
5	19
4	16
1	7
7	25
…	…
Girdi $3x + 4$	

Bu tabloya göre; öğrenciler, girdi ve çıktı değerlerine bakarak iki veri kümesi arasındaki ilişkiyi kavrayabilmektedir. Bu durum öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini geliştirebilir. Tablo 2.6.5.1 de girdi değerlerine ve çıktı değerine bakıldığında, çıktı değerlerinin ilk sütundaki sayıların hep 3 katının 4 fazlası olduğu görülür.

Burada görüldüğü gibi fonksiyonel düşünmenin kazanımı, cebirsel düşünmenin gelişiminde ve soyut anlam kazanmada önemli olan fonksiyon kavramının öğrenilmesine bağlıdır. Öğrenciler; fonksiyonlar arasındaki ilişkileri, aynı denklem yazma gibi tabloda ve koordinat düzleminde görebilmelidir (Van Dyke ve Craine, 1997). Ellis (2011)'e göre fonksiyonlar, cebirsel ifade etme yeteneğini geliştirmeye yardımcı olur. Bottoms (2003)'a göre ise fonksiyon grafikleri cebir için ön koşul bilgilerdendir.

2.7. Cebirsel Düşünme Becerisinde Aritmetik ile Cebir İlişkisi

Geçmiş zamanlardan beri dört işlem; aritmetiğin temelini oluşturur ve gelişerek günümüzdeki halini almıştır. NCTM (1991)'ye göre aritmetik; sayılar arası ilişkileri ve sayısal işlem hesaplamalarını içerir. Bir diğer tanıma göre aritmetik; sayılar arasındaki ilişkileri ve işlemleri konu alan matematiğin dalıdır (URL-1, 2009). Mason (1996) aritmetiği; dört işlem yardımıyla bilinenden yola çıkarak bilinmeyeni bulma olarak tanımlamıştır. Akkan (2009)'a göre ise aritmetik; bilinen niceliklerden dört işlemi kullanarak bilinmeyeni bulmayı, sayılarla işlemsel ilişkileri ve bu işlemlere dayalı bütün hesaplamaları içerir.

Cebir ise sayısal işlemleri ve sayılar arası karşılaştırmayı içerir ve aritmetiğin soyutlanmasıyla ortaya çıkmıştır (Akgün, 2006). Aritmetiğin genelleştirilmiş hali olan cebir, aritmetiğin sembolik yönü üzerine kurulmuştur (Tabach ve Friedlander, 2003). Kieran (1992)'e göre cebir; nicelikleri semboller ile temsil etmenin yanında sembolerle işlem de yapabilen, sayıların ilişki ve özelliklerini gösteren, denklem çözümlerini sembolize eden matematiğin bir dalıdır.

Özetle; aritmetiğin temelini sayıların, cebirin temelini ise aritmetiğin oluşturduğu söylenebilir. Aritmetikle cebir arasında güçlü bir ilişki olmasına rağmen aritmetikle cebirin yapıları farklıdır (Stacey ve MacGregor, 1997a; Van Amerom, 2002). Aritmetik ve cebir öğretimi sırasında, aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçiş kendiliğinden gerçekleşmez. İlkokulda, edinilen aritmetiksel fikirler ile cebirsel fikirler ilişkilendirir (Herscovic ve Linchevski, 1994). Aritmetik ile cebir arasındaki ilişki ise şöyledir: Ortaokul matematik müfredatı, ilkokul matematik müfredatı ile lise matematik müfredatı arasında bir köprüdür (NCTM, 1989). Önceden edinilen aritmetik ile ilgili bilgiler, öğrencilerin daha sonraki hem resmi, hem de resmi olmayan plansız öğrenmelerinde önemli rol oynar (Nathan ve Koellener, 2007). French (2002); basit zihinsel hesaplamaların ve işlemlerin, cebirsel ifadeleri basitleştirmeye katkı sağlayacağını belirtmiştir. Cebirsel ifadeleri anlama ise; aritmetiksel işlemler, eşittir işareti, değişkenleri içeren cebirsel gösterimleri birleştirmeyi gerektirir.

Örnek 2.7.1.

4 *tane* 10 + 5 *tane* 10 = 9 *tane* 10 için, $40+50=90$;

$4bölüdokuz + 5bölüdokuz = 9bölüdokuz$ için, $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=\frac{9}{9}$;

ve benzer şekilde;

$0{,}4+0{,}5=0{,}9$ ve $4cm+5cm=9cm$ ifadelerinin hepsi için

$$4x+5x=9x$$

sembolik gösterimi yazılabilir.

İlkokuldaki aritmetik ile ortaokul ve daha üst seviyedeki cebir arasındaki boşluk cebir öncesidir ve ilkokuldaki bu aritmetik, öğrencilerin cebirde daha başarılı olmasını sağlar (Lodholz, 1990). Kieran ve Chalouh (1993) cebir öncesini; aritmetiksel bilgiden cebirsel bilgiye geçiş ve cebirsel kavramları dolaylı olarak anlamlandırmalarını sağlama süreci olarak tanımlamıştır. Akkan (2009) ise cebir öncesini; aritmetiksel bilgileri kullanarak cebirsel kavramları anlamlandırabilme, formal olmayan sembolleştirmeyi oluşturabilme ve aritmetiksel yolla denklem çözebilmeyi başarabilme olarak vurgulamıştır.

Bütün bunlardan yola çıkarak cebir ile aritmetik arasında karşılıklı ve yoğun bir ilişki olduğu söylenebilir. Fakat aritmetiğin ve cebirin yapılarından kaynaklanan farklılıklar, aritmetikten cebire geçiş sürecinde bazı zorluklara sebep olmaktadır (Kieran, 1992; Stacey ve MacGregor, 2000).

2.8. Cebirsel Düşünme Becerisinin Gelişimindeki Yaklaşımlar

Cebirsel düşünmenin gelişmesinde; genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel yaklaşım kritik öneme sahip iki yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır. Aşağıda bu yaklaşımlar hakkında bilgiler verilmiştir.

2.8.1. Genelleştirilmiş Aritmetik

Cebir; genel anlamda aritmetiğin sembolik tarafına, cebirsel denklemlerin çözümüne, sembolle ifade edilen fonksiyonlar üzerine yoğunlaşır (Tabach ve Friedlander, 2003). Genelleştirilmiş aritmetik ise; sayılarla işlem yapma, sayıların ilişkileri ve özellikleri ile ilgili muhakeme yapabilmektir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). Genelleştirilmiş aritmetik; aritmetiğin temeli olan matematiksel yapılar hakkında düşünme, aritmetikteki örüntüleri tanımlayarak, sayısal işlemler ve sayıların özellikleri hakkında genellemeler yapabilme ile ilgilidir.

Cebirsel düşünme, genelleştirilmiş aritmetik aracılığıyla farklı yollarla geliştirilebilir (Ontario Ministry of Education (OME), 2013). Aşağıda bu farklı yollar ve açıklamaları verilmiştir.

2.8.1.1. İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme

Matematiksel ilişkileri ve genellemeleri oluşturmak, ifade etmek ve doğrulamak cebirsel düşünmenin kalbidir (Kaput, 2008). Cebirsel düşünme; aritmetik işlemlerindeki örüntüleri genellemeyle, örüntüleri analiz etmeyle ve bilinmeyenlerle işlem yapma ile bağlantılıdır. Cebirsel düşünme; örüntüleri tanımlamada, hesaplama yapmada, ifadeleri sembolik olarak karakterize etmede önemli rol oynar (Smith ve Thompson, 2007). Cebirsel düşünme, hem sayısal işlemlerin hem de sayılarla ilgili özelliklerin ve ilişkilerin keşfini gerektirir.

Örneğin; $5+4=9$ ifadesinden yola çıkarak öğrencilerin "bir çift sayı ile bir tek sayının toplamı tek sayıdır" ifadesine ulaşması matematiksel genellemedir. Aynı şekilde toplama işleminde değişme özelliğine odaklanma yani $3+4=4+3$ ifadesini dikkate alma bir çeşit cebirsel düşünmedir. Öğrenciler, işlem sonuçlarından ziyade sayıların özellikleri ile ilgili düşünmeye yönlendirilmelidir. Öğrenciler; sayıların toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini kavradıkça, dört işlemin özellikleri yardımıyla örüntüleri keşfetmeye başlayabilirler.

2.8.1.2. Nicelikler Arasında Bir İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme

Cebirsel düşünme için eşittir işaretinin, sadece bir işlem sembolü olarak değil nicelikler arası bir ilişkiyi temsil ettiğinin ve eşitlik düşüncesini desteklediğinin bilinmesi önemlidir. Çünkü cebirsel düşünme; eşittir işaretinin kavramsal olarak anlaşılması ve uygun şekilde kullanılması ile ilişkilidir. Eşittir işareti, çoğunlukla ilişkileri gösteren sembol olarak değil de sonucu gösteren veya soldan sağa eylem belirten işlemsel sembol olarak görülmektedir (Carpenter vd., 2005). Stephens (2006), eşitlik kavramının ilişkisel düşünmede belirleyici rolü olduğunu ifade etmiştir. Eşittir işaretinin; hem sonucu bildiren işlemsel sembol, hem de nicelikler arası ilişkiyi gösteren ilişkisel sembol olması, cebirde denklem çözme becerisi için çok önemlidir (Kieran, 1981). Öğrencilerin cebirsel muhakeme yaparak iki ifadenin eşitliği üzerine odaklanmaları, aritmetiksel akıl yürütme yaparak sayısal sonuçları karşılaştırmasından daha yararlı olacaktır.

2.8.1.3. Değişkenler Olarak Sembolleri Kullanma

Cebirsel düşünmede; cebirsel yapılardaki ilişkileri ifade etmede sembolleri kullanmak önemlidir. Çünkü cebirsel düşünmenin temelinde, semboller kullanılarak oluşturulan genellemeler vardır. Semboller, soyut yapıları zihinde canlandırmada büyük yarar sağladığı için cebirsel düşünmeye katkı sağlamaktadır (Yıldırım, 2000). Semboller; üst düzey düşünmeyi gerçekleştirmede, dört işlemin temel özelliklerini ve işlemler arasındaki ilişkileri anlamada önemli rol oynamaktadır. Matematikte değişkenler; hem geometrik şekil sembolleriyle, hem de harfli sembollerle ifade edilebilmesine rağmen daha çok kabul gören gösterim harfli sembollerin kullanımıdır. Harfli sembollerin kullanımı, aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçişte çok önemli bir rol oynayabilir (Stacey ve MacGregor, 1997b: 112). Kieran (1989, 1990)'a göre; aritmetikteki harfli semboller ile cebirdeki harfli sembollerin görevleri farklıdır. Van Amerom (2002)'a göre; aritmetikteki kullanılan harfli semboller belirli bir şeylerin yerine kullanılırken, cebirdeki harfli semboller ise herhangi bir sayıyı gösteren bilinmeyenler veya değişkenlerdir. Driscoll (1999)'a göre; harfli sembollerin farklı temsillerinin öğrenilmesi, cebirsel düşünmenin özü olan genellemeleri ifade etme, cebirsel yapıları meydana getirme, matematiksel ilişkileri anlamlandırma açısından önemli bir rol oynar.

2.8.2. Fonksiyonel Düşünme

Cebirsel düşünmenin özü olan nicelikler arasında ilişki arama, fonksiyonel düşünme olarak adlandırılmaktadır (Kieran, 2004). Fonksiyonel düşünme; sayılardan oluşan iki nicelik arasındaki ilişkiyi açığa çıkarmak ve örüntüleri analiz ederek değişimleri belirlemektir (Beatty ve Bruce, 2012). Blanton ve Kaput (2004)'a göre ise fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin aldığı biçimlerden biridir. Genellemenin bir şekli olan fonksiyonel düşünme; nicelikler arası ilişkileri incelemeyi ve ilişkilerdeki değişimi açıklayan örüntüleri bulmayı içerir.

Öğrenciler fonksiyonel düşünmeyi;

- Örüntüleri genelleme,
- Ters işlemleri kullanma,

gibi yaklaşımlarla geliştirilebilirler (OME, 2013). Bu yaklaşımların açıklamaları verilmiştir.

2.8.2.1. Örüntüleri Genelleme

Genelleme, matematiksel bilginin özü olarak ifade edilmektedir (Amit ve Neria, 2008). Genellemenin önemi; cebirin ve tüm matematiğin ilişkilerin genellemesi olduğu görüşünden kaynaklanmaktadır (Lee, 1996). Baki (2008)'e göre genelleme, belli bir durumdaki örüntüyü bulup bir düşüncede toplama işidir. Kieran (1989)'a göre ise genelleme; bir cebirsel düşünme değildir ve genelleme için cebire gerek yoktur. Genelleme yapmada örüntülerin önemi büyüktür ve genelleme cebirsel düşünmenin temelidir (Tanışlı ve Özdaş, 2009).

Örnek 2.8.2.1.1 Aşağıda Şekil 2.8.2.1.1 ile verilen tekrarlayan örüntüde; tekarlama döngüsü beş birim olan bir üçgen, bir daire, iki yıldız ve bir kareden oluşmuş bir örüntüdür.

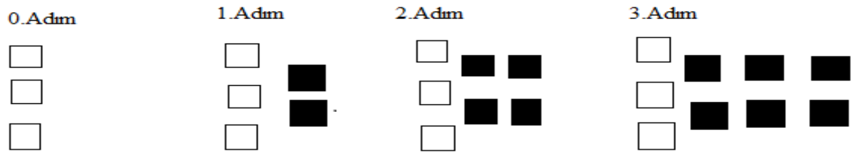
△○☆☆□△○☆☆□△

Şekil 2.8.2.1.1. Tekrarlayan Örüntü

Bu ilişkiyi tanımlama örüntünün bir sonraki teriminin ne olacağını tahmin etmede yararlı olabilir. Ayrıca değişen örüntüler, sayılardan oluşan iki küme arasındaki genellemelere ulaşmaya olanak sağlayabilir.

Örüntüler, fonksiyonel düşünmeye yardımcı olur (Warren ve Cooper, 2008). Örüntüleri tanıma, örüntüleri devam ettirme, örüntü kuralını sözel ve sembolik olarak ifade etme becerileri fonksiyonel düşünmeye yardımcı olur (Yakut Çayir, 2013).

Örnek 2.8.2.1.2 Aşağıda Şekil 2.8.2.1.2 ile verilen genişleyen örüntüde; 90. terimdeki karelerin sayısı sorulduğunda tekrarlayan düşünme ile yani (üç karenin yanına her zaman iki kare eklenecek olarak) herhangi bir adımdaki kare sayısını bulmak zor olur. Ancak örüntünün adım sayısı ve o adımdaki karelerin sayısı arasındaki ilişkiye odaklanılırsa kare sayıları ile adım sayıları ilişkilendirilerek genellemelere ulaşılabilir ve bu fonksiyonel düşünmeye odaklanmakla aynı şeydir.



Şekil 2.8.2.1.2. Genişleyen Örüntü

2.8.2.2. Ters İşlemleri Kullanma

Öğrencilerin kendi problem çözme stratejilerini geliştirmeleri**,** formal çözüm yöntemlerine geçişlerde anahtar rol oynamaktadır (French, 2002). Öğrencilerin sözel problemleri çözerken kullandıkları çözüm stratejileri olan tahmin, doğrulama, ters işlem algoritması; formal çözüm stratejilerine göre daha etkilidir (Baroody, 1998). Bayazıt ve Aksoy (2009)'a göre; ilkokul, ortaokul ve daha ileri matematik programlarında mevcut olan problem çözmede ters işlemleri kullanma stratejisi sıkça kullanılmaktadır.

Örnek 2.8.2.2.1 Öğrenciler Aşağıda Tablo 2.8.2.2.1 ile verilen; girdi değerlerini ve dönüşüm kuralını inceleyerek çıktı değerlerini bulabilirler. Çıktı değerlerini bulabilmek için toplama işlemini kullanabilirler. Tersine öğrenciler girdi değerlerini bulmak için toplamanın tersi olan çıkarma işlemini kullanılabilirler.

Tablo 2.8.2.2.1. Sıralanmamış Değerler ile Toplama ve Çıkarma İşlemi

Girdi değerleri	Değişim Kuralı	Çıktı Değerleri
3	8 ekle	11
2		10
8		16
7		15

Çıktı değerleri	Değişim Kuralı	Girdi Değerleri
11	8 çıkar	3
10		2
16		8
15		7

Kaynak: Akkan, 2016

Aynı durum çarpma ve bölme işlemleri için de geçerlidir. French (2002) ters işlemleri anlamanın; denklemleri sembolik dille göstermede, aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçişte ve fonksiyonel düşünmeyi desteklemede önemli olduğunu belirtmiştir.

2.9. Cebirsel Düşünmenin Gelişme Evreleri

Cebirsel düşünmenin başlıca gelişme evreleri aşağıdaki gibi verilebilir.

