T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\boldsymbol{k}$. MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI LİNEER $\boldsymbol{x(n+k)=A(n)x(n)}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN HAREKETİ

Fırat Çağlar KÜÇÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2020
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Fırat Çağlar KÜÇÜK tarafından hazırlanan "k. Mertebeden Periyodik Katsayılı Lineer $x(n+k) = A(n)x(n)$ Fark Denklem Sisteminin Çözümünün Hareketi" adlı tez çalışması 15/09/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Kemal AYDIN	…………………..
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN	…………………..
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN	…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fırat Çağlar KÜÇÜK

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\boldsymbol{k}$. MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI LİNEER $\boldsymbol{x(n+k)=A(n)x(n)}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN HAREKETİ

Fırat Çağlar KÜÇÜK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN

2020, 55 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Kemal AYDIN
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN
Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN

Bu çalışmada, Schur kararlı k. mertebeden $x(n+k)=A(n)x(n)$ periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için hangi pertürbeler altında Schur kararlı kaldığını belirleyen Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de verilen $\overline{\omega}_1(A,T)$ Schur kararlılık parametresine bağlı süreklilik teoremleri ve sistemin ω^*–Schur kararlılığı üzerine sonuçların ispatlarının nasıl yapıldığı açıklandı. Ayrıca Schur kararlı k. mertebeden $x(n+k)=A(n)x(n)$ periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin çözümünün yeni üst sınırı elde edildi. Verilen sonuçların, yapılan nümerik örnekler ile etkinliği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemler, Hassasiyet, Pertürbe sistemleri, Schur kararlılık

ABSTRACT

MS THESIS

BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF THE $k-th$ ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATION WITH PERIODIC COEFFICIENTS $x(n+k)=A(n)x(n)$

Fırat Çağlar KÜÇÜK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Advisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet DUMAN

2020, 55 Pages

Jury
Prof. Dr. Kemal AYDIN
Asist. Prof. Dr. Ahmet DUMAN
Asist. Prof Dr. Ayşegül KETEN

In this thesis, contunuity theorems related to $\overline{\omega}_1(A,T)$ Schur stability parameter given by Çelik Kızılkan and Duman in 2020, which determines under which perturbations remain Schur stable for kth order $x(n+k)=A(n)x(n)$ linear difference equations with periodical coefficients and how to prove the results on the $\omega^* -$ Schur stability of the system were explained. In addition a new upper bound for the solution of Schur stable kth order $x(n+k)=A(n)x(n)$ linear difference equations with periodical coefficient was obtained. The effectiveness of the results with numerical examples was shown.

Keywords: Difference Equations, Sensitivity, Perturbed Systems, Schur Stability

ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Çalışmanın gerçekleşmesinde desteğini esirgemeyen danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN ve aileme teşekkür ederim.

Fırat Çağlar KÜÇÜK
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

KULLANILAN SEMBOLLER

$\lambda_i(A)$: A matrisinin i inci öz değeri

H^* : H matrisinin eşlenik transpozu

$H = H^* > 0$: H matrisi simetrik pozitif matris

$\lambda_{max}(A)$: A matrisinin özdeğerlerinin en büyüğü

$\|A\|$: A matrisinin $\|A\| = \sqrt{|\lambda_{max}(A^*A)|}$ ile verilen spektral normu

$\omega(A)$: Sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri için Schur kararlılık parametresi

$X(T)$: Periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin monodromi matrisi

$\omega_1(A,T)$: Periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için Schur kararlılık parametresi

$\overline{\omega}_1(A,T)$: *k*. mertebeden periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için Schur kararlılık parametresi

ω^* : Fark denklem sistemleri için pratik kararlılık parametresi

1. GİRİŞ

Bir problemi çözmeden, problemin çözümünün nasıl davrandığını bilmek ve problemin giriş elemanlarında yapılan hangi değişimler için problemin karakterinin değişmediğini bilmek uygulama alanlarında çok önemlidir. Verilen bir problemin girdilerinde yapılan değişimin sonuca olan etkisinin belirlenmesi hassasiyet problemi olarak adlandırılır. Hassasiyetin bilinmesi, girdilerde çözümün davranışını değiştirmeyecek değişiklikler yapmaya imkân verir. Böylece problemin uygulama alanına göre; para, zaman, iş gücü ya da can kayıpları ile karşılaşılması önlenmiş olur.
Problemin hassasiyeti genellikle literatürde süreklilik teoremi olarak bilinen teoremler ile verilmektedir (Aydın ve ark. 2001, Duman ve Aydın 2011, Duman ve ark. 2016).

1.1. Literatür Özeti ve Problemin Tanıtımı

Problemin hassasiyetini belirleyen koşulları veren teoremler süreklilik teoremleri olarak bilinmektedir. Süreklilik teoremleri, verilen problemin giriş elemanlarında ne kadar değişim olduğunda problemin karakterini koruduğunu vermektedir. Süreklilik teoremleri, denklem teorisinin neredeyse tüm alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin diferensiyel ve fark denklemlerin hassasiyetinin incelenmesi süreklilik teoremleri ile verilmektedir.

Diferensiyel ve fark denklem sistemlerinin kararlılığının hassasiyetinin incelenmesi uygulama alanlarında önemli bir problem olmuş ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. Çalışmamız periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri üzerine olduğundan şimdi bu sistemler için literatürde verilen bazı süreklilik teoremlerinden bahsedelim.

$A(n) = A(n+T), N$ boyutlu periyodik (T periyotlu) karesel bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z}$$

periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem Schur kararlı olmak üzere acaba hangi şartlar altında Schur kararlı kalmaya devam edecektir? Yani yukarıda verilen sistem Schur kararlıyken

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n),\ n \in \mathbb{Z}$$

pertürbe sistemi hangi $B(n)$ pertürbe matrisleri için Schur kararlı kalmaya devam edecektir? Bu problemle ilgili literatürde çeşitli süreklilik teoremleri yazılmıştır. Bu süreklilik teoremlerinden bazıları;

- Verilen periyodik katsayılı fark denklem sistemi Schur kararlı (verilen sistemin monodromi matrisi $X(T)$ Schur kararlı) olsun. Bu durumda

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisleri için pertürbe edilmiş sistem de Schur kararlıdır. Burada $Y(T)$, pertürbe sisteminin monodromi matrisidir (Aydın ve ark. 2001).

- Verilen periyodik katsayılı fark denklem sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|B(n)\| < \frac{\sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|}{\max\limits_{1\le j,k\le T}\|Q(j,k)\| \left[1 + (T-1)\left(\max\limits_{1\le k\le T-1}\|X(k)\| + \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|\right)\right]}$$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisleri için pertürbe edilmiş sistem de Schur kararlıdır (Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

Çalışmamızda literatürde verilen 1. mertebeden $x(n+1) = A(n)x(n)$ periyodik katsayılı fark denklem sistemleri için verilen süreklilik teoremlerini $k.$ mertebeden $x(n+k) = A(n)x(n)$ periyodik katsayılı fark denklem sistemlerine genişleten Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de verilen süreklilik teoremlerinin ispatlarının nasıl yapıldığı açıklanmış ve $k.$ mertebeden $x(n+k) = A(n)x(n)$ periyodik katsayılı fark denklem sisteminin çözümünün yeni bir üst sınırı elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçların etkinliklerini gösteren örnekler yapılmıştır.

1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde problemin tanıtımı ve problemle ilgili literatür özeti verilmiştir.

2. bölümde sabit katsayılı ve periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri ile bu sistemlerin Schur Kararlılığı ve Süreklilik Teoremlerine yer verilmiştir.

3. bölümde *k*. mertebeden periyodik katsayılı fark denklem sistemleri, bu sistemlerin Schur kararlılığı ve hassasiyeti ile ilgili Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de verilen teoremler ve *k*. Mertebeden periyodik fark denklem sistemlerinin çözümünün yeni bir üst sınırı elde edilmiştir.

4. bölümde özellikle Schur kararlı *k*. mertebeden periyodik katsayılı fark denklem sisteminin çözümünün yeni üst sınırı ile ilgili nümerik örnekler yapılmıştır.

2. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri ile periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri, bu sistemlerin Schur kararlılığı ve Schur kararlılığının hassasiyeti ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemleri

A, N boyutlu karesel sabit katsayılı bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A\,x(n),\, n \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

sistemini ele alalım. Bu sistem sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi olarak, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$ başlangıç şartı altında

$$x(n+1) = A\,x(n),\;\; x(0) = x_0,\; n \geq 0 \tag{2.2}$$

sistemi de sabit katsayılı lineer fark Cauchy problemi olarak adlandırılmaktadır.

I birim matris ve A singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$X(n+1) = A\,X(n),\;\; X(0) = I,\; n \geq 0$$

Cauchy probleminin çözümü $X(n) = A^n$ matrisine (2.1) sisteminin fundamental matrisi denir. (2.2) sisteminin çözümü $x(n) = A^n x_0$ şeklindedir (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve ark. 2000, Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

2.1.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığı

Literatürde fark denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı Schur kararlılık, diferensiyel denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı Hurwitz kararlılık olarak kullanılmaktadır (Wang and Michel 1993, Rohn 1994, Aydın 2004, Voicu and Pastravanu 2006). Bu çalışmada fark denklemlerinin asimtotik kararlılık kavramı için Schur kararlılık kavramı kullanılacaktır.

