T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMININ G −METRİK VE g −METRİK UZAYLARDA ANLAMI

Şerife Selcan KÜÇÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMININ G −METRİK VE g −METRİK UZAYLARDA ANLAMI

Şerife Selcan KÜÇÜK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2023, 29 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Doç. Dr. Nimet AKIN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm konu ile ilgili kaynak araştırması ve tezin amacını içeren giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremlerden söz edilmiştir. Üçüncü bölümde G-metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının anlamı tanımlanmıştır. G-metrik uzaylarda mesafe kavramının üç nokta arasında tanımlanması göz önünde bulundurularak lacunary dizileri yardımıyla GS, GS_θ, $G\sigma_1$ ve GN_θ dizi uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, g-metrik uzaylar üzerinde lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ve bu yeni yakınsaklık türü ile ortaya çıkan teoremler elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlar orijinal olarak elde edilmiş sonuçlardır. Beşinci bölümde bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: G-metrik uzaylar, g-metrik uzaylar, istatistiksel yakınsaklık, lacunary dizileri, lacunary istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

MS THESIS

THE MEANING OF THE CONCEPT OF LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE IN $G-$ METRİC AND $g-$ METRİC SPACES

Şerife Selcan KÜÇÜK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2023, 29 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assoc. Prof. Dr. Nimet AKIN

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introductory part, which includes the source research on the subject and the purpose of the thesis. In the second part, basic definitions, concepts and theorems that will be used throughout the study are mentioned. In the third chapter, the meaning of the concept of lacunary statistical convergence in G-metric spaces is defined. Considering that the concept of distance is defined between three points in G-metric spaces, the relationships between GS, GS_θ $G\sigma_1$ and GN_θ sequence spaces are examined with the help of lacunary sequences. In the fourth chapter, lacunary statistical convergence on g-metric spaces is defined and theorems that emerge with this new convergence type are obtained. The results obtained in the third and fourth chapters of this thesis study are the results obtained originally. In the fifth chapter, the results and suggestions obtained from this thesis study are given.

Keywords: G-metric spaces, g-metric spaces, statistical convergence, lacunary sequences, lacunary statistical convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Ereğli Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ'e ve hayatımın her alanında yanımda olan sevgili Aileme saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şerife Selcan KÜÇÜK
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(X,G) : $G-$ metrik uzay

(X,g) : $g-$ metrik uzay

S : İstatistiksel yakınsak diziler kümesi

θ : Lacunary dizisi

S_{θ} : Lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi

$d(A)$: A kümesinin doğal yoğunluğu

$|\sigma_1|$: Kuvvetli Cesaro toplanabilir diziler kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Kümesi

GS : $G-$ metrik uzayda istatistiksel yakınsak diziler kümesi

gS : $g-$ metrik uzayda istatistiksel yakınsak diziler kümesi

GS_{θ} : $G-$ metrik uzayda lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi

gS_{θ} : $g-$ metrik uzayda lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi

GN_{θ} : $GN_{\theta}-$ istatistiksel yakınsak diziler kümesi

gN_{θ} : $gN_{\theta}-$ istatistiksel yakınsak diziler kümesi

$G\sigma_1$: $G\sigma_1-$ istatistiksel yakınsak diziler kümesi

gC_1 : gC_1- istatistiksel yakınsak diziler kümesi

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Araştırması

İstatistiksel yakınsaklık, ilk kez 1935 yılında Zygmund tarafından bahsedilen fakat resmi olarak tanımlanması 1951'de Fast ve Steinhaus tarafından reel sayı dizileri için birbirlerinden bağımsız olarak yapılan bir yakınsaklık türüdür. İstatistiksel yakınsaklık, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu kavramına dayanır. $A_n = \{k \in A: k \leq n\}$ olmak üzere, A kümesinin doğal yoğunluğu $d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$ şeklinde tanımlanır. Burada $|A_n|$, A_n kümesinde yer alan elemanların sayısını göstermektedir. Kabaca anlatılmak istenirse, $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin komşuluk dışında kalan elemanlarının indisleri kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olması anlamına gelmektedir. İstatistiksel yakınsaklık, tanımlanmasının ardından çok ilgi çekmiş ve bir çok çalışmada bu kavrama yer verilmiştir. Bu çalışmalar arasında en bilinenleri Sayılar Teorisi (1989); Ölçüm Teorisi (1995); Trigonometrik Seriler (1979) ve Toplanabilme Teorisi (1978) dir.

1959'da Schoenberg tarafından istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini farklı açılardan tekrar ele alan ve bu kavramı bir toplanabilme yöntemi olarak ele alınan çalışma bu alandaki önemli çalışmalardan birisidir. Fridy (1985), istatistiksel yakınsaklığın bazı özellikleri üzerine çalışmış; Maio ve Kočinac (2008) ise topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı tanımlamıştır. Savaş ve Das ise (2010) ideal kavramını kullanarak istatistiksel yakınsaklığı da içine alan daha genel bir yakınsama türü olan I-istatistiksel yakınsaklığı ele almışlardır.

Toplanabilme Teorisi alanında çalışma yapılırken özellikleri sebebiyle tercih edilen bazı özel diziler bulunmaktadır ve bu dizilerden birisi lacunary dizileridir. Bu diziler yardımıyla birçok yakınsaklık türü genelleştirilmiş ve Fridy ve Orhan (1993) tarafından tanımlanan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ile $\{k: k \leq n\}$ kümesinin elemanları yerine bazı $\{\mathrm{k_r}\}$ lacunary dizileri için $\{k: k_{r-1} < k \leq k_r\}$ aralığındaki elemanlar seçilerek yakınsaklık kavramı çalışılır. Lacunary istatistiksel yakınsak tanımının ardından, Srivasta ve Et (2006) ile Şengül ve Et (2014), lacunary istatistiksel yakınsaklık ve lacunary toplanabilir diziler bir α sayısı kullanılarak genelleştirilmiştir. Gümüş 2015 yılında zayıf lacunary istatistiksel yakınsaklık üzerine sonuçlar elde etmiş; Kişi ve Ünal 2019 yılında lacunary istatistiksel yakınsaklığı kompleks uncertain diziler için tanımlamışlardır. Yine bu alanda yapılan çalışmalardan olan I-lacunary aritmetik istatistiksel yakınsaklık 2022'de Kişi tarafından çalışılmıştır.

