



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BAZI CEBİRSEL GRAFLARIN BASKINLIK SAYILARI

İRFAN DAĞDEVİREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

Şubat-2024
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

İrfan DAĞDEVİREN tarafından hazırlanan “Bazı Cebirsel Grafların Baskınlık Sayıları” adlı tez çalışması 05/02/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri**İmza****Başkan**

Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

Danışman

Doç.Dr.Nihat AKGÜNEŞ

.....

Üye

Dr.Öğr.Üyesi Yunus YUMAK

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/....../2024 gün ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof.Dr.Şerife Yurdagül KUMCU

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İR FAN DAĞDEVİREN

Tarih:05.02.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI CEBİRSEL GRAFLARIN BASKINLIK SAYILARI

İRFAN DAĞDEVİREN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2024, 49 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER
Dr.Öğr.Üyesi Yunus YUMAK

Graf Teori zor gibi görünen problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir yapıdır. Bu karmaşık gibi görünen yapı birçok alanla ilişki kurulabileceği gibi çeşitli alanların da ilgisini çekmesi nedeniyle geçmişten bugüne kadar popülaritesi artarak devam etmiştir. Baskınlık sayıları graf teorisinin önemli uygulama alanlarından biridir. Bu tez araştırması üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf tanımı verilip bazı önemli graflar tanıtılmış ve kaynak araştırması detaylı bir şekilde aktarılmıştır.

İkinci bölümde monojenik yarı grup grafları ve baskınlık sayıları üzerine bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde monojenik yarı grup graflarda baskınlık sayılarına örnekler verilerek anlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler: cebirsel yapı grafları, graflar, graflarda baskınlık sayıları, monojenik yarı grup grafları.

ABSTRACT

MS THESIS

DOMINATION NUMBERS OF SOME ALGEBRAIC GRAPH

İR FAN DAĞDEVİREN

**Necmettin Erbakan University Institute of Science and Technology
Department of Mathematics**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2024, 49 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

Dr.Lecturer Yunus YUMAK

Graph Theory is a structure that facilitates the solution of seemingly difficult problems. This seemingly complex structure can be related to many fields, and its popularity has continued to increase from past to present, as it has attracted the attention of various fields. Domination numbers are one of the important application areas of graph theory. This thesis research consists of three main parts.

In the first chapter, the definition of graph is given, some important graphs are introduced and the source research is explained in detail.

In the second section, information on monogenic semigroup graphs and domination numbers is given.

In the third chapter, domination numbers in monogenic semigroup graphs are explained by giving examples.

Keywords: algebraic structure graphs, graphs, dominance numbers in graphs, monogenic semigroup graphs.

ÖNSÖZ

Bazı Cebirsel Graflarının Baskınlık Sayıları isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü üyesi Doç.Dr.Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmış ve Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yaptığım bu çalışmada bilgi, birikim ve desteğini hiç esirgemeyen danışman hocam Doç.Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e ve arkadaşım Büşra AYDIN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte desteğini hiç esirgemeyen değerli eşim İmran DAĞDEVİREN, kızım Erva DAGDEVİREN ve oğlum Ali Eymen DAĞDEVİREN'e sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.



İRFAN DAĞDEVİREN
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Graf ve Bazı Graf Tanımları	3
1.2. Bazı Graf Çeşitleri	6
1.3. Derece ve Uzaklık	11
1.4. Yürüyüş ve Yol	13
1.5. Uzaklık ve Bağlantılılık	15
1.6. Kaynak Araştırması.....	17
2. MONOJENİK YARI GRUP GRAFLAR VE BASKINLIK SAYILARI	20
2.1. Monojenik Yarı Grup Graflar.....	20
2.2. Baskınlık Sayısı	21
2.3. Toplam Baskınlık Sayısı.....	25
2.4. Bağımsız Baskınlık Sayısı	26
2.5. Bağlı Baskınlık Sayısı	29
2.6. k-Baskınlık Sayısı.....	30
3. MONOJENİK YARI GRUPLAR GRAFLARDA BASKINLIK SAYILARI	32
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	37
4.1. Sonuçlar.....	37
4.2. Öneriler.....	37
KAYNAKLAR	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$G = (V, E)$	Graf
Γ	Graf gösterimi
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
W_n	Tekerlek graf
$d(u, v)$	u ve v köşeleri arası uzaklık
C_n	Çevre graf
P_n	Yol graf
K_n	Tam graf
$\gamma(G)$	G nin baskınlık sayısı
T_n	Ağaç graf
S_n	Star graf
$\sigma(G)$	Minimum derece
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$i(G)$	Bağımsız baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	Toplam baskınlık sayısı
$\gamma_c(G)$	Bağlı baskınlık sayısı
S_M	Monojenik yarı grup
$\gamma_k(G)$	G nin k baskınlık sayısı

1. GİRİŞ

Bir grafın temel amacı gerekli bilgileri açıklığa kavuşturmak ve gereksiz fazlalıkları ortadan kaldırmaktır. Bu nedenle graflar, karmaşık sorunları basitleştirmemize ve yalnızca sorunun çözümüne yardımcı olan bilgileri kullanmamıza izin vererek problem çözmeyi kolaylaştırır. (Gross ve Yellen,2004).

Graf teorisi, matematiksel nesnelerin (düğümler ve kenarlar) birbirine bağlı şekilde temsil edilmesini sağlar. Bu, çeşitli problemleri çözmek ve farklı alanlarda uygulamalar geliştirmek için kullanılabilir hale gelmiştir. Graf teorisi, bilgisayar bilimleri, iletişim ağları, sosyal ağ analizi, lojistik, biyoloji, ekonomi ve diğer birçok alanda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Graf teorisi, birçok farklı disiplinde çeşitli uygulama alanlarına sahiptir. İşte bazı graf uygulama alanlarına örnekler aşağıdaki gibi verilebilir.

1. Ulaşım Ağları: Graf teorisi, karayolu ağları, hava yolları, demiryolu hatları gibi ulaşım sistemlerinin optimizasyonunda kullanılabilir. En kısa veya en ekonomik güzergahları belirlemek, trafik akışını düzenlemek gibi konularda yardımcı olur.

2. Elektrik Ağları: Elektrik şebekeleri ve enerji iletim hatları, güç akışı analizi, hat kesimleri, enerji verimliliği gibi konularda graf teorisinden faydalanılır.

3. İletişim Ağları: Bilgisayar ağları, telefon şebekeleri, internet gibi iletişim ağlarının tasarımı, yönetimi ve optimizasyonunda graf teorisi önemli bir rol oynar.

4. Kimyasal Formüller: Kimyasal moleküller ve bileşenler arasındaki etkileşimleri modellemek için graf teorisi kullanılır. Moleküler yapıların analizi ve reaksiyon mekanizmalarının anlaşılmasında yardımcı olur.

5. Bilgisayar Teorisi: Bilgisayar bilimlerinde, algoritmaların analizi, veri yapıları, ağ tasarımı gibi birçok konuda graf teorisi kullanılır.

6. Sosyal Bilimler: Sosyal ağ analizi, arkadaşlık ilişkileri, iş birliği ağları gibi konularda graf teorisi sosyal bilimlerde önemli bir araçtır.

7. Coğrafya: Harita analizi, yol planlaması, bölgesel ilişkiler gibi konularda graf teorisi uygulanır.

8. Mimari: Yapıların planlaması ve tasarımında, bağlantıları ve etkileşimleri modellerken graf teorisi kullanılır.

Bu örnekler, graf teorisinin geniş bir uygulama yelpazesine sahip olduğunu göstermektedir. Graf teorisi, karmaşık sistemleri anlamak ve optimize etmek için güçlü bir araç olarak kullanılır.

Graf teorisi üzerine yapılan ilk çalışmalar 1736'da Euler'in Königsberg Köprüsü problemi çözümüyle başlamış, ancak daha önemli sonuçlar 19. yüzyılda ortaya çıkmıştır. Graf teorisi, matematiksel teorilerin gelişimine ve çeşitli bilim dallarındaki problemlerin çözümüne katkıda bulunmuştur. Königsberg Köprüsü probleminin çözümü, graf teorisinin ortaya çıkmasında önemli bir rol oynamıştır. 18. yüzyılda, Königsberg şehrindeki köprülerin bir yürüyüş rotası olup olmayacağını belirlemek amacıyla Euler, bu probleme graf teorisi yaklaşımını kullanmıştır. Bu, Euler'in "Seven Bridges of Königsberg" problemi olarak bilinen ve bir grafi temel alan ilk önemli matematiksel modelledir.

Özel graf türleri, graf teorisindeki çeşitli yapıları ve özellikleri inceleyerek daha spesifik sorulara çözüm bulmamıza yardımcı olur. Gross ve Yellen, Buckley ve Harary ile Harris ve arkadaşlarının kitaplarından alınan temel tanımlar, graf

teorisinin temel konseptlerini anlamamıza ve derinleştirmemize yardımcı olabilir. Bu temel tanımlar, özel graf türlerini anlamamıza ve daha karmaşık problemleri çözmek için temel bir zemin oluşturmamıza yardımcı olabilir.

Bu tez boyunca tanıtılacak graf teorisinin temel tanımları, gösterimleri ve sonuçları Gross ve Yellen tarafından yazılan Handbook of Graf Theory isimli eser dikkate alınarak sunulmuştur.

1.1. Graf ve Bazı Graf Tanımları

Tanım 1.1.1 Bir graf (graph), sonlu bir nokta kümesini ve bu noktalar arasındaki belirli ilişkileri temsil eden kenarları içeren matematiksel bir yapıdır. Graf teorisi, bu tür yapıları inceleyen matematik dalıdır. Noktalar genellikle "düğüm" veya "vertex" olarak adlandırılır, kenarlar ise düğümleri birbirine bağlar ve bu bağlantıları temsil eder.

Graf teorisinde, bir kenar kümesi ile bir düğüm kümesinden oluşan bir çift (V, E) ile ifade edilen graf, V düğümlerinin bir kümesini ve E kenarlarının bir kümesini içerir. Eğer kenar kümesi, düğümler arasındaki belirli bir kurala göre tanımlanıyorsa, bu grafın özel bir türü olabilir. Örneğin, bir grafın kenarlarının yönlü olup olmadığına (yönlendirilmiş graf) veya kenarların ağırlıklı olup olmadığına (ağırlıklı graf) göre farklı graf türleri ortaya çıkabilir. Bu matematiksel yapılar, birçok uygulama alanında kullanılır, örneğin ağ analizi, iletişim ağı tasarımı, bilgisayar bilimleri ve optimizasyon problemleri gibi birçok alanda graf teorisi kullanılmaktadır.