Spektral kritere göre; (2.1) sisteminin (veya A matrisinin) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i(A)| < 1, (i = 1,2, \ldots , N)$ olması yani (2.1) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün özdeğerlerinin birim diskin içine düşmesidir (Akın ve Bulgak 1998, Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

Simetrik olmayan matrisler için özdeğer problemi kötü konulmuş bir problem olduğu bilinmektedir (Wilkinson 1965, Bulgak 1999). Dolayısıyla (2.1) sisteminin, Schur kararlılığını özdeğer kullanmaksızın lineer cebirsel bir matris denkleminin çözümü ile belirleyen Lyapunov teoremini ve Schur kararlılığın kalitesini belirleyen Schur kararlılık parametresini tanıtalım.

Lyapunov Teoremi: $x(n+1) = A\,x(n)$ sisteminin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümünün (veya A matrisinin) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA - H + C = 0,\ C = C^* > 0$$

olarak bilinen Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty}(A^*)^k C A^k\,,\ H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999, Elaydi 1999, Duman 2008).

Not 2.1. (2.1) sisteminin bir çözümü Schur kararlı ise tüm çözümleri Schur kararlıdır. Yani (2.1) sisteminin Schur kararlığını araştırmak için (2.1) sistemin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümünün Schur kararlı olup omadığını incelemek yeterlidir (Akın ve Bulgak 1998).

$C = I$ (I birim matris) olarak alınırsa Lyapunov Teoremi;

"$x(n+1) = A\,x(n)$ sisteminin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümünün (veya A matrisinin) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA - H + I = 0$$

olarak bilinen Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty}(A^*)^k A^k\,,\ H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır"

şeklinde ifade edilebilir. $C = I$ olarak alınarak elde edilen Lyapunov fark denkleminin simetrik pozitif tanımlı H çözümü varsa Schur kararlılığın kalitesini gösteren parametre $\omega(A) = \|H\|$ olarak tanımlanır. Eğer Lyapunov fark denkleminin simetrik pozitif tanımlı H çözümü yoksa $\omega(A) = \infty$ olarak seçilir (Bulgakov ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999, Duman 2008).

2.1.2. $\boldsymbol{x(n+1) = A\,x(n)}$ Sisteminin Çözümünün Üst Sınırı

Mühendislik problemlerinde bir sistemin çözümünü elde etmeden, çözümün nasıl hareket ettiği hakkında bilgi sahibi olmak önemlidir. Şimdi (2.2) Cauchy probleminin çözümünün davranışı hakkında bilgi veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1. (2.2) Cauchy problemi Schur kararlı olsun. (2.2) Cauchy probleminin çözümünün üst sınırı

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\omega(A)}(1 - \frac{1}{\omega(A)})^{\frac{n}{2}}\|x_0\|, n \geq 0$$

ve

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\omega(A)}e^{-\frac{n}{2\omega(A)}}\|x(0)\|$$

dir (Bulgak ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999).

2.2. Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemleri

$A(n) = A(n+T),\ N$ boyutlu T periyotlu karesel bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

sistemini ele alalım. (2.3) periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$ başlangıç şartı altında

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ x(0) = x_0\,,\quad n \geq 0 \tag{2.4}$$

periyodik katsayılı lineer fark Cauchy problemi olarak adlandırılır. I birim matris olmak üzere

$$X(n+1) = A(n)X(n),\ X(0) = I,\ n \geq 0$$

Cauchy probleminin çözümü olan

$$X(n) = \prod_{j=0}^{n-1} A(j) = A(n-1).A(n-2)\ldots A(0)$$

matrisine (2.3) sisteminin fundamental matrisi ve

$$X(T) = \prod_{j=0}^{T-1} A(j) = A(T-1).A(T-2)\ldots A(0)$$

matrisine (2.3) sisteminin monodromi matrisi denir (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Agarwal 2000, Aydın ve ark. 2000, Duman 2008).

(2.4) Cauchy probleminin çözümü $x(n) = X(n)x_0$ ve $n = kT + m,\ 0 \leq m < T$ olmak üzere (2.4) sisteminin çözümü

$$x(kT + m) = X(m)X(T)^k x_0 \tag{2.5}$$

olarak ifade edilebilir (Aydın 1995, Aydın ve ark. 2000, Duman 2008).

2.2.1. Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığı

(2.5) eşitliğinden, (2.4) sisteminin Schur kararlı olması ile sistemin $X(T)$ monodromi matrisinin Schur kararlı olmasının denk olduğu açıkça görülmektedir. Böylece Spektral Kritere göre (2.4) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i(X(T))| < 1, (i = 1,2, \ldots, N)$ olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve ark. 2000, Duman 2008).

Simetrik olmayan matrisler için özdeğer problemi kötü konulmuş bir problem olduğundan özdeğer kullanmaksızın (2.4) sisteminin Schur kararlılığını belirleyen Lyapunov teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2. (Lyapunov Teoremi) (2.4) sisteminin monodromi matrisi $X(T)$ matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart her $C = C^* > 0$ matrisi için

$$X^*(T)FX(T) - F + C = 0$$

Lyapunov matris denkleminin

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \left(X^*(T)\right)^k C(X(T))^k, \quad F = F^* > 0$$

tek çözümüne sahip olmasıdır.(Aydın ve *ark.* 2000)

$C = I$ olması durumunda Lyapunov denklemi

$X^*(T)FX(T) - F + I = 0$

olur. Lyapunov matris denkleminin tek çözümü

$$F = \sum_{k=0}^{\infty}\left(X^*(T)\right)^k (X(T))^k, \quad F = F^* > 0 \tag{2.6}$$

olmaktadır. (2.6) matris serisinin yakınsak olması $X(T)$ monodromi matrisinin Schur kararlı olmasına denktir.

(2.4) sistemi için literatürde Schur kararlılığının kalitesini veren parametreler mevcuttur. Bunlardan birisi $\omega_1(A,T)$ parametresi;

$$\omega_1(A,T) = \|F\|; F = \sum_{i=0}^{\infty}\left(X^*(T)\right)^k (X(T))^k, X^*(T)FX(T) - F + I = 0;\ F = F^* > 0$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada I birim matris, A^* matrisi A matrisinin adjoint matrisi, A matrisinin spektral normu $\|A\| = max_{\|x\|=1}\|Ax\|$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ vektörünün öklid normu $\|x\|$ dır. Eğer $\omega_1(A,T)$ parametresi hesaplanabiliyor ise (2.4) sistemi Schur kararlıdır. Aksi takdirde sistem Schur kararlı değildir ve $\omega_1(A,T) = \infty$ olarak seçilir.

Fiziksel problemin türüne göre kullanıcı tarafından girilen ω^* 1 den büyük bir sayı ($\omega^* > 1$) olmak üzere $\omega_1(A,T) \leq \omega^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa (2.3) sistemi (veya $X(T)$ monodromi matrisi) pratik Schur kararlı (ω^* −Schur kararlı) olarak adlandırılır. Aksi takdirde (2.3) sistemine (veya $X(T)$ monodromi matrisine) ω^*-Schur kararsız denir (Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999, Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

2.2.2. Süreklilik Teoremleri

Bu kısımda periyodik katsayılı lineer (2.3) sistemi Schur kararlı iken hangi pertürbeler altında Schur kararlı kaldığını belirleyen, literatürde verilmiş bazı süreklilik teoremlerini verelim. Süreklilik teoremlerini vermeden önce (2.3) sisteminin pertürbe sistemini tanıtalım.

$A(n) = A(n+T)$ ve $B(n) = B(n+T)$ matrisleri N boyutlu periyodik(T-periyotlu) karesel matrisler olmak üzere

$$y(n+1) = ((A(n) + B(n))y(n) \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.7}$$

sistemine (2.3) sisteminin pertürbe sistemi denilmektedir.

Teorem 2.3. (2.3) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|Y(T)-X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisi için (2.7) pertürbe sistemi de Schur kararlıdır (Aydın 2001).

Teorem 2.4. $X(T)$ ve $Y(T)$ sırasıyla (2.3) ve (2.7) sistemlerinin monodromi olmak üzere

$$\begin{aligned}\|Y(T)-X(T)\| \leq\; & max_{0\leq k\leq T-1}\|B(k)\|(\beta + \gamma max_{1\leq k\leq T-1}\|\Psi(k,0)\| \\ & +\mu(\beta + \gamma max_{1\leq k\leq T-1}\|\Psi(k,0)\| \\ & +max_{1\leq k\leq T-1}\|B(k)\| \textstyle\sum_{k=2}^{T-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{k!}{l!(k-l)!}(max_{0\leq j\leq k-1}\|B(j)\|)^l\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$Q(n,s) = \prod_{j=s}^{n-1} A(j),\ \Psi(n,s) = \prod_{j=s}^{n-1} B(j),\ \gamma = (T-1)max_{1\leq k\leq T}\|Q(T,k)\|,$$

$$\beta = max_{1\leq k\leq T}\|Q(T,k)\|(1+(T-1)max_{1\leq k\leq T}\|Q(k,0)\|,$$

$$\mu = max_{1\leq k\leq T}\|Q(T,k)\|\begin{cases} max_{0\leq j\leq T-2}\|A(j)\| & : \ max_{0\leq j\leq T-2}\|A(j)\| \leq 1 \\ (max_{0\leq j\leq T-2}\|A(j)\|)^{T-2} & : \ max_{0\leq j\leq T-2}\|A(j)\| > 1\end{cases}$$

şeklindedir. Üstelik (2.3) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$max_{0\leq k\leq T-1}\|B(k)\|(\beta + \gamma max_{1\leq k\leq T-1}\|\Psi(k,0)\| + \mu(\beta + \gamma max_{1\leq k\leq T-1}\|\Psi(k,0)\| + max_{1\leq k\leq T-1}\|B(k)\| \sum_{k=2}^{T-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{k!}{l!(k-l)!}(max_{0\leq j\leq k-1}\|B(j)\|)^l < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|$ eşitsizliğini sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisleri için (2.7) sistemi de Schur kararlıdır (Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

Teorem 2.5. $X(T)$ ve $Y(T)$ sırasıyla (2.3) ve (2.7) sistemlerinin monodromi matrisleri ve $(T-1)max_{1\leq j,k\leq T}\|Q(j,k)\|max_{0\leq k\leq T-1}\|B(k)\| < 1$ olmak üzere

$$\|Y(T)-X(T)\| \leq \frac{max_{1\leq j,k\leq T}\|Q(j,k)\|(1+(T-1)max_{1\leq k\leq T-1}\|X(k)\|)}{1-(T-1)max_{1\leq j,k\leq T}\|Q(j,k)\|max_{1\leq k\leq T-1}\|B(k)\|}max_{1\leq k\leq T-1}\|B(k)\|$$

eşitsizliği doğrudur. Üstelik (2.3) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|B(n)\| < \frac{\sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|}{max_{1\le j,k\le T}\|Q(j,k)\|[1 + (T-1)\left(max_{1\le k\le T-1}\|X(k)\| + \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|\right)]}$$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisleri için (2.7) sistemi de Schur kararlıdır. Burada $Q(n,s) = \prod_{j=s}^{n-1} A(j)$ şeklinde verilmiştir (Duman 2008, Duman ve Aydın 2011).

