



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**LOJİSTİK FARK DENKLEMİNİN İKİ  
BOYUTLU BİR SİSTEME  
GENELLEŞTİRMESİ**

**Süleyman KOŞUCU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2024  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Süleyman KOŞUCU tarafından hazırlanan “LOJİSTİK FARK DENKLEMİNİN İKİ BOYUTLU BİR SİSTEME GENELLEŞTİRMESİ” adlı tez çalışması .../06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

#### Danışman

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

#### Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

### İmza

.....

.....

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Süleyman KOŞUCU

Tarih:

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## LOJİSTİK FARK DENKLEMİNİN İKİ BOYUTLU BİR SİSTEME GENELLEŞTİRMESİ

Süleyman KOŞUCU

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2024, 56 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU  
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA  
Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun önemi ve çalışmanın amacı hakkında bilgiler verildi.

İkinci bölümde, lojistik diferansiyel denklem, lojistik fark denklemi ve lojistik fark denklem sistemi ile ilgili yapılan çalışmalar yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, çalışmamız ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

Dördüncü bölümde,  $a$  ve  $b$  reel parametreler ve  $x_0, y_0$  reel başlangıç değerleri olmak üzere,  $x_{n+1} = ay_n(1 - y_n)$ ,  $y_{n+1} = bx_n(1 - x_n)$  fark denklem sistemi ele alındı. Bu denklem sistemi lojistik fark denkleminin iki boyutlu bir genelleştirmesidir. Burada yukarıda verilen lojistik fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığı, denge noktalarının kararlılığı ve çözülebilirliği konuları çalışıldı.

Beşinci bölümde ise bu çalışmaya dair sonuçlar ve öneriler verildi.

**Anahtar Kelimeler:** asimptotik kararlılık, çözülebilirlik, fark denklemleri, fark denklem sistemleri, genel çözüm, kararlılık, sınırlılık.

## ABSTRACT

## MS THESIS

### GENERALIZATION OF THE LOGISTIC DIFFERENCE EQUATION TO A TWO DIMENSIONAL SYSTEM

Süleyman KOŞUCU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2024, 56 Pages

#### Jury

Assoc. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Assoc. Prof. Dr. Ali GELİŞKEN

This study consists of five chapters. In the first chapter, information about the importance of the subject and the purpose of the study was given. Then the next chapters of the thesis are summarised.

In the second section, studies on logistic differential equation, logistic difference equation and logistic difference equation system are presented.

In the third section, some basic definitions and theorems related to our work are given.

In the fourth section, the system of difference equations  $x_{n+1} = ay_n(1 - y_n)$ ,  $y_{n+1} = bx_n(1 - x_n)$  was discussed, where  $a$  and  $b$  are real parameters and  $x_0, y_0$  are real initial values. This system is a two-dimensional generalization of the logistic difference equation. Here, the boundedness of the solutions of the logistic difference equation system given above, the stability of the equilibrium points, and solvability were studied.

The fifth section presents the conclusions and recommendations of this study.

**Keywords:** asymptotically stability, solvability, difference equations, systems of difference equations, general solution, stability, boundedness

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde yardımını esirgemeyen, bilgilerini benimle paylaşan, fikirleriyle bakış açımı geliştirip zenginleştiren, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU'ya, hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Zuhal KOŞUCU'ya, babam Abdurrahman KOŞUCU'ya, en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Süleyman KOŞUCU  
KONYA-2024

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGE LİSTESİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>2</b>
<b>3. BAZI TANIM VE TEOREMLER</b> .....	<b>8</b>
<b>3.1. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler</b> .....	<b>8</b>
<b>3.2. Birinci Mertebeden Fark Denklemleri</b> .....	<b>10</b>
<b>3.3. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemlerinin</b> <b>Çözümleri</b> .....	<b>13</b>
<b>3.4. Lojistik Diferansiyel Denklemi</b> .....	<b>15</b>
<b>3.5. Lojistik Fark Denklemi</b> .....	<b>19</b>
3.5.1. Lojistik fark denkleminin bazı çözümleri .....	<b>21</b>
3.5.2. Lojistik fark denkleminin sınırlılığı .....	<b>26</b>
<b>3.6. İki Boyutlu Fark Denklem Sistemleri</b> .....	<b>27</b>
<b>4. LOJİSTİK FARK DENKLEMİNİN İKİ BOYUTLU BİR SİSTEMİ</b> .....	<b>30</b>
4.1. Sistemin Çözümlerinin Sınırlılığı .....	<b>30</b>
4.2. Sistemin Kararlılık Analizi .....	<b>30</b>
4.2.1. Sıfır denge noktasının kararlılık incelemesi .....	<b>35</b>
4.2.2. Pozitif denge noktasının kararlılık incelemesi .....	<b>36</b>
4.3. Sistemin Çözülebilirliği .....	<b>38</b>
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>46</b>
5.1. Sonuçlar .....	<b>46</b>
5.2. Öneriler .....	<b>46</b>
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	<b>47</b>

## SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	: Sıfırdan başlayan doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}$	: Gerçek (Reel) sayılar
$>$	: Büyük
$<$	: Küçük
$\geq$	: Büyük eşit
$\leq$	: Küçük eşit
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\approx$	: Yaklaşık olarak eşit
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$ x $	: $x$ 'in mutlak değeri
$\int$	: Belirsiz integral
$\{\dots\}$	: Küme işareti
$\ln x$	: $x$ 'in doğal logaritması
$f : A \rightarrow B$	: A dan B ye f fonksiyonu
$[a,b]$	: $a,b$ kapalı reel sayı aralığı
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\sum$	: Belirsiz toplam
$\lim_{x \rightarrow \infty}$	: $x$ sonsuza giderken limit
$\frac{dy}{dx}$	: $y$ 'nin $x$ 'e göre türevi
$\Delta$	: İleri fark operatörü
$\bar{x}$	: $x$ denge noktası

## 1. GİRİŞ

Fark denklemleri, dinamik sistemlerin matematiksel modellemesinde kullanılır. Bu denklemler, ayrık zaman aralıklarında sistemlerin davranışlarını incelemek için kritik araçlar sağlar. Bir model olarak en sık rastlanan ve en iyi bilinen fark denklemlerinden biri lojistik fark denklemdir. Lojistik fark denklemi, ayrık zaman aralıklarında sistemlerin dinamiklerini modellemek ve analiz etmek için kullanılan önemli bir fark denklemi türüdür. Bu denklem, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışlarını modellemek ve anlamak için vazgeçilmezdir. Lojistik fark denklemi, basit formuna rağmen, zengin dinamik davranışlar sergileyebilir, periyodik çözümler ve denge noktaları gibi çeşitli matematiksel özellikler barındırır.