Tanım 1.1.2 Bir graf (graph) G , bir köşe kümesi (vertex set) V ve bir kenar kümesi (edge set) E tarafından tanımlanır. V , elemanları nokta olan boş olmayan bir kümedir ve E, V 'nin elemanlarından oluşan bir sırasız kümedir.

Graf teorisinde, bir grafın temel bileşenleri köşeler ve kenarlardır. Köşeler, genellikle noktaları temsil eder ve kenarlar, bu noktaları birbirine bağlayan çizgileri temsil eder. Sırasız küme E , kenarların nasıl birleştirildiğini belirtir. Bu tanım, matematiksel ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda graf teorisinin temelini oluşturur. Graflar, birçok uygulama alanında kullanılır, örneğin ağ analizi, sosyal ağlar, ulaşım sistemleri, iletişim ağları ve daha birçok alanda modelleme aracı olarak kullanılır.

Tanım 1.1.3 Bir graf, düğümler (nodes) ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlar (edges) içeren bir matematiksel yapıdır. Eğer grafın kenarları belirli bir yöne sahip değilse, yani herhangi bir kenarın başlangıç ve bitiş noktaları arasında bir yönlendirme bulunmuyorsa, bu grafa "yönsüz graf" (undirected graph) denir. Yönsüz graf, kenarların sadece düğümleri birbirine bağladığı, ancak bir düğümden diğerine bir yönlendirme olmadığı bir graf türüdür. Bu tür graf modelleri genellikle ilişki, bağlantı veya iletişim gibi durumları temsil etmek için kullanılır.

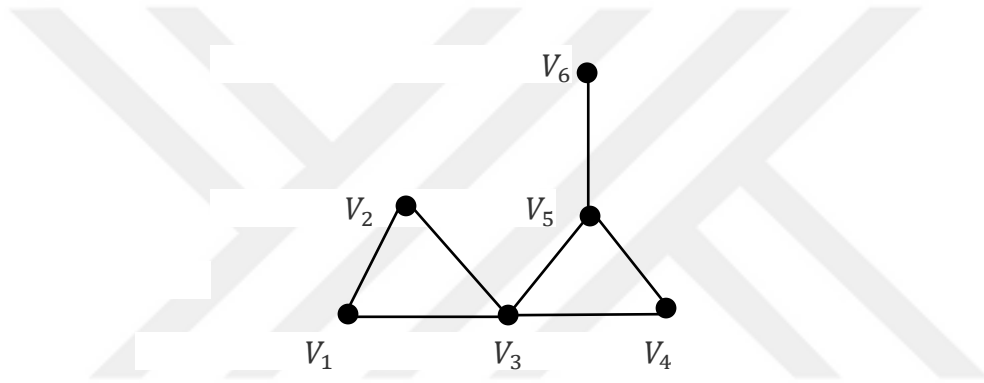
Tanım 1.1.4 Bir grafın köşe kümesindeki ve kenar kümesindeki eleman sayısı sonlu ise, bu grafa "sonlu graf" (finite graph) denir. Graf teorisi, matematikte köşelerin ve kenarların birleşiminden oluşan yapıları inceleyen bir alan olarak bilinir. Graf teorisindeki "sonlu graf" tanımı, bir grafın köşe ve kenar kümesinin sınırlı bir sayıda elemana sahip olduğunu ifade eder. Bu tür graflar genellikle matematiksel analiz, bilgisayar bilimi, sosyal ağ analizi ve çeşitli diğer uygulamalarda kullanılır.

Tanım 1.1.5 "Döngü" veya "ilmek" terimi, bir bilgisayar programında veya bir bilgisayar ağı bağlantısında, bir uç noktadan başka bir uç noktaya geri dönen bir dizi işlemi ifade eder. Bu, genellikle bir döngü (loop) yapısı içinde gerçekleştirilir. Bir uç noktadan diğerine yapılan bağlantı, programın veya işlemin sürekli olarak aynı uç noktaya geri dönmesine neden olur. Örneğin, bir bilgisayar programında bir döngü oluşturarak kullanıcıdan sürekli olarak girdi alabilirsiniz. Kullanıcı bir değer girdiğinde, program bu değeri işler, ardından aynı uç noktaya geri döner ve kullanıcıdan yeni bir girdi bekler. Aynı kavram, ağ bağlantıları için de geçerlidir. Bir uç noktadan diğerine veri iletimi gerçekleştiğinde, alıcı uç nokta veriyi işler ve

ardından aynı uç noktaya geri döner, böylece iletişim devam eder. Bu tür döngüler, birçok programlama dilinde "while" veya "for" gibi döngü yapıları kullanılarak uygulanabilir.

Tanım 1.1.6 Bir graf, hiçbir döngü (ilmek) veya birden fazla kenarı içermiyorsa **basit graf**(simple graph) olarak adlandırılır. Her iki düğüm arasında en fazla bir kenar bulunur. Ayrıca, bir düğümün kendi kendine dönük bir kenarı olmaz.

Örneğin, aşağıdaki graf bir basit grafa örnektir.

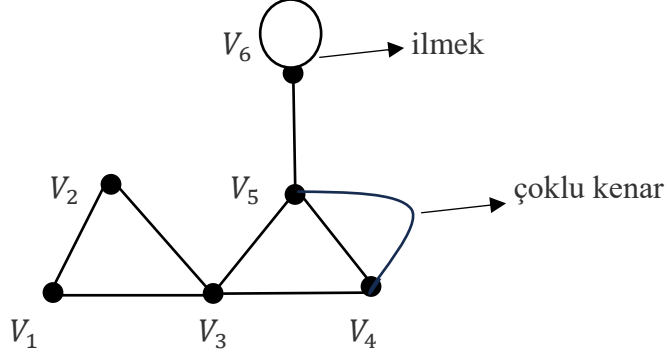


Şekil 1.1.1. Basit graf örneği

Bu grafı incelediğimizde, her iki düğüm arasında en fazla bir kenar olduğunu, herhangi bir döngü olmadığını ve herhangi bir düğümün kendi kendine dönük bir kenarı olmadığını görebiliriz. Bu nedenle, bu graf bir basit graf örneğidir.

Diğer taraftan, bir graf birden fazla kenara sahipse veya bir düğüm kendi kendine dönük bir kenara sahipse, bu grafa "**çoklu graf**" veya "**çoklu yönlü graf**" denir. Çoklu graf, bir düğüm arasında birden fazla kenarın olabileceği bir graf türünü temsil eder. İlginç bir şekilde, bir düğümün kendi kendine dönük kenarına "**ilmeği**" denir.

Aşağıdaki graf çoklu grafa örnek olarak verilebilir.



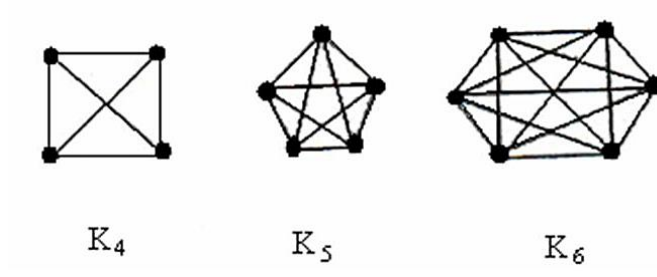
Şekil 1.1.2. Çoklu graf örneği

Bu terimler, graf teorisinde graf türlerini sınıflandırmak ve özelliklerini tanımlamak için kullanılır.

Tanım 1.1.7 Bir grafın köşeleri ve kenarları kümesi boş bir küme oluşturuyorsa, bu grafa **boş graf** (null graph) denir. Matematikte bir graf, köşe (veya düğüm) kümesi ve kenar (veya bağlantı) kümesinden oluşur. Eğer hem köşe kümesi hem de kenar kümesi boş ise, yani hiçbir düğüm ve bağlantı içermiyorsa, bu grafa **boş graf** (null graph) denir. Boş graf, matematiksel ve bilgisayar bilimleri alanlarında teorik çalışmalarda sıkça kullanılır.

1.2. Bazı Graf Çeşitleri

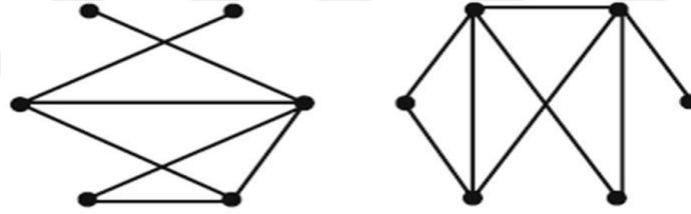
Tanım 1.2.1. " K_n " gösterimi, n elemanlı tam bir grafi temsil eder. **Tam bir graf**, her bir düğümün (köşe) diğer tüm düğümlerle komşu olduğu bir graf türüdür. Başka bir deyişle, K_n 'deki her iki düğüm birbirine komşudur. Matematiksel olarak, tam bir grafın her bir düğüm çifti arasında bir kenar bulunur.



Şekil 1.2.1. Tam graf örnekleri

Tanım 1.2.2 Köşe kümesi G 'deki noktaları aynı, ancak kenar kümesi G 'de bulunmayan kenarlara sahip olan bir grafa, orijinal grafa **tamamlayıcı** veya **tümleyen graf** denir. Bu tür bir grafi G 'nin tümleyeni olarak adlandırabiliriz.

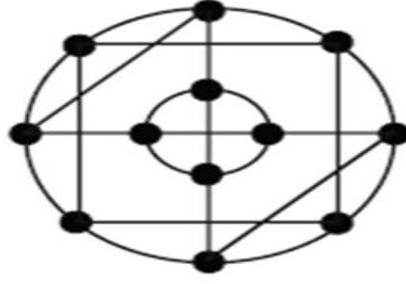
Bu tür bir tümleyici graf, genellikle bir grafın eksik kalan bağlantıları veya eklenmemiş kenarları temsil eder.