Teorem 2.6. (2.4) sistemi ω^*-Schur kararlı bir sistem ($\omega_1(A,T) \le \omega^*$) olmak üzere

i) $\max\limits_{0\le k\le T-1}\|B(k)\|\left(\beta + \gamma \max\limits_{1\le k\le T-1}\|\Psi(k,0)\| + \mu \max\limits_{0\le k\le T-1}\|B(k)\| \sum_{k=2}^{T-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{k!}{l!(k-l)!}\left(\max\limits_{0\le j\le k-1}\|B(j)\|\right)^l\right) \le \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\omega^*-\omega_1(A,T)}{\omega^*\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|$

ii) $\|B(n)\| \le \dfrac{\sqrt{\|X(T)\|^2+\frac{\omega^*-\omega_1(A,T)}{\omega^*\omega_1(A,T)}}-\|X(T)\|}{\max\limits_{1\le j,k\le T}\|Q(j,k)\|\left[1+(T-1)\left(\max\limits_{1\le k\le T-1}\|X(k)\|+\sqrt{\|X(T)\|^2+\frac{\omega^*-\omega_1(A,T)}{\omega^*\omega_1(A,T)}}-\|X(T)\|\right)\right]}$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisi için (2.7) sistemi de ω^*-Schur kararlıdır (Duman 2008, Duman ve ark. 2016).

2.2.3. $x(n+1) = A\,(n)x(n)$ Sisteminin Çözümünün Üst Sınırı

Sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümünün üst sınırına benzer olarak periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümünün üst sınırı literatürde aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.7. (2.4) Cauchy problemi Schur kararlı olsun. $n = kT + m,\ 0 \le m \le T-1$ olmak üzere (2.4) Cauchy probleminin çözümünün üst sınırı

$$\|x(n)\| \le max_{0\le i\le T-1}\|X(i)\|\left(1 - \frac{1}{\omega_1(A,T)}\right)^{\frac{k}{2}}\omega_1(A,T)^{\frac{1}{2}}\|x_0\|$$

dir (Bulgak ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999).

3. k. MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLIĞI

1. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+1) = A(n)x(n)$ lineer fark sisteminin Aydın ve ark. 2001, Duman ve Aydın 2011, Duman ve ark. 2016'da $\omega_1(A,T)$ parametresi üzerine verilen süreklilik teoremleri dikkate alınıp, Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de bu teoremleri k. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+k) = A(n)x(n)$ lineer fark denklemi için yeni $\varpi_1(A,T)$ kararlılık parametresi tanımlayıp, süreklilik teoremlerini yeniden ifade etmişlerdir. Ayrıca Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de k. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+k) = A(n)x(n)$ lineer fark denkleminin çözümü bulunmuş ve formülüze edilmiştir. Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de k. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+k) = A(n)x(n)$ lineer fark denklemi için verilen süreklilik teoremlerinin ispatları 1. mertebeden sistemlerin ispatları adım adım takip edilerek yapıldığından tekrara düşmemek açısından verilmemiştir. Bu bölümde Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de ispatları verilmeyen süreklilik teoremlerinin ispatlarının nasıl yapıldığı açıklanmış ve k. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+k) = A(n)x(n)$ lineer fark denklemi için $\varpi_1(A,T)$ parametresi kullanılarak literatürde bulunmayan çözümün üst sınırı hesaplanmıştır.

$A(n) = A(n+T)$, N boyutlu T periyotlu karesel bir matris ve $x(n), N$ boyutlu vektör olmak üzere

$$x(n+k) = A(n)x(n), x(s) = x_s \ (s = 0,1,2,\dots,k-1) \tag{3.1}$$

k. mertebeden Cauchy problemini ele alalım. Burada $k = 1$ olması durumunda (3.1) sistemi

$$x(n+1) = A(n)\,x(n), \ \ x(0) = x_0\,, n = 0,1,2,\dots$$

Cauchy problemine dönüşür.

$$\mathrm{s} = 0,1,2,\dots,k-1 \text{ için}$$

$$X_s(n+1) = A(n)X_s(n), \ \ X_s(0) = I, \qquad n \geq 0$$

Cauchy probleminin çözümü $X_s(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(ik+s)$, k. mertebeden periyodik katsayılı (3.1) sisteminin fundamental matrisi, $n = T$ alınarak elde edilen, çözümün karakterini belirleyen $X_s(T)$ monodromi matrisini ve monodromi matrislerini eleman kabul eden

$$\mathcal{X} = \{X_s(T) | s = 0,1,2, \dots, k-1\}$$

monodromi matris ailesidir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

(3.1) Cauchy probleminin çözümü,

$$x(n) = A(n-k)A(n-2k) \dots A(s+k)A(s)x_s$$

dir. Burada $n = ukT + v,\ 0 \le v \le kT - 1$, $0 \le s \le k-1$ ve $u, s, v \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} x(n) = {} & A(uTk + v - k) \dots A\big((uT+1)k + s\big)A(uTk + s) \\ & \times A\big((uT-1)k + s\big) \dots A\Big(\big((u-1)T + 1\big)k + s\Big) A\big((u-1)Tk + s\big) \times \dots \\ & \times A\big((2T-1)k + s\big) \dots A\big((T+2)k + s\big)A\big((T+1)k + s\big)A(Tk + s) \\ & \times A((T-1)k + s) \dots A(2k + s)A(k + s)A(s)x_s \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. $v = kr + s$ olarak alınır ise (3.1) sisteminin çözümü

$$x(n) = \prod_{i=0}^{r-1} A(ik+s) \left(\prod_{i=0}^{T-1} A(ik+s)\right)^u x_s$$

veya

$$x(n) = X_s(r)\big(X_s(T)\big)^u x_s$$

şeklinde ifade edilebilir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020). $k.$ mertebeden (3.1) periyodik katsayılı lineer denklem sisteminin Schur kararlı olması ile sistemin $\mathcal{X} = \{X_s(T) | s = 0,1,2, \dots, k-1\}$ matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olmasına denktir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020). Böylece, (3.1) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{X}$ matris ailesindeki her bir matrisin özdeğerlerinin birim diskin içine düşmesi gerekir yani $\forall\, s = 0,1,2, \dots, k-1$ için $|\lambda_i(X_s(T)| < 1$, $(i = 1,2, \dots, N)$ olmasıdır (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

(3.1) sisteminin; Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de tanımlanan Schur kararlılığın kalitesini belirleyen Schur kararlılık parametresini tanıtalım.

Lyapunov teoremine göre (3.1) sisteminin ($\mathcal{X}$ matris ailesindeki her bir matrisin) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $\forall\ s = 0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s(T)$ matrisinin

$$X_s^*(T)F_sX_s(T) - F_s + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$F_s = \sum_{j=0}^{\infty}\left(X_s^*(T)\right)^j(X_s(T))^j\ , F_s = F_s^* > 0$$

tek çözümüne sahip olmasıdır' olarak ifade edilebilir.

(3.1) sisteminin Schur kararlılığının parametresi;

$$\overline{\omega}_1(A,T) = max_{0\le s\le k-1}\|F_s\|,$$

şeklinde tanımlanmıştır (Çelik Kızılkan ve Duman 2020). Buna göre $\overline{\omega}_1(A,T) < \infty$ ise verilen sistem Schur kararlı, aksi takdirde Schur kararlı değildir ve $\overline{\omega}_1(A,T) = \infty$ olduğu kabul edilir.

3.1. Periyodik Katsayılı k. Mertebeden $x(n+k) = A(n)x(n)$ Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Hassasiyeti

Schur kararlılığının hassasiyetini gösteren süreklilik teoremlerini vermeden önce çalışma için gerekli olan bazı gösterimleri tanıtalım.

3.1.1. Semboller

Bu çalışmada kullanılan semboller aşağıda tanıtılmıştır.