Lojistik fark denklemi; biyoloji, ekonomi, mühendislik ve sosyal bilimler gibi çeşitli alanlarda önemli bir yere sahiptir. Popülasyon dinamikleri ve diğer doğal sistemlerin modellenmesinde sıkça kullanılır. Denklemin genel formu

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

şeklinde dir. Burada  $x_n$ ,  $n$ . zamandaki popülasyon büyüklüğünü veya sistemin durumunu temsil ederken,  $\mu$  büyüme oranını belirleyen bir parametredir.

Lojistik fark denkleminin birçok bilim dalındaki öneminden dolayı, bu denklem üzerine birçok çalışma yürütülmüştür. Bunların bazılarını sonraki bölümde değinilecektir. Bu doğrultuda hazırlanan bu tez çalışması lojistik fark denkleminin iki boyutlu bir sisteme genelleştirmesini konu alır. Bu çalışmanın dördüncü bölümünde,  $a$  ve  $b$  reel parametreler ve  $x_0$ ,  $y_0$  reel başlangıç değerleri olmak üzere,

$$x_{n+1} = ay_n (1 - y_n), \quad y_{n+1} = bx_n (1 - x_n)$$

fark denklem sistemi ele alınmıştır. Burada yukarıda verilen lojistik fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığı, denge noktalarının kararlılığı ve çözülebilirliği çalışıldı.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Burada lojistik denklem, lojistik fark denklemi ve lojistik fark denklem sistemi ile ilgili yapılan çalışmalar yer almaktadır.

AlSharawi ve Angelos (AlSharawi ve Angelos, 2006)  $p$  periyotlu parametreye sahip olan  $x_{n+1} = \mu_{n \bmod p} x_n (1 - x_n)$  lojistik fark denkleminin  $1, p, 2p, 3p, \dots$  esas periyotlu periyodik çözümlere sahip olduğunu göstermişlerdir. Singer teoremini periyodik fark denklemlerine genişlettiler ve onu  $p$  periyotlu lojistik fark denkleminin en fazla  $p$  kararlı periyodik çözümü olduğunu gösterdiler ve ayrıca  $p = 2$  ve  $p = 3$  durumlarında kararlı döngüleri araştıran hesaplama yöntemlerini sunmuşlardır.

Brown (Brown, 1981) çalışmasında,  $a > 1/2$  ve  $b > 0$  olmak üzere  $a$  ve  $b$  nin sabit olduğu  $u_{n+1} = 2au_n - bu_n^2$  lojistik fark denkleminin periyodik çözümleri ile ilgilenmiştir. Yeni bir yöntem geliştirmiş ve 6 ya kadar olan periyot uzunlukları için periyodik çözümlerin kesin ve pratik bir şekilde belirlenmesini sağlayan polinom denklemleri vermiştir.

Hoppensteadt ve Hymant (Hoppensteadt ve Hymant, 1977),  $x_{n+1} = mx_n (1 - x_n)$  fark denkleminin  $0 \leq m \leq 4$  şartını sağlayan  $m$  değerleri için periyodik çözümleri çalışmıştır. Onlar gösterdiler ki  $m$  büyüdükçe,  $m = 3.57$  değerine ulaşılan kadar çözümler ardışık olarak daha yüksek periyotlara sahiptir ve bu değerden sonra sonsuz sayıda periyodik çözüm vardır.

Khastan (Khastan, 2018) bu çalışmasında, iki farklı eşdeğer formülasyonu olan  $x_{n+1} = \beta x_n (1 - x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , lojistik fark denklemini ele almıştır. Bu makalenin en büyük katkısı, bulanık sayılar için Hukuhara farkı kavramını kullanarak, karşılık gelen iki denklem için çözümlerin varlığını, benzersizliğini ve global davranışını incelemektir. Son olarak sonuçlarını açıklamak için bazı örnekler verilmiştir.

Elsadany ve El-Sayed (Elsadany ve El-Sayed, 2012) karmaşık lojistik denklemin eşdeğer sistemini ve sistemin dinamik özelliklerini (sabit noktalar, kaos ve çatallanma) incelemişler. Teorik analizi doğrulayan sayısal sonuçlar sunmuşlar.

Suneel (Suneel, 2006) lojistik fark denklemini analog elektronik kullanılarak bir elektronik devre sistemi sunmuştur. Gerçekleştirilen sistemin davranışı, aynı sistemin bilgisayar simülasyonlarıyla karşılaştırılarak değerlendirilmiştir. Bu sistemin, sabit noktalar, periyodiklik, periyodun ikiye katlanması, kaos ve aralıklılık gibi lojistik denklemin tüm dinamik aralığını sergilediği bulunmuştur. Gerçekleştirilen sistemin dinamiğinin nicel ölçümlerini sunmuş ve teorik değerlerle iyi bir uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Zhou ve Zhang (Zhou ve Zhang, 1999) çalışmasında,  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  negatif olmayan reel sayıların bir dizisi,  $\{k_n\}_{n \geq 0}$  bir pozitif tamsayı dizisi,  $\{n - k_n\}$  azalmaz,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - k_n) = \infty$  ve  $\lambda$  pozitif bir sabit olmak üzere otonom olmayan gecikmeli lojistik fark denklemi olan

$$\Delta y_n = p_n y_n \left( 1 - \frac{y_n - k_n}{\lambda} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

denklemini ele almışlardır. (2.1) denkleminin  $\lambda$  dengesinin küresel çekiciliği için yeterli koşullar ve bazı yeni sonuçları göstermiştir.

Philos (Philos, 1992) çalışmasında,  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  negatif olmayan gerçekte sayıların bir dizisi  $\{l_n\}_{n \geq 0}$  bir pozitif tamsayı dizisidir,  $\{n - l_n\}$  azalmaz,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - l_n) = \infty$  ve  $K$  pozitif bir sabit olmak üzere otonom olmayan gecikmeli lojistik fark denklemini

$$\Delta y_n = p_n y_n \left( 1 - \frac{y_n - l_n}{\lambda K} \right) \quad (2.2)$$

incelemiştir ve yalnızca  $n \geq 0$  için olumlu olan çözümleri dikkate almıştır. (2.2) in tüm çözümlerinin  $K$  denge noktası etrafında salınım yaptığı keskin bir koşul oluşturdu ayrıca

(2.2)'in  $K$  çevresinde salınım yapmayan bir çözümünün varlığı için yeterli koşulları elde etmiştir.