Nuray ve Rhodes tarafından 2012 yılında küme dizileri için istatistiksel yakınsaklığın tanımlanması ile Ulusu ve Nuray (2012), lacunary istatistiksel yakınsaklığı küme dizileri için genelleştirmiş; Çakallı (1995), topolojik uzaylarda çalışarak farklı açılardan incelemiş ve yine Çakallı (2009) topolojik gruplar için istatistiksel yakınsaklığı tanımlamış ve bazı önemli sonuçlar elde etmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık ile yakından ilgili olan bir başka kavram da kuvvetli $Cesáro$ toplanabilmedir. Connor 1988 yılında yaptığı çalışmada dizilerin istatistiksel ve kuvvetli $p - Cesáro$ yakınsamasını inceleyerek önemli bir çalışmaya imza atmıştır. Buna göre kuvvetli $Cesáro$ toplanabilme,

$$|\sigma_1| \coloneqq \left\{x : bazı\ L'ler\ için,\ \lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - L|\right) = 0\right\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde,

$$N_\theta \coloneqq \left\{x : bazıları\ için\ L, \lim_r \left(\frac{1}{h_r}\sum_{k \epsilon I_r}|x_k - L|\right) = 0\right\}$$

şeklindedir ve kuvvetli $Cesáro$ toplanabilme ile N_θ uzayı arasında yakın bir ilişki bulunmaktadır. Bir çok çalışmada bu uzayların özellikleri, bu uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Metrik uzaylar, uzaklık fonksiyonunu temel alan uzaylardır ve uzaklık fonksiyonu matematik ve diğer birçok alanda son derece önemli bir kavramdır. Reel veya kompleks sayılar teorisinde elde edilen bir çok sonuç reel veya kompleks sayıların cebirsel özelliklerine bağlıdır. Bununla birlikte analizde birçok sonuç cebirsel yapıya değil topolojik yapıya bağlıdır. Mesela analizin temel konusu olan limit ve süreklilik kavramları, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^2$ deki topolojik yapıya bağlı olarak yapılır. Bu tanımlarda esas olan husus $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) x ve y sayıları arasındaki uzaklıktır. Bu konuda Copson (1968) ve Bayraktar (2006) tarafından yayımlanan çalışmalar önemlidir.

Günümüzde çok büyük ve karmaşık veri kümeleri nedeniyle, uzaklık fonksiyonunun tanımının genelleştirilmesi ihtiyacı hissedilmiş, bu amaçla birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar, birbiri ile yakından ilgili olan ve birbirlerinin eksik yönlerini tamamlamak amacıyla ortaya konan $2-$metrik, $D-$metrik, $G-$metrik ve $g-$metrik ile ilgili çalışmalardır.

1963 ve 1966'da Gahler tarafından yapılan çalışmalarda tanımlanan $2-$metrik uzaylar ile metrik uzay kavramını genelleştirmek amaçlanmıştır. Ha, Cho ve White (1988) kesin konveks ve kesin $2-$konveks $2-$normlu uzaylar üzerine çalışmalar yapmışlardır. $2-$metrik uzay tanımı kullanılarak uzun yıllar yapılan çalışmalar sonrasında, $2-$metriğin bilinen metriğin birebir bir genelleştirmesi olduğunu söylemenin ne kadar doğru olacağı üzerine tartışmalar başlamıştır. Bu düşünce Dhage'i $D-$metrik uzay adı verilen yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay tanımlamaya yöneltmiştir (1992). Bir $D-$ metrik, $D: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ şeklinde bir fonksiyondur ve dört temel özellik üzerine kurulur. $D-$metrikte, $2-$metrikteki iki özellik aynı kalır ancak diğer iki özellik başka bir özellikle değiştirilerek ek bir özellik eklenir. Sonraki bir dizi makalede Dhage, bu tür uzaylarda topolojik yapılar geliştirmeye çalışmıştır. Sonrasında bu çalışmalar Dhage ve diğer yazarlar tarafından kırktan fazla makalenin temelini oluşturmuştur. Ancak, $D-$metrik uzaylarda da temel topolojik özellikler anlamında bazı sıkıntılar olduğu düşünülmüş, bu nedenle Mustafa ve Sims (2003) $D-$metrik uzaylar üzerine bazı notlar adı altında bu uzayları incelemiştir.

Tüm bu gelişmelerden sonra Mustafa ve Sims (2006) daha uygun bir genelleştirilmiş metrik uzay tanımı üzerinde çalışmaya başlamışlar ve beş özelliği ile $G-$ metrik uzayı tanımlamışlardır. $G-$metrik fonksiyonu, uzaklık kavramının üç nokta arasındaki mesafe olarak kabul edildiği fonksiyondur. $G-$metrik uzaylar üzerine yapılan tanımlamaların ardından bu alanda çalışmaşlar başlamış; An, Dung ve Hang (2013) yaptıkları çalışma ile $G-$metrik uzaylarda sabit nokta teoremi hakkında yeni bir yaklaşım elde etmişlerdir. Yine, Gaba 2017 ve 2018'de $G-$metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve $G-$ metrik uzaylarda sabit noktaların rasyonel tip daralmaları üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerine yapılan bütün bu tanımlamaların en son hali olarak kabul edilen $G-$ metrik uzaylardan sonra, uzaklık kavramının üç değil de daha fazla nokta arasında tanımlanması dırımında nasıl bir durumun ortaya çıkacağı sorusu akıllara gelmiş; Choi ve arkadaşları (2018) tarafından uzaklığın $n+1$ nokta arasında tanımlandığı $g-$metrik fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu tanıma göre, $G-$metrik uzayların özellikleri $n + 1$ nokta arasında tanımlanmıştır. Khamsi (2015) bu metrik uzaylar üzerine çalışmalar yapmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının bilinen yakınsaklık da dahil birçok yakınsaklık türünü içine alan bir yakınsaklık türü olduğu düşünüldüğünde, genelleştirilmiş metrik uzaylarda da bu yakınsaklık türünün nasıl bir sonuç doğuracağı ilginç bir durum oluşturmaktadır. Bu düşünce ile Abazari (2021) g −metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamış ve genelleştirilmiş metrik uzaylar için farklı yakınsaklık türlerinin çalışılmasının önünü açmıştır.