2.9.1. Sayısal Alanın Genişlemesi Olarak Cebir

Okullarda sık sık; *x, z, a, b* ve *c* nin benzer sayılar olduklarını duymaktayız. Harfler, sayılar gibi hareket ederler. Sayılar üzerindeki bu vurgu, diğer matematiksel nesnelerin cebirsel semboller gibi hareket edeceği gerçeğini gizlemektedir. Başka bir deyişle; cebirsel semboller, matematikteki sayılar gibi davranırlar. Aynı şekilde; doğru parçaları, alanlar ve hacimler cebirsel sembollere sayılardan daha yakındırlar. Herhangi iki sayı toplandığında, elde edilen sonuç sayı olarak yeni bir sembolle ifade edilir. Başlangıçtaki toplanan iki sayı, toplama işlemi sonucunda başka forma dönüşür. Geometrik büyüklüklerde, ise durum farklıdır. Verilen iki doğru parçası toplandığında (birinin bitiminde diğeri başlayacak şekilde), yeni bir doğru parçası oluşur. Eğer elde edilen yeni doğru parçası, bir reel sayı doğrusu üzerinde gösterilirse, bu reel doğru parçası üzerinde toplama giren orijinal doğru parçalarının her ikisi de bulunur. Eğer bu reel doğru parçası bir harf ile gösterilirse, o zaman yeni doğru parçasını temsil eden harf, kendi başına bir anlam ifade etmez. Tarihsel süreç incelendiğinde cebir, genellikle 14.yüzyılın ortalarından 16.yüzyılın ortalarına kadar sayısal terimlere bağlı olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla cebir; bu dönemde tüccarların kitaplarında bulunmakta ve haliyle cebirciler de, ticari aritmetiğin uygulayıcıları konumunda bulunmaktadırlar (Charbonneau, 1996: 34).

2.9.2. Bağıntılar Biliminin Genellemesi Olarak Cebir

Cebir, bağıntıları işlemenin en önemli yoludur. Bağıntılarla çalışmak; nesnelerin birini diğeri ile ilişkilendirmek demektir. Bu ilişkilendirme, bir aritmetik oluşturmaktır. Aritmetik ile tamsayılar arasındaki benzerlikler, aritmetiğin belirli olarak tanımlamasını sağlar. Bu tanımlama; eğer formüle edilirse (biçimlendirilirse), bir ölçüm teorisi olur. Fakat sezgisel ya da informal bir yolla üretilen bu benzerliklerdeki güçlüklerle uğraşmak gerekir.

Bağıntılar biliminin cebire doğru gelişmesinin her bir aşamasında; sayılar arasında, büyüklükler arasında veya aritmetik arasında bağıntıları ifade edecek yollar gelişmiştir. Bu sayede sayıların modern gösterimi yavaş yavaş ilerleme göstermiştir. Bu bakımdan, cebirde harfler ve sayılar benzer rol üstlenmektedirler (Charbonneau, 1996: 34).

2.9.3. Analiz Kullanılarak Cebir

Analiz, problemleri cebirsel olarak çözmede temel bir süreçtir. Aritmetik süreçler genellikle analitik değildirler. Analizin temeli hipotezdir, yani problemin varsayımdan çözülmesidir. Hipotezde verildiği düşünülen bilinmeyen, büyüklüklerin belirli bir yolla temsillerindeki gelişmeyi bize gösterir. Bu süreçte, bir şeklin bölümleri ya da bütün doğrular aynı yolla ele alınır. Cebirsel ifadelerde, bilinmeyenler ve katsayılar aynı yolla düzenlenir. Bu durum Viete'nin kitabı Algebra Nova'da yer alan bir yeniliktir ve Viete cebirde, yalnızca analizin terimlerini kullanmıştır. Sonraki yüzyıllarda da, cebirin terimleri ile analizin terimleri eş anlamlı olmuştur (Charbonneau, 1996: 35).

2.10. Cebir ve Cebirsel Düşünme Üzerine Yapılmış Araştırmalar

Burada cebir ve cebirsel düşünme ile ilgili yapılmış olan araştırmaların bazılarının özetleri; yazar soy isimlerine göre alfabetik olarak verilmiştir.

Akkan, Baki ve Çakıroğlu (2011) aritmetik ve cebir arasındaki farklılıklarda cebir öncesinin önemi hakkındaki makalelerinde; aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçişin kendiliğinden gerçekleşmeyeceğini, bu yüzden aritmetikten cebire geçiş kuşağı olan cebir öncesi kuşağının öneminin vurgulanması gerektiğini belirtmişlerdir.

Akkan, Baki ve Çakıroğlu (2012); 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerini problem çözme bağlamında incelemişler ve aritmetikten cebire geçiş sürecinde farklı problem çeşitleri ile ilgili çözüm stratejilerini kullanma becerilerinin kazandırılmasının cebirsel düşünmeye katkı sağlayacağını belirtmişlerdir.

Bağdat ve Saban (2014) çalışmalarında; 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerini solo taksonomisi ile incelemişler ve öğrencilerin en çok zorlandıkları kavramların semboller ve cebirsel ilişkiler olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Baki ve Bütüner (2011) çalışmalarında; cebirin tarihsel gelişimimini üç dönemde ele almışlar ve bu dönemleri incelemişlerdir. Bu dönemlerde cebirdeki gelişimler ve cebirsel problemlerin çözümleri ortaya koyulmuştur.

Bal (2016) çalışmasında, 6. sınıf matematik dersinde öğrencilerin cebirsel öğrenme alanlarındaki akademik başarıyı değişik öğretim yaklaşımları uygulayarak artırmayı incelemiştir. Sonuç olarak; farklı öğretim yaklaşımlarının cebir dersinde öğrencilerin başarısını artırıp, pozitif bilişsel gelişim sağladığını belirtmiştir.

Blanton ve Kaput (2004) çalışmalarında; öğrencilerin cebirsel düşünmesini geliştirmek için öğretmenlerin, cebirsel düşünmeyi destekleyecek ortamları oluşturmasının ve sınıf kültürü oluşturacak yolları bulmasının gerekliliğini vurgulamıştır.

Blanton ve Kaput (2008) kitaplarında; çocuklarda erken yaşlarda cebirsel düşüncenin gelişiminin incelemişlerdir. Cebirin doğası ve öğrencilerin cebirsel düşünme kapasitelerini araştırmışlardır.

Blanton, Levi, Crites, Dougherty ve Zbiek (2011); 3-5. sınıflardaki öğrencilerin matematik öğretiminde gerekli olan cebirsel düşünmeyi geliştirmek üzerine çalışmışlardır. Çalışmalarında, erken yaşlarda cebirsel düşünme becerisinin kazandırılmasının önemini vurgulamışlardır.

Bobis, Mulligan ve Lowrie (2009); cebirsel düşünme ile ilgili olarak okul öncesi ve ilkokulda cebirsel kavramların müfredatın içinde yer alması gerektiği görüşünün son yıllarda benimsenen fikirlerden olduğunu belirtmişlerdir.

Bush ve Karp (2013) araştırmalarında; ortaokul öğrencilerinde cebirsel becerilerin ön koşul yeterlilikleri ve bunlarla ilgili kavram yanılgılarına kapsamlı bir bakış sunmayı amaçlamışlardır. Çalışmalarında şu noktaları vurgulamışlardır: Öğrencileri cebire hazırlamak için kritik süreç ortaokul yıllarına denk gelmektedir. Matematiğin Genel ve Temel Standartları olan CCSSM'ye göre ortaokulda cebir için ön koşullar beceriler: Oran ve Orantı, Sayı Sistemi, Eşitlik ve Denklem, Fonksiyonlardır. NCTM ve CCSSM' ye göre cebirsel düşünme okul öncesinden lise sona kadar bütünlük içinde olmalıdır. Okul öncesinden lise sona kadar öğretim programlarında tüm öğrencilerin sahip olması beklenen içerikler: Örüntüleri, bağıntı ve fonksiyonları anlamak, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları yeniden gösterip analiz etmek, matematiksel modelleri kullanarak niceliksel ilişkileri anlamak ve temsil etmek, değişik içeriklerde değişimi analiz etmektir.

Cai ve Moyer (2007); erken yaşlarda cebirsel düşünmenin gelişimini, uluslararası alandaki çalışmalarda, bazı bakış açılarıyla karşılaştırmalı olarak incelemişlerdir. İncelenen bu uluslararası çalışmalarda iki büyük yaklaşım ele alınmıştır. Birincisi aritmetik ile cebir arasındaki ilişki, ikincisi de genellemelerdir. Bu iki yaklaşımın, erken yaşlarda cebirsel düşünme gelişimini destekleyeceğine inanılmaktadır.

Cai, Moyer ve Lew (2005); erken yaşlarda öğrencilerde cebirsel düşünmenin gelişimini araştırmışlardır. Bu araştırmada cebirsel kavramların; Çin, Güney Kore, Singapur, Rusya ve Amerika müfredatlarındaki verilme sıraları ve yaşları incelenmiş, erken yaşlarda öğrencilerden ulaşmaları beklenen seviyelere değinilmiş, aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçiş için yapılabilecek transferler vurgulanmıştır.

Charbonneau (1996); Euclid'den Descartes'e kadar cebiri ve cebirin geometriyle ilişkisini incelemiştir. Yunan Geometrisindeki, cebirsel kuralların geometrik ispatına yer verilmiştir. Geometrik problemlerin cebirsel çözümlerine değinilmiştir. Bunların yanı sıra cebirsel düşünme yollarından bahsedilmiştir.

Crino ve Tolar (2013); aritmetik ile cebirin bilişsel ilişkisini incelemişlerdir. Araştırmanın sonucunda şu noktaları vurgulamışlardır: Cebir kariyer ve mesleki başarı için ön koşuldur. Öğrenciler kavramsal bilgi olmadan işlemsel bilgiye sahip olabilir. Aritmetiksel yeteneklerin cebirle güçlü bir ilişkisi vardır ve cebirin bilişsel süreci doğrudan veya dolaylı olarak aritmetikle ilgilidir. Cebir için önemli 3 beceri içeriği vardır: Bunlar; kavramsal ve işlemsel cebir performansı (okul cebiri), cebir için ön koşul beceriler, işlemsel ve kavramsal cebir becerilerini hesaplamadır.

Dede ve Argün (2003) makalesinde; cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasını zorlaştıran nedenler üzerinde durmuştur. Sonuçta şunları vurgulamışlardır: Cebirin öğrenimi ve öğretimi üzerine gerek yurt dışında gerekse yurt içinde yapılan çalışmalar, öğrencilerin cebiri anlamalarında büyük sıkıntılarının olduğunu göstermektedir. Cebirin öğrenciler tarafından anlaşılamamasının nedenleri, öğretmenler tarafından incelenmelidir. Cebir öğretiminin iyileştirilebilmesi için günümüzde cebirin geleneksel öğretimine alternatif olarak; elektronik tablolar yaklaşımı, fonksiyonel yaklaşım, örüntü yaklaşımı ve iki yol öğretim modeli gibi yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Girit ve Akyüz (2015); örüntüleri genelleme bağlamında cebirsel düşünmenin geliştiği ortaokul yıllarındaki farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin akıl yürütme ve çözüm stratejilerini araştırmışlardır. Bulgularına dayanarak; erken yaşlarda öğrencilerin cebirsel düşünmelerini geliştirmek için aritmetik ile ilişkilendirmenin önemli olduğunu ve erken cebirin, yaklaşık 6 ile 12 yaş grubundaki öğrencilerin cebirsel düşünmesi olarak tanımlandığını belirtmişlerdir. İlkokul müfredatındaki cebirin, ortaokul matematiği için bir geçiş süreci olduğunu ifade etmişlerdir.

Fyfe, McLean ve McEldoon (2013); ilk 4 yılda örüntüyü anlamanın önemi üzerine çalışmışlardır. Araştırmanın sonuç ve öneriler kısmında; okul öncesi öğretmenlerinin, cebirsel düşünmenin başlangıcının önemli bir parçası olan örüntüyü anlatımlarıyla bütünleştirmeleri gerektiğini vurgulamışlardır.

Kabael ve Tanışlı (2010) çalışmalarında, örüntüden fonksiyona cebirsel düşünme sürecini incelemişlerdir. Erken dönemde sayı ve şekil örüntüleri arasındaki ilişkiler ile başlayan ve sonradan değişkenler arasındaki ilişkilerle devam eden fonksiyonel ilişkinin fonksiyon kavramının ön koşul bilgisi olduğunu vurgulamışlardır.

Kaput (2008), Mason (2006), Van Dooren ve Vershcaffel (2002) cebirsel düşünmeye girişin normalde olduğundan 2-3 yıl kadar daha erken başlaması gerektiği görüşünü savunmuşlardır.

Kaya ve Keşan (2014) çalışmalarında, ilköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemini araştırmışlardır. Çalışmanın sonuç kısmında; öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirebilmek için kavramlar arasında geçişler yapabilmeli, öğrendiklerini uygulayabilmeli ve farklı temsil değerleri ile bunu ortaya koyabilmeleri gerektiğini belirtmişlerdir.

Kieran (2004); erken yaşlarda (dönemlerde) cebirsel düşünmenin ne olduğunu araştırmıştır. Cebirin öğrenilmeye başlandığı 12-16 yaş aralığındaki cebir müfredatlarının benzerliklerini ve farklılıklarını tartışmıştır. Cebir ve cebirsel düşünme arasındaki farka ve cebirsel aktivitelerin temel bileşenlerinin üzerine odaklanmıştır.

Kinach (2014); cebirsel düşünmede genelleme ile ilgili araştırma yapmıştır. Genellemenin, cebirsel düşünmede giderek önem kazandığını keşfedilmiştir.

Knuth, Stephens ve Blanton (2016) çalışmalarında, cebir başarısı için erken temel oluşturmayı araştırmışlardır ve sonuçta cebir başarısı için, cebir müfredatının içeriğine erken yaşlarda başlanılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Kriegler (2007), cebirsel düşünmenin ne olduğu ile ilgili çalışma yapmıştır. Cebirsel düşünmenin; matematiksel düşünme yollarının gelişimi ve temel cebirsel düşünme çalışmaları gibi iki büyük bileşenden oluştuğunu vurgulamıştır.

Lee ve Freiman (2006); örüntülerin keşfiyle cebirsel düşünmenin gelişimi üzerine çalışmışlardır. Araştırmalarında çocukların erken yaşlarda örüntüsel çalışmaları daha kolay bir şekilde keşfedebildiğini tespit etmişlerdir. Örüntülerin cebire giriş için ön koşul olduğunu ve örüntünün anlatımına okul öncesinde başlanılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Lee, Collins ve Melton (2016) çalışmalarında; birçok eğitimci gibi cebirsel düşünmeye girişin 3-4 yaşlarında başlamasının daha yararlı olacağı görüşünü savunmuşlardır. Cebire; örüntüler, semboller ve materyaller arası ilişkiler gibi temel içerikler ile giriş yapılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Lian ve Yew (2011) çalışmalarında; ilkokulda öğrencilerin tekrarlayan örüntüleri genelleme yoluyla ön cebirsel düşünmelerini geliştirmelerini önermiştir.

Ormond (2012) çalışmasında; cebirsel düşünmenin okul öncesi dönemde gelişimini sağlamak için iki anahtar nokta üzerinde durmuş ve cebirsel düşünmenin okul öncesi dönemden 2-3 yıl kadar daha erken başlamasının gerektiğini vurgulamıştır.

Radford (2011) çalışmasında; öğrencilerde erken yaşlarda cebisel düşünmeyi geliştirme fikrini savunmuştur. Erken cebirsel düşünmede örüntüleri kavramanın önemini vurgulamış ve küçük öğrencilerde cebirsel düşünmenin gelişimi için eşitlik, problem çözme ve örüntüleri genelleme gibi cebirsel düşünmede anahtar noktalarının anlaşılması gerektiğini belirtmiştir.

Rittle-Johnson, Fyfe, McLean ve McEldoon (2013) çalışmalarında; cebirsel düşünmeye okul öncesi dönemden itibaren başlanılması gerekliliğini vurgulamışlardır. Dört yaşına kadar çocukların örüntüleri genelleme etkinliklerini oldukça iyi yapabildiklerini ve okul öncesi öğretmenlerinin cebirsel düşünmeyi oluşturabilmek için örüntü kavramını etkinlikler ile birleştirmelerinin yararlı olacağını belirtmişlerdir.

Stephens, Blanton, Knuth, İşler ve Gardiner (2015) yaptıkları çalışmalarında; erken yaşlarda cebir eğitimine ve okul öncesinden itibaren de ilkokul da dahil olmak üzere cebirsel düşünmenin öğretimine başlanılması gerektiğini savunmaktadırlar.

Warren, Mollinson ve Oestrich (2009) çalışmalarında; eğitimin ilk yıllarındaki sınıflarda eşitlik ve denklem kavramlarını incelemişlerdir. Araştırmanın sonucunda ise ilk yıllardaki cebirsel düşünmenin formal cebir konularını içermediği, aritmetiksel düşünmeyi yapılandırmayı içerdiği vurgulanmıştır. İlk yıllardaki cebirsel düşünmenin küçük öğrencilerde, durumları etkili bir biçimde birleştirmeye yardımcı olduğu belirtilmiştir.

Yenilmez ve Teke (2008) çalışmalarında, yenilenen matematik programlarının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisini araştırmışlardır. Cebir ve değişken kavramının önemi, gelişimi ve tanımları üzerinde durmuş ve değişken kavramının cebirdeki önemini vurgulamışlardır.