- $\alpha = max_{0\le j\le k-1}\left\|\sum_{m=0}^{T-1}X_j{}^*(m)X_j(m)\right\|$
- $\beta_s = max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\|(1 + (T-1)max_{1\le i\le T-1}\|Q_s(i,0)\|)$
- $\gamma_s = (T-1)max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\|$
- $\mu_s = max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\| \times \begin{cases} max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\|; & max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\| \le 1 \\ (max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\|)^{T-2}; & max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\| > 1 \end{cases}$
- $Q_s(p,r) = \prod_{i=r}^{p-1} A(ik+s)$
- $\Psi_s(p,r) = \prod_{i=r}^{p-1} B(ik+s)$

- $\Delta^{s}= Y_s(T) - X_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1}\left(\prod_{j=i+1}^{T-1} A(jk+s)\right) B(ik+s)Y_s(i)$
- $\Delta_1^{s}= \sqrt{\|X_s(T)\|^2 + \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,T)}} - \|X_s(T)\|$
- $\Delta_2^{s}= max_{0\le i\le T-1}\|B(ik+s)\| \left(\beta_s + \gamma_s max_{1\le i\le T-1}\|\Psi_s(i,0)\| + \right.$

  $$\left. \mu_s \sum_{r=2}^{T-1}\left[\sum_{l=1}^{r-1}\frac{r!}{l!(r-l)!}\left(max_{0\le i\le r-1}\|B(ik+s)\|\right)^l\right]\right)$$
- $\Delta_3^{s}= \frac{\max\limits_{1\le i,j\le T}||Q_s(j,i)||(1+(T-1)\max\limits_{1\le i\le T-1}||X_s(i)||)}{1-(T-1)\max\limits_{1\le i,j\le T}||Q_s(j,i)||\max\limits_{1\le i\le T-1}||B(ik+s)||}\max\limits_{1\le i\le T-1}||B(ik+s)||$
- $\Delta_1^{s,*}= \sqrt{||X_s(T)||^2 + \frac{\omega^* - \overline{\omega}_1(A,T)}{\omega^*\overline{\omega}_1(A,T)}} - ||X_s(T)||$

Tablo 3.1. Bazı Semboller

Bu bölümde Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de $k.$ mertebeden periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için verilen süreklilik teoremlerinin ispatlarının nasıl yapıldığı açıklanacaktır. Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de verilen süreklilik teoremlerini verebilmek için önce $k.$ mertebeden periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi (3.1) sisteminin pertürbe sistemini tanıtalım.

$B(n) = B(n+T),\ N$ boyutlu T periyotlu karesel matris olmak üzere (3.1) periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin pertürbe sistemi olarak adlandırılan

$$y(n+k) = \big(A(n) + B(n)\big)y(n),\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

sistemini ele alalım. (3.2) sistemi Schur kararlı ise

$$Y_s^*(T)\tilde{F}_s Y_s(T) - \tilde{F}_s + I = 0$$

Lyapunov denklemini sağlayan

$$\tilde{F}_s = \sum_{j=0}^{\infty}(Y_s^*(T))^j(Y_s(T))^j,\ \tilde{F}_s = \tilde{F}_s^* > 0$$

çözümü var ve $\overline{\omega}_1(A+B,T) = max_{0\le s\le k-1}\left\|\tilde{F}_s\right\|$ dir. (3.2) sisteminin Schur kararlı olması

$$\mathcal{Y} = \{Y_s(T)|\mathrm{s} = 0,1,2,\dots,\mathrm{k}-1\}$$

matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olmasına denktir. Burada $Y_s(T) = \prod_{i=0}^{T-1}[A(ik+s)+B(ik+s)]$ dır (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

Aşağıda verilen teoremler, Schur kararlı olan (3.1) sisteminin hangi pertürbeler altında Schur kararlı kaldığını, başka bir deyişle hangi $B(n)$ pertürbe matrisi için (3.2) sisteminin Schur kararlı kaldığını gösteren süreklilik teoremleridir.

Teorem 3.1. (3.1) k. mertebeden fark denklem sistemi Schur kararlı ($\varpi_1(A,T) < \infty$) olsun. Bu takdirde eğer, $B(n)$ matrisi için

$$\|\Delta^s\| < \Delta_1^s$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.2) sistemi de Schur kararlıdır. Burada Δ^s ve Δ_1^s sembolleri kısım 3.1.1. de tanıtıldığı gibidir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

İspat. Teorem 3.1; 1. mertebeden periyodik katsayılı (2.3) sistemi için Aydın ve ark. 2001'de verilen Teorem 2.3'ün k. mertebeden periyodik katsayılı (2.3) sistemine genişletilmesidir. Dolayısıyla sırasıyla $X(T)$ ve $Y(T)$ yerine $X_s(T)$ ve $Y_s(T)$ alınıp Aydın ve ark. 2001'de verilen Teorem 2.3'ün ispatını adım adım takip edilerek Teorem 3.1'in ispatı yapılabilir.

Gerçekten; Teorem 3.1'de verilen eşitsizlikten $\theta = 1 - (2\|X_s(T)\|\|Y_s(T)-X_s(T)\| + \|Y_s(T)-X_s(T)\|^2)\|F_s\| > 0$ olarak alalım.

(3.2) sisteminin fundamental matrisi $Y_s(n)$ ve w N boyutlu vektör,

$$Y_s\big((p+1)T\big) = Y_s(T)Y_s(pT) = \big[X_s(T) + \big(Y_s(T)-X_s(T)\big)\big]Y_s(pT),\ Y_s(pT) = Y_s(T)^{p+1}\ (p \geq 0)$$

olarak ifade edilebilir. Buradan

$$\langle F_sY_s\big((p+1)T\big)w, Y_s\big((p+1)T\big)w\rangle = \langle F_sY_s(pT)w, Y_s(pT)w\rangle - \langle Y_s(pT)w, Y_s(pT)w\rangle$$

$$+\langle\big[X_s^*(T)F_s\big(Y_s(T)-X_s(T)\big) + \big(Y_s(T)-X_s(T)\big)^*F_sX(T)$$

$$+\left(Y_s(T)-X_s(T)\right)^* F_s\left(Y_s(T)-X_s(T)\right)\big]Y_s(pT)w, Y_s(pT)w\rangle$$

yazılır. Böylece

$$\langle F_s Y_s\left((p+1)T\right)w, Y_s\left((p+1)T\right)w\rangle \leq (1-\frac{1-\left(2\|X_s(T)\|\|Y_s(T)-X_s(T)\|+\|Y_s(T)-X_s(T)\|^2\right)\|F_s\|}{\|F_s\|}\Big)$$

$$\times \langle F_s Y_s(pT)w, Y_s(pT)w\rangle$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğinin sağ tarafı p için arka arkaya iterasyon uygulandığında

$$\langle F_s Y_s(pT)w, Y_s(pT)w\rangle \leq \left(1-\frac{\theta}{\|F_s\|}\right)^p \langle F_s w, w\rangle$$

eşitsizliği elde edilir. F_s pozitif tanımlı olduğundan

$$p \to \infty \text{ için } \|Y_s(pT)w\| = \left\|\left(Y_s(T)\right)^p w\right\| \to 0$$

bulunur. Bunun anlamı (3.2) sisteminin $Y_s(T)$ matrisinin tüm öz değerlerinin birim diskin içinde olması, yani $\left|\lambda_i\left(Y_s(T)\right)\right| < 1,\ (i = 1, 2, \dots, N)$ dir. Dolayısıyla $Y_s(T)$ monodromi matrisi, dolayısıyla (3.2) pertürbe edilmiş periyodik katsayılı sistemi Schur kararlıdır.

Teorem 3.2. $\mathrm{s} = 0,1,2, \dots, \mathrm{k}-1$ için $X_s(T)$ ve $Y_s(T)$ sırasıyla, (3.1) ve (3.2) sistemlerinin monodromi matrisleri olsun. Bu takdirde,

$$\left|\left|\Delta^s\right|\right| < \Delta_2^s$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Δ^s ve Δ_2^s sembolleri kısım 3.1.1. de tanıtıldığı gibidir. Ayrıca, eğer (3.1) sistemi Schur kararlı ise bu takdirde $\Delta_2^s < \Delta_1^s$ eşitsizliğini sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisi için (3.2) pertürbe sistemi Schur kararlıdır (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

Teorem 3.3. $s = 0,1,2, \dots, \mathrm{k} - 1$ için $X_s(T)$ ve $Y_s(T)$ sırasıyla, (3.1) ve (3.2) sistemlerinin monodromi matrisleri ve

$$(T-1) \max_{1 \le i,j \le n} ||Q_s(i,j)|| \max_{1 \le i \le n-1} \left||B(ik+s)|\right| < 1$$

olmak üzere

$$\left||\Delta^s|\right| < \Delta_3^s$$

eşitsizliği doğrudur. Burada Δ^s ve Δ_3^s sembolleri kısım 3.1.1. de tanıtıldığı gibidir Ayrıca, eğer (3.1) sistemi Schur kararlı ise bu takdirde

$$\|B(n)\| < \frac{\Delta_1^s}{max_{1 \le i,j \le T} \|Q(i,j)\| [1 + (T-1)(max_{1 \le i \le T-1} \|X_s(i)\| + \Delta_1^s}$$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisleri için (3.2) sistemi de Schur kararlıdır. Burada Δ_1^sve Δ_3^s, kısım 3.1.1. de tanımlandığı gibidir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

Teorem 3.4. (3.1) sistemi Schur kararlı ($\overline{\omega}_1(A,T) < \infty$) olsun.

$$\|B(n)\| < \frac{\varDelta_1^s}{max_{1 \le i,j \le T} \|Q_s(i,j)\| [1 + (T-1)(max_{1 \le i \le T-1} \|X_s(i)\| + \varDelta_1^s)]}$$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe marisi için,

$$\overline{\omega}_1(A+B,T) \le \frac{\overline{\omega}_1(A,T)}{1-(2\left||X_s(T)|\right| + \Delta_3^s)\Delta_3^s \overline{\omega}_1(A,T)}; \left||\tilde{F}_s - F_s|\right| \le \frac{(2\left||X_s(T)|\right| + \Delta_3^s)\Delta_3^s \overline{\omega}_1(A,T)^2}{1-(2\left||X_s(T)|\right| + \Delta_3^s)\Delta_3^s \overline{\omega}_1(A,T)}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada $\varDelta_1^s$ ve $\varDelta_3^s$ kısım 3.1.1 de tanımlandığı gibidir (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

Not 3.1. $\varDelta_3^s \le \varDelta_1^s$ şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisi için Teorem 3.1'in ifadesindeki eşitsizlikler $\varDelta_3^s$ için de geçerlidir.

$$\varDelta_1^* = \sqrt{\|X_s(T)\|^2 + \frac{\omega^* - \overline{\omega}_i(A,T)}{\omega^* \overline{\omega}_i(A,T)}} - \|X_s(T)\|$$

olmak üzere Teorem 3.2 ve 3.3'ün ω^*-Schur kararlığa uygulaması niteliğinde olan teoremi verelim.