Brown (Brown, 1982) çalışmasında,  $A$  nın bir sabit ve  $A > -1/4$  olduğu  $w_{n+1} = w_n^2 - A$  fark denkleminin periyodik çözümleri için önceki sonuçları genişletmiş. Yedinci periyodun çözümlerini belirlemek için kesin denklemler verilmiştir. Yöntem, biri 18. dereceden diğeri 7. dereceden iki polinom denkleminin köklerini bulmayı içerir. Belirli bir  $A$  değeri için, 18. derece denklemin her bir reel kökü döngüsel bir çözüme karşılık gelir ve 7. derece denklem bu döngüsel çözümde  $w_n$  nin yedi değerini verir.

May (May, 1976) çalışmasında, birinci mertebeden fark denklemleri biyolojik, ekonomik ve sosyal bilimlerde birçok bağlamda ortaya çıkardı. Bu tür denklemler, basit ve deterministik olsalar bile, kararlı noktalardan çatallanan kararlı döngüler hiyerarşisine ve görünüşte rastgele dalgalanmalara kadar şaşırtıcı bir dinamik davranış dizisi sergileyebilir. Sonuç olarak, bazıları yörüngelerin ince yapısının hassas matematiksel yönleriyle ve bazıları pratik çıkarımlar ve uygulamalarla ilgili birçok büyüleyici problem vardır.

El-Raheem ve Salman (El-Raheem ve Salman, 2014) çalışmalarında, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri ayırklaştırmak için bir ayırklaştırma süreci sunmuşlar. İlk olarak kesirli mertebeden lojistik diferansiyel denklemini ele almışlar daha sonra parçalı sabit argümanlarla ilgili kesirli mertebeden lojistik diferansiyel denklemleri ele alıp önerilen ayırklaştırmayı uygulamışlar. Sonuç olarak sistemin sabit noktalarının kararlılığı ve Lyapunov üsteli incelemişler.

Khalil, Al Horani, Yousef ve Sababheh (Khalil ve arkadaşları, 2014) bu çalışmada,  $0 \leq a < 1$  tanımı bir sabite kadar klasik tanımlı polinomlarla örtüşen kesirli türev ve kesirli integralin yeni tanımını vermiş ve bu tanımın en doğal ve en verimli olduğunu göstermişlerdir

Kaya ve Kartal (Kaya ve Kartal, 2020) bu çalışmada, conformable kesirsel mertebeden tam değer fonksiyonlu lojistik model üzerinde değer fonksiyonlarının kullanılmasına dayalı bir ayırklaştırma işlemi ile fark denklem sistemini elde ettiler ve bu

fark denkleminin kararlılığını incelemiş ve çatallanma analizi ile sistemde  $r$  parametresinin değişimine bağlı olarak Neimark-Sacker çatallanmasının olduğu gösterilmiştir. Ayrıca kesirsel mertebeden türev parametresi ve kesiklileştirme parametresinin sistemin dinamik yapısı üzerindeki etkisini incelemiştirlerdir.

Ünal (Ünal, 2011) bu çalışmasında,  $\dot{u} = ru(1-u)$  lojistik denklemini ele alarak popülasyon parametresinin alabileceği sınırlı değerler dikkate alınmadan yani  $r$  nin her değeri için çözümlerini karşılaştırmıştır.

Pamuk (Pamuk, 2005) çalışmasında adomian ayrıştırma yöntemini hem tekil hem de etkileşim halinde olan türler için sürekli popülasyon modellerine uygulandığını belirtmiş ve lojistik denklem üzerinden karşılaştırma yaparak ayrıştırma yönteminin doğruluk ve hızlı yakınsamalar açısından etkili olduğunu göstermiştir.

Serdal Pamuk ve Nevin Pamuk (Pamuk ve Pamuk, 2010) Tek ve etkileşim halindeki türler için sürekli popülasyon modellerinin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için homotopi pertürbasyon yöntemini uygulamıştır. Mevcut tekniklerle karşılaştırıldığında, bu yöntemin ve çözüm prosedürünün çok basit olduğunu ayrıca doğruluk ve hızlı yakınsama açısından oldukça etkili olduğunu aynı zamanda analitik ve sayısal çalışmalar sunmuştur.

Öztürk, Anapalı ve Gülsü (Öztürk ve arkadaşları, 2017) bu çalışmada Chebyshev sıralama metodu kullanarak lojistik büyüme modelini çözmüş ve Lojistik büyüme modeli için sonuçlar homotopi pertürbasyon yöntemi ve adomian ayrıştırma yöntemi ile karşılaştırılmış ve elde edilen nümerik sonuçlar ile tam çözümü karşılaştırmıştır.

Sucu (Sucu, 2016) bu çalışmasında, av-avcı modeline Euler metodu uygulamış elde edilen sistem yapısını analiz etmiş ve bu modelin değişimini diferansiyel denklem yardımıyla ifade etmiştir Euler metodu yardımı ile fark denklem sistemini pozitif denge noktasındaki kararlılığını ve bu pozitif denge noktasında flip çatallanma görülebilmesi için gereken koşulları belirtmiş ve bu koşullar altında denge noktasındaki flip çatallanmanın varlığı Merkez Çok katlı Uzak Teoremi (Center Manifold Theorem) yardımıyla ispat edilmiştir.

Tekin (Tekin, 2019) tezinde, ekonomik sistemlerdeki çatallanmalarını incelemiş, bu sistemlerin kararlılık yapısını tanımını ve sınıflandırmasını yaptı çatallanma analizlerini gerçekleştirmiştir.

Stević, Ahmed, Kosmala ve Šmarda (Stević ve arkadaşları, 2021) bu çalışmada, son 15 yılda ilgi çeken sistemlerin çeşitli doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri de dahil olmak üzere diferansiyel denklemleri içeren belirli bir diferansiyel denklem sınıfının çözümlerinin uzun vadeli davranışına ilişkin bazı sonuçlar sunmuşlardır. Ayrıca bu diferansiyel denklemler arasındaki bazı fiziksel ilişkiler literatürdeki diğer bazı denklemlerle karşılaştırılarak sunulmuş ve benzer şekilde ele alınabilecek bazı önemli diferansiyel denklemler listelenmiştir.