Şekil 1.2.2 Graf

Graf'ın tümleyeni

Tanım 1.2.3 Bir grafın tüm noktalarının aynı r derecesine sahip olması durumunda, bu grafa **r -düzgün graf** denir. Burada " r " derecesi, her bir noktanın kaç kenara sahip olduğunu ifade eder. Örneğin, bir grafın her noktası 4 kenara sahipse, bu grafa 4-düzgün graf denir. 4-düzgün bir graf, tüm noktaların derecesinin 4 olduğu bir graf türüdür. Benzer şekilde, r -düzgün graf terimi, grafın tamamındaki noktaların hepsinin aynı dereceye sahip olduğu genel bir kavramı ifade eder.

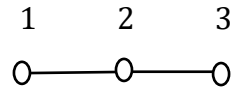


Şekil 1.2.4. 4-Düzgün Graf

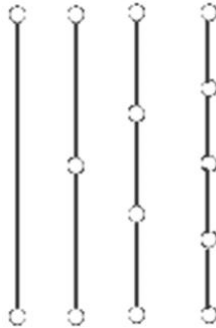
Tanım 1.2.4 Yol grafi, düz bir çizgi üzerinde bulunan düğümlerden oluşan bir graf türüdür. Başlangıç ve bitiş noktaları yalnızca birer düğüm içerir ve bu düğümlerin dereceleri 1'dir. Diğer tüm düğümler ise iki komşu düğüme sahiptir, bu nedenle dereceleri 2'dir.

n mertebeli bir yol grafi, P_n ile gösterilir. P_n grafi, $n + 1$ düğüm içerir ve her bir düğüm, bir önceki veya bir sonraki düğüme bir kenarla bağlıdır. Bu durum, düğümlerin sırayla birbirine bağlı olduğu doğrusal bir yapı oluşturur.

Örneğin, P_3 grafi aşağıdaki gibi görünür:



Bu grafa 1 ve 3 düğümlerin derecesi 1'e, 2 düğümünün derecesi ise 2'ye eşittir.

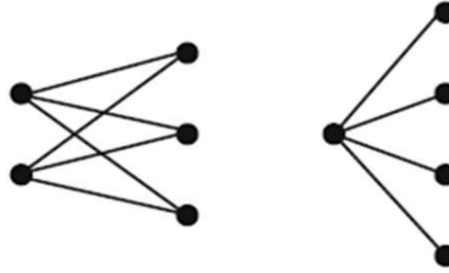


Şekil 1.2.5. Yol Graf Örnekleri

Tanım 1.2.5 İki parçalı graf terimi, bir grafın köşelerinin iki ayrık kümeye, genellikle A ve B olarak adlandırılan, ayrıldığı durumu ifade eder. Eğer bu iki küme arasında sadece bir kenar bulunuyorsa, bu grafa **iki parçalı graf** denir.

Öte yandan, eğer iki parçalı grafa ait her köşe, diğer parçadaki tüm köşelerle komşu ise, bu duruma "**iki parçalı tam graf**" adı verilir. Yani, herhangi bir A köşesi, B tarafındaki tüm köşelerle komşu olmalı ve herhangi bir B köşesi de A tarafındaki tüm köşelerle komşu olmalıdır.

Bu tür bir iki parçalı tam graf, $|A|=m$, $|B|=n$ köşe kümelerini belirtmek üzere $K_{m,n}$ ile ifade edilir. Burada m ve n sırasıyla A ve B kümesindeki köşe sayılarını temsil eder. Bu gösterim, grafın iki parçalı tam graf olduğunu ve A tarafındaki köşe sayısının m , B tarafındaki köşe sayısının ise n olduğunu belirtir.



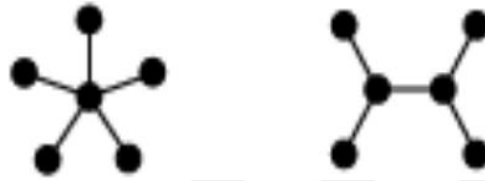
Şekil 1.2.6. İki Parçalı Graf Örnekleri

Tanım 1.2.6 Bir grafın bağlantılı olması, her iki köşesinin de birbirine en az bir kenar ile bağlı olması anlamına gelir.

Bir grafın devir içermemesi, grafın herhangi bir köşeden başlayıp aynı köşeye dönen bir yol içermemesi anlamına gelir. Bu nedenle, devir içermeyen bağlantılı bir grafa "**ağaç graf**" denir. Ağaç graf, matematiksel olarak bir ağaç yapısını temsil eder. Bir ağaç graf, kök düğümü olan bir hiyerarşik yapıdır ve her bir düğüm (veya nokta) birleşen kenarların (ya da bağlantıların) birleşme noktasını temsil eder. Ağaç graf, genellikle T harfi ile gösterilir. T harfi, bir düğümü kök düğüm olarak ve kenarları da

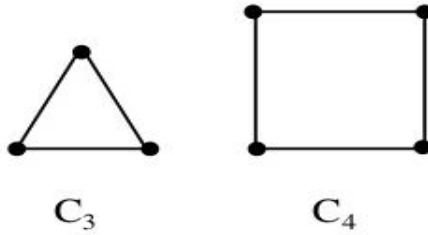
bağlantıları temsil eder. Bu şekilde, ağaç grafın hiyerarşik yapısı görsel olarak ifade edilmiş olur.

Bağlantılı graflar genel olarak iki türde olabilir. Bunlar ağaç graf (devir içermeyen) ve devir içeren graftır. Ağaç graf, özellikle veri yapıları, bilgisayar bilimleri ve matematikte gibi birçok alanda kullanılır



Şekil 1.2.7. Bazı ağaç graf örnekleri

Tanım 1.2.7 Köşe sayısı n olan bir C_n çevre grafi, başlangıç ve bitiş noktalarının aynı olduğu, tüm köşe derecelerinin ise 2 olduğu bir graf türüdür. Çevre grafları genellikle düzlemsel oldukları için düzleme çizilebilirler. Bu özellikleri nedeniyle çevre grafları çeşitli matematiksel ve bilgisayar bilimleri uygulamalarında kullanılır.



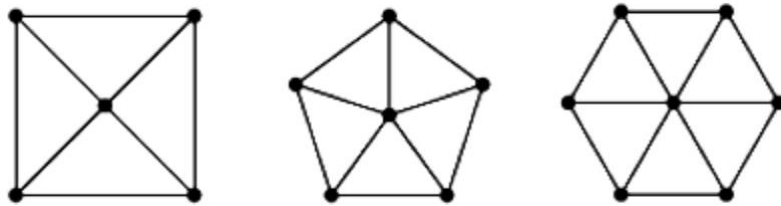
Şekil 1.2.8 Bazı Çevre Graf Örnekleri

Tanım 1.2.8 Bir yıldız grafi (star graph), n köşeli bir ağaç graf türüdür. Bu graf, bir merkez köşesi (merkezi düğüm) ile diğer $n - 1$ köşeyi birbirine bağlayan kenarlardan oluşur. Merkezdeki köşe, $n - 1$ dereceye sahiptir ($n - 1$ kenar ile bağlanmıştır), diğer köşeler ise 1 dereceye sahiptir (sadece merkezle bağlıdır). Bu grafi S_n ile ifade ederiz. Burada n , grafın toplam köşe sayısını temsil eder. Dolayısıyla, S_n yıldız grafi, n köşeden oluşan bir graf olup, bir merkez köşe ve diğer $n - 1$ köşeyi merkeze bağlayan kenarlardan oluşur.



Şekil 1.2.9. Bazı Yıldız Graf Örnekleri

Tanım 1.2.9 Bir yıldız grafi, bir tekerlek grafi türüdür. Tekerlek grafi, bir çember (cycle) üzerine bir yıldız (star) şeklinde eklenmiş bir düğüm (vertex) içeren bir graf türüdür. Bu, genellikle W_n ile ifade edilir, burada "W" tekerlek grafi olduğunu ifade eder ve "n" ise çemberin düğüm sayısını belirtir.



Şekil 1.2.10. Bazı Tekerlek Graf Örnekleri

1.3. Derece ve Uzaklık

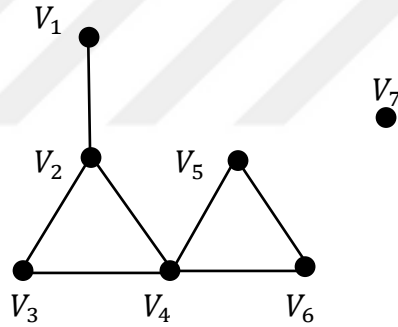
Graf teorisinde köşe derecesi ve iki köşe arasındaki mesafe (uzaklık) önemli temel kavramlardır.

Tanım 1.3.1 Bir grafa ait bir düğümün (veya köşenin) derecesi, o düğüme bağlı olan kenarların sayısını ifade eder. Graf teorisi, düğümler (köşeler) ve kenarlar arasındaki ilişkileri inceleyen bir matematik dalıdır. Belirli bir düğüme komşu olan diğer düğümlerin sayısına, o düğümün **derecesi** denir. Grafın genel toplam derecesi, tüm düğümlerin derecelerinin toplamıdır. Örneğin, bir düğümün derecesi 3 ise, o düğüme bağlı üç kenar veya bu düğüme komşu üç düğüm bulunmaktadır. Bu kavram,

çeşitli uygulama alanlarında kullanılır, özellikle ağlar, iletişim sistemleri, sosyal ağlar ve çeşitli optimizasyon problemleri gibi alanlarda graf teorisinin temelini oluşturur.

Tanım 1.3.2 İki köşe arasındaki uzaklık, bu köşeleri birleştiren en kısa yolun kenar sayısını ifade eder. Graf içinde iki köşe arasındaki uzaklığın belirlenmesi, genellikle BFS (Breadth-First Search) veya DFS (Depth-First Search) gibi algoritmalar kullanılarak yapılır. Bu uzaklık kavramı, bir graf içindeki düğümler arasındaki ilişkiyi anlamak ve belirli düğümler arasındaki en kısa yolları bulmak için önemlidir. Minimum uzaklık ise, iki köşe arasındaki en kısa mesafedir. Bu kavramlar, graf teorisi üzerinde çeşitli problemleri çözmek, ağların analizini yapmak ve ilişkileri anlamak için kullanılır. Köşe dereceleri ve uzaklık özellikle ağ analizi, ulaşım planlaması, iletişim ağları gibi birçok uygulama alanında önemlidir.