Zbiek ve Larson (2015); cebir öğrenimini artıracak öğretim stratejileri üzerine çalışmışlardır. Çalışmalarında şunlara değinmişlerdir: Yeni Bilim Eğitimi Enstitüsü (IES) uygulama planı; ortaokul ve lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerini artırmak için öğretim stratejilerine rehberlik etmektedir. IES uygulama planından özel yöntem ve yolları kendi önerileriyle sunmuşlardır. Öğretmenlerin cebir yapılarıyla ilgili sınıf deneyimlerini artıracak şekilde eğitim programları hazırlanabileceğini de belirtmişlerdir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

3.1 Araştırma Deseni

Bu çalışmada nitel meta-analiz olarak adlandırılan meta-sentez yöntemi kullanılmıştır. Meta-sentez literatür tarama yöntemlerine yeni bir bakış açısı getirerek bir konudaki farklı araştırma sonuçlarını; bütünleştirici, sistematik ve objektif bir yaklaşımla sentezini mümkün kılar. Bu yöntemle belirli bir konu üzerinde farklı araştırmacılar tarafından yapılmış olan birçok çalışma bir araya getirilebilir. Meta-sentez araştırmaları; belirli bir alanda yapılan nitel veya nicel bulguların; yorumlanmasını, değerlendirilmesini, benzer ve farklı yönlerinin ortaya konulmasını ve yeni çıkarımlar yapılmasını amaçlayan çalışmalardır. Çalık ve Sözbilir (2014)'e göre meta-sentez; belli bir alanda yapılan araştırmaların nitel bir anlayışla ele alınıp, benzerlik ve farklılıkların karşılaştırmalı olarak ortaya konulmasıdır. Meta-sentez için gerekli işlem adımları tamamlandıktan sonra çalışmalardan kriterlere uygun olmayanlar, çalışma sonucunu olumsuz etkileyebileceği için sentez dışı bırakılır. Çalışmaların her birinin niteliksel olarak değerlendirilmesinde bazı önemli özellikler araştırmacı tarafından belirlenir. Bulunması istenen bu özellikleri aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür (Petitti, 1994).

1. Araştırılacak konu ile ilgili verilerin araştırma kriterleri dâhilinde bulunması.
2. Senteze dahil edilen çalışmalarda ortaya çıkan sonuçlar arasında herhangi bir tutarsızlık olmaması ve uyum içerisinde olması.

Meta-sentez çalışmaları (Aspfors ve Fransson, 2015; Staneva, Bogossian ve Wittkowski 2015; Campbell, Pound, Morgan, Daker-White, Britten, Pill ve Donovan, 2011; Thomas ve Harden, 2008; Sandelowski ve Barroso, 2007; Noblit ve Hare, 1988) incelendiğinde; araştırmacıların benzer işlem adımlarını takip ettikleri görülmektedir. Bu işlem adımları aşağıdaki gibi belirlenmiştir (Polat ve Ay, 2016).

1.Adım: Araştırma sorularının belirlenmesidir.

2.Adım: Çalışmanın konusuna uygun anahtar kelimeler belirlenip alanyazın taramasının yapılmasıdır.

3.Adım: Kaynakların sağlanması, gözden geçirilmesi ve değerlendirilmesidir.

4.Adım: Elde edilen kaynakların araştırmaya dâhil edilme ve hariç tutulma ölçütlerinin belirlenerek değerlendirmeye alınacak çalışmaların seçilmesidir.

5.Adım: Seçilen çalışmaların benzer ve farklı yönlerinin ortaya konulmasıdır.

6.Adım: Temalar çerçevesinde elde edilen bulgular sentezlenerek çıkarımlarda bulunulmasıdır.

Çalışma kapsamında; araştırma konusu ile ilgili ulaşılan çalışmaların bir meta-sentezi yapılmıştır. Bu doğrultuda şu sorulara cevap aranmıştır:

1) Cebirsel düşünme becerilerinin ön koşul yeterlilikleri ve bunlarla bağlantılı kavram yanılgıları nelerdir?

2) Cebirsel düşünme becerisinin kazanımı için kritik süreç hangi yaş aralığına karşılık gelmektedir?

3) Cebirsel düşünme becerisinin kazanımı için cebirsel kavramların müfredatta hangi yaş ve sırada verilmesi yararlı olur?

3.2. Verilerin Toplanması

Meta-sentez çalışmasına dahil edilecek çalışmaları belirlerken, Yüksek Öğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi resmi sitesinin veri tabanından "cebir" ve "cebirsel düşünme" anahtar kelimeleri taranmıştır. Sonuçta; 2005 – 2016 yılları arasında yayınlanmış ve erişime açık 472 yüksek lisans tezi ile 160 doktora tezine ulaşılmıştır. Ayrıca, Ulusal Akademik Ağ ve Bilgi Merkezi (ULAKBİM) resmi sitesinin veri tabanından "cebirsel düşünme" anahtar kelimesi kullanılarak; 2005 – 2016 yılları arasında yayınlanmış ve erişime açık 55 teze ulaşılmıştır. Daha sonra Uluslararası veri tabanı olan Eğitim Araştırma ve Bilgi Merkezi (ERIC) üzerinden "algebraic thinking" anahtar kelimesi ile tarama yapılarak; 2005-2016 yılları arasında yayınlanmış ve erişime açık 59 teze, "algebra" kelimesi kullanılarak da erişime açık 958 teze ulaşılmıştır. Ulaşılan tezler incelenerek çalışma konusuna dahil edilme kriterlerine uygun olanlar tespit edilmiştir. Bu araştırma; 2005-2016 yılları arasında yayınlanan cebirsel düşünme becerisi üzerine 23 çalışmayı kapsamaktadır. Cebirsel düşünme becerisi ile ilgili olmayan araştırmalar çalışmaya dahil edilmemiştir. Meta-senteze dahil edilen çalışmaların; kodları ve ana temaları Tablo 3.2.1 de verilmiştir.

Tablo 3.2.1. Meta-Sentezde Kullanılan Araştırmaların Kodları, Yazarları, Yayın Yılı, Teması ve Deseni

Araştırmanın				
Kodu	**Yazar(lar)ı**	**Y.Yılı**	**Ana Teması**	**Deseni**
A1	Lee, Collins ve Melton	2016	Cebirsel Düşünmede Kritik Süreç	Nitel
A2	Desli ve Gaitaneri	2016	Cebirsel Düşünmede Ön Koşul Beceri	Nicel
A3	Tagle, Belecine ve Ocampo	2016	Cebirsel Düşünme Becerilerini Geliştirme	Nicel
A4	Pearn ve Stephens	2016	Cebirsel Düşünmenin Belirleyici Unsuru	Nitel
A5	Knuth, Stephens, Blanton ve Gardiner	2016	Cebirsel Düşünmede Erken Temel İnşa Etme	Nitel
A6	Bal	2016	Cebirsel Düşünme Becerisini Geliştirmede Etkili Öğretim Yaklaşımı	Nicel
A7	Zbiek, Larson ve Matthew	2016	Cebirsel Düşünmeyi Geliştirmede Öğretim Stratejileri	Nitel
A8	Kinach	2014	Cebirsel Düşünmenin Özü olan Genelleme	Nitel
A9	Kaya ve Keşan	2014	İlkokulda Cebirsel Düşünmenin Önemi	Nitel
A10	Radford	2014	Erken Cebirsel Düşünmeyi Geliştirme Süreci	Nicel
A11	Bush ve Karp	2013	Cebirsel Düşünmede Ön Koşul Beceriler ve Kavram Yanılgıları	Nitel
A12	Crino, Tolar ve Fuchs	2013	Cebirsel Düşünmede Aritmetik ve Bilişsel Durumlar	Nitel
A13	Rittle-Johnson, Fyfe, McLean ve McEldoon	2013	İlk Dört Yılda Örüntüleri Anlamanın Cebirsel Düşünme Becerisinde Önemi	Nicel
A14	Ormond	2012	Erken Cebirsel Düşünmeyi Oluşturmada Anahtar İçerikler	Nitel
A15	Blanton, Levi, Crites ve Dougherty	2011	Cebirsel Düşünmeyi Geliştirmede Kritik Süreç	Nitel
A16	Blanton ve Kaput	2011	İlkokulda Fonksiyonel Düşünmenin Cebirsel Düşünme Üzerine Etkisi	Nicel
A17	Kabael ve Tanışlı	2010	Cebirsel Düşünme Sürecinde Ön Koşul Beceriler	Nitel

A18	Warren, Mollinson ve Oestrich	2009	Erken Sınıflarda Eşitlik ve Denklem Kavramlarının Cebirsel Düşünmedeki Önemi	Nitel
A19	Kriegler	2007	Cebirsel Düşünme Nedir	Nicel
A20	Cai ve Moyer	2007	Cebirsel Düşünme Becerisini Erken Sınıflarda Geliştirmek için Ülke Müfredatlarının İncelenmesi	Nitel
A21	Lee ve Freiman	2006	Cebirsel Düşünme Becerisinde Örüntülerin Önemi	Nitel
A22	Cai, Ng, Moyer ve Lew	2005	Cebirsel Düşünmeyi Erken Sınıflarda Geliştirmek için Cebirsel Kavramların Ülke Müfredatlarında Verilme Yaş ve Sırası	Nitel
A23	Kieran	2005	Ülke Müfredatlarında Cebirsel Düşünmeyi Geliştirme Yollarının İncelenmesi	Nitel

3.3. Verilerin Analizi

Noblit ve Hare (1988) ya göre; meta-sentez yaklaşımında verilerin analizi yedi aşamada yapılmaktadır. Bu araştırmada da, aşağıda verilen analiz basamakları dikkate alınarak çalışmaların analizi yapılmıştır:

1.Aşama: Olgusal Bir Çalışmaya Karar Verme ve Başlama

Bu sentezlenmeye değer bir ilgi alanını (araştırılacak konuyu) tanımlamanın ilk basamağıdır. Bu araştırmada ilgi alanı olarak “cebirsel düşünme becerileri” seçilmiştir.

2.Aşama: İlgi Alanına İlişkin Hangi Çalışmaların Kullanılacağına Karar Verme

Bu aşama, analize dahil edilecek çalışmalar için bir literatür taramasını yürütmeyi içermektedir. Dolayısıyla araştırmaya dahil edilecek çalışmaların seçilmesi bu aşamada yapılmaktadır. Bu araştırmada, dahil edilme ve hariç tutulma ölçütlerine uygun olan makaleler, yüksek lisans veya doktora tezleri araştırmaya dahil edilmiştir. Dahil edilme ölçütleri olarak 2005-2016 yılları arasında yapılan cebirsel düşünme becerisi ile ilgili çalışmalar belirlenmiştir. Diğer çalışmalar ise dahil edilmemiştir.

3.Aşama: Nitel Verileri Okuma

Bu aşama, yorumsal metaforların çıkarılmasına olanak sağlamaktadır. Bu araştırmada dahil edilen çalışmaların ana temaları Tablo 3.2.1 de verilmiştir. Araştırmaya dahil edilen 23 çalışmadan alt problemler doğrultusunda çıkarımlarda bulunulmuştur. Araştırmada; cebirsel düşünmede kritik süreç, ön koşul beceriler ve cebirsel kavramların ülke müfredatlarında verilme sırası ile ilgili bilgiler not edilmiştir.

4.Aşama: Verilerin Birbirleriyle Nasıl İlişkili Olduğunu Belirleme

Bu aşama, anahtar fikirler ve kavramlar ile çalışmaların hangi yönlerden benzer olduklarının belirlenmesidir. Ayrıca çalışmalarda yazarların orijinal fikirleri, orijinal metinlerden elde edilen anlamları mümkün olduğu kadar korunarak verilmiştir. Dahil edilen çalışmaların anahtar kavram ve fikirleri araştırmanın alt problemleri doğrultusunda tablolarda verilmiştir. Tabloların oluşturulması, çalışmaların benzer olduğu yönlerin listelenmesine yardımcı olmaktadır.

5.Aşama: Verileri Birbirine Dönüştürme

Dönüştürmeler, önceki aşamada türetilen muhtemel varsayımlara dayanılarak yapılır.

6.Aşama: Dönüştürmeleri Sentezleme

Bu aşama, ikinci düzey bir sentezleme olup araştırmaya çok sayıda veri dahil edildiği zaman kullanılır ve yüksek düzeyde bir soyutlama olanağı sağlar. Bu araştırmada dahil edilen çalışmalar tablolar üzerinden cebirsel düşünmede ön koşul beceriler, kritik süreç ve cebirsel kavramların ülke müfredatlarında verilme sırası ve yaşı açısından yorumlanmıştır.

7.Aşama: Sentezleri İfade Etme

Bu son aşamada sentez, etkili bir biçimde ifade edilir. Bu araştırmada da, elde edilen veriler sentezlenerek ifade edilmiştir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR

Cebirsel düşünme üzerine yapılan çalışmaların büyük bir kısmında; cebirsel düşünmede ön koşul becerilerin ve kritik süreçlerin incelendiği tespit edilmiştir. Meta-senteze dahil edilen çalışmaların analizleri, alt başlıklar altında tablolar şeklinde verilmiştir.

4.1. Cebirsel Düşünmede Ön Koşul Beceriler ve Bunlarla Bağlantılı Kavram Yanılgıları ile İlgili Bulgular

Araştırmaya dahil edilen çalışmaların cebirsel düşünmede ön koşul beceriler açısından incelenmesiyle elde edilen bulgular Tablo 4.1.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1.1. Cebirsel Düşünmede Ön Koşul Becerilere İlişkin Bulgular

Araştırmanın			
Kodu	**Yazar(lar)ı**	**Y.Yılı**	**Cebirsel Düşünmede Ön Koşul Beceri Bulguları**
A1	Lee, Collins ve Melton	2016	Örüntüler, sembol ve ifadeler
A2	Desli ve Gaitaneri	2016	Örüntü genellemeleri
A3	Tagle, Belecine ve Ocampo	2016	Örüntü genellemeleri
A4	Pearn ve Stephens	2016	Kesirler, sayısal işlemler
A5	Knuth, Stephens, Blanton ve Gardiner	2016	Örüntü genellemeleri, değişkenler, eşitlik
A6	Bal	2016	Örüntü genellemeleri, matematiksel yapıları tanıma
A7	Zbiek, Larson ve Matthew	2016	Cebirsel denklem ve ifadeler
A8	Kinach	2014	Örüntü genellemeleri, Genelleme problemleri
A9	Kaya ve Keşan	2014	Genelleme problemlerini çözme, Matematiksel sembolleri kullanma, fonksiyonel ilişkiler
A10	Radford	2014	Örüntü genellemeleri

A11	Bush ve Karp	2013	Örüntüler, sayı sistemleri, oran ve orantılar, denklem ve ifadeler, fonksiyonlar
A12	Crino, Tolar ve Fuchs	2013	Aritmetiksel işlemler
A13	Rittle-Johnson, Fyfe, McLean ve McEldoon	2013	Örüntü genellemeleri
A14	Ormond	2012	Sayısal işlemler, eşitlik ve denklem
A15	Blanton, Levi, Crites ve Dougherty	2011	Örüntüleri genelleme, genelleştirilmiş aritmetik, eşitlik ve denklem
A16	Blanton ve Kaput	2011	Örüntü genellemeleri, fonksiyonel düşünme
A17	Kabael ve Tanışlı	2010	Örüntü genellemeleri, fonksiyonel düşünme
A18	Warren, Mollinson ve Oestrich	2009	Genelleştirilmiş aritmetik, eşitlik ve denklem
A19	Kriegler	2007	Genelleştirilmiş aritmetik, değişkenler
A20	Cai ve Moyer	2007	Aritmetiksel ilişkiler, genelleme ve temsil stratejileri
A21	Lee ve Freiman	2006	Örüntüler
A22	Cai, Ng, Moyer ve Lew	2005	Örüntüler, cebirsel ifadeler, matematiksel modelleri kullanma
A23	Kieran	2005	Aritmetiksel ilişkiler, değişkenler, eşitlik ve denklem

Tablo 4.1.1'e bakıldığında; incelenen 23 çalışmadan 14 tanesinde örüntü genellemelerinin, 7 tanesinde genelleştirilmiş aritmetiğin, 7 tanesinde ise eşitlik ve denklemin cebirsel düşünmede ön koşul beceriler olarak belirtildiği görülmüştür. İncelenen çalışmaların büyük bir kısmının ön koşul beceri olarak örüntü genellemelerini vurguladığı tespit edilmiştir. Diğer ön koşul becerilerin ise sayısal işlemler, oran-orantı, fonksiyonel düşünme, genelleme ve temsil stratejileri ile değişkenler olduğu görülmektedir. Bu durum Matematiğin Genel ve Temel Standartları (CCSSM)'nın cebirsel düşünme becerisi için ön koşul içerikler olarak tanımladığı; örüntü, sayı sistemi, oran-orantı, eşitlik ve denklem, fonksiyon kavramları ile de uyuşmaktadır.

Aynı şekilde Welder (2007) de cebirsel düşünme becerisinin oluşma sürecinde ön koşul içerik alanlarını:

- Örüntü,
- Eşitlik,
- Cebirsel semboller,
- Cebirsel denklemler,
- Sayı sistemleri,
- Oran ve Orantı,
- İşlem Sırası,
- Fonksiyonlar,
- Grafikler,

olarak belirlemiştir.