1.2. Tezin amacı

Bu tez çalışmasında, Abazari tarafından önü açılan genelleştirilmiş metrik uzaylarda yakınsaklık türlerinin incelenmesi kapsamında, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı öncelikle uzaklığın üç nokta arasında tanımlandığı G −metrik uzaylarda; daha sonra uzaklığın n+1 nokta arasında tanımlandığı g − metrik uzaylarda çalışılmış ve elde edilen orijinal sonuçlar hem birbiri ile hem de daha önceki sonuçlar ile karşılaştırılarak yeni bir bakış açısı geliştirmek amaçlanmıştır.

2.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez çalışması için temel oluşturacak tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (İstatistiksel Yakınsaklık) (x_k) bir reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$d(\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa (x_k) dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st - lim\, x_k = L$ şeklinde yazılır ve istatistiksel yakınsak diziler kümesi genellikle S ile gösterilir. Bu tanım aynı zamanda doğal yoğunluk tanımı gözönüne alınarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon| = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir (Fast, 1951).

Tanım 2.2 (Lacunary Dizisi) $\theta = (k_r)$ dizisi artan bir tamsayı dizisi olsun. Eğer bu dizi

$$k_0 = 0 \text{ ve } h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty, r \to \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizi ise lacunary dizisi olarak adlandırılır. Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ şeklinde tanımlanmıştır (Freedman, Sember and Raphael, 1978).

Örnek 2.1 $\theta = (r^2)$ bir lacunary dizisidir.

Örnek 2.2 $\theta = (r)$ bir lacunary dizi değildir. Çünkü $k_0 = 0$ fakat $h_r = k_r - k_{r-1} = 1$ dir.

Tanım 2.3 (Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) reel sayı dizisi için her $\varepsilon > 0$ olduğunda,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon| = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum genellikle $S_\theta - lim\, x_k = L$ biçiminde; lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi ise genellikle S_θ ile gösterilir (Fridy ve Orhan, 1933).

Tanım 2.4 (Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme ve d fonksiyonu $d : X \times X \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın. Eğer d fonksiyonu her x, y, z için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği),

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d'ye X de bir metrik; d ile birlikte X'e metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir. Burada M1, M2 ve M3 şartlarına metrik aksiyomları adı verilir.

Önerme 2.1 Metrik fonksiyonunun önemli bazı özellikleri:

1) $\forall\, x, y \in X$ için, $d(x, y) \geq 0$ dır.

2) $x, y, z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ olmak üzere,
$d(x, y) \leq (x, z_1) + d(z_1, z_2) + \cdots + d(z_n, y)$ dir. (Genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği)

Örnek 2.3 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ metriğine mutlak değer metriği (alışılmış metrik) denir.

Örnek 2.4 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ metriğine Öklid Metriği denir.

Örnek 2.5 (l_∞ *dizi uzayı*): Sınırlı kompleks dizilerin kümesi

$l_\infty = \{z = (z_1, z_2, \dots) : |z_i| \leq c_z, z_i \in \mathbb{C}, c_z \in \mathbb{R}\}$

olsun. $z, w \in l_\infty$ olmak üzere

$d(z, w) = sup\{|z_i - w_i| : i \in N\}$

olarak tanımlanırsa d, metrik aksiyomları sağlar.

Tanım 2.5 (Metrik Uzaylarda Yakınsaklık) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsaktır denir. Burada x noktası dizinin limiti olarak adlandırılır. (x_n) dizisi yakınsak ve limiti x ise bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad , lim x_n = x \; veya \; x_n \to x$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. bu takdirde

a) X de yakınsak bir dizi sınırlı ve limiti tektir.

b) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ dir.

c) $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$ dir. Özellikle, metrik fonksiyonu süreklidir.

Tanım 2.6 (2 −Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $\varphi : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda,

***d*1)** Farklı $x, y \in X$ noktaları için $\varphi(x,y,z) \neq 0$ sağlayan bir $z \in X$ noktası vardır,

***d*2)** x, y, z üç noktasından en az ikisi aynı ise $\varphi(x,y,z) = 0$ dır,

***d*3)** $\varphi(x,y,z) = \varphi(x,z,y) = \varphi(y,z,x) = \cdots$ (simetri)

***d*4)** $x, y, z, t \in X$ için $\varphi(x,y,z) \leq \varphi(x,y,t) + \varphi(y,z,t) + \varphi(z,x,t)$ dır (dikdörtgen eşitsizliği)

şartları sağlıyorsa φ fonksiyonuna X üzerinde 2 −metrik, (X, φ) ikilisine de 2 −metrik uzay adı verilir (Gahler, 1963).

Örnek 2.6 $\varphi(x,y,z)$, köşeleri $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ olan üçgenin alanı olsun. $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ bir 2 −metrik uzaydır.

Örnek 2.7 (X, d) bir metrik uzaydır. $\varphi(x,y,z) = min\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$.

$\varphi: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu bir 2 − metriktir.

Tanım 2.7 (D −Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme olsun. $D : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu,

D1) $x, y, z \in X$ noktaları için $D(x, y, z) \geq 0$,

D2) Eğer $x = y = z$ ise $D(x, y, z) = 0$,

D3) $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, z, x) = \cdots$ (her üç değişkende de simetri)

D4) $x, y, z, t \in X$ için $D(x, y, z) \leq D(x, y, t) + D(x, t, z) + D(t, y, z)$ (dikdörtgen eşitsizliği)

D5) $x, y, z \in X$ için $D(x, y, y) \leq D(x, z, z) + D(z, y, y)$

şartları sağlanıyorsa D fonksiyonuna X üzerinde $D-$metrik, (X, D) ikilisine de D −metrik uzay adı verilir (Dhage, 1992).

Örnek 2.8 Herhangi bir metrik uzay için aşağıdaki örnekler $D-$ metrik belirtir.

$a)$ $D(x, y, z) = \frac{1}{3}(\delta(x, y) + \delta(y, z) + \delta(x, z))$

$b)$ $D(x, y, z) = max\{\delta(x, y), \delta(y, z), \delta(x, z)\}$

Tanım 2.8 ($G-$ Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme olsun. $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G fonksiyonuna X üzerinde genelleştirilmiş bir metrik ya da kısaca $G-$ metrik denir.

(G1) $x, y, z \in X$ noktaları için $x = y = z$ ise $G(x, y, z) = 0$,

(G2) $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olmak üzere $0 < G(x, x, y)$,

(G3) $x, y, z \in X$ ve $z \neq y$ için $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$,

(G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \cdots$ (simetri)

(G5) $x, y, z, a \in X$ için $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ (dikdörtgen eşitsizliği)

(X, G) bir G −metrik uzaydır. (Mustafa ve Sims, 2006)

Örnek 2.9 $G(x, y, z)$, köşeleri $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ olan üçgenin çevresi olsun. $(\mathbb{R}^2, G)$ bir G −metrik uzaydır.