Örnek 1.3.3. Aşağıdaki basit graf örneğini inceleyelim.



Şekil 1.3.1. Basit Graf Örneği

Yukarıdaki basit graf örneğinde V_7 izole, V_1 uç köşe ve rastgele seçtiğimiz V_4 ün derecesi $d_G(V_4) = 4$ tür.

Tanım 1.3.4 Bir grafın (G) köşelerinin derecesi, o köşeye bağlı kenar sayısını ifade eder. Derecesi en küçük olan köşeye "**minimum dereceli**" denir ve minimum derece $\sigma(G)$ ile gösterilir. Öte yandan, derecesi en büyük olan köşeye "**maksimum dereceli**" köşe denir ve maksimum derece $\Delta(G)$ ile ifade edilir. Bu kavramlar, bir grafın yapısını anlamak ve graf teorisindeki bazı özellikleri değerlendirmek için

kullanılır. Minimum dereceli köşe, grafın genel bağlantı ve düzenini anlamak açısından önemlidir. Maksimum dereceli köşe ise genellikle bir grafın merkezine yakın bir konumda yer alabilir ve grafın genel yoğunluğunu veya merkeziliğini yansıtabilir.

Örnek 1.3.5. Şekil 1.3.1. deki basit graf örneğinde $\sigma(G) = 0$ ve $\Delta(G) = 4$ tür.

1.4. Yürüme ve Yol

Tanım 1.4.1 Graf teorisinde, bir grafın **yürümesi** veya gezisi, grafın köşelerini belirli bir sırayla ziyaret eden bir yol olarak tanımlanır. Bahsettiğiniz durumda, $V = \{x, y, z, \dots, a, b\}$ kümesi bir grafın köşe kümesini temsil ediyor.

Ayrıca, grafın kenarlarının (xy, yz, zt, \dots, ab) şeklinde sıralanması, belirli bir sırayla kenarların gezilmesini ifade eder. Bu durumda, grafın yürümesi şu şekilde olacaktır:

1. İlk adımda x köşesinden başlanır.
2. xy kenarı takip edilir ve y köşesine gidilir.
3. yz kenarı takip edilir ve z köşesine gidilir.
4. zt kenarı takip edilir ve t köşesine gidilir.
5. Bu şekilde ab kenarı takip edilene kadar bu işlem devam eder.

Yani, her adımda bir köşeden bir sonraki köşeye belirli bir kenarı takip ederek ilerlenir. Bu, grafın belirli bir sırayla gezilmesini ifade eder. Yürüme, grafın topolojik özelliklerini incelemek ve çeşitli graf algoritmalarını uygulamak için kullanışlı bir kavramdır.

Tanım 1.4.2 Bir kapalı yürüyüş (closed walk), bir graf veya matematiksel bir yapı üzerinde belirli kurallara göre hareket eden bir dizi yolu ifade eder. Bir yürüme

(walk) ise, bir grafi veya yapıyı takip eden kenarları içeren bir dizi düğümü ifade eder. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yürüme, kapalı yürüme olarak isimlendirilir.

Örneğin, bir graf düşünün ve bu grafa bir köşeden başlayarak, kenarları takip ederek diğer köşelere gidin. Sonunda başlangıç köşesine geri döndüğünüzde, bu yürüme kapalı bir yürüme olarak kabul edilir. Bu tür kapalı yürümler, matematikte ve bilgisayar biliminde çeşitli konseptlerde kullanılır.

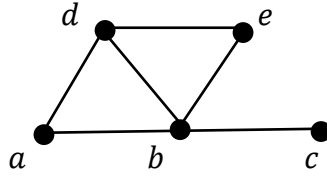
Tanım 1.4.3 Bir yürümede hiçbir köşenin tekrarlanmamasına "**yol**" denir. Bu ifade genellikle matematikte veya geometride kullanılır. Bir yol, bir başlangıç noktasından başlayarak herhangi bir noktaya ulaşmak için belirli kurallar çerçevesinde yapılan bir dizi hareketi ifade eder. Her köşenin yalnızca bir kez ziyaret edildiği bir yürüme, bir grafa veya geometrik bir şekilde belirli bir türde bir yoldur. Bu tür yollar, örneğin graf teorisinde veya matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan temel kavramlardan biridir. Aynı zamanda bu tür yolların özellikleri ve incelenmeleri, matematiksel ve bilgisayar bilimlerinde çeşitli uygulamalara sahiptir.

Teorem 1.4.4 (Harris ve ark., 2008) Bir G grafından alınan tüm u ve v köşeleri arasındaki $u - v$ yürümesi, bir $u - v$ yolunu içerir.

Tanım 1.4.5 Yürüyüş, başlangıç ve bitiş noktaları dışında, herhangi bir kenar birden fazla kez geçmeden oluşan bir yol ise, **gezi** adı verilir. Gezi, graf teorisinde önemli bir kavramdır. Örneğin, bir grafın girinti sayısını bulmak için, grafın tüm gezilerini saymak gerekir.

Gezi ve devir arasındaki fark, bir gezide herhangi bir kenarın birden fazla kez geçilmemesidir. Bir devirde ise, başlangıç ve bitiş noktaları dışındaki tüm köşe ve kenarların farklı olması yeterlidir.

Örnek 1.4.6. Aşağıda bir G grafi verilsin.



Şekil 1.4.1. Bir G grafi

Burada $cbdba$ tam anlamıyla 4 uzunluğunda bir yürümedir lakin dikkat edilirse bir gezi değildir. Diğer taraftan $cbdeba$ bir gezi lakin yol değildir. $bcde$ bir yol olup $bedb$ bir devirdir denebilir.

Tanım 1.4.7 Bir grafin sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine **yürüme** denir.

Yürüyüş, başlangıç ve bitiş noktaları dışında tüm köşe ve kenarların farklı olduğu bir kapalı yol ise, **devir** adı verilir.

Örneğin, aşağıdaki yürüyüş bir devirdir:

$$A - B - C - D - A$$

Bu yürüyüşte, başlangıç noktası A ve bitiş noktası da A 'dır. Yürüyüşün içinde A dışındaki tüm köşeler (B, C, D) ve tüm kenarlar (AB, BC, CD) farklıdır.

1.5 Uzaklık ve Bağlantılılık

Tanım 1.5.1 Graftan iki x ve y köşesi seçilirse bu seçilen köşeler aralarındaki uzaklık bu iki köşe arasındaki en kısa yürümenin **mesafesi(uzunluğu)** kadardır ve $d(x, y)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.2 Bir graf, düğümler (köşeler) ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlar (yollar) kümesinden oluşur. Şimdi bu tanımlamalara dayanarak bağlantılı (connected) ve bağlantısız (disconnected) graf kavramlarını biraz daha detaylı açalım:

Bağlantılı Graf (Connected Graph):

Herhangi iki düğüm arasında en az bir yol olduğunda bu grafa bağlantılı bir graf denir. Yani herhangi iki düğüm arasında bir yürüme (gezinme) yapılabiliyorsa graf bağlantılıdır denir.

Bağlantısız Graf (Disconnected Graph):

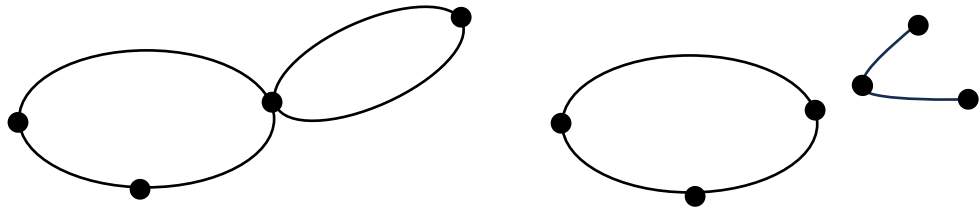
En az iki düğüm arasında yol olmadığında bu grafa bağlantısız bir graf denir. Yani graf içinde bir veya daha fazla ayrık bileşen (connected component) bulunuyorsa graf bağlantısızdır denir.

Mesafe (Uzaklık):

Bağlantısız bir graf içinde, herhangi iki düğüm arasında yol olmadığında, bu iki düğüm arasındaki mesafe genellikle "sonsuz" olarak kabul edilir.

Bu kavramlar graf teorisinde çok kullanılır ve çeşitli algoritmaların ve problemlerin çözümünde temel oluştururlar. Bağlantılılığı kontrol etmek, grafın yapısını anlamak ve çeşitli analizler yapmak açısından önemlidir.

Örnek 1.5.3. Bağlantılı bir çoklu graf ve bağlantısız bir graf örneği aşağıdaki gibi verilebilir.



Şekil 1.5.1. Bağlantılı ve bağlantısız graf örneği

1.6. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu bölümünde birçok araştırmacı tarafından çalışmalarına yer veriler graf parametreleri, graflarda baskınlık sayıları ve monojenik yarı grup grafları hakkında literatürde bulunan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Berge, (1962), “The Theory of Graphs and Its Applications”adlı eserinde graf teorisi ve uygulamalarını incelemiştir.

Ostrand (1973), “Graphs with specified radius and diameter” isimli çalışmasında grafın uzaklığının yarıçapından büyük veya eşit ayrıca yarıçapının iki katından küçük veya eşit olduğunu ortaya koymuştur.

Cockayne ve Hedetniemi (1977), “Towards a theory of domination in graphs”, adlı çalışmasında graflarda baskınlık teorisi üzerine çalışmalarını görmekteyiz.

Allan ve Laskar (1978), "On Domination and Independent Dominaton Numbers Of a Graph" çalışmada baskınlık ve bağımsız baskınlık sayılarının bazı önemli özelliklerinin olduğu gösterilmiştir. Örneğin, bir grafın baskınlık sayısı, bağımsız baskınlık sayısından büyük veya ona eşittir. Bu çalışma, graflar üzerinde baskınlık ve bağımsız baskınlık kavramlarının önemini ortaya koymuştur.

Sampathkumar ve Walikar (1979), “The connected domination of a graph” adlı çalışmasında bir grafın bağlantılı baskınlığı üzerine çalışması mevcuttur.

Cockayne ve ark (1980), "Total Domination in Graphs", adlı çalışmasında , total baskınlık sayısı, tüm total baskınlık kümeleri arasında en küçük eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı olduğunu göstermişlerdir.