Ding ve Zhang (Ding ve Zhang, 2008) bu çalışmada, başlangıç şartları pozitif reel sayılar  $a \in (0,1)$ ,  $\beta \in (0,\infty)$  ve  $x_{-1}, x_0$  olacak şekilde ayırık gecikmeli sivrilinek popülasyon modeli olan  $x_{n+1} = (ax_n + \beta x_{n-1})e^{-x_n}$  fark denkleminin denklemin çözümlerinin kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Feng, Ma ve Ding (Feng ve arkadaşları, 2016) bu çalışmada,  $x_{n+1} = a + \beta x_{n-1}e^{-x_n}$  denklemini genişletip başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olacak şekilde  $a \in (0,\infty)$ ,  $b \in (0,1)$ ,  $c \in (0,\infty)$  ve  $x_{-1}, x_0$  olmak üzere;

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1} + cx_{n-1}e^{-x_n} \quad (2.3)$$

şekilde bir fark denklemini tanımlamışlardır. (2.3) denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Khuong ve Phong (Khuong ve Phong, 2013) bu çalışmalarında,

$$x_{n+1} = \frac{a + be^{-x_n}}{c + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{a + be^{-y_n}}{c + x_n}$$

şeklinde verilen üstel formda olan iki fark denklem sistemini  $a, b, c$  parametrelerini ve  $x_0, y_0$  başlangıç şartlarını pozitif reel sayılar olarak sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, asimptotik davranışını ve  $E = (\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasına yakınsama oranını da incelemiştir.



### 3. BAZI TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızın amacına ulaşması için gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

#### 3.1. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

**Tanım 3.1.**  $t$  bağımsız değişken ve  $x$  bağımlı değişken olmak üzere

$$\psi(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

formundaki bir bağıntıya  $n$ . mertebeden bir adi diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

denklemini birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir. Eğer (3.1) denkleminde  $t$  bağımsız değişkeni doğrudan görünmüyorsa yani (3.1) denklemini

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.2)$$

şeklindeyse bu denklem otonom bir denklemdir denir. Örneğin

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (k \text{ bir sabittir.}) \quad (3.3)$$

adi diferansiyel denklemini otonom bir adi diferansiyel denklemdir.

(3.3) denklemini bir matematiksel model olarak düşünülebilir. Burada türev zamanla değişme oranını göstermektedir. Bu denklem mevcut büyüklüğün değişim oranı ile orantılı olduğu problemlerde uygun bir matematiksel model olarak iş görür (Edwards ve Penney, 2008).

Şimdi bu denklemin genel çözümünü verelim.  $x(t) > 0$  ve  $k$  bir sabit olmak üzere denklemin değişkenlerine ayırmak ve ardından integral almak suretiyle kolayca çözebiliriz. Yani,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int k dt \Rightarrow \ln x = kt + c$$

ve  $x$  e göre çözersek

$$x = x(t) = e^{kt+c}$$

bulunur. Burada  $c$  bir keyfi sabittir. Eğer  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  başlangıç koşulu kullanılırsa

$$x(t; x_0) = x_0 e^{kt}$$

özel çözümü elde edilir. Çözümünde doğal tabanlı üstel fonksiyon bulunduğundan (3.3) diferansiyel denkleminde genellikle üstel veya doğal büyüme denklemi denir (Edwards ve Penney, 2008).

**Tanım 3.2.** (3.2) otonom adi diferansiyel denklemi verilmiş olsun.  $f(\bar{x}) = 0$  denklemini sağlayan noktalara (3.2) otonom adi diferansiyel denkleminin kritik noktaları denir.

Bu tanıma göre (3.3) denkleminin kritik noktası  $\bar{x} = 0$  dır.

**Tanım 3.3.**  $\forall \varepsilon > 0$  için (3.2) denkleminin bir  $\bar{x}$  kritik noktası için  $|\bar{x} - x_0| < \delta$  olduğunda her  $t \geq 0$  için  $|\bar{x} - x(t; x_0)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta$  mevcutsa (3.2) diferansiyel denkleminin  $\bar{x}$  kritik noktası lokal kararlıdır denir (Ünal, 2011).

**Tanım 3.4.** (3.2) denkleminin bir  $\bar{x}$  kritik noktası lokal kararlı ve  $\delta > 0$  için  $|\bar{x} - x(t; x_0)| < \delta$  olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x} - x(t; x_0)| = 0$$

ise (3.2) denklemin  $\bar{x}$  kritik noktası global asimptotik kararlıdır denir (Ünal, 2011).

### 3.2. Birinci Mertebeden Fark Denklemleri

**Tanım 3.5.**  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  bağımsız değişken ve  $x$  bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (3.4)$$

bağıntısına bir fark denklemi denir.  $f$  verilmiş bir fonksiyon olmak üzere, (3.4) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1))$$

şeklindeyse bu denkleme normal fark denklemi denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Buradan itibaren bazı kolaylıkları sebebiyle  $x(n)$  değişkenini  $x_n$  alt indis gösterimi ile göstereceğiz. Aşağıdaki tanım fark denklemlerini sınıflandırmada temel bir unsurdur.

**Tanım 3.6.** Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonların mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin (indislerinin) farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Yukarıdaki tanıma göre birinci mertebeden en genel fark denklemi

$$F(n, x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (3.5)$$

bağıntısı ile verilir. Eğer (3.5) denklemi

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \quad (3.6)$$

formunda yazılabiliyorsa normal fark denklemi denir. Eğer (3.6) denkleminde  $n$  bağımsız değişkeni açık olarak görünmüyorsa, yani (3.6) denklemi

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.7)$$

şeklindeyse bu denklem otonomdur denir. Buna göre

$$x_{n+1} = x_n^2 - 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 2}, \quad x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}$$

denklemleri birinci mertebeden otonom denklemlerdir.

**Tanım 3.7.**  $\mathbb{N}_0$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $x_n$  fonksiyonu verilsin. Her  $n \in \mathbb{N}_0$  için bu fonksiyon (3.4) denklemini sağlıyorsa,  $x_n$  fonksiyonuna  $\mathbb{N}_0$  üzerinde (3.4) ün bir çözümüdür denir.