Örnek 2.10 $X = \{x, y\}$ ve $G(x, x, x) = G(y, y, y) = 0,\ G(x, x, y) = 1,\ G(x, y, y) = 2$ olsun ve G'yi değişkenlerde simetri ile tüm $X \times X \times X$'e genişletin. G simetrik olmayan bir $G -$ metriktir.

Örnek 2.11 (X, d) bir metrik uzaydır. $\psi(x, y, z) = max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$. $\psi: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu bir $G -$ metriktir.

Tanım 2.9 ($g -$ Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $g: X^{l+1} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna X üzerinde l derecesine sahip bir $g -$ metriği denir. (X, g) bir $g -$ metrik uzaydır (Choi, Kim ve Yang, 2018).

($g1$) $x_0,\ x_1, \dots,\ x_l \in X$ için $x_0 = x_1 = \cdots = x_l$ ancak ve ancak $g(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l) = 0$ (olumlu kesinlik).

($g2$) $\{0, 1, 2,\ \dots,\ l\}$ üzerindeki σ permütasyonu için $g(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l) = g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots,\ x_{\sigma(l)})$ (permütasyon değişmezliği).

($g3$) $\{x_i: i = 0, 1, \dots, l\} \subseteq \{y_i: i = 0, 1, \dots, l\}$ ile $(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l), (y_0,\ y_1, \dots,\ y_l) \in X^{l+1}$ için $g(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l) \leq g(y_0,\ y_1, \dots,\ y_l)$ (monotonluk).

($g4$) $s + t + 1 = l$ ile $x_0, x_1, \dots, x_s, y_0, y_1, \dots, y_t, w \in X$ için $g(x_0, x_1, \dots,\ x_s, y_0, y_1, \dots, y_t) \leq g(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l, w, w, \dots, w) + g(y_0, y_1, \dots,\ y_t, w, w, \dots, w)$ (üçgen eşitsizliği).

$l = 1$ olduğunda normal metrik uzay ve $l = 2$ olduğunda $G -$ metrik uzay elde edilir.

Teorem 2.2 X boş olmayan bir küme olsun ve g, X üzerinde l dereceli bir metrik olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. $g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s\ tane}, \underbrace{y, y, \dots, y}_{t\ tane}) \leq g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s\ tane}, w, w, \dots, w) + g(w, w, \dots, w, \underbrace{y, y, \dots, y}_{t\ tane})$,

ii. $g(x, y, \dots, y) \leq g(x, w, \dots, w) + g(w, y, \dots, y)$,

iii. $g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s\ tane}, w, w, \dots, w) \leq (l + 1 - s)g(w, x, \dots, x)$,

iv. $g(x_0,\ x_1, \dots,\ x_l) \leq \sum_{i=0}^{n} g(x_i,\ w, \dots, w)$,

v. $|g(y,\ x_1, \dots,\ x_l) - g(w, x_1, \dots,\ x_l)| \leq$
$max\{g(y, w, \dots, w), g(w, y, \dots, y)\}$,

vi. $\left| g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s\ tane}, w, w, \dots, w) - g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s'\ tane}, w, w, \dots, w) \right| \leq |s -$
$s'|g(x, w, w, \dots, w)$

vii. $g(x, w, w, \dots, w) \leq (1 + (s-1)(l+1-s)\ g(\underbrace{x,\ x, \dots, x}_{s\ tane}, w, w, \dots, w)$

Tanım 2.10 (m-Boyutlu Asimptotik Yoğunluk) $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{N}^m$ ve $A(n) = \{i_1, i_2, \dots, i_m \leq n : (i_1, i_2, \dots, i_m) \in A\}$ olsun.

$$\rho_1(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{m!}{n^m} |A(n)|$$

ifadesine A kümesinin $m -$ boyutlu asimptotik (doğal) yoğunluğu denir (Abazari, 2021).

Tanım 2.11 ($g -$ Metrik Uzayda İstatistiksel Yakınsaklık) (x_i) bir (X, g) metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m!}{n^l} \left|\left\{(i_1, i_2, \dots, i_m) \in A : i_1, i_2, \dots, i_m \leq n, g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise (x_i) dizisi x'e istatistiksel olarak yakınsar. Bu durum $x_i \xrightarrow{gs} x$ ya da $gs - limx_i = x$ olarak belirtilir. $g -$ metrik uzayda istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gS ile gösterilir (Abazari, 2021).

Teorem 2.3 $g -$ metrik uzaylarda, her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır.
Bu teoremin tersi genellikle geçerli değildir.

Örnek 2.12 $X = \mathbb{R}$ ve $g -$ metrikte $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$, $g(x, y, z) = max\{|x-y|, |x-z|, |y-z|\}$ olsun.

$$x_k = \begin{cases} k, & k\ çift\ ise \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

x_k istatistiksel yakınsaktır ama yakınsak değildir.

Teorem 2.4 $g-$ metrik uzaylarda istatistiksel limit tektir.

Teorem 2.5 $g-$ metrik uzaylarda, istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

3. $G-$ METRİK UZAYLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Abazari'nin 2021 'de genelleştirilmiş metrik uzaylar olan $g-$metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı tanımlaması ve bazı temel özelliklerini incelemesinin ardından, $G-$metrik ve $g-$metrik uzaylarda diğer yakınsaklık türlerinin incelenip incelenemeyeceği sorusunu akıllara gelmiş ve öncelikle $G-$metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık ile lacunary kuvvetli toplanabilme kavramlarının nasıl tanımlanabileceği konusu bu bölümde ele alınmıştır. Burada elde edilen sonuçlar ilk kez bu çalışmada elde edilen sonuçlardır.

Tanım 3.1. $A \in \mathbb{N}^2$ ve $A(n) = \{i_1, i_2 \leq n : (i_1, i_2) \in A\}$ olsun.

$$\rho_1(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} |A(n)|$$

ifadesine A kümesinin $2-$ boyutlu asimptotik (doğal) yoğunluğu denir.

Tanım 3.2. (x_i) bir (X, G) $G-$ metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \left|\left\{(i_1, i_2) \in A : i_1, i_2 \leq n, G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \varepsilon \right\}\right| = 0$$

ise (x_i) dizisi G'de x'e istatistiksel olarak yakınsar. Bu durum $x_i \xrightarrow{GS} x$ ya da $GS-limx_i = x$ olarak belirtilir. $G-$ metrik uzayda istatistiksel yakınsak diziler kümesi GS ile gösterilir.