Elde edilen bulgularla Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi NCTM (2000) nin belirttiği okul öncesinden lise sona kadar tüm öğrencilerin; örüntüleri anlamak, cebirsel semboller yardımıyla matematiksel yapı ve durumları yeniden gösterip analiz etmek, matematiksel modelleri kullanarak niceliksel ilişkileri anlamak ve temsil etmek, farklı durumlarda değişimi analiz etmek gibi cebirsel kazanımlara sahip olmasının gerektiği görüşü ile de örtüşmektedir.

Cebirsel düşünmede ön koşul becerilerin önemleri ve bunlarla bağlantılı bazı kavram yanılgıları aşağıda özetlenmiştir.

Örüntüler; cebirsel düşünmenin gelişiminde, soyutlama yapabilmede, gösterimleri birbirine dönüştürebilmede ve çoklu çözüm stratejilerinin oluşturulamasında etkilidir (Yakut ve Çayir, 2013: 209). Örüntü genellemeleri; öğrencilerde cebirle ilgili kavramların temelini oluşturmada ve cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir role sahiptir (Herbert ve Brown, 1997). Siemon vd. (2011) araştırmalarında öğrencilerin erken örüntü deneyimlerinin; tanımlama yapmada, genellemede ve karşılaştırma yapmada avantajlar sağladığını ve erken yaşlarda çocukların örüntüye odaklanmalarının, genelleme yapmalarında ve cebirsel düşünmenin sağlanmasında en önemli noktayı oluşturduğunu belirtmişlerdir. Bütün bunlardan haraketle; örüntüleri tanıma, örüntüleri devam ettirme, örüntüleri genelleme, örüntüleri sembolle gösterme gibi becerilerin cebir için ön koşul olduğu söylenebilir.

Orantısal akıl yürütme; kavramsal düşünme, ilişkisel düşünme ve cebirsel düşünme becerilerini geliştirdiği için çok önemlidir (Lamon, 2012). Ortaokulda en önemli becerilerden biri olan orantısal düşünme, cebirsel düşünmenin temelini oluşturmaktadır (Langrall ve Swafford, 2000). Orantısal düşünmenin gelişiminde, çarpımsal akıl yürütmenin bilinmesinin yararlı olacağı düşünülmektedir. Bunun için de öğrencilerin; rasyonel sayılara, eşitliğe ve oran konusuna hakim olmaları ve fonksiyonel ilişkileri analiz edebilmeleri gerekmektedir (Bush ve Karp, 2013: 615).

Sayı sistemlerinin CCSSM'de içerik alanları; kesirler, ondalık kesirler, tamsayılar, üslü sayılar, işlem önceliği, sayıları karşılaştırma ve sayıları sıralama olarak belirtilmiştir (CCSSO, 2010a). Bottoms (2003), Silver (2000) ile Stacey ve MacGregor (1997a)'a göre; cebirde başarı için ondalık ve yüzdelikleri akıcı şekilde hesaplayabilmek gerekir. Bottoms (2003), Darley (2009), Peled ve Carraher (2008) ile Thorpe (1989) ise tamsayıların kavramsal anlamanın ve hesaplamanın cebirde başarı için önemli olduğunu belirtmişlerdir. Bottoms (2003) ise; üslü sayıları anlamanın ve sayılarda işlem önceliğinin kullanılmasının cebirde başarı için kritik ön koşul beceri olduğunu belirtmiştir. Baroudi (2006), Bottoms (2003), Carpenter, Levi ve Farnsworth (2000), Warren (2003) ise sayıların özelliklerini anlamanın cebir için güçlü temel inşa edeceği fikrinde görüş birliğindedir. Thorpe (1989), Bottoms (2003) ile Stacey ve MacGregor (1997) ise; iki sayının büyüklüklerine göre karşılaştırılmasının, cebirsel yeteneklerin ön koşullarından biri olduğunu söylemişlerdir.

Eşitlik kavramı ve eşittir işareti; cebirin yapı taşlarındandır. Birçok araştırmacıya göre; öğrencilerin eşitlik konusunda kavram yanılgısı yaşadıkları en can alıcı nokta, eşittir işaretini bir sorunun cevabını gösteren işlemsel sembol olarak görmeleridir (Ball, Thames ve Phelps, 2008; Baroudi, 2006; Jacops, Franke, Carpenter, Levi ve Battey, 2007; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2011; Van Dooren, Verschaffel ve Onghena, 2002; Welder, 2007). Asquith, Stephens, Knuth ve Alibali (2007); eşittir işaretinin kavramsal anlamını bilmenin, işlemlerde tersten gidilince de eşitliğin korunduğunu anlamada kritik öneme sahip olduğunu savunmaktadırlar. Kieran (1981, 2008) öğrencilerce eşitliğin kavranması üzerine yaptığı araştırmalarda; okul öncesinde eşittir işaretini genellikle iki grubun aynılığı olarak, ilkokul ve ortaokulda ise eşittir işaretinin işlemsel sembol olarak algılandığını ve 13 yaşından sonra bu düşüncenin eşitliği temsil ettiği görüşü ile değiştiğini savunmaktadır.

Değişken kavramı; öğrencilerde cebirsel düşünmenin başlamasında ve gelişmesinde etkili olan bir diğer unsurdur. Değişkenlerin; cebirsel düşünme becerisinde ve cebirsel kavramların temelini oluşturmada çok önemli olduğu düşünülmektedir (NCTM, 1998). Değişkenlerin kullanımıyla, genellemelerde ve matematiksel durumları temsil etmede yeni bir dil ortaya çıkmaktadır (MEB, 2006). Philipp (1992) çalışmasında değişkenlerin cebirdeki rollerini; etiketler, sabitler, bilinmeyenler, değişen nicelikler, parametreler ve soyut semboller olarak vurgulamıştır.

Cebirsel denklemler ve cebirsel ifadeler konusunda; Bottoms (2003), bir bilinmeyenli bir ve iki adımlı denklemleri çözmenin cebir bilgisinin ön koşulu olduğunu belirtmiştir. İleri matematik konularının anlaşılması, denklem kavramının kazanımına ve denklemlerin çözülebilmesine bağlıdır (Dede, 2005: 142). Linchevski (1995)'nin; sayıları harflerin yerine koyarak çözüm fikirlerini geliştirme, eşit denklemlerde yer değiştirmeyi anlama, öğrencilerin kendi kurallarını kullanmasına izin veren bilişsel şemalar inşa etme, denklemleri çözmek için birleştirici aktiviteler uygulama olarak dört kategoride düzenlediği cebir müfredatı da doğrudan ortaokul matematik müfredatındaki cebirsel denklemler ile bağlantılıdır.

Fonksiyon, matematikteki en önemli parçalardan biridir (Peled ve Carraher, 2008; Ellis, 2011). Fonksiyon; sadece cebirin değil, matematiğin tüm dallarının en önemli kavramlarındandır (Willoughby, 1997). Fonksiyonları ve fonksiyonel ilişkiyi anlama; NCTM standartlarında da cebirsel düşünmenin oluşmasında kritik noktalarından biridir (NCTM, 2000). Bunun yanı sıra ilkokulda örüntüler ile başlayan ve ortaokulda fonksiyon kavramı ile devam eden fonksiyonel düşünmenin cebirsel düşünmenin temeli olduğu araştırmacıların ortak görüşlerindendir (Mason, 1996; Warren ve Cooper, 2005; Blanton ve Kaput, 2004). Bottoms (2003) cebir için ön koşul bilginin; fonksiyonları kullanmak, değişim oranlarını açıklamak, doğrusal olmayan fonksiyonları anlayabilmek olduğunu belirtmiştir.

İncelenen çalışmalardan elde edilen, cebirsel düşünmenin ön koşul becerilerinde yapılan kavram yanılgılarına ilişkin bazı bilgiler Tablo 4.1.2 de verilmiştir.

Tablo 4.1.2. Cebirde Ön Koşul Becerilerdeki Hatalar ve Kavram Yanılgıları

Oran ve Orantısal İlişkiler	**Sayı Sistemleri**	**Denklemler ve İfadeler**	**Fonksiyonlar**
Orantısal ilişkiler arasındaki bağlantıyı yanlış anlama	Kesirleri kavramsal olarak anlamama, işlemsel olarak kullanma veya yanlış kullanma	Eşittir işaretinin ilişkileri ifade ettiğini düşünmek yerine, sorunun cevabı nedir gibi düşünmek	Fonksiyonların çoklu gösterimleri arasındaki bağlantıyı görememe
Birimleştirme yeteneğinin olmaması	Ondalık sayıların değerini yanlış bilinmesinden yanlış sıralama	Değişkenleri etiket veya birimler gibi yanlış olarak görmeleri	Doğrusal fonksiyonların değişim oranını anlayamama
Oranların farklı yazılışlarını bilme eksikliği	Negatif sayılardan kaçınma, negatif işaretini ihmal etme	Aynı denklemde iki değişkenin aynı değeri alamayacağını düşünmek	Fonksiyonunun orantılı veya orantısız olduğunu anlayamama
Oranları aynı veya farklı birimlerde gösterememe	Çıkarma işlemini, negatif işaretin takip ettiği işlemlerde zorlanma	Değişkenlerin alfabetik sıraya göre değer aldığını düşünmek ve değişkenlerin farklı sayıları da temsil edebileceğini anlayamamak	Bağımlı ve bağımsız değişken kavramını anlayamamak
Oranları nicelik olarak görmeme	Birleşme ve Değişme özelliğinin çıkarma ve bölme işlemlerinde de olduğunu düşünmek	Denklemlerde dağılma ve sadeleştirme özelliğini uygulayamama	Fonksiyonların grafiğini anlayamama, yorumlayamama

Kaynak: Bush ve Karp, 2013

Bu kavram yanılgıları; öğrencilerin çeşitli matematiksel problemleri çözmelerini zorlaştırmakta ve genel olarak konularda geçen kavramların birbirleriyle ilişkilendirmelerini de zorlaştırmaktadır.

Örnek 4.1.1. ***a*)** Öğrencilerin $4 + 5 = \Delta + 6$ ifadesinde üçgen yerine 9 yazmaları, eşittir işaretini anlayamamalarından kaynaklanmaktadır. Eşittir işaretini anlayamama; sadece cebirsel düşünmede değil aynı zamanda sayılar, tamsayılar, orantılar gibi tüm işlemlerdeki başarıya etki eder.

***b*)** $4 - x = 5$ denklemini çözerken $4 - (-1)$ işleminde çıkarma işlemini negatif sayının takip etmesinde yaşanan sorun denklem çözümündeki başarıya etki eder.

c) $3y + 6$ cebirsel ifadesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerindeki dağılma özelliğinin bilinmesi, $3y + 6 = 3(y + 2)$ eşitiğini yazabilmede önemlidir.

***d*)** Dikdörtgenin çevre uzunluğunu yazarken $2(m + n)$ ifadesinde m değişkenini metrenin kısaltması olarak düşünmek, genellemeleri formüle etmede sıkıntı oluşturmaktadır.

Görüldüğü gibi ön koşul alanlar birbirini etkilemektedir. Bu ön koşul alanlardaki kavram yanılgılarının giderilmesi cebirsel düşünme becerisini geliştirmeye yardımcı olacaktır.

Tablo 4.1.1'e bakıldığında cebirsel düşünmede ön koşul becerilerden birinin de genelleştirilmiş aritmetik olduğu görülmektedir. Genelleştirilmiş aritmetik; sayılarla işlem yapma, sayılar arasındaki ilişkileri ve özellikleri ile ilgili muhakeme yapabilmektir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). Kieran ve Chalouh (1993), Hersovics ve Linchevski (1994), Sfard ve Linchevski (1994), Linchevski (1995), Stacey ve MacGregor (1997a) ve McNeil ve Alibali (2005) gibi birçok araştırmacı; öğrencilerin cebirle ilgili düşüncelerini, aritmetikle ilgili daha önceki bilgilerden yola çıkarak yapılandırdıklarını vurgulamışlardır. French (2002) ise aritmetiksel işlemlerin cebirsel ifadeleri basitleştirmede kolaylık sağlayacağını belirtmiştir.

Örnek 4.1.2. Dağılma özelliğini;

$$8\,x\,15 = (8\,x\,10) + (8\,x\,5) = 8\,x\,(10 + 5) = 8\,x\,15$$

aritmetiksel işleminde olduğu gibi

$8a + 5a = a\,(8 + 5)$ formatında cebirsel ifade olarak düşünme.

Cebirsel düşünme genelleştirilmiş aritmetik aracılığıyla;

• İlişkileri ve özellikleri keşfetme,

• Nicelikler arasında bir ilişki olarak eşitliği keşfetme,

• Değişkenler olarak sembolleri kullanma,

gibi yollarla da geliştirilebilmektedir (Ontario Ministry of Education (OME), 2013). Bu yolların herbiri örneklerle açıklanarak verilmiştir.

4.1.1. İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme

Örnek 4.1.3. $4 + 4 = 8$ işleminde öğrenciler sayıların özellikleri hakkında düşünmeye başlayarak $çift + çift = çift$ olduğunu yorumlayabilirler. Benzer şekilde değişme özelliğinde $\frac{1}{2} \times 12$ ifadesi yerine $12 \times \frac{1}{2}$ ifadesini düşünmek, $12 \times \frac{1}{2}$ ifadesinin 12'nin yarısı olduğunu anlamayı kolaylaştıracaktır.

4.1.2. Nicelikler Arasında Bir İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme

Örnek 4.1.4. "$8 + 6 = \Delta + 7$" eşitliğinde öğrencilerin üçgen yerine 14 yazmaları, eşittir işaretini işlemsel sembol olarak görmelerinden kaynaklanmaktadır. Ancak eşittir işaretinin, ilişkisel bir sembol olduğunu düşündükten sonra öğrenciler "$8 + 6 = \Delta + 7$" eşitliğinde 8 ile 6'yı topladıktan sonra 14 e ulaşmak için 7 ye hangi sayıyı eklemeleri gerektiğini bulacaklardır. Aynı eşitlik için ilişkisel düşünmeye sahip olan öğrenciler "$8 + 6 = \Delta + 7$" denklemine bir bütün olarak bakabilir, 7 ile 6 arasındaki fark olan 1'i dikkate alarak üçgen yerine gelecek sayının 8'den 1 eksik olduğunu ifade edebilirler.

4.1.3. Değişkenler Olarak Sembolleri Kullanma

Küçük yaştaki öğrenciler sembolleri informal olarak aşağıdaki örnekde olduğu gibi ve benzer biçimlerde kullanmaya başlarlar.

Örnek 4.1.5.

0+ ♥ = ♥,   2 – ☺ = 5 ⇒ 2 – 5 =☺ ⇒ – 3 =☺,

Δ + Δ + Δ = 3 x Δ,   5 x □ = 20 ⇒ □ = 4

Aritmetikte kullanılan harfli semboller belirli bir şeyin yer tutucuları iken cebirsel ifadelerde kullanılan harfli semboller, değişkenler veya bilinmeyenlerdir.

"$A = a \times b$" formülünde harfler (uzunluk ve genişlik) genelleştirilmiş sayılar olarak kullanılmıştır.

Ayrıca harfli sembol kullanımı, $\frac{x+6}{x-2} + \frac{x-4}{x+3}$ = 14 gibi karmaşık ifadeleri anlamada önemli rol oynamaktadır.

Kieran (1990) ve bazı araştırmacılar; öğrencilerin cebirsel düşünmelerini yapılandırmalarının aritmetik temelli ve matematiğin tarihsel gelişimi sırasındaki evrelere benzer olduğunu söylemişlerdir. Kieran'ın belirttiği evreler Tablo 4.1.3 ile verilmiştir.

Tablo 4.1.3. Öğrencilerin Cebir İle İlgili Düşüncelerine Ait Evreler

1.Evre	Tanımlamada semboller yerine sıradan bir dil kullanılır.
2.Evre	Bilinmeyenler için kısaltmalar veya semboller kullanılır, bilinmeyenleri bulma hedeflenir.
3.Evre	Harfler bilinen ve bilinmeyen nicelikler yerine kullanılır ve problemlerin sembolik çözümleri yapılır.

Kaynak: Kieran, 1990

Öğrencilerin cebir ile ilgili düşüncelerine ait evrelerin, örnek üzerinden açıklaması aşağıda yer almaktadır.

Örnek 4.1.6. "Verilen bir sayı ile o sayının yedide birinin toplamı ondokuz olduğuna göre verilen sayı kaçtır?" sorusunun cevabını Tablo 4.1.3 ile verilen evrelere göre inceleyerek verelim.

Çözüm: 1.evrede: Öğrenciler, soruyu sıradan bir matematiksel dille çözmeye çalışırlar. Önce deneme-yanılma yoluyla sayıyı 7 alıp $7 + \frac{1}{7}.7 = 8$ eşitliğine ulaşabilir ve sonucun doğru olmadığı düşünülerek sonucun 19 olması için bilinmeyeni bulmaya çalışabilirler. Ya da bilinmeyen sayı için 1 kat ve bu sayının yedide biri için de $\frac{1}{7}$ kat yazıp ikisini toplayıp ve sonucu 19 a eşitlerler ve

$$(1kat) + (\frac{1}{7}kat) = 19 \Rightarrow \frac{8}{7}kat = 19 \Rightarrow 1kat = 19\frac{7}{8}$$

doğru sonucunu bulmuş olurlar.