$(k+1)$ . mertebeden bir fark denkleminin,  $\varphi$  ve  $\psi$  fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(n, x_n, c_1, c_2, \dots, c_{k+1}) = 0$$

ya da

$$x_n = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_{k+1})$$

şeklinde  $k+1$  adet  $c_1, c_2, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{R}$  keyfi sabit ihtiva eden çözümüne (3.4) denkleminin “genel çözümü” denir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de “özel çözüm” adı verilir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

**Örnek 3.1.** Birinci mertebeden lineer homojen olmayan

$$x_{n+1} = 2x_n + 1$$

fark denkleminin genel çözümü  $x_n = 2^n c - 1$  dir. Burada  $c$  bir keyfi sabittir. Bu çözüm verilen denklemde yerine yazılırsa

$$x_{n+1} = 2(2^n c - 1) + 1 = 2^{n+1} c - 1$$

olup denklemi sağlar. Verilen fark denkleminin  $x_0 = 2$  başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü

$$2 = 2^0 c - 1 \Rightarrow c = 3$$

olacağından  $x_n = 3 \cdot 2^n - 1$  bir özel çözümdür.

**Teorem 3.1.**  $I$  reel sayıların bir aralığı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.8)$$

fark denkleminin bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2007).

(3.8) fark denklemi  $(k+1)$ . mertebeden otonom bir fark denklemdir. Eğer  $k = 0$  alınırsa bu denklem (3.7) denkleminde indirgenir. Dolayısıyla, (3.8) in çözümlerinin varlık ve tekliğini garanti eden yukarıdaki teorem, (3.7) için de geçerlidir.

**Tanım 3.8.** Eğer  $\bar{x}$  için (3.8) denkleminde  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$  ise  $\bar{x}$  noktasına (3.8) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

**Örnek 3.2.**  $a$  ( $a \neq 0, a \neq 1$ ) ve  $b$  reel parametreler olmak üzere,  $x_{n+1} = ax_n + b$  denkleminin denge noktasını bulalım. Denge noktası tanımından

$$\bar{x} = a\bar{x} + b \Rightarrow \bar{x} = \frac{b}{1-a}$$

olup bu tek denge noktasıdır.

**Tanım 3.9.** Bir  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi verilsin. Eğer her  $n$  için  $M \leq x_n \leq N$  olacak şekilde  $M$  ve  $N$  sayıları varsa  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisine sınırlı dizi denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

**Lemma 3.1.**

$$P(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma = 0 \quad (3.9)$$

kübik denklemini ele alalım. (3.9) denklemi

$$\Delta = -\alpha^2 \beta^2 - 4\beta^3 + \alpha^3 \gamma + 27\gamma^2 + 18\alpha\beta\gamma. \quad (3.10)$$

diskriminantına sahiptir. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

I.  $\Delta < 0$  ise (3.9) denkleminin  $p_1, p_2, p_3$  olacak şekilde üç reel kökü vardır.

II.  $\Delta = 0$  ise o zaman iki alt durum vardır:

(a)  $\beta = \frac{-\alpha^2}{3}$  ve  $\gamma = \frac{\alpha^3}{27}$  ise o zaman  $P$  polinomunun  $p = \frac{\alpha}{3}$  olacak şekilde üç

katlı kökü vardır.

(b)  $\beta \neq \frac{-\alpha^2}{3}$  veya  $\gamma \neq \frac{\alpha^3}{27}$  ise o zaman  $P$  polinomu  $r$  çift katlı kökü ve  $p$  kökü

vardır.

III.  $\Delta > 0$  ise o zaman  $P$  polinomunun bir reel  $p$  kökü ve  $\theta \in (0, \pi)$  olmak üzere iki

kompleks  $re^{\pm i\theta}$  kökü vardır (Raouf, 2012).

### 3.3. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemlerinin Çözümleri

Sabit katsayılı lineer fark denklemleri genel olarak çözülebilir. Fakat burada genel durum yerine sadece birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin iki özel durumu ele alınacaktır. Birinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan en genel lineer fark denklemi

$$x_{n+1} = px_n + q, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.11)$$

şeklinde verilir. Burada  $p \neq 0$  ve  $q$  reel (ya da kompleks) parametreler,  $x_0$  reel (ya da kompleks) bir başlangıç değeridir. Şimdi (3.11) denkleminin genel çözümünü bulalım. Burada iki durum incelenmelidir. Birinci durum  $p = 1$  durumudur. Bu durumda (3.11) denklemi

$$x_{n+1} = x_n + q, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.12)$$

olur. (3.12) denklemi  $0, 1, \dots, n-1$  için

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + q \\ x_2 &= x_1 + q \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + q \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler taraf tarafa toplandığında

$$x_n = x_0 + qn$$

formülü bulunur. İkinci durum  $p \neq 1$  durumudur. (3.11) denklemi  $n-1, \dots, 1, 0$  için

$$\begin{aligned} x_n &= px_{n-1} + q \\ px_{n-1} &= p^2x_{n-2} + pq \\ p^2x_{n-2} &= p^3x_{n-3} + p^2q \\ &\vdots \\ p^{n-1}x_1 &= p^n x_0 + p^{n-1}q \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler taraf tarafa toplandığında

$$x_n = p^n x_0 + q(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1})$$

formülü bulunur. Eşitliğin sağındaki ikinci terim bir geometrik seri toplamı olduğundan (3.11) denkleminin genel çözümü

$$x_n = p^n x_0 + q \frac{1-p^n}{1-p}$$

veya bazı düzenlemelerden sonra

$$x_n = p^n \left( x_0 - \frac{q}{1-p} \right) + \frac{q}{1-p} \quad (3.13)$$

olarak bulunur.

Eğer  $q = 0$  ise (3.11) denklemi

$$x_{n+1} = px_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.14)$$

homojen denkleme indirgenir. Bu denklemin genel çözümü (3.11) denkleminin genel çözümünden elde edilebilir. Yani (3.13) da  $q = 0$  alınırsa (3.14) denkleminin genel çözümü,  $n \in \mathbb{N}_0$  için

$$x_n = p^n x_0 \quad (3.15)$$

olarak bulunur.