Erdős ve ark. (1989), "Radius, diameter and minimum degree" isimli önemli çalışmalarında hala çoğu zaman kullanılan Radius ve diameterle ilgili grafin yalnızca köşe sayısını ve minimum derecesini içeren sınırlar literatüre kazandırmışlardır.

Buckley ve Harary (1990), "Distance in Graphs" adlı kitabı, graf teorisinin genel özellikleri, tanım ve terim bilgisini detaylı bir şekilde ele almaktadır. Eser, graf teorisinin temel kavramlarından başlayarak, grafların mesafesini ve grafların diğer temel özelliklerini incelemektedir.

Bollobas (1998), "Modern Graph Theory" isimli eserde temel graf bilgisi verilmiştir.

Klobucar (1998), "Domination Numbers of Cardinal Products", adlı eserinde ana sonuçların baskınlık sayıları üzerine bilgiler vermiştir.

Arumugam ve Velammal (1998), "Edge Domination in Graphs", adlı eserinde graflarda kenar baskınlık sayısı üzerine bilgiler vermektedir.

Dankelmann ve ark. (2000), "Average distance, minimum degree and spanning trees" isimli eserinde bir grafin ortalama uzaklığı için minimum derece ve grafin köşe sayısı ile ilgili önemli bir sınır ispat etmiş ayrıca kullandığı ispat tekniği bir çok araştırmacı için yol gösterici olmuştur.

Gross ve Yellen (2004), "Handbook of Graph Theory" (Graf Teorisi El Kitabı), graf teorisinin geniş bir yelpazesini kapsayan kapsamlı bir başvuru kaynağıdır. Graf teorisi, matematiksel yapıların ve ilişkilerin modellenmesi ile ilgilenen bir alan olarak bilinir. Kitap, graf teorisinin temel kavramlarından başlayarak, bu kavramların daha karmaşık ve ileri düzeydeki uygulamalarına kadar birçok konuyu kapsar. Bu konular arasında graf modelleri, graf tipleri, graf teorisinde kullanılan temel matematiksel kavramlar, graf teorisindeki temel algoritmalar ve uygulamalar yer almaktadır.

Mahalingam (2005), “Connected Domination in Graphs” adlı çalışmasında bağı baskınlık sayısı, bu kümenin sahip olduğu minimum köşe sayısına eşit olduğunu göstermiştir.

Harris ve ark. (2008), “Combinatorics and graph theory” adlı çalışmasında graflarda yürüme ve yol ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Amos ve DeLaVina (2012), “On Total Domination in Graphs” adlı çalışmasında graflarda total baskınlık sayısı üzerinde bilgiler verilmiştir.

Goddard ve Henning (2013), “Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results” adlı çalışmasında baskınlık sayıları üzerinde bilgiler verilmiştir.

Das ve ark. (2013), “On a graph of monogenic semigroup” adlı eserlerinde monojenik yarı gruplar için graf tanımı vermişlerdir. Bu grafın çeşitli özelliklerini incelemişlerdir.

Haynes ve ark. (2013), “Fundamentals of domination in graphs” adlı çalışmasında graflarda baskınlık temelleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Haynes (2017), “Domination in graphs: volume 2:advanced topics” adlı çalışmasında graflarda baskınlık üzerine çalışmalar yapmıştır.

2.MONOJENİK YARI GRUPLARIN GRAFLARI VE BASKINLIK SAYISI

2.1 Monojenik Yarı grup Grafları

2.1.1 Tanım:(Das ve ark. 2013) $\Gamma(S_M^n) = (V, E)$, köşe kümesi S_M^n 'nin sıfırdan farklı sıfır bölenleri, kenar kümesi de birbirinden farklı x^i ve x^j ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$) ler için $x^i \cdot x^j = 0$ olacak biçimindeki elemanların ikililerinden oluşan kümedir. Burada $x^i \cdot x^j = 0$ koşulunu sağlaması için

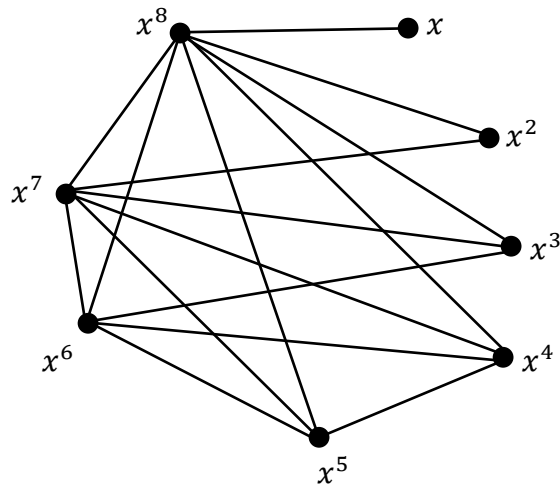
$$x^i \cdot x^j = x^{i+j} = 0 \Leftrightarrow i + j > n$$

kuralını kullanacağız.

2.1.2 Örnek: $S_M^8 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım. $\Gamma(S_M^8)$ sıfır bölen grafini $\Gamma(S_M^n)$ nin yukarıdaki tanımından yararlanarak çizelim.

Verilen grafin köşe kümesi $V(\Gamma(S_M^8)) = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8\}$ dir. Komşuluklar, yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı üzere $x^8 \cdot x^7 = x^{15} = 0 \Leftrightarrow 15 > 8$ olduğundan x^8 ile x^7 komşudur. Aynı mantık göz önüne alınırsa $x^8 \sim x^6, x^8 \sim x^5, x^8 \sim x^4, x^8 \sim x^3, x^8 \sim x^2, x^8 \sim x,$
 $x^7 \sim x^6, x^7 \sim x^5, x^7 \sim x^4, x^7 \sim x^3, x^7 \sim x^2, x^6 \sim x^5, x^6 \sim x^4, x^6 \sim x^3, x^5 \sim x^4$ komşulukları oluşur.

Köşe ve komşulukları ele alırsak aşağıdaki şekilde grafi çizmiş oluruz.



Şekil.2.1.1. S_M^8 Monojenik yarı grubunun sıfır bölen grafi

2.2 Baskınlık Sayısı (Domination Number)

Graf teoride baskınlık sayıları çok geniş bir araştırma alanına sahiptir. Bu alandaki yayınları bir araya getiren (Haynes ve ark. 1998) bir eser ortaya koymuşlar ve kendilerinden sonraki araştırmacılara bir başyapıt bırakmışlardır.

Baskınlık sayısı (Domination Number), en az elemana sahip baskınlık kümesinin eleman sayısıdır. $V - D$ kümesindeki her bir köşe, D kümesindeki en az bir köşeye komşu ise D kümesi Baskın Küme olarak ifade edilmiştir.

Baskınlık kümesi, bir grafın tüm köşelerini ya doğrudan kapsayan ya da en az bir köşesinin komşu olduğu bir kümedir. Bu ifade, baskınlık kümesinin bu şartlarını karşılamaktadır. Örneğin, D kümesi 1 elemandan oluşsun. Bu durumda, baskınlık kümesi D kümesinin tek elemanını içerecek ve baskınlık sayısı 1 olacaktır. (Haynes ve ark. 1998)

"FiveQueens" probleminin, baskın kümeler grafları çalışmasının başlangıcı olduğu söylenebilir. Tüm karelerin ya bir kraliçenin saldırısına uğraması ya da bir kraliçenin işgali altında kalması için tahta üzerine yerleştirilebilecek minimum kraliçe sayısını belirleme problemi, beş kraliçe problemi ya da baskın kraliçe problemi olarak adlandırılır.(Mahalingam,2005)

Tanım.2.2.1.

Köşe kümesi V olsun. D, V kümesinin bir alt kümesi olsun. $\forall v \in V/D$, yani D kümesinin dışındaki her v , D kümesine en az bir köşeye komşu olmalıdır. Bu durumda, D kümesi baskınlık kümesidir çünkü D kümesinin dışındaki herhangi bir köşe, D kümesine en az bir komşu bulunduğu için baskınlık özelliğini sağlar.

Baskınlık sayısı, bu tür baskınlık özelliğini sağlayan alt kümeler arasında en az köşe sayısına sahip olan alt küme ile belirlenir. Yani, $\gamma(G)$ ile gösterilen baskınlık sayısı, V kümesinin alt kümeleri arasında en az köşe sayısına sahip olan alt küme ile ifade edilir. (Gross ve Yellen,2004)

Lemma 2.2.2. (Mahalingam,2005) Köşe sayını n olan herhangi bir G grafi ve onun baskınlık sayısı için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$1 \leq \gamma(G) \leq n.$$

Sonuç 2.2.3. Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir tam grafin baskınlık sayısı daima 1 olur.

$$\gamma(K_n) = 1$$

İspat: Baskınlık kümesi için seçilen herhangi bir eleman, tam grafin özelliğinden dolayı her zaman diğer tüm köşelere komşu olacağından seçilen bir K_n grafinin baskınlık sayısı daima 1 olur.

Teorem 2.2.4. (Klobucar, 1998) Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir yol grafın baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olur.

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Örnek 2.2.5

P_2 grafını ele alalım.



Baskınlık kümesini elde etmek için köşelerden sadece birini seçmemiz yeterlidir, dolayısıyla baskınlık sayısı 1 olur ve $\left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$ olduğundan teoremin doğruluğu gösterilmiş olur.

P_3 grafını ele alalım.

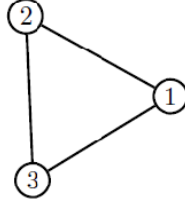


Ortadaki köşeyi seçmeliyiz. Çünkü baskınlık kümesinin minimum olması gerekiyor. Bu köşe diğer tüm köşelere komşu olduğundan ve teoremde de $\left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$ olduğundan baskınlık sayısı 1 olarak elde edilir.

Teorem 2.2.6. (Goddard ve diğerleri, 2006) Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir çevre grafın baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olur.

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

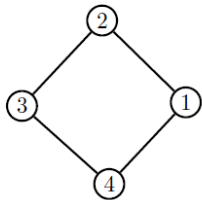
Örnek 2.2.7. C_3 grafini inceleyelim.