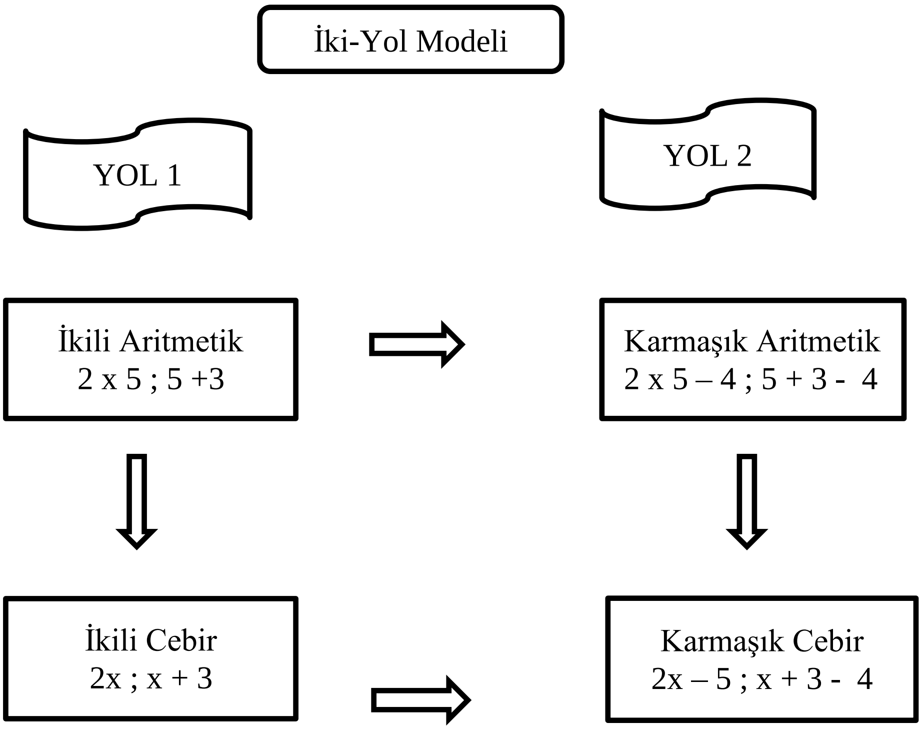
2.evrede: Bilinmeyen sayı için semboller kullanılır. Öğrenciler, bilinmeyen sayı yerine ♥ kullanabilirler. Böylece ♥+$\frac{1}{7}$♥ = 19 eşitliğini elde ederler.

3.evrede: Harfler bilinmeyenler yerine kullanılır ve öğrenciler problemlerin çözümlerini yaparlar. Bu soruda bilinmeyen yerine a harfi yazılırsa sorunun çözümü şu şekilde olur.

$$a + \frac{1}{7}a = 19 \Rightarrow \frac{8}{7}a = 19 \Rightarrow a = 19\frac{7}{8}$$

Boulton-Lewis vd. (1997) tarafından cebir öğretimiyle ilgili olarak iki – yol öğretim modeli önerilmiştir. Aritmetik temelli olan model Tablo 4.1.4 de sunulmuştur.

Tablo 4.1.4. İki-Yol Öğretim Modeli



Kaynak: Boulton-Lewis vd., 1997

Tablo 4.1.4 de görüldüğü üzere İki – Yol Öğretim Modeline Göre Cebirsel Kavramların Öğretimi;

(1) İkili aritmetik,

(2) Karmaşık aritmetik,

(3) İkili cebir,

(4) Karmaşık cebir,

sırasına göre yapılmalıdır.

Örnek 4.1.6. $2 \times 5 = 10$ ile $5 + 3 = 8$ ifadelerini Tablo 4.1.4 deki sıraya göre inceleyelim. Tablo 4.1.4 deki sıraya göre İkili aritmetikte "$2 \times 5 = 10$ ile $5 + 3 = 8$" biçimindeki benzer işlemler ele alınır. Bu işlemler, "$2x$ ile $x + 3$" biçimindeki benzer ikili cebirin anlaşılmasını sağlar. Benzer biçimde ikili aritmetik işlemler; "$2 \times 5 - 4 = 6$ ve $5 + 3 - 4 = 4$" şeklindeki karmaşık aritmetik işlemlerinin anlaşılabilmesi için de gereklidir. Karmaşık aritmetik işlemler de "$2x - 5 = 7$ ve $x + 3 - 4 = 3$" şeklindeki karmaşık cebir işlemlerinin anlaşılması için gereklidir.

4.2. Cebirsel Düşünme Becerisinin Kazanımı için Kritik Süreç ile İlgili Bulgular

Araştırmaya dahil edilen çalışmaların cebirsel düşünmede kritik süreç açısından incelenmesiyle elde edilen bulgular Tablo 4.2.1 ile verilmiştir.

Tablo 4.2.1. Cebirsel Düşünmede Kritik Sürece İlişkin Bulgular

Araştırmanın			
Kodu	**Yazar(lar)ı**	**Y.Yılı**	**Cebirsel Düşünmede Kritik Süreç**
A1	Lee, Collins ve Melton	2016	Okul öncesi (3-4 yaş aralığı)
A2	Desli ve Gaitaneri	2016	İlkokul
A3	Tagle, Belecine ve Ocampo	2016	İlkokul
A4	Pearn ve Stephens	2016	İlkokul
A5	Knuth, Stephens, Blanton ve Gardiner	2016	İlkokul
A6	Bal	2016	İlkokul
A7	Zbiek, Larson ve Matthew	2016	Ortaokul
A8	Kinach	2014	İlkokul
A9	Kaya ve Keşan	2014	İlkokul
A10	Radford	2014	Okul öncesi (4-5 yaş aralığı)
A11	Bush ve Karp	2013	Ortaokul
A12	Crino, Tolar ve Fuchs	2013	Ortaokul
A13	Rittle-Johnson, Fyfe, McLean ve McEldoon	2013	Okul öncesi (4-5 yaş aralığı)
A14	Ormond	2012	İlkokul
A15	Blanton, Levi, Crites ve Dougherty	2011	İlkokul

A16	Blanton ve Kaput	2011	İlkokul
A17	Kabael ve Tanışlı	2010	Okul öncesi (4-5 aralığı)
A18	Warren, Mollinson ve Oestrich	2009	Okul öncesi (4-5 aralığı)
A19	Kriegler	2007	İlkokul
A20	Cai ve Moyer	2007	İlkokul
A21	Lee ve Freiman	2006	Okul öncesi
A22	Cai, Ng, Moyer ve Lew	2005	İlkokul
A23	Kieran	2005	İlkokul

Tablo 4.2.1 incelendiğinde, cebirsel düşünmede kritik süreç için 3 tane çalışmanın ortaokul yıllarını, 14 tane çalışmanın ilkokul yıllarını, 6 tane çalışmanın ise okul öncesi dönemi belirttiği görülmüştür. Bununla birlikte araştırmaya dahil edilen çalışmaların büyük çoğunluğunda; cebirsel düşünmede kritik süreç için 4 ile 12 yaş aralığının belirtildiği tespit edilmiştir. Bu durum ise; Blanton ve Kaput (2005), Cai ve Knuth (2005), Lian ve Yew (2011) gibi birçok araştımacının okul öncesi dönemden 12 yaşına kadar geçen sürenin cebirsel düşünmede kritik süreç olduğu görüşünü desteklemektedir. Aynı şekilde cebirsel düşünmeye erken yaşlarda yani okul öncesi ve ilkokul dönemlerinde başlanılması gerektiğini vurgulayan matematik eğitimcileri, müfredat geliştiriciler ve eğitim araştırmacılarının fikriyle uyumludur. Matematiğin Genel ve Temel Standartları (CCSSM) da, cebirsel düşünme için cebir içerik alanlarına okul öncesi dönemde başlanılmasının gerekli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca cebirsel düşünmede kritik süreç için ortaokul yıllarını belirten çalışmaların oldukça az olduğu görülmüştür. Bu durum ise somuttan soyuta geçiş evresi için ortaokul döneminin geç olduğu düşüncesi ile ilişkili olabilir.

4.3. Cebirsel Kavramların Ülke Müfredatlarında Verilme Yaşı ve Sırası ile İlgili Bulgular

Tablo 3.2.1'e bakıldığında; 3 tane çalışmanın ana temasının; cebirsel düşünmeyi ülke müfredatları açısından karşılaştırmalı olarak incelemek olduğu görülmektedir. Çalışmalarda; Çin, Singapur, Güney Kore, Amerika, Rusya'nın ilkokul müfredatlarında cebirsel kavramların verilme yaşı ve sırası incelenmiştir. Bu doğrultuda; aşağıda Çin, Singapur, Güney Kore, Amerika, Rusya ve Türkiye'nin ilkokul matematik müfredatlarının ayrıntılı özetleri verilmiştir.

Çin ilkokul matematik müfredatında; öğrenciler çeşitli nicel ilişkileri karşılaştırmayı içeren problem çözme, genelleme ve problemleri modellemeyi ilkokuldan başlayarak deneyimlemektedirler. İlkokul 6 yaşında başlamakta ve 6 yıl sürmektedir. İlkokul öğretim programında cebirin amacı; niceliksel ilişkileri daha iyi anlama, sayısal ve sembolik olarak temsil etme ve denklemleri çözme üzerine yoğunlaşmıştır. Cebirin önemli bileşenlerinden olan değişken ve fonksiyonlar ilkokul müfredatında resmi olarak verilmemiştir. Ancak Çin'in ilkokul matematik müfredatı; öğrencilerde değişken ve fonksiyon düşüncelerini geliştirmek amacıyla tasarlanmıştır. Çin ilkokul matematik müfredatında öğrencilere; aritmetiksel ilişkileri temsil etme, denklem çözmede tersten gidebilme ve ifadeleri genelleme biçiminde üç düşünme alışkanlığı kazandırmak amaçlanmıştır. Çin ilkokul matematik müfredatı, fonksiyonel düşünmeyi geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Ministry of Education China, 2007).

Singapur ilkokul matematik müfredatında; cebirsel kavramlar 6. sınıfa kadar açık bir şekilde ifade edilmemekte ve cebirsel kavramlarının öğretimine 12 yaşından sonra başlanmaktadır. İlkokul 6 yıl sürmektedir. İlkokul son sınıf matematik müfredatında; cebirsel içerikler ve cebirsel işlem becerilerini geliştirmek amaçlanmıştır. Cebirsel düşünmeyle ilişkili olan bilinmeyen kavramı, sayılar yerine şekillerle gösterilmektedir. Cebirsel düşünmeyi geliştirmek için müfredatda üç yaklaşımdan bahsedilmektedir. Bunlar; fonksiyonel yaklaşım, genelleme yaklaşımı ve problem çözme yaklaşımıdır (Ministry of Education Singapore, 2013).

Güney Kore ilkokul matematik müfredatında, cebir 7. sınıfta resmi olarak başlamaktadır. İlkokul 6 yaşında başlamakta ve 6 yıl sürmektedir. Müfredatta cebir;

sembollerin ifadesi, tamsayıların genişletilmesi, denklem ve fonksiyonel ilişkileri çözme amacıyla düzenlenmiştir. Müfredata göre; cebir öğretiminde asıl amaç denklem çözme, fonksiyonel ilişkileri analiz etme gibi aktiviteler değildir. Ancak cebir, çeşitli durumlarda problem çözme ve gerçek yaşam durumuna uygun hale getirmek için bir araçtır. Müfredat, cebir ve aritmetik arasındaki bilişsel haritayı geliştirmeyi hedeflemektedir. Müfredatta cebirsel düşünmeyi geliştirmek için; genelleme, özetleme, analitik düşünme, dinamik düşünme, modelleme ve örgütleme gibi altı çeşit düşünme vurgulanmaktadır (Proclamation of the Ministry of Education South Korea, 2007).

Amerika Birleşik Devletleri ilkokul matematik müfredatında, matematiğin değişimi cebir çalışmalarının merkez teması olarak tanımlanmıştır. Müfredatta amaç; çeşitli örüntüleri genelleme ve nicelikler arasındaki ilişkileri analiz etme olarak belirtilmiştir. Bundan dolayı cebirin temel ünitesi olan örüntüler konusuna önem verilmektedir (U.S. Investigation, 2008).

Rusya ilkokul matematik müfredatı; nicelikler arası karşılaştırma yoluyla cebirsel düşünmeyi geliştirmeyi hedeflemektedir. Bu noktadan hareketle 2. sınıftan itibaren öğrenciler; dört işlem içeren iki adımlı sözel problemleri ve denklemleri çözmeye hazırlanmaktadır. Orantısal akıl yürütme; nicelikler arasındaki ilişkileri, sayı kavramlarını ve değişken kavramını geliştirmeye katkıda bulunduğu için müfredatta önemle üzerinde durulmaktadır. Rusya matematik müfredatında cebirsel düşünmenin gelişimi için sayıları kullanma ve örüntülere yönelik bir çalışma bulunmamaktadır. Ancak bunların yerine nicelikler arasındaki ilişkileri geliştirerek denklemleri çözme hedeflenmektedir (Russian Curriculum, 2015).

Ülkemiz ilkokul matematik müfredatında ise aritmetiksel işlemler ve sayısal ilişkiler üzerinde yoğunlaşılmıştır. Cebire temel hazırlayan sayı ve şekil örüntüleri, ilkokulda verilmeye başlanmaktadır. Ancak müfredatta cebir, 6. sınıfta karşımıza çıkmaktadır. Cebirsel ifadeler ve özdeşlikler, doğrusal denklemler, denklem sistemleri ve eşitsizlikler gibi cebir konularına ortaokulda yoğun bir şekilde yer verilmektedir (MEB, 2013).

İncelenen çalışmalardan elde edilen yorumsal metaforlar doğrultusunda Çin, Singapur, Güney Kore, Amerika, Rusya ve Türkiye'de ilkokul müfredatlarının cebirsel düşünmede önemle üzerinde durdukları noktalar Tablo 4.3.1 de verilmiştir.

Tablo 4.3.1. Bazı Ülke Müfredatlarında Cebirsel Düşünmeyi Geliştirmek İçin Belirlenen Amaçlar

Amaçlar \ Ülkeler	**Çin**	**Singapur**	**Güney Kore**	**Amerika**	**Rusya**	**Türkiye**
Örüntüleri Genelleme	√	√	√	√		√
Cebirsel Sembolleri Kullanma	√	√	√		√	√
Matematiksel Modellemeleri Kullanma	√	√	√	√	√	√
Genelleştirilmiş Aritmetik	√	√	√	√	√	√
Değişimi Analiz Etme				√	√	

Tablo 4.3.1'e bakıldığında müfredatlarda çoğunlukla;

1) Örüntüleri Genelleme,

2) Cebirsel Sembolleri Kullanma,

3) Matematiksel Modellemeleri Kullanma,

4) Genelleştirilmiş Aritmetik

gibi noktalar üzerinde durulduğu görülmektedir.

Bu durum ise Okul Matematiği Prensipleri ve Standartlarının cebirsel düşünme ile ilgili olarak verdiği;

1) Örüntüleri ve fonksiyonel ilişkileri anlama, genellemeleri formüle etme,

2) Cebir sembollerini kullanarak matematiksel yapı ve durumlarını temsil ve analiz etme,

3) Niceliksel ilişkileri anlamak için matematiksel modelleri kullanma,

4) Durumlar arasındaki değişimi analiz etme,

gibi amaçların büyük kısmı ile örtüşmektedir.

Çin, Singapur, Güney Kore, Amerika, Rusya ve Türkiye'nın ilkokul matematik müfredatlarında cebirsel kavramların verilişinin sınıflar bazında karşılaştırılması ise Tablo 4.3.2 de verilmiştir.