Teorem 3.5. (3.1) sistemi ω^*-Schur kararlı bir sistem $(\overline{\omega}_1(A,T) \leq \omega^*$ olmak üzere

$\boldsymbol{i})$ $\Delta_2^S \leq \Delta_1^{S,*}$

$\boldsymbol{ii})$ $\|B(n)\| \leq \dfrac{\Delta_1^{S,*}}{\max\limits_{1\leq j,r\leq T}||Q_S(j,r)||[(1+(T-1)\left(\max\limits_{1\leq r\leq T-1}||X_S(r)||+\Delta_1^{S,*}\right)]}$

şartını sağlayan $B(n)$ pertürbe matrisi için (3.2) sistemi de ω^*-Schur kararlıdır (Çelik Kızılkan ve Duman 2020).

Not 3.2. Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de verilen Teorem 3.2. – 3.5.'in ispatları Teorem 3.1'in ispatını verdiğimiz gibi 1. mertebeden periyodik katsayılı (2.3) sistemi için Duman ve Aydın 2011, Duman ve ark. 2016'da verilen Teoremlerin ispatlarında sırasıyla $X(T)$ ve $Y(T)$ yerine $X_S(T)$ ve $Y_S(T)$ alınıp adım adım takip edilerek yapılabilir.

Not 3.3. (3.1) sisteminde $k = 1$ olması durumunda Teorem 3.1. - 3.5., Aydın ve ark. 2001, Duman ve Aydın 2011, Duman ve ark. 2016'da bulunan (2.3) sistemi için yazılan ilgili teoremlere dönüşmektedir. Ayrıca $k = 1$ ve $T = 1$ ise $\overline{\omega}_1(A,T) = \omega_1(A,T) = \omega(A)$ yani bu durumda (3.1) sistemde 1. mertebeden sabit katsayılı sistem ve Teorem 3.1 - 3.5. ise 1. mertebeden sabit katsayılı sistem içi yazılan sonuçlar ile örtüşmektedir. Bu ise Teorem 3.1. – 3.5.'in literatür bilgisi ile olan uyumunu göstermektedir.

3.2. $\boldsymbol{x(n+k) = A\,(n)x(n)}$ Sisteminin Çözümünün Üst Sınırı

Bu bölümde Schur kararlı k. mertebeden $x(n+k) = A(n)x(n)$ periyodik katsayılı fark denklem sisteminin çözümünün üst sınırı Çelik Kızılkan ve Duman 2020'de tanımlanan $\overline{\omega}_1(A,T)$ kararlılık parametresine bağlı olarak bulunacaktır. Bulunan üst sınır literatürde bulunmamakta ve uygulama alanlarında sistemi çözmeden sistemin davranışı hakkında bilgi verdiği için önemlidir.

Akın ve Bulgak 1998'de $x(n+1) = Ax(n)$ sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi için verilen üst sınırının ispatı $x(n+k) = A(n)x(n)$ sistemi için adım adım takip edilerek Teorem 3.6'da verilen çözümün üst sınırı elde edilmiştir.

Teorem 3.6. $n = ukT + v, u \in \mathbb{Z}$, $0 \le v \le kT - 1, 0 \le s \le k - 1,\ s, v \in \mathbb{Z}$ ve $r = \frac{v-s}{k}$ olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümünün üst sınırı

$$\|x(n)\| \le max_{0 \le s \le k-1} \|X_s(r)\| \sqrt{\overline{\omega}_1(A,T)} \left(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,T)}\right)^{\frac{u}{2}} max_{0 \le s \le k-1} \|x_s\|$$

ve

$$\|x(n)\| \le max_{0 \le s \le k-1} \|X_s(r)\| \sqrt{\overline{\omega}_1(A,T)} e^{-\frac{u}{2\overline{\omega}_1(A,T)}} max_{0 \le s \le k-1} \|x_s\|$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. Şimdi Akın ve Bulgak 1998'de $x(n+1) = Ax(n)$ sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi için verilen üst sınırının ispatını $x(n+k) = A(n)x(n)$ sistemi için adım adım takip ederek yapalım.

(3.1) Cauchy problemi Schur kararlı ($\overline{\omega}_1(A,T) < \infty$) olsun. Bu durumda $\forall\ \mathrm{s} = 0,1,2, \dots, \mathrm{k} - 1$ için

$$X_s^*(T) F_s X_s(T) - F_s + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin simetrik pozitif tanımlı bir $F_s = F_s^* > 0$ çözümü vardır. $\forall\ \mathrm{s} = 0,1,2, \dots, \mathrm{k} - 1$ için (3.1) sistemi Schur kararlı iken Schur kararlı olan

$$w(n+1) = X_s(T) w(n) \qquad (3.3)$$

sabit katsayılı fark denklem sistemini ele alalım. (3.3) sistemi için

$$\big(F_s w(n+1), w(n+1) - \big(F_s w(n), w(n)\big)\big) = \big(\big(X_s^*(T) F_s X_s(T)\big) w(n), w(n)\big)$$

olduğundan

$$\big(F_s w(n+1), w(n+1) - \big(F_s w(n), w(n)\big)\big) = -\big(w(n), w(n)\big)$$

ifadesi sağlanır. $F_s = F_s^* > 0$ simetrik pozitif tanımlı matris olduğundan $0 < \lambda_{min}(F_s) = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_N = \lambda_{max}(F_s)$ ve Rayleigh Ritz oranına göre

$$\lambda_{min}(F_s)\big(w(n), w(n)\big) \le \big(F_s w(n), w(n)\big) \le \lambda_{max}(F_s)\big(w(n), w(n)\big)$$

dir. Buradan

$$\big(w(n), w(n)\big) \geq \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\big(F_s w(n), w(n)\big)$$

yazabiliriz. Böylece

$$\Big(F_s w(n+1), w(n+1) - \big(F_s w(n), w(n)\big)\Big) \leq -\frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\big(F_s w(n), w(n)\big)$$

buradan

$$\big(F_s w(n+1), w(n+1)\big) \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)\big(F_s w(n), w(n)\big)$$

yazabiliriz. İterasyon uygularsak

$$\big(F_s w(n+1), w(n+1)\big) \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{n+1}\big(F_s w(0), w(0)\big)$$

Rayleigh Ritz oranından

$$\lambda_{min}(F_s)\big(w(n), w(n)\big) \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{n}\big(F_s w(0), w(0)\big)$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{n}\lambda_{max}(F_s)\big(w(0), w(0)\big)$$

elde ederiz. Buradan

$$\|w(n)\|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(F_s)}{\lambda_{min}(F_s)}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{n}\|w(0)\|^2$$

ve

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(F_s)}{\lambda_{min}(F_s)}}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{\frac{n}{2}}\|w(0)\|$$

yazabiliriz. $F_s = \sum_{j=0}^{\infty}\big(X_s{}^*(T)\big)^j\big(X_k(T)\big)^j$ olduğundan

$$\big(F_s w(n), w(n)\big) = \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty}\big(X_s{}^*(T)\big)^j\big(X_s(T)\big)^j\right)w(n), w(n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\big(X_s{}^*(T)\big)^j\big(X_s(T)\big)^j w(n), w(n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\left(X_s(T)\right)^j w(n), \left(X_s(T)\right)^j w(n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\left(X_s(T)\right)^j w(n)\right\|^2 = \|w(n)\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left(X_s(T)\right)^j w(n)\right\|^2$$

olup buradan

$$\frac{(F_s w(n), w(n))}{(w(n), w(n))} > 1$$

yazma imkanı tanır. Buradan $\lambda_{max}(F_s) = max\frac{(F_s w(n), w(n))}{(w(n), w(n))} > 1$ ve $\lambda_{min}(F_s) = min\frac{(F_s w(n), w(n))}{(w(n), w(n))} > 1$ dolayısıyla $0 < \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)} < 1$ dir. Böylece

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}}$$

ve

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^n \leq e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(F_s)}}$$

olur. Böylece

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(F_s)}{\lambda_{min}(F_s)}}\, e^{-\frac{n}{2\lambda_{max}(F_s)}}\|w(0)\|$$

yazabiliriz. $\lambda_{min}(F_s) = min\frac{(F_s w(n), w(n))}{(w(n), w(n))} > 1$ olduğunu kullanırsak

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\lambda_{max}(F_s)}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{max}(F_s)}\right)^{\frac{n}{2}}\|w(0)\|$$

ve

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\lambda_{max}(F_s)}\, e^{-\frac{n}{2\lambda_{max}(F_s)}}\|w(0)\|$$

elde ederiz. $F_s = F_s^* > 0$ simetrik pozitif tanımlı matris olduğundan $\|F_s\| = \lambda_{max}(F_s)$ dir. Böylece