Baskınlık kümesi, bir grafin tüm köşelerini ya doğrudan kapsayan ya da en az bir köşesinin komşu olduğu bir kümedir. Verilen grafta, herhangi bir köşe seçilirse, o köşe grafin tüm köşelerini ya doğrudan kapsar ya da en az bir köşesinin komşusudur. Bu nedenle, herhangi bir köşe seçilirse, baskınlık kümesi şartı sağlanmış olur.

Bunun bir başka yolu da baskınlık kümesinin şartlarını ayrı ayrı incelemektir. Herhangi bir köşe seçildiğinde, o köşe grafin tüm köşelerini kapsar ya da en az bir köşesinin komşusudur. Bu nedenle, herhangi bir köşe seçildiğinde, baskınlık kümesi şartı sağlanmış olur. Baskınlık sayısı, bir baskınlık kümesinin eleman sayısıdır. Üç köşeden herhangi biri seçildiğinde, baskınlık kümesi 1 elemandan oluşur. Bu nedenle, baskınlık sayısı 1 olur. Teoremden yerine yazarsak $\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 1$ elde edilir.

C_4 grafini inceleyelim.



Baskınlık kümesi için en az 2 iki köşe seçilmesi gerektiği açıktır ve baskınlık sayısı 2 olur. Teoremde yerine yazarsak $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 2$ olur.

Sonuç 2.2.8. Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir tekerlek grafın baskınlık sayısı daima 1 olur.

$$\gamma(W_n) = 1.$$

İspat: Tekerlek grafın baskınlık sayısının 1 olduğu aşıkardır. Çünkü tekerlek graf, çevre grafın bütün köşelerine tek bir kenar ile komşu olacak şekilde bir komşu eklenmesi ile elde edilen bir graftır.

2.3.Total Baskınlık Sayısı (Total Domination Number)

Graf teorisinde, bir grafın köşeleri ve kenarları temsil eden bir yapıdır. Verilen bir graf üzerinde bir kümenin total baskınlık kümesi olması, her köşenin ya kendisi bu kümede bulunmalı ya da en az bir komşusunun bu kümede olması gerektiği anlamına gelir. Yani, $\forall v \in V$ için, her köşe v 'nin ya kendisi D kümesinde olmalı ya da en az bir komşusu D kümesinde olmalıdır.

Total baskınlık sayısı ise bu kümeler arasında kardinalitesi (eleman sayısı) en küçük olan kümenin eleman sayısını ifade eder. Yani, total baskınlık sayısı, tüm total baskınlık kümeleri arasında en küçük eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısıdır ve $\gamma_t(G)$ ile gösterilir (Cockayne ve diğerleri, 1980).

Teorem. 2.3.1. (Amos, 2012) Herhangi bir C_n grafı için total baskınlık sayısı

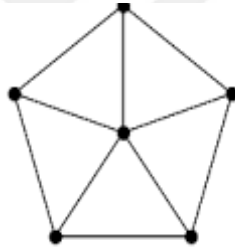
$$n \geq 3 \text{ olmak üzere, } \gamma_t(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{n+1}{2}, & (\text{aksi takdirde}) \end{cases}$$

Sonuç. 2.3.2. Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir tekerlek grafın total baskınlık sayısı 2 dir.

$$\gamma_t(W_n) = 2.$$

Örnek 2.3.3.

Total baskınlık kümesi, bir grafın tüm kenarlarına komşu olan köşeleri içeren bir kümedir. Tekerlek grafında, tam ortadaki köşe tüm kenarlara komşudur. Bu nedenle, bu köşe her zaman total baskınlık kümesine dahil edilmelidir. Ayrıca, tam ortadaki köşeye komşu olan bir köşe ortadaki köşeye komşu olacaktır. Bu nedenle, bu köşe de total baskınlık kümesine dahil edilmelidir. Bu nedenle, tekerlek grafında total baskınlık kümesi 2 elemandan oluşur ve total baskınlık sayısı 2 olur.



Bunun bir başka yolu da total baskınlık kümesinin şartlarını ayrı ayrı incelemektir. Tam ortadaki köşe tüm kenarlara komşudur tam ortadaki köşeye komşu olan bir köşe ortadaki köşeye komşu olacaktır. Bu nedenle, tam ortadaki köşe ve bu köşeye komşu olan bir köşe total baskınlık kümesini oluşturur.

2.4. Bağımsız Baskınlık Sayısı

I kümesi, bir grafın köşelerinin bir alt kümesidir. Graf, matematikteki bir yapıdır ve köşeler (u, v) ile ifade edilen noktalar, kenarlar ise bu noktaları birbirine bağlayan çizgilerdir. $\forall(u, v) \in I$ ifadesi, I kümesinde bulunan herhangi iki nokta (u, v) için geçerlidir, yani I kümesindeki tüm nokta çiftleri için geçerlidir. $N(u)$ ifadesi, u noktasının komşu noktalarının kümesini ifade eder. Yani, $N(u)$ kümesi, u noktasına doğrudan bağlı olan diğer noktaları içerir.

$N(u) \cap \{v\}$ ifadesi, $N(u)$ kümesi ile v noktasının kümesinin kesişimini ifade eder. Yani, u noktasına bağlı olan noktaların kümesi ile v noktasının kümesinin ortak noktalarını içerir. Eğer $N(u) \cap \{v\} = \emptyset$ (boş küme) oluyorsa, bu durumda I kümesi bağımsız baskınlık kümesidir. Yani, I kümesindeki herhangi iki nokta arasında doğrudan bir kenar bulunmamaktadır.

Sonuç olarak, bu ifade, I kümesinin bağımsız baskınlık kümesi olması için, I kümesindeki herhangi iki nokta arasında doğrudan bir kenar olmamalıdır. Bu durumu ifade etmek için de $N(u)$ kümesinin transpozunu alarak, herhangi iki noktanın birbirine komşu olmamasını sağlıyoruz. Bu tür bağımsız baskınlık kümelerinin kardinalitesi (eleman sayısı) en küçük olanları, baskınlık kümesi için en etkili olanlardır ve $i(G)$ ile gösterilir (Allan ve Laskar, 1978).

Sonuç 2.4.1. Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir tam grafin bağımsız baskınlık sayısı 0 dır.

$$i(K_n) = 0.$$

İspat: Bağımsız baskınlık kümesi, bir grafin her iki köşesi arasında bir kenar olmayan bir kümedir. Eğer bir graf tam bir graf (her iki köşesi arasında bir kenar olan) ise, bu tür bir bağımsız baskınlık kümesi bulmak mümkün değildir.

Tam graf yapıları, her iki köşe arasında her zaman bir kenar içerir. Bu nedenle tam graf yapılarında bağımsız baskınlık kümesi oluşturmak imkansızdır ve bağımsız baskınlık sayısı sıfır olacaktır.

Bağımsız baskınlık kümesi oluşturmak için köşelerin birbirleriyle komşu olmaması gerektiği koşulu, genellikle graf teorisinde kullanılan önemli bir kavramdır. Ancak tam bir grafta bu koşulu sağlamak mümkün değildir.

Teorem 2.4.2. (Goddard ve Henning, 2006). Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir yol grafinin bağımsız baskınlık sayısı $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ dir.

$$i(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

Örnek 2.4.3. P_4 grafini inceleyelim.



Bağımsız baskınlık kümesi, bir grafin tüm köşelerini ya doğrudan kapsayan ya da en az bir köşesinin komşu olduğu bir kümedir.

Verilen grafta, 1. ve 3. köşeler tüm grafin köşelerini kapsar. Ayrıca, bu iki köşe birbirine komşu olmadığından, bağımsızdır. Bu nedenle, 1. ve 3. köşeler bir bağımsız baskınlık kümesidir. Bunun bir başka yolu da baskınlık kümesinin şartlarını ayrı ayrı incelemektir.

1. ve 3. köşeler, grafin tüm köşelerini kapsar.

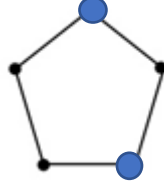
2. ve 3. köşeler birbirine komşu olmadığından, bağımsızdır.

Bu nedenle, 1. ve 3. köşeler bir bağımsız baskınlık kümesidir. Ayrıca teoremden de yola çıkarsak $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 2$ sonucunu elde ederiz.

Teorem 2.4.4. (Goddard ve Henning, 2006). Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir çevre grafinin bağımsız baskınlık sayısı $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ dir.

$$i(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

Örnek 2.4.5. C_5 grafini inceleyelim.



Şekilde farklı olarak belirtilen köşeler baskınlık kümesinin elemanlarıdır. Aynı zaman da bu köşeler birbirleri ile komşu olmadığından bağımsız baskınlık kümesini de oluştururlar. Dolayısı ile bağımsız baskınlık sayısı da 2 olur.

2.5. Bağlı Baskınlık Sayısı

G bağlı bir graf ve S, V kümesinin alt kümesi olmak üzere eğer S, G grafinin bağlı bir alt grafini oluşturuyorsa o zaman bağlı baskınlık kümesi olarak adlandırılır. Bağlı baskınlık sayısı, bu kümenin sahip olduğu minimum köşe sayısına eşittir ve $\gamma_c(G)$ ile gösterilir (Mahalingam, 2005).

Teorem 2.5.1. (Mahalingam, 2005) Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir yol grafin bağlı baskınlık sayısı $n - 2$ dir.

$$\gamma_c(P_n) = n - 2.$$

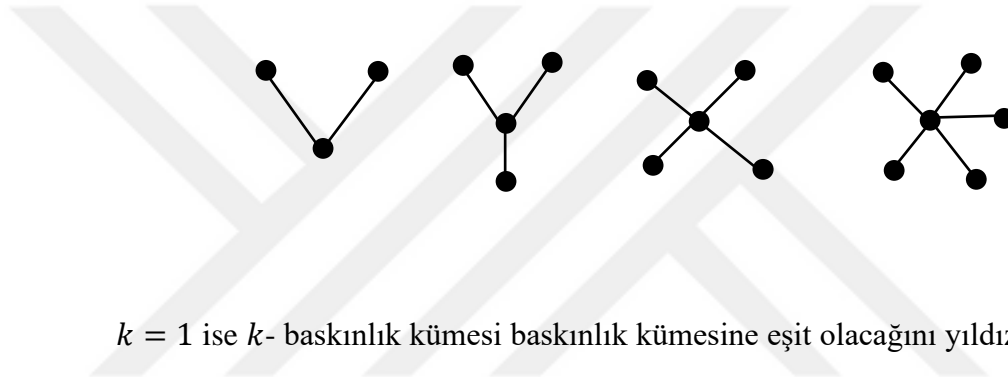
Teorem 2.5.2. (Mahalingam, 2005) Mertebesi(köşe sayısı) n olan bir çevre grafin bağlı baskınlık sayısı $n - 2$ dir.

$$\gamma_c(C_n) = n - 2.$$

2.6. k-Baskınlık Sayısı

Bir $G=(V,E)$ grafi ve D baskınlık kümesi için, D 'de olmayan herhangi bir köşe D 'deki en az k köşeye komşuysa, k baskınlık kümesi olarak adlandırılır ve D kümesinin en küçük kardinalitesine k -baskınlık sayısı denir ve $\gamma_k(G)$ ile gösterilir.(Mahalingam,2005)

Örnek 2.6.1. S_n yıldız grafini ele alalım.