Tablo 4.3.2. Ülkelerin İlkokul Matematik Müfredatlarında Cebirsel Kavramların Sınıflara Göre Karşılaştırmalı Olarak İncelemesi

Sınıf	Çin	Singapur	Güney Kore	Amerika	Rusya	Türkiye
1.	Aritmetiksel işlemler (toplama ve çıkarma), Sayı örüntüleri	Sayısal Temsiller, Sayı Örüntüleri, Dört İşlem, Değişken Kullanma, Resimli temsillerle çarpma ve bölme içeren bir adımlı problem çözme	Aritmetiksel işlemler (Toplama ve Çıkarma), Örüntü oluşturma ve kuralını bulma, Deneyerek problem çözme	Aritmetiksel işlemler (toplama ve çıkarma), Örüntüler, Kesirler	Aritmetiksel işlemler (toplama ve çıkarma), Sözel problemler	Doğal sayılar, Doğal sayılarda toplama ve çıkarma, Kesirler, Örüntü ve Süslemeler
2.	Aritmetiksel işlemler (Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme), Sayı örüntüleri	Aritmetiksel İşlemler (Toplama ve çıkarma), Sayı Örüntüleri, Dört işlem içeren bir adımlı problemleri çözme, Kesirler	Aritmetiksel işlemler, Çarpma, Kesirler, Örüntü kurma, Problem çözme	Aritmetiksel işlemler, Örüntüler, Toplama ve çıkarma içeren iki adımlı sözel problemleri çözme, Kesirler, Fonksiyonlar	Aritmetiksel işlemler, Dört işlem içeren iki adımlı sözel cebir problemleri, Sembollerle ifade etme	Doğal sayılarda dört işlem, Kesirler, Örüntü ve Süslemeler
3.	Aritmetiksel işlemler, Sayı örüntüleri, Sözel cebir problemleri	Dört işlem, Sayı örüntüleri, Dört işlem içeren iki adımlı sözel problemler, Kesirler	Dört işlem, Kesirli ve ondalık sayılar, Örüntüler, Problem çözme	Dört işlem, Örüntüler, Orantısal sayılar, Sözel cebir problemleri, Kesirler, Fonksiyonlar	Aritmetiksel işlemler, Dört işlem içeren sözel cebir problemleri, Oran, Değişkenler, Fonksiyonlar	Doğal sayılarda dört işlem, Kesirler, Örüntü ve Süslemeler
4.	Aritmetiksel işlemler, Örüntüler, Sözel Cebir Problemleri	Dört işlemler, Sayı örüntüleri, Çarpımsal ilişkiler,	Dört işlem, Kesirler ve ondalık kesirlerde toplama ve	Dört işlemler, Kesirler ve ondalık sayılar,	Aritmetiksel işlemler, Dört işlem içeren sözel cebir	Doğal sayılarda dört işlem, Kesirlerde toplama ve

		Dört işlem içeren üç adımlı sözel problemler, Kesirlerle dört işlem, Ondalık kesirler	çıkarma işlemleri, Örüntüyü tahmin etme, Problem sürecini anlatarak problem çözme	Sözel problemler, Denklemler, Örüntüler, Fonksiyonlar	problemleri, Oran, Değişkenler, Denklem çözme, Fonksiyonlar	çıkarma, Ondalık kesirler, Örüntü ve Süslemeler
5.	Aritmetiksel işlemler, Örüntüler, Kesirler ve ondalık kesirler, Denklem ve denklem çözme	Tam sayılar, Sayı örüntüleri, Kesirler ve Ondalık Kesirler, Dört işlem, Yüzdeler, Oran	Dört işlem, Örüntüler, Kesirler ve ondalık kesirlerde dört işlem, Oran ve orantı, Farklı yollardan bir problemi çözme	Dört işlem, Kesirler ve ondalık kesirlerde dört işlem, Örüntüleri analiz etme, Fonksiyonlar		
6.	Dört işlem, Örüntüler, Kesirler, Yüzdeler, Oranlar, Denklem çözme	Tam sayılar, Kesirler ve Ondalık sayılarla dört işlem, Yüzdeler, Oran	Dört işlem, Kesirler ve ondalık sayılarda dört işlem, Örüntüler, Problem çözme, Eşitlikler, Oranlar			

Tablo 4.3.2 incelendiğinde:

Çin'in ilkokul müfedatında; örüntüler ile denklem çözmenin önemle üzerinde durulan konulardan olduğu görülmektedir. Değişken ve denklem çözme kavramları 1. ve 6. sınıf aralığında yer almaktadır.

Singapur'un ilkokul müfredatında; sayı örüntülerini genelleme ile denklemlere sembolik olarak giriş yapılmadan resimli modellemeler yardımıyla sözel cebir problemlerinin çözümüne önem verildiği görülmektedir.

Güney Kore ilkokul matematik müfredatında ise örüntüleri tanımlama ve aritmetik ile cebir arasındaki işlemsel aktiviteler üzerine yoğunlaşılmaktadır. Ayrıca oran-orantı ile orantısal problemler çözmenin önemle üzerinde durulduğu görülmektedir.

Amerika Birleşik Devletleri ilkokul matematik müfredatında; örüntülere, denklemlere ve fonksiyonlara yoğunlaşıldığı görülmektedir.

Rusya ilkokul matematik müfredatında; diğer ülkelerden farklı olarak örüntüler konusuna yer verilmediği görülmektedir. Daha çok denklem çözme, değişkenleri ve sembolleri kullanma ile fonksiyonlar üzerinde durulduğu dikkat çekmektedir.

Ülkemizde ilkokul matematik müfredatında ise daha çok aritmetiksel işlemler, örüntü ve süslemeler üzerinde durulduğu görülmektedir.

Tablo 4.3.2' ye göre ülkelerin ilkokul matematik müfredatlarında cebirsel düşünmeyi geliştirmek için ortak iki yaklaşımın benimsendiği görülmektedir: Bunlar;

1) Aritmetik ile cebirin ilişkisinde önemli olan aritmetiksel işlemlere odaklanılması,

2) Genelleme ve temsil stratejilerine odaklanılması.

Bu yaklaşımlardan birincisi olan cebir ile aritmetik arasındaki ilişkiye odaklanılması, aritmetikten cebire geçiş evresi olan cebir öncesinin önemini göstermektedir. Cebirsel düşünme, aritmetiksel bilgilerden yola çıkarak yapılandırıldığı için cebir ile aritmetik arasındaki ilişkiyi dengeli bir şekilde kurmak yararlı olacaktır. Aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiyi kurmak ve geliştirmek için Çin ve Singapur müfredatlarında ortak kullanılan üç fikir aşağıda verildiği gibidir.

1. Fikir: Denklem Çözmede Ters İşlemleri Yapabilme

Çıkarma işlemi, toplama işleminin tersi olarak tanıtılmaktadır.

Örnek 4.3.1. $1+(\ \ )=3?$ sorusunda bilinmeyen sayıyı bulurken çıkarma işlemi tanıtılmaya başlanır: $3-1=2$.

Bölme işlemi ise çarpma işleminin tersi olarak tanıtılmaktadır. Bölme işlemi, eşit paylaşım mantığından yola çıkarak verilmektedir.

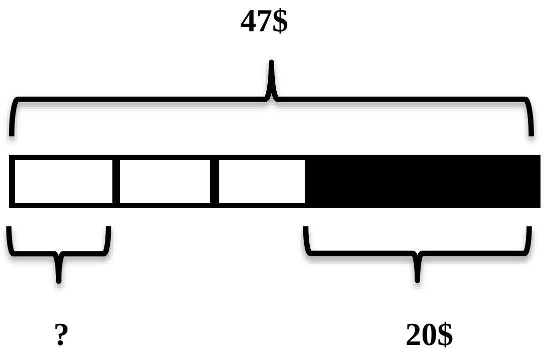
Örnek 4.3.2. $(\ \ )\times 2=8?$ sorusunda; 2 ile hangi sayıyı çarparsak 8 eder?" ifadesinde bilinmeyen sayıyı bulurken bölme işlemi tanıtılmaya başlanır: $8:2=4$

Bu fikir; denklem çözmede çıkarma ve bölmenin başlangıcıdır.

2. Fikir: Modelleme ile Denklem Çözme

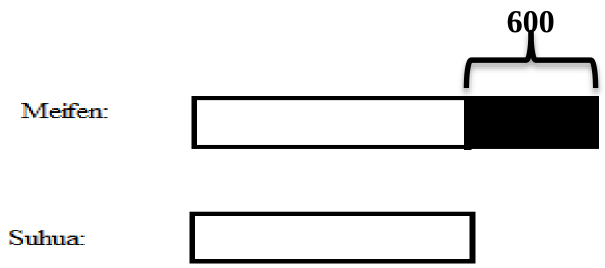
1. ve 2. sınıflarda sözel cebir problemlerini çözerken resimli modellemeler kullanılır. Bu problemleri çözerken bilinmeyen yerine şekiller kullanılır.

Örnek 4.3.3. 3. sınıftaki bir problem şu şekildedir: Rani'nin 47$ vardı. 3 kg karides aldıktan sonra 20$ ı kaldı. 1 kg karidesin fiyatını bulunuz (CPDD, 2000b).



Öğrenciler; 3 kg karidese verilen paranın $47\$ - 20\$ = 27\$$ olduğunu modelden görmektedirler. 1 kg karidesin parasını bulabilmek için 27 yi 3 e bölüyorlar ve $27:3=9$ olarak buluyorlar. Bu problemin cebirsel denklem ifadesi olan $3x + 20\$ = 47\$$ eşitliği model üzerinde direkt görülmektedir. Modeldeki beyaz birimler ise cebirsel denklemde x ile temsil edilmektedir.

Örnek 4.3.4. 4.sınıf seviyesinde verilen bir problem şu şekildedir: Meifen ve Suhua'nın toplam 2000 çıkartması vardır. Meife'nin Suhua'dan 600 tane daha fazla çıkartması varsa Meife'nin kaç tane çıkartması vardır? (CPDD, 2000b).



$x + 600 = 2000$ cebirsel denklemine karşılık gelen problem modelden açıkça görülmektedir. Öğrenciler, siyahla boyalı olan birimi toplam sayı olan 2000 den çıkarır. 2000 – 600 = 1400 daha sonra beyaz ile boyalı birimler 2 tane olduğu için 1400 ü, 2 ye böler. Sonuçta $1400 : 2 = 700$ bulunur.

3. Fikir: Problem Çözmede Hem Aritmetiksel Hem de Cebirsel Yaklaşımı Kullanma

Öğretmenler, problem çözerken hem aritmetiksel yolla hem de cebirsel yolla çözüm yapmaktadırlar.

Örnek 4.3.5. Bir ilkokulda, her biri 24 TL olan 12 basketbol topu alacak kadar para vardır. Basketbol topu almadan önce okul 144 TL'lik futbol topu almıştır.

Okulun kalan parasıyla kaç tane basketbol topu alınabilir? biçiminde ifade edilen problemi aritmetiksel ve cebirsel yollarla çözelim.

Aritmetiksel Çözüm:

1. Yol: İlk baştaki okulun parası hesaplanır ve futbol topuna harcanan para çıkarılır.

$(24 \times 12 - 144) : 24 = 144 : 24 = 6$ basketbol topu.

2 Yol: Satın alınamayacak basketbol topu sayıları hesaplanır.

$12 - (144 : 24) = 6$ basketbol topu.

Cebirsel Çözüm:

1. Yol: Okulun *x* tane basketbol topu alabileceğini farz edelim.

$24 \times 12 - 144 = 24x \Rightarrow 144 = 24x \Rightarrow x = 6$

Yani *x* = 6 basketbol topu.

2.Yol: Okulun x tane basketbol topu alabileceğini farz edelim.

$24 \times 12 = 24x + 144 \Rightarrow 288 - 144 = 24x \Rightarrow x = 6$

Buradan da x = 6 basketbol topu bulunur.

3. Yol: Okulun *x* tane basketbol topu alabileceğini farz edelim.

$12 = (144 : 24) + x$

Buradan da x = 6 basketbol topu.

Cebirsel çözümdeki 1.Yol ve 2.Yol, Aritmetiksel çözümdeki 1. Yola; Cebirsel çözümdeki 3.Yol ise Aritmetiksel çözümdeki 2.Yola karşılık gelmektedir. Öğretmenlerin problem çözerken hem aritmetiksel hem de cebirsel çözümleri birlikte yapmaları, öğrencilerin aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçişini kolaylaştırmaktadır.

Ülke müfredatlarının benimsediği yaklaşımlardan ikincisi olan genelleme ve temsil stratejilerine odaklanılması ise cebirsel düşünmenin özü olan genelleme yapmanın önemini göstermektedir. Bu yaklaşımlara bakarak cebirsel düşünmenin temelini genellemelerin, genellemelerin temelini ise örüntülerin oluşturduğunu söylemek mümkündür.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Araştırmaya dahil edilen çalışmaların analiz ve sentez aşamalarından sonra, bu çalışmalarda öne çıkan fikirler doğrultusunda; cebirsel düşünmede ön koşul beceri olarak örüntü genellemelerinin işaret edildiği ve kritik süreç için ise okul öncesi ve ilkokul dönemi yani 4 – 12 yaş aralığının belirtildiği tespit edilmiştir. Dahil edilen çalışmaların, bulgular ve sonuç bölümlerinde belirtilen fikir ve kavramların meta-sentez yöntemiyle birleştirilmesi sonucunda aşağıda dile getirilen hususlar ön plana çıkmaktadır.

Cebirsel düşünmede ön koşul beceri olarak büyük çoğunlukla örüntü genellemeleri üzerine yoğunlaşıldığı görülmüştür. Bu durum; cebirsel düşünmenin özü olan fonksiyonel düşünme ve genellemelerin temelinin örüntüler ile atıldığını ortaya koymaktadır. Herbert ve Brown (1997)' nun da belirttiği gibi; öğrencilerce erken yaşlarda gerçekleştirilen örüntüleri genelleme etkinlikleri öğrencilerde cebirin temelini oluşturmada ve cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir role sahiptir. Aynı şekilde Tanışlı ve Özdaş (2009)' da; örüntülerin genellemeleri formüle etmede, genellemelerin ise cebirsel düşünmede yapı taşı olduğunu belirtmiştir. Üzerinde durulan diğer bir ön koşul beceri ise genelleştirilmiş aritmetiktir. Cebirin, genelleştirilmiş aritmetik olarak tanımlanması bu bulguyu desteklemektedir. OME (2013)' de, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik aracılığı ile geliştirilebileceğini belirtmiştir. Ayrıca üst düzey bilişsel beceri gerektiren; soyutlama, bütüncül düşünme, görselleştirme, esneklik ve akıl yürütme gibi özelliklerin genelleme ile kazanıldığı iddia edilmektedir (Amit ve Neria, 2008). Ek olarak, eşitlik ve denklem kavramlarının da üzerinde yoğunlaşılan ön koşul becerilerden olduğu görülmüştür. Bu durum, eşitliğin cebirin temel yapı taşlarından biri olduğu fikrini desteklemektedir. Asquith, Stephens, Knuth ve Alibali (2007) de bu görüşe paralel olarak; öğrencilerin eşitlik kavramını anlamasının, öğrencilerde cebirsel düşünmenin oluşmasında kritik öneme sahip olduğunu savunmaktadırlar. Bottoms (2003) ise, birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmenin, cebir için ön koşul bilgi olduğunu vurgulamıştır. Bu bağlamda, ön koşul beceriler açısından elde edilen sonuçlar, alanyazınla paralellik göstermektedir.

Yapılan araştırmalardan elde edilen bulgular; cebirsel düşünmede kritik süreçin, okul öncesi ve ilkokul dönemine karşılık geldiğini ortaya koymaktadır. Çalışmalardan elde edilen sonuçlar, cebirsel düşünmeye erken yaşlarda başlanılması gerektiğini ortaya koymuştur. Matematik eğitimcileri de cebirsel düşünmeye erken sınıflarda ve yaşlarda başlanılması gerektiğini vurgulamaktadır (Wagner ve Kieran, 1992). Her ne kadar Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi NCTM (2000), ortaokul müfredatlarında cebirin resmi olarak daha fazla yer almasının sonraki yıllarda cebirsel düşünme için daha önemli olduğunu belirtse de müfredat geliştiriciler ve eğitim araştırmacıları cebirsel düşünmenin ilkokul ve okul öncesi dönemde başlaması gerektiği görüşünü desteklemektedirler. Ayrıca elde edilen bulgular; Lian ve Yew (2011) ve Kaput (2008) gibi bir çok araştırmacının cebirsel düşünmeye girişin ilkokul ve okul öncesi gibi daha erken yaşlarda başlaması gerektiği konusundaki görüşlerini desteklemektedir. Buna karşın, çok az sayıda çalışmada kritik süreç için ortaokul döneminin işaret edildiği görülmektedir. Bu durum, cebirsel düşünmede somuttan soyuta geçiş evresi için ortaokul döneminin geç olacağı görüşüne karşılık gelir. Öğrenciler; ilkokulda cebirin soyut kavramlarına aşina hale getirilmezse, ortaokulda cebire geçiş için hazırbulunuşlukları yeterli olmayabilir. Dolayısıyla cebirsel kavramlar ortaokulda birden bire verilmeye başlanıldığında öğrencilerin bu kavramları zihinlerinde canlandırması zorlaşır. Ancak cebirsel düşünmeye erken yaşlarda başlanılması çocukların sonraki yıllar için sağlam bir temel atmalarını kolaylaştırabilir. Bu yüzden cebirsel düşünmeye girişin okul öncesi dönemde başlaması, hatta çocukların öğrenmeye çok açık oldukları 3-4 yaş aralığına kadar inmesi yararlı olacaktır.

Araştırmanın üçüncü alt problemi doğrultusunda ülke müfredatlarının incelenmesiyle elde edilen sonuçlara bakıldığında, cebirin resmi olarak çok erken sınıflarda başladığı görülmektedir. Ayrıca üzerinde durulması gereken bir nokta ise cebirsel düşünmenin okul öncesi ve ilkokul müfredatında formal olmayan yollarla verilmeye başlanmasıdır. Ülkemizde ise cebir, resmi olarak ortaokul 6. sınıf müfredatında başlamaktadır. Bu durum öğrencilerde sonraki yıllarda cebirsel düşünme becerilerinin gelişimini olumsuz yönde etkileyebilir.

Yukarıda kritiği yapılan ülkelerin matematik müfredatlarında iki önemli nokta dikkati çekmektedir: Bunlardan ilki, cebir ile aritmetik arasındaki dönüşüm ilişkisine odaklanılmasıdır. İkincisi ise genelleme ve temsil stratejilerine odaklanılmasıdır. Bu durum ise ülke müfredatlarında ortak amaç olan; örüntüleri anlama, cebirsel sembolleri kullanma ve matematiksel modelleri kullanma kazanımlarını desteklemektedir. Çin, Singapur, Güney Kore, Amerika ve Türkiye'nin ilkokul matematik müfredatlarında örüntü genellemelerine yoğunluk verilmesi de bu durumu destekler niteliktedir. Ayrıca elde edilen bulgularla paralel olarak birçok araştırmacı cebirsel düşünme becerileri içerisinde; genellemeleri formüle etme, sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma ve çoklu gösterimlerden yararlanma gibi üç temel beceriyi ön plana çıkarmaktadır (Wongyai ve Kamol, 2004; Çelik, 2007).