$G-$ metrik uzaylarda önemli bir yer tutan aşağıdaki teoremler, Abazari tarafından $g-$ metrik uzayları için ispatlanmıştır. Bu nedenle, bu bölümde teoremlerin ispatı verilmemiştir.

Teorem 3.1. $G-$ metrik uzaylarda, her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2. $G-$ metrik uzaylarda istatistiksel limit tektir.

Teorem 3.3. $G-$ metrik uzaylarda, istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Öncelikle $G-$ metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını ifade eden tanım ile başlanmıştır. Sonrasında elde edilen uzaylar arasındaki ilişkiler ele alınırken alt başlıklar ile teoremler ve ispatları verilmiştir.

Tanım 3.3. (X,G) bir $G-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{2}{{h_r}^2}\left|\{i_1, i_2 \in I_r : G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise (x_i) dizisi X'de x'e lacunary istatistiksel olarak yakınsak denir. Bu durum $x_i \xrightarrow{GS_\theta} x$ ya da $GS_\theta - lim x_i = x$ olarak belirtilir. X'deki tüm lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi GS_θ ile gösterilir.

Tanım 3.4. (X,G) bir $G-$ metrik uzay ve (x_i) bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\lim_n \frac{2}{n^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) = 0$$

oluyorsa (x_i) dizisinin x'e $G\sigma_1 -$ toplanabilirlik olarak adlandırılır. Bu durum $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ ya da $G\sigma_1 - lim x_i = x$ olarak belirtilir. X'deki tüm $G\sigma_1 -$ toplanabilir diziler kümesi $G\sigma_1$ ile gösterilir.

Tanım 3.5. (X,G) bir $G-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\lim_r \frac{2}{{h_r}^2}\sum_{i_1,i_2 \in I_r} G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) = 0$$

oluyorsa (x_i) dizisinin x'e $GN_\theta -$ toplanabilirlik olarak adlandırılır. Bu durum, $x_i \xrightarrow{GN_\theta} x$ ya da $GN_\theta - lim x_i = x$ olarak belirtilir. X'deki tüm $GN_\theta -$ toplanabilir diziler kümesi GN_θ ile gösterilir.

3.1. $G\sigma_1$ ve GS Uzayları

Bu kısımda G −metrik uzaylarda kuvvetli Cesáro toplanabilir diziler uzayı olan $G\sigma_1$ ile istatistiksel yakınsak diziler uzayı olan GS uzayı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunun için öncelikle $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ ise $x_i \xrightarrow{GS} x$ olduğu gösterilmiş daha sonra ise bu teoremin tersinin doğru olması için G fonksiyonunun sınırlı fonksiyon olması gerektiği ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1. (X, G) bir $G-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ ise $x_i \xrightarrow{GS} x$.

İspat: Kabul edelim ki $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ G(x,x_{i_1},x_{i_2})\geq\varepsilon}}^{n} G(x, x_{i_1}, x_{i_2})$$

$$\geq \varepsilon\frac{2}{n^2}\left|\{i_1, i_2 \leq n: G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \varepsilon\}\right|$$

ve $x_i \xrightarrow{GS} x$ elde edilir.

Teorem 3.1.2. (X, G) bir $G-$ metrik uzay ve G sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x_i \xrightarrow{GS} x$ ise $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $x_i \xrightarrow{GS} x$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda G fonksiyonun sınırlılığından $x, x_{i_1}, x_{i_2} \in X$ için $G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı vardır. O halde,

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) = \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ G(x,x_{i_1},x_{i_2})\geq\varepsilon}}^{n} G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ G(x,x_{i_1},x_{i_2})<\varepsilon}}^{n} G(x, x_{i_1}, x_{i_2})$$

$$\leq M\frac{2}{n^2}\left|\{i_1, i_2 \leq n : G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon.$$

elde edilir. Her iki tarafın limiti alındığında teoremin ifadesi göz önünde bulundurulursa $x_i \xrightarrow{G\sigma_1} x$ elde edilir.

3.2. $\mathbf{GS_\theta}$ ve $\mathbf{GN_\theta}$ Uzayları

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 ‘de GS_θ ve GN_θ uzayları arasındaki ilişki ve bu ilişkide sınırlılığın rolü açıklanmıştır.

Teorem 3.2.1. (X,G) bir $G-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun. Bu durumda, $x_i \xrightarrow{GN_\theta} x$ ise $x_i \xrightarrow{GS_\theta} x$ dir.

İspat: Kabul edeli m ki $x_i \xrightarrow{GN_\theta} x$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, tanımdan

$$\lim_r \frac{2}{{h_r}^2} \sum_{i_1,i_2 \in I_r} G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) = 0$$

yazılabilir. O halde,

$$\frac{2}{{h_r}^2} \sum_{i_1,i_2 \in I_r} G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \geq \frac{2}{{h_r}^2} \sum_{\substack{i_1,i_2 \in I_r \\ G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \geq \varepsilon}} G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right)$$

$$\geq \varepsilon \frac{2}{{h_r}^2} \left|\left\{i_1, i_2 \in I_r :\ G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

sonucu bulunur. Limit alınarak eşitsizlik göz önüne alındığında

$$lim_r \frac{2}{{h_r}^2} \left|\left\{i_1, i_2 \in I_r :\ G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

elde edilir ki bu da ispatlanmak istenen sonuçtur.

Teorem 3.2.2. (X,G) bir $G-$ metrik uzay ve θ lacunary bir dizi olsun. Eğer G, X’ de sınırlı bir fonksiyon ise bu durumda $x_i \xrightarrow{GS_\theta} x$ ise $x_i \xrightarrow{GN_\theta} x$ dir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için G fonksiyonu X’ de sınırlı bir fonksiyon ve $x_i \xrightarrow{GS_\theta} x$ olsun. Bu durumda her $x, x_{i_1}, x_{i_2} \in X$ için $G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M vardır.