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\|F_s\|}\left(1 - \frac{1}{\|F_s\|}\right)^{\frac{n}{2}}\|w(0)\| \text{ ise } \frac{\|w(n)\|}{\|w(0)\|} \leq \sqrt{\|F_s\|}\left(1 - \frac{1}{\|F_s\|}\right)^{\frac{n}{2}}$$

ve

$$\|w(n)\| \leq \sqrt{\|F_s\|}e^{-\frac{n}{2\|F_s\|}}\|w(0)\| \text{ ise } \frac{\|w(n)\|}{\|w(0)\|} \leq \sqrt{\|F_s\|}e^{-\frac{n}{2\|F_s\|}}$$

yazılabilir. $w(n) = \left(X_s(T)\right)^n w(0)$, buradan

$$\left\|\left(X_s(T)\right)^n\right\| = max_{\|w(0)\|} \frac{\left\|\left(X_s(T)\right)^n w(0)\right\|}{\|w(0)\|}$$

olduğundan

$$\left\|\left(X_s(T)\right)^n\right\| \leq \sqrt{\|F_s\|}\left(1 - \frac{1}{\|F_s\|}\right)^{\frac{n}{2}}$$

ve

$$\left\|\left(X_s(T)\right)^n\right\| \leq \sqrt{\|F_s\|}e^{-\frac{n}{2\|F_s\|}}$$

elde edilir. $n = ukT + v, u \in \mathbb{Z},\ 0 \leq v \leq kT - 1, 0 \leq s \leq k - 1,\ s, v \in \mathbb{Z}$ ve $r = \frac{v-s}{k}$ olmak üzere

$$x(n) = X_s(r)\left(X_s(T)\right)^u x_s$$

olduğundan

$$\|x(n)\| \leq max_{0\leq s\leq k-1}\|X_s(r)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,T)}\left(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,T)}\right)^{\frac{u}{2}} max_{0\leq s\leq k-1}\|x_s\|$$

ve

$$\|x(n)\| \leq max_{0\leq s\leq k-1}\|X_s(r)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,T)}e^{-\frac{u}{2\overline{\omega}_1(A,T)}} max_{0\leq s\leq k-1}\|x_s\|$$

elde edilir.

4. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde Schur kararlı k. mertebeden periyodik katsayılı fark denklem sisteminin çözümünün Teorem 3.6 ile verilen yeni üst sınır ile ilgili nümerik örnekler yapılmıştır.

Örnek 4. 1. $x(n+3) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix} x(n), x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

periyodik katsayılı lineer Cauchy problemini ele alalım.

Verilen sistem için $\overline{\omega}_1(A,2)$ parametresini hesaplayalım.

$k=3$ ve $T=2$ olduğundan $0 \le s \le 2$ olur. $X_s(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(ik+s)$ olduğundan

$s=0$ için

$$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X_0(2) = A(3)A(0) = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0 \\ 1 & -0.25 \end{pmatrix}$$

olur. $X_0^*(2)F_0X_0(2) - F_0 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_0 = \begin{pmatrix} 2.63849 & -0.23379 \\ -0.23379 & 1.06667 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_0\| = 2.67252$$

olarak bulunur.

$s=1$ için

$$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$X_1(2) = A(0)A(1) = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0 \\ 5 & -0.25 \end{pmatrix}$$

olur. $X_1^*(2)F_1X_1(2) - F_1 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_1 = \begin{pmatrix} 30.8536 & -1.16895 \\ -1.16895 & 1.06667 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_1\| = 30.8994$$

olarak bulunur.

$s = 2$ için

$$X_2(1) = A(2) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X_2(2) = A(5)A(2) = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0 \\ 1 & -0.25 \end{pmatrix}$$

olur. $X_2^*(2)F_2X_2(2) - F_2 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2.63849 & -0.23379 \\ -0.23379 & 1.06667 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_2\| = 2.67252$$

olarak bulunur. Böylece verilen sistemin Schur kararlılık parametresi

$$\overline{\omega}_1(A,2) = max_{0 \le s \le 2}\|F_s\| = 30.8994$$

olarak hesaplanır. $\overline{\omega}_1(A,2) < \infty$ olduğundan verilen 3. mertebeden periyodik katsayılı lineer sistem Schur kararlıdır.

Şimdi 3. bölümde Teorem 3.6 ile verilen yeni üst sınırı verilen örnek için hesaplayalım.

$n = 1$ için $u = 0,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(1)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(1)\| \le max_{0 \le s \le 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}\left(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)}\right)^{\frac{0}{2}} max_{0 \le s \le 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0 \le s \le 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0 \le s \le 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(1)\| = 1.41421 \le 7.86122$$

olarak bulunur.

$n = 2$ için $u = 0,\ v = 2,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(2)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(2)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(2)\| = 1 \leq 7.86122$$

olarak bulunur.

$n = 3$ için $u = 0,\ v = 3,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(3)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(3)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_0(1)\| = 4.09928.$

$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & -0.5 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_1(1)\| = 4.09928.$

$X_2(1) = A(2) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_2(1)\| = 4.09928.$

Bu durumda $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(3)\| = 4.06971 \leq 32.2253$$

olarak bulunur.

$n = 4$ için $u = 0,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(4)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(4)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(4)\| = 3.57946 \leq 32.2253$$

olarak bulunur.

$n = 5$ için $u = 0,\ v = 5,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(5)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(5)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(5)\| = 0.5 \leq 32.2253$$

olarak bulunur.

$n = 6$ için $u = 1,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(6)$'nın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(6)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(6)\| = 1.14735 \leq 7.73295$$

olarak bulunur.

$n = 7$ için $u = 1,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(7)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(7)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(7)\| = 4.78319 \leq 7.73295$$

olarak bulunur.

$n = 8$ için $u = 1,\ v = 2,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(8)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(8)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(8)\| = 0.25 \leq 7.73295$$

olarak bulunur.

$n = 9$ için $u = 1,\ v = 3,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(9)$'un çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(9)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(9)\| = 2.78217 \leq 31.6995$$

olarak bulunur.

$n = 10$ için $u = 1,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(10)$'un çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(10)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(10)\| = 0.440005 \leq 31.6995$$

olarak bulunur.

$n = 11$ için $u = 1,\ v = 5,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(11)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(11)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(11)\| = 0.125 \leq 31.6995$$

olarak bulunur.

$n = 12$ için $u = 2,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(12)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(12)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(12)\| = 0.444712 \leq 7.60679$$

olarak bulunur.

$n = 13$ için $u = 2,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(13)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(13)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(13)\| = 1.65552 \leq 7.60679$$

olarak bulunur.

$n = 14$ için $u = 2,\ v = 2,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(14)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(14)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(14)\| = 0.0625 \leq 7.60679$$

olarak bulunur.

$n = 15$ için $u = 2,\ v = 3,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(15)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(15)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(15)\| = 1.44154 \leq 31.1824$$

olarak bulunur.

$n = 16$ için $u = 2,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(16)$'nın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(16)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(16)\| = 0.51503 \leq 31.1824$$

olarak bulunur.

$n = 17$ için $u = 2,\ v = 5,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(17)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(17)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(17)\| = 0.03125 \leq 31.1824$$

olarak bulunur.

$n = 28$ için $u = 4,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(28)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(28)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{4}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(28)\| = 0.127041 \leq 30.1732$$

olarak bulunur.

$n = 32$ için $u = 5,\ v = 2,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(32)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(32)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = X_2(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(32)\| = 0.000976 \leq 7.24052$$

olarak bulunur.

$n = 40$ için $u = 6,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(40)$'ın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(40)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{6}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 4.09928$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1.41421, \|x_2\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 1.41421.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(40)\| = 0.00005 \leq 29.1967$$

olarak bulunur.

Yukarıda elde ettiğimiz değerleri bir tablo ile gösterelim.

n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**	n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**
1	1.41421	7.86122	**11**	0.125	31.6995
2	1	7.86122	**12**	0.444712	7.60679
3	4.06971	32.2253	**13**	1.65552	7.60679
4	3.57946	32.2253	**14**	0.0625	7.60679
5	0.5	32.2253	**15**	1.44154	31.1824
6	1.14735	7.73295	**16**	0.51503	31.1824
7	4.78319	7.73295	**17**	0.03125	31.1824
8	0.25	7.73295	**28**	0.127041	30.1732
9	2.78217	31.6995	**32**	0.000976	7.24052
10	0.440005	31.6995	**40**	0.00005	29.1967

Örnek 4.2. $x(n+2) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} x(n), x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

periyodik katsayılı lineer Cauchy problemini ele alalım.

Verilen sistem için $\overline{\omega}_1(A, 3)$ parametresini hesaplayalım.

$k = 2$ ve $T = 3$ olduğundan $0 \leq s \leq 1$ olur. $X_s(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(ik + s)$ olduğundan

$s = 0$ için

$$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$X_0(2) = A(2)A(0) = \begin{pmatrix} -0.29 & -0.07 \\ 0.42 & 0.37 \end{pmatrix}$$

$$X_0(3) = A(4)A(2)A(0) = A(1)A(2)A(0) = \begin{pmatrix} 0.439 & 0.294 \\ 0.081 & 0.127 \end{pmatrix}$$

olur. $X_0^*(3)F_0X_0(3) - F_0 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1.26476 & 0.190111 \\ 0.190111 & 1.14194 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_0\| = 1.40313$$

olarak bulunur.