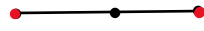


$k = 1$ ise k - baskınlık kümesi baskınlık kümesine eşit olacağını yıldız grafların ortadaki tüm köşelere komşu olan köşeden oluşacağını biliyoruz.

$k > 1$ ise k - baskınlık kümesi tanımından baskınlık kümesinde olmayan her köşenin baskınlık kümesindeki k tane köşeye komşu olması gerekir. Fakat yıldız grafin ortadaki her köşeye komşu olan köşenin haricinde diğer köşelerin derecesi daima 1 dir. Dolayısıyla $k > 1$ için yıldız grafların k - baskınlık kümeleri derecesi 1 olan köşelerden oluşur. Böylece n mertebeli S_n yıldız graflarının $k > 1$ için k - baskınlık küme sayıları $\gamma_k(S_n) = n - 1$ dir.

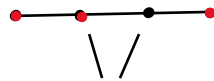
Örnek 2.6.2. P_n yol grafları için k - baskınlık kümelerini bulmak için baskınlık kümelerinde olmayan her bir köşe baskınlık kümesinde k tane köşeye komşu olmalıdır.

Yol graf yapısı gereği köşe derecesi en fazla 2 olabilir. Dolayısıyla yol grafın k - baskınlık kümesine yalnızca $k = 2$ için bakalım. ($k = 1$ için k - baskınlık kümesi baskınlık kümesine eşit idi.)



$P_3 \Rightarrow 2$ - baskınlık kümesi uç köşeler olur.

$$\gamma_2(P_3) = 2.$$



ikisinden biri

$P_4 \Rightarrow 2$ - baskınlık kümesi uç köşeler ve bir de en az bir iç köşe alınmalıdır.

$$\gamma_2(P_4) = 3.$$



$P_5 \Rightarrow$ uçköşeler ve en ortadaki köşe alınırsa 2 baskınlık kümesi en küçük kardinaliteye sahip olur.

$$\gamma_2(P_5) = 3.$$



ikisinden

biri

$P_6 \Rightarrow$ uç köşeler ve ortada belirtilen iki köşenin seçimi ile 2- baskınlık kümesi en küçük kardinaliteye sahip olur.

$$\gamma_2(P_6) = 4.$$

$$\gamma_2(P_7) = 4.$$

$$\gamma_2(P_8) = 5.$$

Benzer şekilde yol grafının düzgün yapısından dolayı

$$\gamma_2(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \text{ olur.}$$

3.MONOJENİK YARI GRUP GRAFLARDA BASKINLIK SAYILARI

Graflar ve cebir ilk olarak Beck tarafından çalışılmıştır. (Beck,1988) Cebirsel yapılar için birçok graf tanımlanmıştır. Bunlardan biri de sıfır bölen graflardır. S_M^n , $\{x^i\}$ ve $i = \{1,2,3, \dots, n\}$ elemanlar ile sıfır elemana sahip monojenik bir yarı gruptur. O zaman sıfır bölen grafi $\Gamma(S_M^n)$ basit, yönlendirilmemiş ve bağlantılı bir graftır. Tepe noktası ve kenar kümesi sırasıyla $\{x^i\}, i = \{1,2,3, \dots, n\}$ ve $\{x^i x^j; i + j > n\}$. Sonlu yarı grupların sıfır bölen grafi tanımlanmış ve parametreleri elde edilmiştir. (Das, K.C. ve ark. 2013).

Bazı baskın kümeler ve sayılar hakkında konuştuğuktan sonra cebirsel bir graf olan monojenik yarı grubun sıfır bölen grafindaki sayıların söz konusu baskınlık kümelerini vereceğiz.

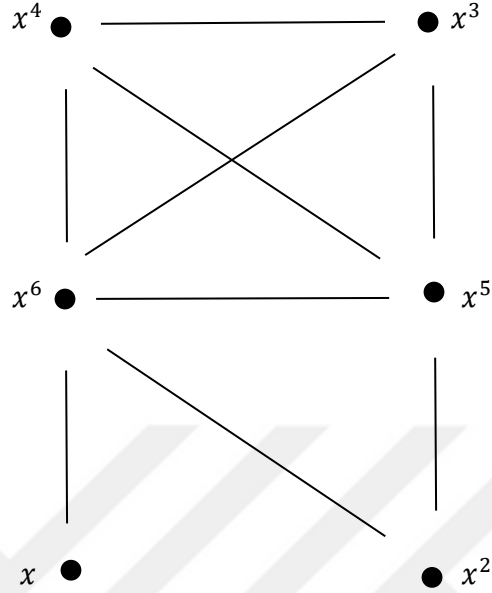
Bir baskınlık kümesi, bir grafın tepe kümesinin bir alt kümesidir. O halde sıfır bölümlü bir baskınlık kümesi monojenik yarı grupların grafi $\{x^{k_i}\}$, $k_i \in \{1,2, \dots, n\}, i = 1,2, \dots, t$ şeklinde yazılabilir.

Teorem. 3.1.(Das, K.C. ve ark. 2013) Monojenik yarı grubun sıfır bölen grafın baskınlık sayısı

$$\gamma((S_M^n)) = 1.$$

İspat. Baskınlık kümesinin tanımından beri baskınlık kümesinde olmayan her tepe noktası baskınlık kümesinde en az bir tepe noktasıdır. Dolayısıyla x^n tepe noktası, her tepe noktası için $n + j > n$ $\forall j \in \{1,2, \dots, n - 1\}$ olduğundan baskınlık kümesinde yer alır. Eğer başka bir x^i tepe noktası (x^n 'den farklı) grafın baskınlık kümesinde yer alıyorsa $\Gamma(S_M^n)$ 'nin baskınlık kümesinde x^j köşesi x^n 'ye komşudur. Sonuç olarak, baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi $\gamma((S_M^n)) = 1$.

Örnek 3.2 $S_M^6 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım.



Şekil.3.1. S_M^6 Monojenik yarı grubunun grafi

Yukarıdaki teoremden x^6 tepe noktası, her tepe noktası için $6 + j > 6$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ olduğundan baskınlık kümesinde yer alır. Başka bir x^j tepe noktası (x^6 'dan farklı) grafın baskınlık kümesinde yer alıyorsa $\Gamma(S_M^6)$ 'nin baskınlık kümesinde x^j köşesi x^6 'ya komşudur. Sonuç olarak, baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi $\gamma((S_M^6)) = 1$ dir.

Teorem. 3.3 Monojenik yarı grubun sıfır bölen grafının toplam baskınlık sayısı

$$\gamma_t((S_M^n)) = 2.$$

İspat. Toplam baskınlık kümesinin tanımından, grafın tepe kümesindeki her tepe noktası baskınlık kümesinde en az bir tepe noktasına komşudur. Dolayısıyla x^n tepe noktası, her tepe noktası için $n + j > n$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ olduğundan toplam baskınlık kümesinde yer alır. Ancak, x_n tepe noktası kendisine komşu olmadığından x_n den farklı x_j tepe noktasını baskınlık kümesine eklemeliyiz. Sonuç olarak, baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi $\gamma_t((S_M^n)) = 2$ dir.

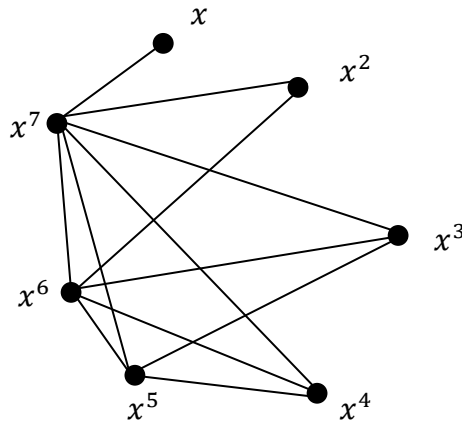
Örnek 3.4 $S_M^8 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım.

Yukarıdaki teoremin ispatından x^8 tepe noktası, her tepe noktası için $8 + j > 8 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 7\}$ olduğundan toplam baskınlık kümesinde yer alır. Ancak, x_8 tepe noktası kendisine komşu olmadığından x_8 den farklı x_j tepe noktasını baskınlık kümesinde yer almalıdır. Sonuç olarak, baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi $\gamma_t((S_M^n)) = 2$ dir.

Teorem. 3.5 Monojenik yarı grubun sıfır bölen grafının bağımsız baskınlık sayısı $i((S_M^n)) = 2$.

İspat. Bağımsız baskınlık kümesinin tanımı, baskınlık kümesindeki her iki köşenin birbirine komşu olmamasıdır. Köşe kümesinin alt kümesi $\{x^n\}$, minimum kardinaliteye sahip baskınlık kümesidir. Ancak $\{x^n x^{n-1}\}$ alt kümesi $\Gamma(S_M^n)$ nin başka bir baskınlık kümesidir ve bu baskınlıktaki köşeler kümesi birbirine bitişiktir. Ayrıca x_2, x_3, \dots, x_{n-2} köşeleri x^{n-1} köşe noktasına bitişik ve x^n, x^1 e komşudur. Dolayısıyla bağımsız baskınlık kümesi $\{x^1 x^{n-1}\}$ dir. Sonuç olarak $\Gamma(S_M^n)$ 'nin bağımsız baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi 2 dir.

Örnek 3.6 $S_M^7 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım.