### 3.4. Lojistik Diferansiyel Denklemi

Bu kısımda, lojistik diferansiyel denklemden lojistik fark denkleminin nasıl elde edildiğini gösterip lojistik fark denkleminin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Sadece doğum ve ölümlerin oluşmasıyla değişen ve göç durumu olmayan bir nüfus yapısını düşünelim.

$P(t)$ : doğal büyüme değişkeni,

$\beta(t)$ :  $t$  anında her bir birim zamanda birim nüfusa düşen doğum sayısı,

$\delta(t)$ :  $t$  anında her bir birim zamanda birim nüfusa düşen ölüm sayısı

olsun. Bu taktirde  $[t, t + \Delta t]$  zaman aralığında meydana gelen doğum ve ölüm sayıları sırasıyla  $P(t)\beta(t)\Delta t$  ve  $P(t)\delta(t)\Delta t$  ile verilir. Böylece  $\Delta t$  uzunluğundaki  $[t, t + \Delta t]$  zaman aralığı boyunca nüfustaki  $\Delta P$  değişimi

$$\Delta P = \{\text{dogumlar}\} - \{\text{ölümler}\} \approx P(t) \cdot \beta(t) \cdot \Delta t - P(t) \cdot \delta(t) \cdot \Delta t$$

olup

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)] P(t)$$

olur.  $\Delta t \rightarrow 0$  limit alınırsa

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta) P \quad (3.16)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada kısalık için  $P = P(t)$ ,  $\delta = \delta(t)$  ve  $\beta = \beta(t)$  yazılmıştır. (3.16) denklemi en basit nüfus denklemdir (Edwards ve Penney, 2008).

$\beta$  doğum oranının,  $P$  nüfus büyüklüğünün bir lineer azalanı olduğu kabul edilsin. Böylece  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  pozitif sabitler olmak üzere,  $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$  ve ölüm oranı  $\delta = \delta_0$  sabit kalırsa (3.16) denklemi

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0) P$$

şeklini alır. Yani  $a = \beta_0 - \delta_0$  ve  $b = \beta_1$  olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \quad (3.17)$$

yazılabilir. Eğer  $a$  ve  $b$  katsayılarından her ikisi de pozitif ise (3.17) denkleminde lojistik diferansiyel denklemdir (Edwards ve Penney, 2008).

Eğer (3.17) denkleminde  $P = ay/b$  değişken değiştirilmesi uygulanırsa, (3.17) lojistik diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dt} = ay(1-y) \quad (3.18)$$

olur. (3.18) lojistik diferansiyel denkleminde Tanım 3.2 uygulanırsa  $y = 0$  ve  $y = 1$  olmak üzere iki kritik nokta elde edilir.  $a > 0$  olduğunda çözüm eğrileri  $\bar{y} = 1$  kritik noktasına,  $a < 0$  olduğunda ise çözüm eğrileri  $\bar{y} = 0$  kritik noktasına yaklaşmaktadır. Bu kritik noktaların kararlılığı için aşağıdakiler bilinmektedir.

- $\bar{y} = 0$  kritik noktası;  $a < 0$  olduğunda kararlıdır,  $a > 0$  olduğunda ise kararsızdır.
- $\bar{y} = 1$  kritik noktası;  $a < 0$  olması durumunda kararsızdır,  $a > 0$  olduğunda ise kararlıdır (Ünal, 2011).

Şimdi bu denklemin çözülebilir olduğunu gösterelim. (3.18) denklemi değişkenlerine ayrılabilir tipten olup

$$\frac{dy}{y(1-y)} = a dt \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. (3.19) dan iki tarafın da integrali alınırsa genel çözüm

$$\ln(y) - \ln(y-1) = at + c$$

veya bazı düzenlemeler sonucunda

$$y = \frac{e^{at+c}}{e^{at+c} - 1}$$

olarak elde edilir. Burada  $c$  bir keyfi sabittir.

**Örnek 3.3.** Birim zamandaki doğumların  $x$  ile ve ölümlerin  $x^2$  ile orantılı olduğu bir  $x(t)$  nüfusunu modelleyen

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (3.20)$$

lojistik diferansiyel denkleminde  $a = 0.1$  ve  $b = 0.001$  olsun. Bu değerler (3.20) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\frac{dx}{dt} = (0.1)x - (0.001)x^2 = \frac{x}{1000}(100 - x)$$

olur. Değişkenlerine ayrılması durumunda

$$\int \frac{1}{x(100-x)} dx = \int \frac{1}{1000} dt = \frac{t}{1000} + c$$

elde edilir. Denklemin sol tarafındaki integral için kısmi kesir ayrıştırması yapılırsa

$$\frac{1}{(100-x)x} = \frac{1}{100x} - \frac{1}{100(x-100)}$$

elde edilip integrali alınır

$$\int \left( \frac{1}{100x} - \frac{1}{100(x-100)} \right) dx = \left( \frac{1}{100} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{100} \int \frac{1}{(x-100)} dx \right)$$

sağdaki integral için  $u = x - 100$ ,  $du = dx$  değişken değiştirilmesi yapılır ki

$$\frac{1}{100} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{100} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{100} \ln x - \frac{1}{100} \ln u = \frac{1}{100} \ln x - \frac{1}{100} \ln(x-100)$$

sonucunu vermektedir. Böylelikle denkleminin sol tarafı ile eşitlediğimizde

$$\frac{\ln x}{100} - \frac{\ln(x-100)}{100} = \frac{t}{1000} + c$$

sonucuna varır ve  $x(0) = x_0$  başlangıç koşulunu uygular, logaritmaları birleştirir ve üstel olarak yazarsak denkleminin çözümünü

$$x(t) = \frac{100x_0 e^{\frac{t}{100}}}{100 - x_0 + x_0 e^{\frac{t}{100}}}$$

şeklinde elde ederiz. Burada  $x_0$  başlangıç şartı ne olursa olsun  $t \rightarrow +\infty$  iken  $x(t)$  nin 100'e yaklaştığı görülür.

### 3.5. Lojistik Fark Denklemi

Lojistik fark denklemi, lojistik diferansiyel denklemden elde edilebilir. Bunun için lojistik diferansiyel denklem ayrıklaştırılır. Yani bağımsız ve bağımlı değişkenler ayrık değişkenler olarak tanımlanır. Bunun için  $y = y_n$  alınır. Türevli ifadeler için de türevin tanımından

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

yaklaşımı ile lojistik diferansiyel denklem

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = ay_n(1 - y_n)$$

halini alır. Burada  $h$  fark aralığıdır. Buradan bazı düzenlemeler sonucunda, lojistik fark denklemi olarak bilinen

$$y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n) \quad (3.21)$$

denklemini elde edilir. Burada  $\mu = 1 + ah$  tır.