$s = 1$ için

$$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$X_1(2) = A(3)A(1) = A(0)A(1) = \begin{pmatrix} -0.29 & 0.98 \\ -0.03 & 0.37 \end{pmatrix}$$

$$X_1(3) = A(5)A(3)A(1) = A(2)A(0)A(1) = \begin{pmatrix} 0.124 & -0.231 \\ -0.099 & 0.442 \end{pmatrix}$$

olur. $X_1^*(3)F_1X_1(3) - F_1 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1.03129 & -0.0953836 \\ -0.093836 & 1.3354 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_1\| = 1.36284$$

olarak bulunur. Böylece verilen sistemin Schur kararlılık parametresi

$$\bar{\omega}_1(A,3) = max_{0\leq s\leq 1}\|F_s\| = 1.40313$$

olarak hesaplanır. $\bar{\omega}_1(A,3) < \infty$ olduğundan verilen 3. mertebeden periyodik katsayılı lineer sistem Schur kararlıdır.

Şimdi 3. bölümde Teorem 3.6 ile verilen yeni üst sınırı verilen örnek için hesaplayalım.

$n = 0$ için $u = 0,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(0)$'ın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(0)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\bar{\omega}_1(A,3)}(1 - \frac{1}{\bar{\omega}_1(A,3)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(0)\| = 1 \leq 1.18454$$

olarak bulunur.

$n = 1$ için $u = 0,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(1)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(1)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\bar{\omega}_1(A,3)}(1 - \frac{1}{\bar{\omega}_1(A,3)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(1)\| = 1 \leq 1.18454$$

olarak bulunur.

$n = 2$ için $u = 0,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(2)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(2)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1 - \frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_0(1)\| = 1.31111.$

$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_1(1)\| = 0.878836.$

Bu durumda $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.31111;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(2)\| = 1.04403 \leq 1.55306$$

olarak bulunur.

$n = 3$ için $u = 0,\ v = 3,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(3)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(3)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1 - \frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.31111$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(3)\| = 0.806226 \leq 1.55306$$

olarak bulunur.

$n = 4$ için $u = 0,\ v = 4,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 2$ olur. $x(4)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(4)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(2) = A(2)A(0) = \begin{pmatrix} -0.29 & -0.07 \\ 0.42 & 0.37 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_0(1)\| = 0.621774$.

$X_1(2) = A(3)A(1) = A(0)A(1) = \begin{pmatrix} -0.29 & 0.98 \\ -0.03 & 0.37 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_1(1)\| = 1.08496$.
Bu durumda $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\| = 1.08496$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$ olur.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(4)\| = 0.510392 \leq 1.28518$$

olarak bulunur.

$n = 5$ için $u = 0,\ v = 5,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 2$ olur. $x(5)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(5)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{0}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\| = 1.08496$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(5)\| = 0.967988 \leq 1.28518$$

olarak bulunur.

$n = 6$ için $u = 1,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(6)$'nın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(6)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(6)\| = 0.44641 \le 0.634925$$

olarak bulunur.

$n = 7$ için $u = 1,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(7)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(7)\| \le max_{0\le s\le 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1 - \tfrac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\le s\le 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(7)\| = 0.462819 \le 0.634925$$

olarak bulunur.

$n = 8$ için $u = 1,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(8)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(8)\| \le max_{0\le s\le 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1 - \tfrac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\le s\le 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\le s\le 1}\|X_s(1)\| = 1.31111$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(8)\| = 0.522156 \le 0.832457$$

olarak bulunur.

$n = 9$ için $u = 1,\ v = 3,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(9)$'un çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(9)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.31111$olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(9)\| = 0.406703 \leq 0.832457$$

olarak bulunur.

$n = 10$ için $u = 1,\ v = 4,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 2$ olur. $x(10)$'un çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(10)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\| = 1.08496$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(10)\| = 0.252249 \leq 0.688868$$

olarak bulunur.

$n = 11$ için $u = 1,\ v = 5,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 2$ olur. $x(11)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(11)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,3)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\| = 1.08496$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(11)\| = 0.487677 \leq 0.688868$$

olarak bulunur.

$n = 12$ için $u = 2,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(12)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(12)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{2}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(12)\| = 0.221335 \leq 0.340327$$

olarak bulunur.

$n = 13$ için $u = 2,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(13)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(13)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{2}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(13)\| = 0.23494 \leq 0.340327$$

olarak bulunur.

$n = 14$ için $u = 2,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(14)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(14)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{2}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.31111$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(14)\| = 0.26221 \leq 0.446206$$

olarak bulunur.

$n = 15$ için $u = 2,\ v = 3,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(15)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(15)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{2}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.31111$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(15)\| = 0.20626 \leq 0.446206$$

olarak bulunur.

$n = 16$ için $u = 2,\ v = 4,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 2$ olur. $x(16)$'nın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(16)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(2)\| = 1.08496$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(16)\| = 0.126494 \leq 0.369241$$

olarak bulunur.

$n=17$ için $u=2,\ v=5,\ s=1$ olur. $r=\frac{v-s}{k}=2$ olur. $x(17)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(17)\| \le max_{0\le s\le 1}\|X_s(2)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{1}{2}}max_{0\le s\le 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\le s\le 1}\|X_s(2)\|=1.08496$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\|=1, \|x_1\|=1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\|=1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(17)\|=0.258765 \le 0.369241$$

olarak bulunur.

$n=24$ için $u=4,\ v=0,\ s=0$ olur. $r=\frac{v-s}{k}=0$ olur. $x(24)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(24)\| \le max_{0\le s\le 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{2}{2}}max_{0\le s\le 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0)=X_1(0)=I$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|X_s(0)\|=1;$

$\|x_0\|=1, \|x_1\|=1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\|=1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(24)\|=0.0557701 \le 0.097785$$

olarak bulunur.

$n=32$ için $u=5,\ v=2,\ s=0$ olur. $r=\frac{v-s}{k}=1$ olur. $x(32)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(32)\| \le max_{0\le s\le 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{5}{2}}max_{0\le s\le 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\le s\le 1}\|X_s(1)\|=1.31111$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\|=1, \|x_1\|=1$ olduğundan $max_{0\le s\le 1}\|x_s\|=1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(32)\| = 0.0332542 \leq 0.687157$$

olarak bulunur.

$n = 43$ için $u = 7,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(43)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(43)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,3)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,3)})^{\frac{7}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(43)\| = 0.0081652 \leq 0.0150579$$

olarak bulunur.

Yukarıda elde ettiğimiz değerleri bir tablo ile gösterelim.

n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**	n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**
1	1	1.18454	**11**	0.487677	0.688868
2	1.04403	1.55306	**12**	0.221335	0.340327
3	0.806226	1.55306	**13**	0.23494	0.340327
4	0.510392	1.28518	**14**	0.26221	0.446206
5	0.967988	1.28518	**15**	0.20626	0.446206
6	0.44641	0.634925	**16**	0.126494	0.369241
7	0.462819	0.634925	**17**	0.258765	0.369241
8	0.522156	0.832457	**24**	0.0557701	0.097785
9	0.406703	0.832457	**32**	0.0332542	0.687157
10	0.252249	0.688868	**43**	0.0081652	0.0150579

Örnek 4.3. $x(n+2) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} x(n), x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

periyodik katsayılı lineer Cauchy problemini ele alalım.

Verilen sistem için $\varpi_1(A,2)$ parametresini hesaplayalım.

$k = 2$ ve $T = 2$ olduğundan $0 \leq s \leq 1$ olur. $X_s(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(ik+s)$ olduğundan

$s = 0$ için

$$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$X_0(2) = A(2)A(0) = A(0)A(0) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.02 & 0.09 \\ 1.2 & 0.59 & 0.65 \\ 0.2 & 0.22 & 0.26 \end{pmatrix}$$

olur. $X_0^*(2)F_0X_0(2) - F_0 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_0 = \begin{pmatrix} 11.5945 & 4.89987 & 6.1834 \\ 4.89987 & 3.2937 & 2.88179 \\ 6.1834 & 2.88179 & 4.63558 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_0\| = 17.4869$$

olarak bulunur.

$s = 1$ için

$$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$X_1(2) = A(3)A(1) = A(1)A(1) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.02 & -0.01 \\ 0.2 & 0.59 & 0.65 \\ 0.2 & 0.22 & 0.26 \end{pmatrix}$$

olur. $X_1^*(2)F_1X_1(2) - F_1 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1.60145 & 0.837561 & 0.917608 \\ 0.837561 & 2.38787 & 1.53239 \\ 0.917608 & 1.53239 & 2.69339 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_1\| = 4.59604$$

olarak bulunur. Böylece verilen sistemin Schur kararlılık parametresi

$\overline{\omega}_1(A,2) = max_{0\leq s\leq 1}\|F_s\| = 17.4869$ olur.

olarak hesaplanır. $\overline{\omega}_1(A,2) < \infty$ olduğundan verilen 3. mertebeden periyodik katsayılı lineer sistem Schur kararlıdır.

Şimdi 3. bölümde Teorem 3.6 ile verilen yeni üst sınırı verilen örnek için hesaplayalım.

$n = 1$ için $u = 0,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(1)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(1)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}\left(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)}\right)^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(1)\| = 1 \leq 4.18173$$

olarak bulunur.

$n = 2$ için $u = 0,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(2)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(2)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}\left(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)}\right)^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_0(1)\| = 1.40893$

$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_1(1)\| = 1.38727$

Bu durumda $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.40893$.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(2)\| = 1.11803 \leq 5.89177$$

olarak bulunur.

$n = 3$ için $u = 0,\ v = 3,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(3)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(3)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.40893$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(3)\| = 0.648074 \leq 5.89177$$

olarak bulunur.

$n = 4$ için $u = 1,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(4)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(4)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(4)\| = 1.24197 \leq 4.06041$$

olarak bulunur.

$n = 5$ için $u = 1,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(5)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(5)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(5)\| = 0.700143 \leq 4.06041$$

olarak bulunur.