Şekil 3.3. S_M^7 Monojenik yarı grubunun grafi

Köşe kümesinin alt kümesi $\{x^7\}$, minimum kardinaliteye sahip baskınlık kümesidir. Ancak $\{x^1, x^6\}$ alt kümesi $\Gamma(S_M^7)$ nin başka bir baskınlık kümesidir ve bu baskınlıktaki köşeler kümesi birbirine bitişik değildir. Ayrıca x^2, x^3, \dots, x^5 köşeleri x^6 köşe noktasına bitişik ve x^7, x^1 e komşudur. Dolayısıyla bağımsız baskınlık kümesi $\{x^1, x^6\}$ dir. Sonuç olarak $\Gamma(S_M^7)$ 'nin bağımsız baskınlık kümelerinin minimum kardinalitesi 2 dir.

Lemma.3.7. (Sampathkumar ve Walikar ,1979) Bağlantılı bir G grafi için onun baskınlık ve bağlantılı baskınlık sayıları sırasıyla $\gamma(G)$ ve $\gamma_c(G)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\gamma(G) \leq \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2.$$

Teorem. 3.8. Monojenik yarı grubun sıfır bölen grafinin bağlantılı baskınlık sayısı $\gamma_c(\Gamma(S_M^n)) = 1$.

İspat. Bağlantılı $\Gamma(S_M^n)$ graf için “Lemma 3.7.” den $\gamma(\Gamma(S_M^n)) \leq \gamma_c(\Gamma(S_M^n)) \leq 3 \cdot \gamma(\Gamma(S_M^n)) - 2$ olduğundan dolayı $1 \leq \gamma_c(\Gamma(S_M^n)) \leq 3 \cdot 1 - 2$. Dolayısıyla bağlantılı baskınlık sayısı $\gamma_c(\Gamma(S_M^n)) = 1$ dir.

Örnek 3.9 $S_M^6 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım.

Yukarıdaki teoremin ispatından bağlantılı $\Gamma(S_M^6)$ graf için “Lemma 3.7.” den $\gamma(\Gamma(S_M^6)) \leq \gamma_c(\Gamma(S_M^6)) \leq 3 \cdot \gamma(\Gamma(S_M^6)) - 2$ olduğundan dolayı $1 \leq \gamma_c(\Gamma(S_M^6)) \leq 3 \cdot 1 - 2$. Dolayısıyla bağlantılı baskınlık sayısı $\gamma_c(\Gamma(S_M^6)) = 1$ dir.

Teorem. 3.10. Monojenik yarı grubun sıfır bölen grafinin k -baskınlık sayısı $\gamma_k(\Gamma(S_M^n)) = 2k - 1$ dir, $k \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ için.

İspat. k -baskınlık kümesinin tanımı, baskınlık kümesinde olmayan her bir köşe k -baskınlık kümesinde k tane köşeye komşudur. Bilindiği üzere eğer $k = 1$ ise $\gamma_1(G) = \gamma(G)$ dir. $k = 2$ için her tepe noktası 2- baskınlık kümesinde 2 köşeye komşudur, ancak x köşesi yalnızca bir köşeye komşudur. Bu yüzden x köşesi 2- baskınlık kümesine eklenmelidir. x köşesinin komşusu olmayan en büyük dereceye sahip tepe noktası 2- baskınlık kümesine eklenmelidir. Benzer bir şekilde k -baskınlık kümesinin en küçük kardinalitesi k değerinin $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ olana kadar elde edilir. Çünkü $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, k -baskınlık kümesi $\Gamma(S_M^n)$ grafının köşe kümesine eşittir. Sonuç olarak $k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ için k -baskınlık sayısı $2k - 1$ dir.

Örnek 3.11 $S_M^8 = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu alalım.

Yukarıdaki teoremin ispatına göre eğer $k = 1$ ise $\gamma_1(G) = \gamma(G)$ dir. $k = 2$ için k baskınlık kümesinde bulunmayan her tepe noktası 2- baskınlık kümesinde 2 köşeye komşudur, ancak x köşesi yalnızca bir köşeye komşudur. Bu yüzden x köşesi 2- baskınlık kümesine eklenmelidir. x köşesinin komşusu olmayan en büyük dereceye sahip tepe noktası 2- baskınlık kümesine eklenmelidir. Benzer bir şekilde k -baskınlık kümelerinin en küçük kardinalitesi k değerinin $\lfloor \frac{8}{2} \rfloor$ olana kadar elde edilir. Çünkü $k = \lfloor \frac{8}{2} \rfloor + 1$ için k -baskınlık kümesi $\Gamma(S_M^8)$ grafının köşe kümesine eşit olur. Sonuç olarak $k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{8}{2} \rfloor\}$ için k -baskınlık sayısı $2k - 1$ dir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuçlar

Bu çalışmada bazı graf tanımları ile birlikte bazı graf çeşitleri verilmiştir olup kaynak araştırması sunulmuştur. Daha sonra da monojenik yarı grup graflarına örnekler verilerek anlatılmış ve baskınlık sayısı üzerine bilgi verilmiştir. Bundan esinlenerek ise monojenik yarı grup graflarda baskınlık sayıları üzerine teoremler ispatlarıyla beraber verilmiş ve örnekler verilerek anlatılmıştır.

Öneriler

Bu tezde monojenik yarı grup grafların baskınlık sayıları araştırma yapacaklar için tavsiye niteliği taşıyabilir. Verilen tanımlar, örnekler ve teoremler graf teori alanında çalışan ya da çalışmak isteyen araştırmacılar için iyi bir referans olur. Bu tanımlar, araştırmacıların graf teorisinin temel kavramlarını ve özelliklerini anlamalarına yardımcı olur.

Araştırmacılar, verilen tanımlar ve örnekleri kullanarak farklı matematiksel yapılar üzerinde farklı koşullar altında graflar tanımlayabilir ve özelliklerini inceleyebilir. Örneğin, verilen tanımlar ve örnekleri kullanarak, karmaşık sistemleri modellemek için kullanılan grafları inceleyebilirler.

Ayrıca, verilen özgün tanımlar ve yöntemler, araştırmacılara farklı parametreler üzerinde çalışmak için yeni yollar sunar. Örneğin, verilen özgün tanımlar ve yöntemler kullanılarak, grafların baskınlık sayılarının daha iyi anlaşılması için yeni araştırmalar yapılabilir.

Bu tezde, monojenik yarı grup grafların baskınlık sayılarının incelenmesi için kullanılan yöntemler ve elde edilen sonuçlar, araştırmacılara bu konudaki çalışmalarını yönlendirmek için faydalı bilgiler sunabilir.

Özellikle, bu tezde aşağıdaki konular hakkında bilgi verilmektedir:

- Monojenik yarı grup graflarının baskınlık kümelerinin nasıl tanımlanabileceği
- Monojenik yarı grup graflarının baskınlık sayılarının nasıl hesaplanabileceği
- Monojenik yarı grup graflarının baskınlık sayılarının hangi faktörlerden etkilendiği

Bu bilgiler, araştırmacılara monojenik yarı grup grafların baskınlık sayılarını daha iyi anlamalarına ve bu sayıların farklı uygulamalarda nasıl kullanılabileceğini belirlemelerine yardımcı olabilir.

Bazı spesifik tavsiyeler şunlardır:

- Araştırmacılar, bu tezde verilen yöntem ve sonuçları kullanarak kendi çalışmalarının da monojenik yarı grup grafların baskınlık sayılarını inceleyebilirler.
- Araştırmacılar, bu tezde verilen konuların yanı sıra, monojenik yarı grup grafların baskınlık sayılarının daha iyi anlaşılması için yeni araştırma alanları açabilirler.

Bu tavsiyeler, monojenik yarı grup grafların baskınlık sayılarının incelenmesinde yeni gelişmelere katkı sağlayabilir.

Sonuç olarak, verilen tanımlar, örnekler ve teoremler, graf teorisinin gelişimine önemli katkılar sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- Allan, R.B. ve Laskar, R. (1978), On Domination and Independent Domination Numbers of a Graph, *Discrete Mathematics*, 23 73-76.
- Amos, D. ve DeLaVina, E. (2012), On Total Domination in Graphs. *Senior Project, University of Houston Downtown*.
- Arumugam, S. ve Velammal, S. (1998), Edge Domination in Graphs, *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol. 2, No. 2, 173-179.
- Berge, C. (1962), The Theory of Graphs and Its Applications, x+247 pp. *Wiley, New York Translated by Alison Doig Methuen & Co. Ltd., London*
- Bollobas, B. (1998), Modern Graph Theory, *Graduate Texts in Mathematics*, 184, Springer, New York.
- Buckley, F. ve Harary, F. (1990), Distance in Graphs, *Addison Wesley Pub., California*.
- Cockayne E. J. ve Hedetniemi S. T. (1977), Towards a theory of domination in graphs, *John Wiley and Sons*, NY, 7, 247-261.
- Cockayne, E. J., Dawes, R.M., ve Hedetniemi, S.T. (1980), Total Domination in Graphs, *Networks 10*, 211-219.
- Dankelmann, P. ve Entringer, R.C. (2000), Average distance, minimum degree and spanning trees, *J. Graph Theory* 33, 1–13.
- Das, K. C., Akgunes, N., ve Cevik, A. S., (2013). On a graph of monogenic semigroups. *Journal of Inequalities and Applications*,1-13
- Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., ve Tuza, Z., (1989) Radius, Diameter and Minimum Degree, *J. Combin. Theory Ser., B* 47, 73-79.
- Goddard, W. ve Henning, M.A. (2013), Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results. *Discrete Mathematics* ,313(7),839-854.
- Gross, J. L. ve Yellen, J. (2004), Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall, CRC Press*.
- Harris, J., Jeffry L. H., ve Michael J. M., (2008), Combinatorics and graph theory, *Springer*.
- Haynes T. (2017), *Domination in graphs volume 2: advanced topics*. Routledge.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S., ve Slater, P. (2013), *Fundamentals of domination in graphs*. CRC press.

Klobucar, A. (1998). Domination Numbers of Cardinal Products, *Mathematical Communications*, 4, 241-250.

Mahalingam, G. (2005), Connected Domination in Graphs.

Ostrand, (1973) Graphs with Specified Radius and Diameter, *Discrete Math.*, 4 71-75.

Sampathkumar E. ve Walikar H. B. (1979), The connected domination of a graph. *J.Math. Phys.*