Bu durumda,

$$\frac{2}{{h_r}^2}\sum_{i_1,i_2\in I_r} G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right) = \frac{2}{{h_r}^2}\sum_{\substack{i_1,i_2\in I_r\\ G(x,x_{i_1},x_{i_2})\geq\varepsilon}} G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)$$

$$+\frac{2}{{h_r}^2}\sum_{\substack{i_1,i_2\in I_r\\ G(x,x_{i_1},x_{i_2})<\varepsilon}} G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)$$

$$\leq M\frac{2}{{h_r}^2}\left|\left\{i_1,i_2\in I_r:\ G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|+\varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin yönü ve her iki tarafın limiti düşünüldüğünde

$$lim_r\frac{2}{{h_r}^2}\sum_{i_1,i_2\in I_r} G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)=0$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

3.3. GS ve $\mathbf{GS_\theta}$ Uzayları

Bu kısımda, $G-$ metrik uzaylarda istatistiksel yakınsak diziler ile lacunary istatistiksel yakınsak diziler arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler verilmiştir.

Teorem 3.3.1. (X,G) bir $G-$ metrik uzay ve θ lacunary bir dizi olsun. Eğer

$$lim\ inf_r q_r > 1$$

ise bu durumda $GS-limx_i = x$ olduğunda $GS_\theta - limx_i = x$ dir.

İspat: Farz edelim ki $GS-limx_i=x$ ve $lim\ inf_r q_r>1$ olsun. Yeterince büyük r'ler için $q_r\geq 1+\delta$ ve dolayısıyla $\frac{h_r}{k_r}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$ olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim\frac{2}{{k_r}^2}\left|\left\{i_1,i_2\leq k_r:\ G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

dır. Öyleyse,

$$\frac{2}{{k_r}^2}\left|\left\{i_1,i_2\leq k_r:\ G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{2}{{k_r}^2}\left|\left\{i_1,i_2\in I_r:\ G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\left(\frac{h_r}{k_r}\right)^2\frac{2}{{h_r}^2}\left|\left\{i_1,i_2\in I_r:\ G\left(x,x_{i_1},x_{i_2}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2 \frac{2}{{h_r}^2} \left|\left\{i_1, i_2 \in I_r \,:\, G\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}\right) \geq \varepsilon\,\right\}\right|$$

bulunur. Her iki tarafında limiti alındığında ve $GS - limx_i = x$ olduğunu düşünüldüğünde $GS_\theta - limx_i = x$ oluşu elde edilir.

3.4. $\mathbf{G\sigma_1}$ ve $\mathbf{GN_\theta}$ Uzayları

Bu kısımda, $G-$ metrik uzaylarda Cesaro toplanabilir diziler ile kuvvetli lacunary toplanabilir diziler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Teorem 3.3.1. 'e benzer bir ifadeyle bu sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 3.4.1. (X, G) bir $G-$ metrik uzay ve θ lacunary bir dizi olsun. Eğer

$lim\, inf_r q_r > 1$

olması durumunda $G\sigma_1 - limx_i = x$ olduğunda $GN_\theta - limx_i = x$ dır.

İspat: $lim\, inf_r q_r > 1$ olduğunu varsayalım. Yeterince büyük r'ler için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan, yeterince büyük r için $\frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\delta$ ve dolayısıyla $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ dir. Böylece,

$$\frac{2}{{k_r}^2} \sum_{i_1, i_2 = I_r}^{k_r} G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) \geq \frac{2}{{k_r}^2} \sum_{i_1, i_2 \in I_r} G(x, x_{i_1}, x_{i_2})$$

$$= \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^2 \frac{2}{{h_r}^2} \sum_{i_1, i_2 \in I_r} G(x, x_{i_1}, x_{i_2})$$

$$= \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2 \frac{2}{{h_r}^2} \sum_{i_1, i_2 \in I_r} G(x, x_{i_1}, x_{i_2})$$

Benzer şekilde her iki tarafın limiti alındığında

$$lim_r \frac{2}{{h_r}^2} \sum_{i_1, i_2 \in I_r} G(x, x_{i_1}, x_{i_2}) = 0$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bir önceki bölümde $G-$metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının çalışılmasının ardından, bu uzayların genelleştirilmişi olan $g-$metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık bu bölümde tanımlanmış ve bazı önemli özelliklerini incelenmiştir. Bunun için öncelikle $g-$metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklığın temelini oluşturacak olan $m-$ boyutlu asimptotik (doğal) yoğunluk tanımlanmalıdır. Burada elde edilen sonuçlar ilk kez burada elde edilmiş sonuçlardır.

Tanım 4.1. $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{N}^m$ ve $A(n) = \{i_1, i_2, \ldots, i_m \leq n : (i_1, i_2, \ldots, i_m) \in A\}$ olsun.

$$\rho_1(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{m!}{n^m} |A(n)|$$

ifadesine A kümesinin $m-$ boyutlu asimptotik (doğal) yoğunluğu denir.

Tanım 4.2. (x_i) dizisi bir (X, g) uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m!}{n^l} \left|\left\{(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in A : i_1, i_2, \ldots, i_m \leq n, g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise (x_i) dizisi x'e istatistiksel yakınsaktır. Bu durum $x_i \overset{gS}{\rightarrow} x$ ya da $gS - lim x_i = x$ olarak belirtilir. $g-$metrik uzayda istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gS ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremler, Abazari'nin $g-$ metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık çalışmasında kanıtladığı bazı teoremlerdir.

Teorem 4.1. $g-$ metrik uzaylarda, her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır. Bu teoremin tersi genellikle geçerli değildir.

Örnek 4.1. $X = \mathbb{R}$ ve $g-$ metrikte $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x, y, z) = max\{|x-y|, |x-z|, |y-z|\}$ olsun.

$$x_k = \begin{cases} k, & k \text{ çift ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

x_k istatistiksel yakınsaktır ama yakınsak değildir.

Teorem 4.2. $g-$ metrik uzaylarda istatistiksel limit tektir.

Teorem 4.3. $g-$ metrik uzaylarda, istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Şimdi, $g-$ metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımını ele alınacaktır.

Tanım 4.3. (X,g) bir $g-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_r \frac{m!}{{h_r}^m}\left|\left\{(i_1,i_2,\dots,i_m)\in I_r:\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise (x_i) dizisi x'e lacunary istatistiksel olarak yakınsak denir. Bu durum $x_i\xrightarrow{gS_\theta}x$ ya da $gS_\theta-limx_i=x$ olarak belirtilir. Tüm lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi gS_θ ile gösterilir.