$n = 11$ için $u = 2,\ v = 3,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(11)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(11)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{1}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.40893$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(11)\| = 0.534135 \leq 5.55485$$

olarak bulunur.

$n = 12$ için $u = 3,\ v = 0,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(12)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(12)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1-\frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{3}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1;$

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(12)\| = 1.102 \leq 3.82821$$

olarak bulunur.

$n = 18$ için $u = 4,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(18)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(18)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{4}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(1)\| = 1.40893$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$ olur.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(18)\| = 0.965693 \leq 5.23719$$

olarak bulunur.

$n = 25$ için $u = 6,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(25)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(25)\| \leq max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{6}{2}}max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 1, \|x_1\| = 1$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|x_s\| = 1$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(25)\| = 0.29848 \leq 3.50457$$

olarak bulunur.

Yukarıda elde ettiğimiz değerleri bir tablo ile gösterelim.

n	$\|x(n)\|$	Üst Sınır (Teorem 3.6)	n	$\|x(n)\|$	Üst Sınır (Teorem 3.6)
1	1	4.18173	**11**	0.534135	5.55485
2	1.11803	5.89177	**12**	1.102	3.82821
3	0.648074	5.89177	**18**	0.965693	5.23719
4	1.24197	4.06041	**25**	0.29848	3.50457
5	0.700143	4.06041			

Örnek 4.4. $x(n+3) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} x(n),\ x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ periyodik katsayılı lineer Cauchy problemini ele alalım.

Verilen sistem için $\overline{\omega}_1(A,2)$ parametresini hesaplayalım.

$k = 3$ ve $T = 2$ olduğundan $0 \leq s \leq 2$ olur. $X_s(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(ik+s)$ olduğundan

$s = 0$ için

$$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X_0(2) = A(3)A(0) = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.15 \\ 0.28 & 0.24 \end{pmatrix}$$

olur. $X_0^*(2)F_0X_0(2) - F_0 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1.08553 & 0.0766556 \\ 0.0766556 & 1.08118 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_0\| = 1.15994$$

olarak bulunur.

$s = 1$ için

$$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X_1(2) = A(0)A(1) = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.35 \\ -0.12 & 0.24 \end{pmatrix}$$

olur. . $X_1^*(2)F_1X_1(2) - F_1 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1.01902 & -0.049293 \\ -0.049293 & 1.18479 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_1\| = 1.19834$$

olarak bulunur.

$s = 2$ için

$$X_2(1) = A(2) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X_2(2) = A(5)A(2) = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.15 \\ 0.28 & 0.24 \end{pmatrix}$$

olur. $X_2^*(2)F_2X_2(2) - F_2 + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1.08553 & 0.0766556 \\ 0.0766556 & 1.08118 \end{pmatrix} \text{ ve } \|F_2\| = 1.15994$$

olarak bulunur. Böylece verilen sistemin Schur kararlılık parametresi

$$\overline{\omega}_1(A,2) = max_{0\le s\le 2}\|F_s\| = 1.19834$$

olarak hesaplanır. $\overline{\omega}_1(A,2) < \infty$ olduğundan verilen 3. mertebeden periyodik katsayılı lineer sistem Schur kararlıdır.

Şimdi 3. bölümde Teorem 3.6 ile verilen yeni üst sınırı verilen örnek için hesaplayalım.

$n = 1$ için $u = 0,\ v = 1,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(1)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(1)\| \le max_{0\le s\le 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}\left(1 - \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)}\right)^{\frac{0}{2}} max_{0\le s\le 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\le s\le 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\le s\le 2}\|x_s\| = 5$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(1)\| = 5 \leq 5.47344$$

olarak bulunur.

$n = 2$ için $u = 0,\ v = 2,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(2)$'nin çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(2)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1 - \tfrac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(2)\| = 1.41421 \leq 5.47344$$

olarak bulunur.

$n = 3$ için $u = 0,\ v = 3,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(3)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(3)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\overline{\omega}_1(A,2)}(1 - \tfrac{1}{\overline{\omega}_1(A,2)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(1) = A(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_0(1)\| = 0.827895.$

$X_1(1) = A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_1(1)\| = 0.728202.$

$X_2(1) = A(2) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$ olduğundan $\|X_2(1)\| = 0.827895.$

Bu durumda $max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 0.827895$;

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5.$

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(3)\| = 2.86531 \leq 4.53143$$

olarak bulunur.

$n = 4$ için $u = 0,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(4)$'ün çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(4)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1 - \frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{0}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 0.827895$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(4)\| = 2.06155 \leq 4.53143$$

olarak bulunur.

$n = 8$ için $u = 1,\ v = 2,\ s = 2$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 0$ olur. $x(8)$'in çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(8)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(0)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1 - \frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{1}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$X_0(0) = X_1(0) = I$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 1}\|X_s(0)\| = 1$;

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(8)\| = 0.557136 \leq 2.22677$$

olarak bulunur.

$n = 16$ için $u = 2,\ v = 4,\ s = 1$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(16)$'nın çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(16)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1 - \frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{2}{2}} max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 0.827895$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(16)\| = 0.0960802 \leq 4.53143$$

olarak bulunur.

$n = 39$ için $u = 6,\ v = 3,\ s = 0$ olur. $r = \frac{v-s}{k} = 1$ olur. $x(39)$'un çözümünün üst sınırını bulalım. Teorem 3.6'dan

$$\|x(39)\| \leq max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\|\sqrt{\varpi_1(A,2)}(1-\frac{1}{\varpi_1(A,2)})^{\frac{6}{2}}max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\|.$$

$max_{0\leq s\leq 2}\|X_s(1)\| = 0.827895$ olduğunu bulmuştuk.

$\|x_0\| = 3.60555, \|x_1\| = 5, \|x_2\| = 1.41421$ olduğundan $max_{0\leq s\leq 2}\|x_s\| = 5$.

Buradan elde edilen değerler yerine yazıldığında

$$\|x(39)\| = 0.000006 \leq 0.205459$$

olarak bulunur.

Yukarıda elde ettiğimiz değerleri bir tablo ile gösterelim.

n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**	n	$\|x(n)\|$	**Üst Sınır (Teorem 3.6)**
1	5	5.47344	**8**	0.557136	2.22677
2	1.41421	5.47344	**16**	0.960802	4.53143
3	2.86531	4.53143	**39**	0.000006	0.205459
4	2.06155	4.53143			

Not 4.1. Çalışmadaki hesaplamalar MVC (Bulgak ve Eminov 2001) de yapılmıştır.

5. KAYNAKLAR

Agarwall, R., P., 2000, Difference equations and inequalities, 2nd ed., *Pure and Applied Math Series, Vol. 228,* National University of Singapore

Akın, Ö. ve Bulgak, H. 1998, *Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi,* Konya: Selçuk Üniversitesi Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi

Aydın, K., 1995, Periyodik adi diferensiyel denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı için şart sayısı, Doktora Tezi, Konya

Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G. V., 2000, Numeric characteristics for asymptotic stability of solitions to linear difference equations with periodic coeeficients, *Siberian Math. J., 41 No:6,* Novosibirsk, 1005-1014
.
Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G. V., 2001, Continuity of numeric characteristics forasymptotic stability of solitions tolinear difference equations with periodic coeeficients, *Selcuk Jorunal of Applied Mathematics, vol 2, num 2,* Konya

Aydın, K., 2004, Sabit katsayılı Schur kararlı fark denklemlerin çözümünün değerlendirilmesi, *ZKÜ, İntegral Geometri ve Ters Problemler Çalıştayı*

Bulgakov, A., Ya. and Godunov, S., K., 1988, Circle dichotomy of the matrix spectrum, *Siberia Math. J., 29, No: 5,* Novisibirsk, 59-70

Bulgak, H., 1999, Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability, *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing,* 95-124

Bulgak, H., and Eminov, D., 2001, Computer dialogue system, *Selçuk Journal Applied Mathematics, 2,* 17-38

Çelik Kızılkan, G. ve Duman, A., 2020. k. mertebeden periyodik katsayılı $x(n+k) = A(n)x(n)$ lineer fark denklem sisteminin Schur kararlılığının hassasiyeti, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, Kabul Edildi.

Duman A., 2008, Periyodik lineer fark denklem sisteminin Schur kararlılığının hassasiyeti, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Duman, A. and Aydın, K. 2011, "Sensitivity of Schur stability of monodromy matrix", *Applied Mathematics and Computation*, 217, 6663–6670.

Duman, A. , Çelik Kızılkan, G., Aydın, K. 2016, "Sensitivity of Schur stability of systems of linear difference equations with periodic coefficients", *New Trends in Mathematical Sciences*, 4 (2) , 159-173.

Elaydi, N., 1999, *An introduction to difference equations*, Springer

Rohn, J., 1994, Positive definitenessand stability of interval matrices, *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications,15(1),* 175-184

Voicu, M. and Pastravanu, O., 2006, Generalized matrix diagonal stability and linear dynamical systems, *Linear Algebra and its Applications,419,* 299-310

Wang, K., N. and Michel, A., N., 1993, On sufficient conditions for stability of interval matrices, *System&Control Letters,20(5),* 345-351

Wilkinson, J., H., 1965, *The algebraic eigenvalue problem,* Clarendom Pres Oxford

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Fırat Çağlar KÜÇÜK
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Sultandağı/01.06.1995
Telefon	**:**	05065133572
Faks	**:**	
e-mail	**:**	firakucuk95@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Ali Çağlar Anadolu Lisesi/Merkez/Afyonkarahisar	2013
Üniversite	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2017
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2018	Ağrı Merkez Mehmet Akif Ersoy Ortaokulu	Öğretmen