Sonuç olarak; cebirsel düşünme becerisinde anahtar kavramların:

- Örüntü Genellemeleri,
- Genelleştirilmiş Aritmetik,
- Eşitlik ve Denklem,
- Pozitif ve Negatif Sayılar,
- Problem Çözme,
- Değişkenler,
- İlişkisel Düşünme (Fonksiyonel Düşünme)
- Matematiksel Durumları Sembollerle Temsil Etme

olduğu görülmektedir.

Cebirsel düşünmeyi geliştirebilmek için ise:

- Örüntüleri Genelleyebilme,
- Aritmetiksel İşlem Özelliklerini Bilme,
- Eşittir İşaretini İlişkisel Anlamda Anlama,
- Aritmetiksel Denklemlerin Özelliklerini İçeren Yapıları Bilme,
- Genel Sembolleri ve Örüntüleri İfade Etmek İçin Değişkenleri Kullanma,
- Değişkenleri Farklı Temsillerde Kullanabilme,

- Bilinmeyen Nicelikleri İçeren Matematiksel Durumları Modelleme,
- Fonksiyonel İlişkileri Tanımlayabilme ve Farklı Gösterimlerde Sunabilme,

kazanımlarının ortaya çıkarılması yararlı olacaktır.

Tüm bunlardan hareketle ilkokul ve okul öncesi dönemde cebirsel düşünmeyi geliştirebilmek için; genelleme yapma, matematiksel yapıları fark etme ve farklı temsilleri kullanma, problem çözme, matematiksel yapıları modelleme, nicelikler arası ilişkileri analiz etme, varsayımlar sunma, kanıtlama ve doğrulama ile tahminde bulunmanın üzerine yoğunlaşılmasının etkili olacağı düşünülmektedir.

Elde edilen bu sonuçlardan yola çıkarak şu önerilere yer verilebilir:

- Cebirsel kavramlara; okul öncesi dönemden itibaren örüntüleri genelleme, semboller ve materyaller arası ilişkiler gibi temel içerikler ile giriş yapılmalıdır.
- Okul öncesi dönemde ve ilkokulda; sayı ve şekil örüntülerini genellemeye, fonksiyonel düşünmeyi geliştirmeye, cebirsel denklem ve sembollere giriş yapılabilecek ön bilgi ve kavramlara odaklanılmalıdır.
- Okul öncesi ve ilkokul müfredatında; örüntülere, hem kavramsal hem de işlemsel anlamayı geliştirecek şekilde geniş kapsamlı olarak yer verilmelidir.
- İlkokulda sadece aritmetiksel işlemleri hesaplamaya odaklanma yerine aritmetikten cebire iyi bir geçişi sağlayacak öğretim etkinliklerine odaklanılmalıdır.
- Aritmetikten cebire geçişi sağlamak için; müfredatlar, cebirsel fikirleri ve aritmetiksel deneyimleri inşa edebilecek şekilde düzenlenmelidir. Ayrıca aritmetikten cebire geçiş, teknolojinin yardımıyla veya matematiksel materyallerin kullanımı ile desteklenmelidir.
- Müfredatlar; öğrencilere okul öncesinde ve ilkokulda cebirsel düşünmeyi oluşturacak fırsatlar sunmalıdır. Ayrıca öğrencilerde kavramsal anlamayı ve problem çözme yeteneklerini geliştirecek şekilde düzenlenmelidir.
- Cebirsel düşünmenin ön koşul becerilerindeki kavram yanılgılarını ortadan kaldırabilmek için öğretim etkinlikleri; örüntüler konusu değişken, eşitlik ve fonksiyon kavramlarına temel oluşturacak şekilde düzenlenmelidir.

- Öğretmenler, öğrencilerde cebirsel düşünme gelişimini; sınıflarda aritmetiksel aktiviteleri kullanarak, sözel denklem problemlerini dönüştürerek, örüntüleri keşfederek desteklemelidir.
- Öğretmenleri, öğrencilerde cebirsel düşünme becerilerini geliştirmek için etkinliklerde öğrencilere; "Bu soru hakkında ne düşündüğünü söyler misin?, Bu soruyu farklı yoldan çözülebilir misin?, Çözümün doğru olduğunu nerden biliyorsun?, Bu yol her zaman işe yarar mı?" gibi sorular sormalıdır. Bu yolla öğrencilerde; cebirsel düşünme becerisinde önemli olan varsayımları sunmayı, farklı gösterimleri kullanmayı, kanıtlamayı, doğrulamayı ve tahminde bulunmayı geliştirmelidirler.

KAYNAKÇA

Akar, Gülşah K. (2009). *Oran konusunun kavramsal öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri*. (Editörler: Erhan Bingölbali ve Mehmet Fatih Özmantar). İlköğretimde Karşılaşılan Zorluklar ve Çözüm Önerileri. Pegem Akademi, 263-285.

Akın, Ömer ve Desay, Melek (1994). *Beş Büyük Cebir Bilgini*. İstanbul: MEB Basımevi.

Akkan, Yaşar (2009). *İlköğretim Öğrencilerinin Aritmetikten Cebire Geçiş Süreçlerinin İncelenmesi,* Yayımlanmamış Doktora Tezi, KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ, Trabzon.

Akkan, Yaşar, Baki, Adnan ve Çakıroğlu, Ünal (2011). *Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar*: *Cebir öncesinin önemi*. Elementary Education Online, 10 (3), 812-823.

Akkan, Yaşar, Baki, Adnan ve Çakıroğlu, Ünal (2012). *5-8. Sınıf öğrencilerini aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi*. HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ Eğitim Fakültesi Dergisi, 43, 01-13.

Akkan, Yaşar (2016). *Cebirsel düşünme*. (Editörler: Erhan Bingölbali, Selahattin Arslan ve İsmail Özgür Zembat). Matematik Eğitiminde Teoriler. Pegem Akademi, 43-63.

Akgün, Levent (2006). *Cebir ve değişken kavramı üzerine*. Journal of Qafqaz University, 17.

Altun, Murat (2005). *İlköğretim İkinci Kademe Matematik Öğretimi*. Bursa: Aktüel.

Amerom, Van A. B. (2003). *Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra*. Educational Studies in Mathematics, 54, 63-75.

Amit, Miriam and Neria, Dorit (2008). *Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre- algebra students*. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40, 111-129.

Arndt, A. B. (1983). *Al-Khawarizmi*. Mathematics Teacher, 668-670.

Aspfors, Jessica ve Fransson, Göran (2015). *Research on mentor education for mentors of newly qualified teachers: A qualitative meta-synthesis*. Teaching and Teacher Education, 48, 75-86.

Asquith, Paul, Stephens, Coleman A., Knuth, Eric J. and Alibali, Martha W. (2007). *Middle school mathematics teachers' knowledge of students' under-standing of core algebraic concepts: Equal sign and variable*. Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 9 (3), 249–272.

Bağdat, Osman ve Saban, Pınar (2014). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi*. International Journal of Social Science Studıes, 26, 473-496.

Baki, Adnan (1992). *Al- Khwarizmi's Contributions To The Science Of Mathematics: al kitabal jabr wa'l muquabalah*. Journal of Islamic Academy of Sciences, 5 (3), 225-228.

Baki, Adnan (1998). *Matematik Öğretiminde İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Dengelenmes*i. 40. Kuruluş Yıl Dönümü Matematik Sempozyumu, ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ, Erzurum.

Baki, Adnan (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Öğretimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Baki, Adnan ve Bütüner, Önder (2011). *Cebirin tarihsel gelişimi*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 3 (2), 198-231.

Bal, Ayten P. (2016). *The effect of the differentiated teaching approach in the algebraic learning field on students' academic achievements*. Eurasian Journal of Educaional Research, 63, 185-204.

Ball, Deborah Loewenberg, Thames, Mark Hoover and Phelps, Geoffrey (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?*. Journal of Teacher Education, 59 (5), 389–407.

Baroody, Arthur J. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigatice Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroudi, Z. (2006). *Easing students' transition to algebra*. Australian Mathematics Teacher, 62 (2), 28–33.

Bayazıt, İbrahim ve Aksoy, Yeliz (2009). *Matematiksel problemlerin öğrenimi ve öğretimi.* (Editörler: Erhan Bingölbali ve Mehmet Fatih Özmantar). *Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık, 287-312.

Beatty, Ruth and Bruce, Christine (2012). *From Patterns to Algebra: Lessons for Exploring Linear Relationships*. Toronto, ON: Nelson Education.

Biehler, Rolf, Scholz, Roland W. and Winkelmann, Bernard (1993). *Reflections on mathematical concepts as points for mathematical thinking.* (Edited by: Roland Scholz, Hans Floretta and Rolf Biehler). *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrect, Boston, London, 61-72.

Blanton, Maria L. and Kaput, James J. (2004). *Elementary grades students' capacity for functional thinking.* (Edited by: M. J. Hoines and A. Fuglestad). *Proceeding of The 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education.* Bergen Norway: International Group For The Psychology of Mathematics Education, 2, 135-142.

Blanton, Maria L. and Kaput, James J. (2005). *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.* Journal for Research in Mathematics Education, 36 (5), 412-446.

Blanton, Maria L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, Maria and Kaput, James J. (2011). *Functional thinking as a route into algebra in the elemantary grades* (Edited by: Jinfa Cai and Eric Knuth). *Early Algebrazation: A Dialogue from Multiple Perspectives*. USA: Springer, 5-25.

Blanton, Maria L., Levi, Linda, Crites, Terry, Dougherty, Barbara and Zbiek Rose M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. Series in essential understandings*. National Council of Teachers of Mathematics.

Bobis Janet, Mulligan, Joanne, and Lowrie Tom (2009). *Mathematics for Children: Challenging Children to Think Mathematically* (*3rd Edication).* French, Forest, NSW: Pearson.

Booth, Lesley R. (1986). *Difficulties in algebra*. Australian Mathematics Teacher, 42 (3), 2-4.

Bottoms, G. (2003). *Getting Students Ready for Algebra I: What Middle Grades Students Need to Know and be able to do*. Atlanta, GA: Southern Regional Education Board.

Boulton-Lewis, Gillian, Cooper, Tom J., Athew, B., Pilay, H., Wilss, L. and Mutch, S. (1997). *The transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective.* International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21 (2), 185-192.

Brezina, Corona (2006). *Great Muslim Philosophers and Scientists of the Middle Ages: Al-Khwarizmi, the İnventor of Algebra*. New York: The Rosen Publishing Group.

Burns, Marilyn (2000). *About Teaching Mathematics.* A-K8 Research. California: Math Solutions Publications.

Burton, L. (1984). *Mathematical thinking: The struggle for meaning.* Journal for Research in Mathematics Education, 15 (1), 35-49.

Bush, Sarah B. and Karp, Karen S. (2013). *Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review*. The Journal of Mathematical Behavior, 32, 613-632.

Cai, Jinfa and Moyer, John C. (2007). *Developing algebraic thinking in the earlier grades: Some insights from international comparative studies.* National Science Foundation, 1-20.

Cai, Jinfa, Moyer, John C.,Lew, Hee C., Morris, Anne, Ng, Swee F. and Schmittau, Jean (2005). *The develepment of studies' algebraic thinking in earlier grades.* ZDM: International Journal on Mathematics Education, 37 (1), 4-15.

Cajori, Florian (2007). *A History of Elementary Mathematics.* New York: Cosimo Classics.

Campbell, Rona, Pound, Pandora, Morgan, Myfanwy., Daker-White, Gavin, Britten, N., Pill, R., ve Donovan, Jenny (2011). *Evaluating meta ethnography: systematic analysis and synthesis of qualitative research.* Health Technology Assessment, 15 (43), 35-57.

Carpenter, Thomas P., Levi, Linda and Farnsworth, Valerie (2000). *Building a foundation for learning algebra in the elementary grades.* Washington, DC: Wisconsin University, 1 (2).

Carpenter, Thomas P., Franke, Loef M. and Levi, Linda (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, Thomas P., Levi, Linda, Franke, Loef M. and Zeringue, J.K. (2005). *Algebra in elementary school: Developing relational thinking.* International Review on Mathematics Education, 32 (1), 53-59.

Carraher, David W., Brizuela, Barbara M. and Earnest, Darrell (2006). *Arithmetic and algebra in early mathematics education.* Journal for Research in Mathematics Education, 37 (2), 87-115.

CCSSO (Common Core State Standards for Mathematics). (2010a). *Council of Chief State School Officers and the National Governors Association Center for Best Practices.* http://www.corestandards.org.

Charbonneau, Luis (1996). *From Euclid to Descartes: algebra and its relation to geometry*. (Edited by: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran and Lesley Lee). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 15-39.

Choike, Jim (2000). *Teaching strategies for algebra for all.* Mathematics Teacher, 93 (7), 556-560.

Curriculum Planning and Development Division of Singapore (CPDD) (2000). *Primary Mathematics Workbook. Singapore: Times Media Private Limited*, 2000b.

Curriculum Russian School of Mathematics (2015). *Developing Russian Programs and Curriculum*. http://www.sras.org/, Erişim Tarihi: 16.02.2015.

Çalık, Muammer ve Sözbilir, Mustafa (2014). *İçerik analizinin parametreleri.* Education ve Science/Egitim ve Bilim, 39 (174). 33-38.

Çelik, Davut (2007). *Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi,* Doktora Tezi, KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ, Trabzon.

Çubukçu, Zühal (2004). *Öğretmen adaylarının düşünme stillerinin öğrenme biçimlerini tercih etmelerindeki etkisi.* XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, 6-9 Temmuz, Malatya.

Crino, Paul T. and Tolar, Tommy, Fuchs, Lynn S. (2013). *Arithmetic and cognitive contributions to algebra*. Society for Research on Educational Effectiveness.

Darley, J. W. (2009). *Traveling from arithmetic to algebra.* Mathematics Teaching in the Middle School, 14 (8), 458–464.

Dede, Yüksel ve Argün, Ziya (2003). *Cebir öğrencilere niçin zor gelmektedir?.* HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 180-185.

Desli, Despoina ve Gaitaneri, Dimitra (2016). *Grade 3 and 4 students' understanding of mathematical patterns and their strategies*. Pre-school and Primary Education, 5, 63-83.

Dindyal, Jaguthsing (2003). *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level,* Doktora Tezi, İllinois State University.

Driscoll, Mark (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10.* Portsmouth: Heinemann.

Ellis, Amy B. (2011). *Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning.* (Edited by: Jinfa Cai and Eric Knuth). *Early Algebraization: A Global Dialouge from Multiple Perspectives.* New York: Springer-Varlag, 215-238.

Falkner, Karen P., Levi, Linda and Carpenter, Thomas P. (1999). *Children's understanding of equality: A foundation for algebra.* Teaching Children Mathematics, 6 (4), 232–236.

French, Doug (2002). *Teaching and Learning Algebra*. London: Continuum.

Fyfe, Emily R., McLeon, Laura E. and McEldoon, Rittle- Johnson Katherina (2013). *Emerging understanding of patterning in 4- year old.* Journal of Cognition and Development, 376-396.

Girit, Dilek ve Akyüz, Didem (2015). *Farklı sınıf seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinde cebirsel düşünme: Örüntülerde genelleme hakkındaki algıları.* NECATİBEY EĞİTİM FAKÜLTESİ Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10 (2), 243-272.

Greenes, Carole ve Findell, Carol (1998). *Algebra Puzzles and Problems (grade 7).* Mountain View: Creative Publications.

Harvey, John G., Waits, Bert K. and Demona, Franklin D. (1995). *The İnfluence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra.* Journal of Mathematical Behavior, 14 (1), 75-109.

Hawker, Sara and Cowley, C. (1997). *Oxford dictionary and Thesaurus.* Oxford: Oxford University.

Heeffer, Albrecht (2008). *The emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models.* Found Sci, 13, 149-161.

Herbert, Kristen and Brown, Rebecca (1997). *Patterns as tools for algebraic reasoning.* Teaching Children Mathematics, 3 (6), 340-344.

Hersovics, Nicolas and Linchevski, Liora (1994). *A cognative gap between arithmetic and algebra.* Educational Studies in Mathematics, 27 (1), 59-78.

Hoffer, A. (1988). *Ratios and proportional thinking.* (Edited by: Thomas Post). *Teaching Mathematics in Grades K-8: Research Based Methods.* Boston, MA: Allyn and Bacon, 285–313.

Ifrah, George (2003). *İslam Dünyasında Hint Rakamları.* (Çeviren: Kurtuluş Dinçer). Ankara: Tübitak Yayınları.

Jacobs, Victoria R., Franke, Megan Loef, Carpenter, Thomas P., Levi, Linda, and Battey, Dan (2007). *Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school.* Journal for Research in Mathematics Education, 38 (3), 258-288.

Kabael, Tangül ve Tanışlı, Dilek (2010). *Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim.* Elementary Education Online, 9 (1), 213-228.

Kaf, Yıldız (2007). *Matematikteki Model Kullanımınn 6. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Erişilerine Etkisi,* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kaput, James J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* (Edited by: Elizabeth Fennema ve Thomas Romberg). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 133-155.

Kaput, James J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning?.* (Edited by: James J. Kaput, David W. Carraher and Maria L. Blanton). *Algebra in the Early Grades.* New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 235-272.