Tanım 4.4. (X,g) bir $g-$ metrik uzay ve (x_i) bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_n \frac{m!}{n^l}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})=0$$

ise (x_i) dizisi x'e gC_1- toplanabilirdir denir. Bu durum $x_i\xrightarrow{gC_1}x$ ya da $gC_1-limx_i=x$ olarak belirtilir. X'deki tüm gC_1- istatistiksel yakınsak diziler kümesi gC_1 ile gösterilir.

Tanım 4.5. (X,g) bir $g-$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun.

$$\lim_r \frac{m!}{{h_r}^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m\in I_r} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})=0$$

ise (x_i) dizisi x'e $gN_\theta-$ toplanabilirdir denir. Bu durum, $x_i\xrightarrow{gN_\theta}x$ ya da $gN_\theta-limx_i=x$ olarak belirtilir. Tüm $gN_\theta-$ istatistiksel yakınsak diziler kümesi gN_θ ile gösterilir.

4.1. gC_1 ve gS Uzayları

Teorem 4.1.1. (X,g) bir $g-$ metrik uzay ve (x_i) bu uzayda bir dizi olsun.

i. $x_i \xrightarrow{gC_1} x$, $x_i \xrightarrow{gS} x$ anlamına gelir.

ii. g sınırlı bir fonksiyon ve $x_i \xrightarrow{gS} x$ ise $x_i \xrightarrow{gC_1} x$ dir.

İspat:

i. $x_i \xrightarrow{gC_1} x$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğini varsayalım. Bu durumda,

$$\frac{m!}{n^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}) \geq \frac{m!}{n^m}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_m=1\\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})\geq\varepsilon}}^{n} g\big(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}\big)$$

$$\geq \varepsilon\frac{m!}{n^m}\left|\left\{(i_1,i_2,\dots,i_m)\leq n:\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})\geq\varepsilon\right\}\right|$$

dir. Bu durum göz önüne alındığında $x_i \xrightarrow{gS} x$ elde edilir.

ii. Farzedelim ki g sınırlı bir fonksiyon ve $x_i \xrightarrow{gS} x$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m} \in X$ için $g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}) \leq B$ olacak şekilde g fonksiyonunu sınırlayan pozitif bir B reel sayısı vardır. O halde,

$$\frac{m!}{n^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}) = \frac{m!}{n^m}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_m=1\\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})\geq\varepsilon}}^{n} g\big(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}\big)$$

$$+\frac{m!}{n^m}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_m=1\\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})<\varepsilon}}^{n} g\big(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}\big)$$

$$\leq B\frac{m!}{n^m}\left|\left\{(i_1,i_2,\dots,i_m)\leq n:\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})\geq\varepsilon\right\}\right|$$

dir. Her iki tarafında limiti göz önüne alındığında, $x_i \xrightarrow{gC_1} x$ olduğu görülür.

4.2. gS_θ ve gN_θ Uzayları

Teorem 4.2.1. . (X, g) bir $g -$ metrik uzay, (x_i) bu uzayda bir dizi ve θ lacunary bir dizi olsun.

i. $x_i \xrightarrow{gN_\theta} x$ olduğunda $x_i \xrightarrow{gS_\theta} x$ dir.

ii. g sınırlı bir fonksiyon ve $x_i \xrightarrow{gS_\theta} x$ olduğunda $x_i \xrightarrow{gN_\theta} x$ dir.

İspat:

i. Kabul edelim ki $x_i \xrightarrow{gN_\theta} x$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r} g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = 0$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r} g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \geq \frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r \\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}) \geq \varepsilon}} g\big(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\big)$$

$$\geq \varepsilon \frac{m!}{{h_r}^m} \left|\left\{(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in I_r : \ g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \geq \varepsilon \right\}\right|$$

olduğundan, gerekli işlemler yapılıp her iki tarafın limiti alınırsa istenen sonuç elde edilir.

ii. Her $\varepsilon > 0$ için $x_i \xrightarrow{gS_\theta} x$ ve g sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda sınırlı fonksiyon tanımından $x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \in X$ için $g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \leq B$ olacak şekilde pozitif bir B reel sayısı vardır. Buradan,

$$\frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r}^{n} g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = \frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r \\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}) \geq \varepsilon}}^{n} g\big(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\big)$$

$$+ \frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m \in I_r \\ g(x,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}) < \varepsilon}}^{n} g\big(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\big)$$

$$\leq B\frac{m!}{{h_r}^m}\left|\left\{(i_1, i_2, \dots, i_m) \in I_r :\ g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dir. Elde edilen eşitsizlik yardımıyla,

$$lim_r \frac{m!}{{h_r}^m} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I_r}^{n} g(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) = 0$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

4.3. gS ve gS_θ Uzayları

Aşağıdaki teoremde gS ve gS_θ arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 4.3.1. $lim\ inf_r q_r > 1$ olan (X, g) içindeki herhangi bir θ lacunary bir dizisi için $gS - limx_i = x$ ise $gS_\theta - limx_i = x$ anlamına gelir.

İspat: $lim\ inf_r q_r > 1$ olduğunu varsayalım. Yeterince büyük r'ler için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan, yeterince büyük r için $\frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta$ ve dolayısıyla $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ dir.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{m!}{{k_r}^l}\left|\left\{i_1, i_2, \dots, i_m \leq k_r :\ g\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle,

$$\frac{m!}{{k_r}^m}\left|\left\{i_1, i_2, \dots, i_m \leq k_r :\ g\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{m!}{{k_r}^m}\left|\left\{i_1, i_2, \dots, i_m \in I_r :\ g\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^m \frac{m!}{{h_r}^m}\left|\left\{i_1, i_2, \dots, i_m \in I_r :\ g\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^m \frac{m!}{{h_r}^m}\left|\left\{i_1, i_2, \dots, i_m \in I_r :\ g\left(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

Her iki tarafında limiti alındığında ve $gS - limx_i = x$ olduğu göz önüne alındığında, $gS_\theta - limx_i = x$ elde edilir.

4.4. gC_1 ve gN_θ Uzayları

Bu kısımda gC_1 ve gN_θ arasındaki ilişkiler açıklanmıştır.

Teorem 4.4.1. $\lim\inf_r q_r > 1$ olan (X,g) içindeki herhangi bir θ lacunary bir dizisi için $gC_1 - \lim x_i = x$, $gN_\theta - \lim x_i = x$ anlamına gelir.