Lojistik fark denklemi de bir popülasyon (nüfus) modelidir. Şimdi bu matematiksel modelin kuruluşunu görelim.  $x_n$ ,  $n$  zamanındaki popülasyonun büyüklüğü olsun. Eğer popülasyonun bir nesilden diğerine büyüme oranı  $\mu$  ise, o zaman doğumlar ile

$$x_{n+1} = \mu x_n, \quad \mu > 0 \quad (3.22)$$

matematiksel modelini oluşturabiliriz.

Başlangıç popülasyonu  $x_0$  verilirse, basit iterasyonla, (3.22)'in çözümü olan

$$x_n = \mu^n x_0 \quad (3.23)$$

sonucunu buluruz. Eğer  $\mu > 1$  ise  $x_n$  sürekli artar ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  olur. Eğer  $\mu = 1$  ise tüm  $n > 0$  değerleri için  $x_n = x_0$  olur ki bu, nüfusun büyüklüğünün belirsiz bir gelecek için sabit olacağı anlamına gelir.  $\mu < 1$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olur ve popülasyon en sonunda yok olur.

Ancak çoğu biyolojik tür için, nüfus belirli bir üst sınıra ulaşana kadar arttığından yukarıdaki durumların hiçbiri geçerli değildir. Daha sonra, mevcut kaynakların sınırlılığı nedeniyle, canlılar hırçınlaşacak ve bu sınırlı kaynaklar için rekabete gireceklerdir. Bu rekabet,  $x_n^2$  ile verilen aralarındaki kavga sayısı ile orantılıdır. Daha makul bir model, orantı sabiti olan  $b$  nin 0'dan büyük olmasıyla mümkündür ki bu

$$x_{n+1} = \mu x_n - b x_n^2 \quad (3.24)$$

denklemini ortaya çıkarır. Eğer (3.24) te  $x_n = \frac{\mu}{b} y_n$  yazılırsa (3.21) lojistik fark denklemi elde edilir.

(3.21) denkleminde  $y_n$  sayısı  $n$  birim zamanındaki popülasyonun taşıma kapasitesine oranıdır. Her  $n$  için  $0 \leq y_n \leq 1$  dir ve  $y_n = 0$  olması popülasyonun yok olmasıdır.  $y_n = 1$  olması da taşıma kapasitesine ulaştığını ve bir sonraki adımda yok olacağını belirtir. Şimdi de  $\mu$  sabitinin durumuna göre denklemin ve dolayısıyla modellediği popülasyonun davranışını ifade edelim.

- $\mu < 1$  için popülasyon, popülasyonun başlangıç büyüklüğünden bağımsız olarak, eninde sonunda yok olmaktadır.
- $1 \leq \mu < 3$  için popülasyon büyüklüğü, eninde sonunda  $\frac{\mu-1}{\mu}$  e yakınsamaktadır.
- $3 \leq \mu < 1 + \sqrt{6}$  için popülasyon büyüklüğü, iki değer arasında salınım yapmaktadır (2-periyodik).
- $\mu \geq 1 + \sqrt{6}$  için popülasyon büyüklüğü, farklı  $\mu$  değerleri için 4,8,16,... periyotlar yapmakta ve  $\mu = 3.56995$  için sonlu periyot gözlenmemektedir (Elaydi, 2005).

Bu değerden büyük olan çoğu  $\mu$  değerleri için lojistik fark denklemi kaotik davranış gösterse de belirli değerlerde kaotik davranış göstermemektedir. Bu değerler islands of stability (kararlılık adaları) olarak adlandırılır.

### 3.5.1. Lojistik fark denkleminin bazı çözümleri

(3.21) lojistik fark denklemi şekil bakımından lojistik diferansiyel denklemine benzese de  $\mu$  parametresinin her değeri için çözülebilir değildir. Yani, genel olarak bu denklemin kapalı formda çözümü bilinmemektedir. Fakat sadece  $\mu = -2$ ,  $\mu = 2$  ve  $\mu = 4$  durumlarında tam çözümleri bilinmektedir. Şimdi (3.21) denkleminin söz konusu parametre değerleri için çözülebildiğini gösterelim.

$\mu = -2$  durumu

Eğer  $\mu = -2$  ise (3.21) denklemi

$$y_{n+1} = -2y_n(1 - y_n) \quad (3.25)$$

olur. Eğer (3.25) denklemine

$$y_n = \frac{1}{2} - \cos z_n \quad (3.26)$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa bu denklem

$$\frac{1}{2} - \cos z_{n+1} = -2 \left( \frac{1}{2} - \cos z_n \right) \left( 1 - \frac{1}{2} + \cos z_n \right)$$

olacaktır. Son denklemin sağ tarafına iki kare farkı uygulanırsa

$$\frac{1}{2} - \cos z_{n+1} = -2 \left( \frac{1}{4} - \cos^2 z_n \right)$$

olur. Şimdi

$$\cos^2 z_n = \frac{1 + \cos 2z_n}{2}$$

özdeşliğini kullanarak denklemi

$$\frac{1}{2} - \cos z_{n+1} = -2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2z_n}{2} \right)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Buradan da

$$\cos z_{n+1} = -\cos 2z_n$$

denklemini elde edilir. Kosinüs fonksiyonu için

$$-\cos 2z_n = \cos(\pi - 2z_n)$$

olduğundan

$$\cos z_{n+1} = \cos(\pi - 2z_n)$$

ve böylece

$$z_{n+1} = -2z_n + \pi$$

elde ederiz. Bu denklem (3.11) formunda olup genel çözümü (3.13) de  $p = -2$  ve  $q = \pi$  alınarak bulunabilir. O halde

$$z_n = (-2)^n \left( z_0 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \quad (3.27)$$

bulunur. Başta yapmış olduğumuz (3.26) değişken değiştirme işleminden yola çıkarak

$$z_0 = \arccos\left(\frac{1}{2} - y_0\right)$$

değişkenini (3.27) denkleminde yerine yazıp düzenleme yaptığımızda

$$y_n = \frac{1}{2} - \cos\left((-2)^n \left( \arccos\left(\frac{1}{2} - y_0\right) - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3}\right)$$

genel çözümünü elde ederiz.