Katz, Victor J. (1998). *A History of Mathematics.* (Edited by: Addison and Wesley). USA: Educational Publishers.

Katz, Victor (2007). *Stages in the history of algebra with implications for teaching.* Educational Studies in Mathematics, 66, 185-201.

Kaya, Deniz ve Keşan, Cenk (2014). *İlköğretim seviyesindeki öğrencilerden cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi*. International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education, 3 (2), 38-47.

Kieran, Carolyn (1981). *Concepts associated with the equality symbol.* Educational Studies in Mathematics, 12 (3), 317-326.

Kieran, Carolyn (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective.* (Edited by: Sigrid Wagner and Kieran). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 33-56.

Kieran, Carolyn (1990). *Cognitive processes involved in learning school algebra.* (Edited by: Parla Nesher and Jeremy Kilpatrick). *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, 96-112.

Kieran, Carolyn (1992). *The learning and teaching of schools algebra*. (Edited by: Douglas A. Grouws). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, 390-419.

Kieran, Carolyn ve Chalouh, L. (1993). *Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra*. (Edited by: Pat S. Wilson). *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics.* New York: Macmillan,119-139.

Kieran, Carolyn (2004). *The Core of Algebra: Reflections on its main activities.* (Edited by: Kaye Stacey, Helen Chick and Margaret Kendal). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 21-34.

Kieran, Carolyn and Yerushalmy, Michal (2004). *Research on the role of technology environments in algebra learning and teaching.* (Edited by: Kaye Stacey, Helen Chick and Margaret Kendal). *The Future of Teaching and Learning of Algebra.* Boston: Kluwer, The 12th ICMI Study, 99-152.

Kieran, Carolyn (2008). *What Do Students Struggle with When First Introduced to Algebra Symbols?.* http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Brief%20%20What%20Can%20We%20Learn.pdf.

Kinach, Barbara M. (2014). *Generalizing: The core of algebraic thinking.* Mathematics Teacher, 432-439.

Knuth, Eric J., Alibali, Martha W., McNeil, Nicole M., Weinberg, Aaron and Stephens, Ana C. (2005). *Middle school students' understanding of core* *algebraic concepts: Equality and variable.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37 (1), 68-76.

Knuth, Eric J., Alibali, Martha W., McNeil, Nicole M., Weinberg, Aaron and Stephens, Ana C. (2011). *Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable.* (Edited by: Jinfa Cai and Eric Knuth). *Early Algebraization: A Global Dialouge from Multiple Perspectives.* New York: Springer-Varlag, 256-276.

Knuth, Eric J., Stephens, Ana, Blanton, Maria, Gardiner, Angela (2016). *Build an early foundation for algebra success.* Phi Delta Kappan, 97 (6), 65-68.

Kriegler, Shelley (2004). *Just What is Algebraic Thinking?.* http://www.match.ucla.edu/-kriegler/pub/algebrat.htlm, Erişim Tarihi: 07.03.2014.

Kriegler, Shelley (2007). *Introduction to Algebra.* Los Angeles, CA: Center for Mathematics and Teaching Press.

Kvasz, Ladislav (2006). *The history of algebra and the development of the form of its language.* Philosophia Mathematica, 14, 287-317.

Lamon, Susan J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (3rd Edition).* New York: Routledge.

Lawrence, Ann ve Hennessy, Charlie (2002). *Lessons for Algebraic Thinking (Grades 6-8).* Math Solution Publications. Sausalito, California.

Lee, Lesley (1996). *An ınıtatıon into algebraıc culture through generalızatıon actıvıtıes.* (Edited by: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran and Lesley Lee). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 87-107.

Lee, Lesley and Freiman, Viktor (2006). *Developing algebraic thinking through pattern exploration.* Mathematics Teaching in the Middle School, 428-433.

Lee, Joohi, Collins, Denise and Melton, Janet (2016*). What does algebra look likes in early childhood.* Childhood Education, 4, 305-310.

Lian, Lim Hooi and Yew, Wun Thiam (2011). *Developing pre-algebraic thinking in generalizing repeating pattern using solo model.* US-China Education Review, 774-780.

Linchevski, Liora (1995). *Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra.* Journal of Mathematical Behavior, 14, 113–120.

Lodholz, Richard D. (1990). *The transition from arithmetic to algebra.* (Edited by: E.L. Edwards). Algebra for Everyone. Reston, VA: NCTM, 24-33.

Lumpkin, Beatrice (1997). *Algebra Activites from many Cultures.* Portland: Walch Publishing.

MacGregor, Mollie and Stacey, Kaye (1999). *Implications for Mathematics Education Policy of Research on Algebra Learning.* Australian Journal of Education. http://www.aed.sagepub.com/.

Mankiewich, Richard (2000). *Matematiğin Tarihi.* (Çevirenler: Gökçen Ezber). İstanbul: Güncel Yayınevi.

Mcneil, Nicole M. and Alibali, Marta W. (2005). *Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations.* Child Development, 76, 883-899.

Mason, John (1996). *Expressing generality and roots of algebra.* (Edited by: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran and Lesley Lee). *Approaches to Algebra.* London: Kluwer Academic Publishers, 65-111.

MEB (2006). *İlköğretim Matematik Dersi 6. Sınıf Öğretim Programı.* Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü.

MEB (2013). *İlköğretim Matematik Dersi 5,6,7,8. Sınıflar Öğretim Programı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Ministry of Education China (2000). *National College Entrance Examination for Science Majors in China.* https://www.zxsx.com/Soft/showsoft.asp?SoftID1315, Erişim Tarihi: 22.01.2007.

Ministry of Education South Korea (2007). *Proclamation of the Ministry Education and Human Resources Development Mathematics Curriculum.* https://www.ncic.re.kr/, Erişim Tarihi: 05.07.2013.

Ministry of Education Singapore (2013). *Mathematics Syllbus Primary One to Four*. https://www.moe.gov.sg/, Erişim Tarihi: 17.04.2016.

Nathan, Mitchell J. and Koedinger, Kenneth R. (2000). *Teachers' and researcher's beliefs about the development of algebraic reasoning.* Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2), 168–190.

Nathan, Mitchell J. and Koellner, Kenneth R. (2007). *A framework for understanding and cultivating the transition from arithmetic to algebraic reasoning.* Mathematical Thinking and Learning, 9 (3), 179-192.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Curriculum and Evaluation Standarts for School Mathematics.* http://www.ntcm.org/standarts.htm, Erişim Tarihi: 14.02.2012.

NCTM (2006). *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* (Edited by: J. K. Baumgart, D. E. Deal, B. R. Vogeli, and A. E. Hallerberg). Reston, VA: NCTM.

Noblit, George W. and Hare, Dwight R. (1988). *Meta-ethnography: Synthesizing Qualitative Studies.* Newbury Park: Sage.

Oliver, James (2007). *How our method of writing algebra have evolved: a thread thrugh history.* Mathematics Journal, 21 (2), 12-17.

OME (Ontario Ministry of Education) (2013). *Paying Attention to Algebraic Reasoning: K-12.* http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/PayingAttentionto Algebra.pdf, Erişim Tarihi: 28.03.2014.

Ormond, Christina (2012). *Developing algebraic thinking two key ways to establish some early algebraic ideas in primary classrooms.* Australian Primary Mathematics Classroom, 13-21.

Orton, Antony and Orton, J. (1999). *Pattern and the approach to algebra.* (Edited by: Antony Orton). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.* London and New York: Cassell, 104-120.

Pearn, Catherina and Stephens, Max (2016). *Competence with fraactions in fifth or sixth grade as a unique predictor of algebraic thinking.* (Edited by: M. Chinnappan and S. Treholm). Opening up Mathematics Education Reserch, 519-526.

Peled, Irit and Carraher, David W. (2008). *Signed numbers and algebraic thinking.* (Edited by: James J. Kaput, David Carraher, ve Maria L. Blanton). *Algebra in the Early Grades.* New York: Routledge, 303–328.

Pettiti, Diana B. (1994). *Meta- Analysis Decision Analysis and Cost- Effectiveness Analyis: Methods for Quantitative Synthesis in Medicine.* New York: Oxford University Press.

Philipp, Randolph (1992). *The many uses of algebraic variables.* The Mathematics Teacher, 85 (7), 557-561.

Polat, Seyat ve Ay, Osman (2016). *Meta-Sentez: kavramsal bir çözümleme.* Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 4 (2), 52-59.

Post, Tom R., Behr, Merlyn J., and Lesh, Richard (1988). *Proportionality and the development of prealgebra understandings.* (Edited by: A. F. Coxford and A. P. Schulte). *The İdeas of Algebra. K-12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 78-90.

Radford, Luis (2011). *On the development of early algebraic thinking.* Pacific Nothern Academy, 6 (4), 117-133.

Reys, Robert E., Suydam, Marilyn, Linquist, Mary, Lambdin, Diana V. and Smith, Nancy L. (1998). *Helping Children Learn Mathematics (5th Edition).* Boston: Allyn and Bacon.

Sajka, M. (2003). *A secondary school students's understandings of the concept of function-a case study*. Educational Studies in Mathematics, 53, 229-254.

Sandelowski, Margarete and Barroso, Julie (2007). *Handbook for synthesizing qualitative research.* New York: Springer Publishing Company.

Schoenfeld, Alan H. and Arcavi. Abraham (1988). *On the meaning of variable.* Mathematics Teacher, 81, 420–427.

Sfard, Anna (1995). *The development of algebra: Confront historical and psychological perspectives.* Journal of Mathematical Behavior, 14, 15-39.

Siemon, D., Beswick, K., Brady, K., Clark, J., Faragher, R. and Warren, E. (2011). *Teaching mathematics: Foundations to middle years.* South Melbourne, Vic: Oxford University Press.

Silver, Edward A. (2000). *Improving mathematics teaching and learning: How can principles and standarts help?.* Mathematics Teaching in the Middle School, 6 (1), 20–23.

Smith, John P. and Thompson, Patrick W. (2007). *Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning.* (Edited by: James J.Kaput, David W. Carraher and Maria L.Blanton). *Algebra in the Early Grades.* New York: Erlbaum, 95-132.

Smith, Eugene David (1925). *History of Mathematics: Special Topics of Elementary Mathematics.* UK: Ginn and Company.

Stallings, Lynn (2000). *A brief history of algebraic notation.* School Science and Mathematics, 100 (5), 230-235.

Stacey, Kaye and MacGregor, Mollie (1997). *Building foundations for algebra.* Mathematics Teaching in the Middle School, 2 (4), 252–260.

Stacey, Kaye and Macgregor, Mollie (2000). *Learning the algebraic method of solving problems.* Journal of Mathematical Behaviour, 18 (2), 149-167.

Staneva, Aleksandra A., Bogossian, Fiona, ve Wittkowski, Anja (2015). *The experience of psychological distress, depression, and anxiety during pregnancy: A meta-synthesis of qualitative research.* Midwifery, 31, 563-573.

Stephens, Ana C. (2006). *Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions.* Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 249-278.

Stephens, Ana, Blanton, Maria, Knuth Eric, İşler, Işıl and Gardiner Angelar Murphy (2015). *Just say yes to early algebra.* Teaching Children Mathematics, 22 (2), 92-101.

Sutherland, Rosamund and Rajona, Terasa (1993). *Spreadsheet approach to solving algebraic problems.* The Journal of Mathematics Behavior, 12 (4), 353-383.

Swafford, Janes O. and Langrall, Cynthiaw W. (2000). *Grade 6 students' preinstructional use of equation to describe and represent problem situations.* Journal for Research in Mathematics Education, 31, 89-112.

Tabach, Michal and Friedlander, Alex (2003). *The role of context in learning beginnig algebra.* Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italia.

Tagle, Jadith, Belecina, Rene and Ocampo, Jose M. (2016). *Developing algebraic thinking skills among grade three pupils through pictoral models.* International Journal Educational Studies, 8 (2), 147-158.

Tanışlı, Dilek ve Özdaş, Aynur (2009). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler.* Educational Sciences: Theory and Practice, 9 (3), 1453-1497.

Thorpe, J. A. (1989). *Algebra: What should we teach and how should we teach it?.* (Edited by: S. Wagner ve Carolyn Kieran). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 11-24.

Trybulski, Don J. (2007). *Algebraic Reasoning in Middle School Classrooms: A Case Study of Standarts-based Reform and Teacher Inquiry in Mathematics*, Un Published PhD Dissertation, University of Pennsylvania.

URL-1. *Aritmetik*. http://www.uludagsozluk.com, Erişim Tarihi: 07.03.2009.

U.S. Investigations (2008). *Investigations Center for Curriculum and Professional Development*. http://www.investigations.terc.edu/inv3/the-curriculum/.

Usiskin, Zalman (1997). *Doing algebra in grade K-4.* Teaching Children Mathematics, 3, 346-356.

Van Amerom, Barbara A. (2002). *Reinvention of Early Algebra: Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra*, Unpublished Doctoral Dissertation, University of Utrech, The Netherlands.

Van Amerom, Barbara A. (2003). *Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra.* Educational Studies in Mathematics, 54 (1), 63–75.

Van De Walle, John A. (2004). *Elementary and middle school mathematics. (5th Edition).* Boston: Allyn and Bacon.

Van De Walle, John A, Karp, Karen S. and Bay-Williams, Jennifer M. (2011). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği: Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim (7. Baskı).* (Çeviren: Soner Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Van Dooren, Wim, Verschaffel, Lieven and Onghena, Patrick (2002). *The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies forsolving arithmetic and algebra word problems.* Journal for Research in Mathematics Education, 33 (5), 319–351.

Van Dyke, Frances and Craine, Timothy V. (1997). *Equivalent representations in the learning of algebra.* Mathematics Teacher, 90 (8), 616–619.

Vance, James, H. (1998). *Number operations from an algebraic perpective.* Teaching Children Mathematics, 4, 282-285.

Vogel, Rose (2005). *Pattern a fundamental idea of mathematical thinking and learning.* Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 37 (5), 445-449.

Wagner, Sigrid (1981). *An Analitical Framework for Mathematical Variables.* (Edited by: C. Comti and G. Vernaud). France: PME Grenoble, 165-170.

Wagner, Sigrid (1981b). *Conservation of equation and function under transformations of variable.* Journal For Research in Mathematics Education, 12 (2), 107-118.

Warren, Elizabeth (2003). *The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra.* Mathematics Education Research Journal, 15 (2), 122–137.

Warren, Elizabeth and Cooper, Thomas J. (2005). *Introducing functional thinking in year 2: a case study of early algebra teaching.* Contemporary Issues in Early Childhood, 6 (2), 150-162.

Warren, Elizabeth and Cooper, Tom J. (2008). *Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking.* Educational Sdutents in Mathematics, 67, 171-185.

Warren, Elizabeth, Mollinson, Annette, Destrich, Kgm (2009). *Equaivalence and equations in early years classroom.* Australian Primary Mathematics Classroom, 10-15.

Welder, Rachael M. (2007). *Preservice elementary teachers' mathematical content knowledge of prerequisite algebra concepts,* Doctoral dissertation, ProQuest Dissertations and Theses database, (UMI No. 3254740).

Willoughby, Stephen S. (1997). *Activities to help in learning about functions*. Mathematics Teaching in the Middle School, 2 (4), 214–219.

Witzel, Bradley S., Mercer, Cecil D. and Miller, David M. (2003). *Teaching algebra to students with learning difficulties: an investigation of an explicit ınstruction model.* Learning Disabilities Research and Practise, 18 (2), 121-131.

Yakut Çayır, M. (2013). *9.Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Genelleme Problemlerini Çözme Başarılarının ve Kullandıkları Genelleme Stratejilerinin Belirlenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Yenilmez, Kürşad ve Teke, Melike (2008). *Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi*. İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ Eğitim Fakültesi Dergisi, 9 (15), 229–246.

Yıldırım, Cemal (2000). *Matematiksel Düşünme.* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaskis, Rina and Liljedahil, Peter (2006). *On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway*. (Edited by: Rina Zaskis and Stephen R. Campbell). *Number Theory in Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Assohates, Publishers, 99-114.

Zbiek, Rose M. and Larson, Matthew R. (2015). *Teaching strategies to improve algebra learning.* Mathematics Teacher, 696-699.

T. C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Dilek Türkoğlu	İmza:	
Doğum Yeri:	Antalya		
Doğum Tarihi:	11.01.1990		
Medeni Durumu:	Evli		

Öğrenim Durumu

Derece	**Okulun Adı**	**Program**	**Yer**	**Yıl**
İlköğretim	Hüseyin Ak İlköğretim Okulu		Antalya	1997-2002
Ortaöğretim	Hüseyın Ak İlköğretim Okulu		Antalya	2002-2005
Lise	Antalya Anadolu Lisesi		Antalya	2005-2008
Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı	Konya	2008-2012
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü	İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı	Konya	2012-

Becerileri:	
İlgi Alanları:	Matematik Eğitimi, Psikoloji, Bisiklete Binmek
İş Deneyimi:	Antalya Serik ilçesi Karataş Ortaokulu'nda 2012 senesinden beri matematik öğretmeni olarak çalışmakta.
Aldığı Ödüller:	Bölüm Birinciliği (2012)
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Tel:	05392003541
Adres	Karşıyaka Mahallesi. 39/32 sokak. Koca Apart. No:6 Kepez/Antalya