İspat: $\lim\inf_r q_r > 1$ olduğunu varsayalım. Yeterince büyük r'ler için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan, yeterince büyük r için $\frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\delta$ ve dolayısıyla $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ dir.

$$\frac{m!}{{k_r}^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{k_r} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m}) \geq \frac{m!}{{k_r}^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m\in I_r} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})$$
$$= \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^m \frac{m!}{{h_r}^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m\in I_r} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})$$

$$= \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^m \frac{m!}{{h_r}^m}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m\in I_r} g(x,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})$$

Her iki tarafın limiti alındığında ispat elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Uzaklık kavramının matematiksel anlamda önemi oldukça büyüktür. Metrik uzaylar, uzaklık fonksiyonunu temel alan uzaylardır. Mesela analizin temel konusu olan limit ve süreklilik kavramları $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^2$ deki topolojik yapıya bağlı olarak yapılır. Bu tanımlarda esas olan husus $\mathbb{R}$ ($veya$ $\mathbb{C}$) x ve y sayıları arasındaki uzaklıktır.

Metrik uzaylarda, uzaklık kavramını tanımlarken kullanılan iki nokta arasındaki uzaklık tanımının üç veya daha fazla nokta arasında yapılması ile elde edilen metrik uzaylar 1960 lı yıllardan itibaren çalışma konusu olmuş ve farklı isimler altında gelişerek devam etmiştir. Öncelikle $2-$metrik uzaylar, daha sonra $D-$metrik uzaylar ve son olarak da $G-$metrik uzaylar ile $g-$metrik uzaylar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Yakınsaklık kavramının önemi göz önüne alındığında bu uzaylardaki dizilerin yakınsaklığının önemi de açıktır. Abazari'nin $g-$metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı tanımlamasının ardından bu çalışmada $G-$metrik uzaylarda ve $g-$metrik uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık çalışılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Yakınsaklık çeşitleri göz önüne alındığında bu uzaylarda diğer yakınsaklık türlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağı, ne gibi sonuçlar elde edileceği araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

Abazari, R., 2021, Statistical convergence in g-metric spaces, *Filomat* 36(5) 1461-1468.

An, T. V., Dung, N. V.and Hang, V. T. L., 2013, A new approach to fixed point theorems on G-metric spaces, Topol. Appl. 160(12), 1486-1493.

Bayraktar , M., 2006, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Choi, H., Kim, S. and Yang, S., 2018, Structure for $g-$ metric spaces and related Fixed Point Theorem, Arxive: 1804.03651v1.

Connor, J.,1988, The statistical and strong p-Ces$\acute{a}$ro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.

Copson, E.,T., 1968, Metric Spaces, *Cambridge University Press*, New York.

Çakallı, H., 2009, A Study on Statistical Convergence, Functional Analysis, Approximation and Computation, 1(2), 19–24.

Çakallı, H., 1995, Lacunary statistical convergence in topological groups, Indian J. Pure Appl. Math., 26 (2), 113-119.

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric space and mapping with fixed point, Bull. Cal. Math. Soc. 84, 329-336.

Erdös, P. and Tenenbaum, G.,1989, Sur les densities de certaines suites d'entiers, Proc. London. Math. Soc., 3(59), 417-438.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum 2, 241-244.

Freedman, A.R., Sember, J. and Raphael, M., 1978, Some Ces$\acute{a}$ro-type summability spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 37 no.3, 508-520.

Fridy, J. A, 1985, On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical summability, J. Math. Anal. Appl. 173, 497 504.

Gaba, Y. U., 2017, Fixed point theorems in G-metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 455(1), 528-537.

Gaba, Y. U., 2018, Fixed points of rational type contractions in $G-$ metric spaces, Cogent Mathematics & Statistics 5(1), 1-14.

Gahler,S., 1963, 2-metriche raume und ihre topologische strukture, Math. Nachr. 26, 115- 148.

Gahler,S., 1966, Zur geometric 2-metriche raume, Reevue Roumaine de Math.Pures et Appl., XI, 664-669.

Gümüş, H. and Savaş, E., 2013, Lacunary strongly (A, φ) $f-$ convergent sequences defined by a modulus function, AIP Conf. Proc. 1558, 774-779.

Gümüş, H., 2015, Lacunary weak I-statistical convergence, *Gen. Math. Notes*, Vol.28, No:1, 50-58.

Ha, K., Cho, S. Y. J., and White A., 1988, Strictly convex and strictly $2-$ convex $2-$ normed spaces, Math. Japonica, 33(3), 375-384.

Khamsi, M. A., 2015, Generalized metric spaces, A survey, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 17(3), 455-475.

Kişi, Ö. and Ünal, H.K., 2019, Lacunary statistical convergence of complex uncertain sequence, Sigma J Eng&Nat Sci. 10(3), 277-286.

Kişi, Ö., 2022, On I −lacunary aritmetic statistical convergence, *Journal of applied mathematics & informatics*, 4081,327-339.

Küçük, Ş. S. and Gümüs, H., 2022, The meaning of the concept of lacunary statistical convergence in $G-$ metric spaces, *Korean Jour. of Math.*, 30(3), 679-686.

Maio, G.D. and Kočinac, L. D. R., 2008, Statistical convergence in topology, Topology and its Applications, 156(1), 28-45.

Miller, H. I., 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. of the Amer. Math. Soc.Vol. 347, No.5, 1811-1819.

Mustafa, Z. and Sims, B., 2003, Some Remarks Concerninig D-Metric Spaces, Proceedings of the Internatinal Conferences on Fixed Point Theorey and Applications, Valencia (Spain), July, 189-198.

Mustafa, Z. and Sims, 2006, A new approach to generalized metric spaces, J. Non linear Convex Anal., 7(2), 289-297.

Nuray, F and Rhodes, B.E., 2012, Statistical convergence of sequences of sets. *Fasc. Math. 49*, 87-99.

Savas, E. and Das, P., 2010, A generalized statistical convergence via ideals, Applied Mathematics Letters, 826-830.

Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, The American Mathematical Monthly 66, 361-375.

Srivasta, H. M. and Et, M., 2006, Lacunary Statistical Convergence and Strongly Lacunary Summable Functions of Order α, *Filomat* 31(6), 1573-1582.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Athematicum 2, 73-74.

Şengül, H. and Et, M., 2014, On lacunary statistical convergence of order α, Acta Mathematica Scientia, 34(2), 473-482.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2012, Lacunary statistical convergence of sequences of sets, Progress in Applied Mathematics, 4(2), 99–109.

Zygmund, A., 1979, Trigonometric Series, Cam. Uni. Press, Cambridge, UK.