$\mu = 2$  durumu

Eğer  $\mu = 2$  ise (3.21) denklemi

$$y_{n+1} = 2y_n(1 - y_n) \quad (3.28)$$

olur. (3.28) denklemi, bazı düzenlemeler sonunda

$$2y_{n+1} - 1 = -(2y_n - 1)^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme

$$2y_n - 1 = v_n$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$v_{n+1} = -(v_n)^2 \quad (3.29)$$

denklemi elde edilir. (3.29) dan

$$\begin{aligned} v_n &= -(v_{n-1})^2 \\ (v_{n-1})^2 &= \left(- (v_{n-2})^2\right)^2 \\ (v_{n-2})^{2^2} &= \left(- (v_{n-3})^2\right)^{2^2} \\ &\vdots \\ (v_2)^{2^{n-2}} &= \left(- (v_1)^2\right)^{2^{n-2}} \\ (v_1)^{2^{n-1}} &= \left(- (v_0)^2\right)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa  $v_n = -v_0^{2^n}$  sonucu gelir ve bu sonuç  $2y_n - 1 = v_n$  değişken değiştirmesinde yerine yazılırsa

$$y_n = \frac{1}{2} \left( 1 - (2x_0 - 1)^{2^n} \right)$$

genel çözümlü elde edilir.

$\mu = 4$  durumu

Eğer  $\mu = 4$  ise (3.21) denklemi

$$y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n) \quad (3.30)$$

olur. Eğer (3.30) denkleminde

$$y_n = \sin^2 z_n \quad (3.31)$$

değişken değiştirilmesi uygulanırsa bu denklem

$$\sin^2 z_{n+1} = 4 \sin^2 z_n (1 - \sin^2 z_n)$$

olacaktır. Her iki tarafın karekökü alınır

$$\sin z_{n+1} = 2 \sin z_n \sqrt{1 - \sin^2 z_n}$$

ifadesi elde edilir. Herhangi bir  $x \in \mathbb{R}$  için  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  olduğundan son denklem

$$\sin z_{n+1} = 2 \sin z_n \cos z_n = \sin 2z_n$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$z_{n+1} = 2z_n \quad (3.32)$$

birinci mertebeden homojen lineer fark denklemi elde edilir. (3.32) denklemi (3.14) formunda olup genel çözümü, herhangi bir  $z_0$  başlangıç değeri için

$$z_n = 2^n z_0$$

olur. (3.31) den  $z_n$  in çözülmesiyle  $z_n = \arcsin \sqrt{y_n}$  olduğundan,  $n=0$  için  $z_0 = \arcsin \sqrt{y_0}$  olur ve böylece lojistik fark denkleminin  $\mu = 4$  için genel çözümü

$$y_n = \sin^2 \left( 2^n \arcsin \sqrt{y_0} \right)$$

olarak bulunur.

Özet olarak, lojistik fark denkleminin bazı özel durumlardaki genel çözümleri aşağıdaki gibidir:

- $\mu = -2$  için genel çözüm:  $y_n = \frac{1}{2} - \cos \left( (-2)^n \left( \arccos \left( \frac{1}{2} - y_0 \right) - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right)$
- $\mu = 2$  için genel çözüm:  $y_n = \frac{1}{2} \left( 1 - (2x_0 - 1)^{2^n} \right)$
- $\mu = 4$  için genel çözüm:  $y_n = \sin^2 \left( 2^n \arcsin \sqrt{y_0} \right)$

### 3.5.2. Lojistik fark denkleminin sınırlılığı

$0 < x_0 < 1$  ve  $0 < a < 1$  için  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$  denkleminin sınır aralığını inceleyelim.  $0 < x_0 < 1$  ve  $0 < a < 1$  olduğundan

$$-1 < -x_0 < 0 \Rightarrow 0 < 1 - x_0 < 1 \Rightarrow 0 < ax_0(1-x_0) < 1$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}
0 < x_1 &= ax_0(1-x_0) < 1 \\
0 < x_2 &= ax_1(1-x_1) < 1 \\
&\vdots \\
0 < x_n &= ax_{n-1}(1-x_{n-1}) < 1
\end{aligned}$$

bulunur ki bu  $n \geq 0$  için  $0 < x_n < 1$  olduğu anlamına gelir.

### 3.6. İki Boyutlu Fark Denklem Sistemleri

Bu kısımdaki sonuçlar (Kocic ve Ladas, 1993) ve (Kulenovic ve Merino, 2002) kaynaklarındaki sonuçlardan uyarlanarak hazırlanmıştır.

**Teorem 3.2.**  $I$  ve  $J$  reel sayı aralığı olsun.  $f$  ve  $g$ ,  $f: I \times J \rightarrow I$  ve  $g: I \times J \rightarrow J$  olacak şekilde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise, her  $(x_0, y_0)$  başlangıç şartı için

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.33)$$

fark denklem sisteminin bir tek  $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$  çözümü vardır.

**Tanım 3.10.** Eğer bir  $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times J$  noktası için (3.33) denklem sisteminde

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad (3.34)$$

ise  $(\bar{x}, \bar{y})$  noktasına (3.33) sisteminin denge noktası denir.

(3.33) fark denklem sistemi,  $X_n = (x_n, y_n)^T$  ve  $F: I \times J \rightarrow I \times J$  olmak üzere,

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.35)$$

vektör formunda yazılabilir. Burada

$$F\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Eğer (3.33) sistemi  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasına sahip ise (3.35) sisteminin denge noktasının  $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})^T$  şeklinde olduğu açıktır.

Burada herhangi bir vektörün veya matrisin normu  $\|\cdot\|$  ile ve (3.35) sisteminin bir başlangıç şartı  $X_0$  şeklinde gösterilecektir.

**Tanım 3.11.**  $\bar{X}$ , (3.35) sisteminin bir denge noktası olsun.

- (a) Her  $\varepsilon > 0$  için  $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$  iken her  $n \geq 0$  için  $\|X_n - \bar{X}\| < \delta$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  varsa  $\bar{X}$  denge noktası kararlıdır denir. Aksi takdirde,  $\bar{X}$  denge noktası kararsızdır.
- (b)  $\bar{X}$  denge noktası kararlı ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $X_n \rightarrow \bar{X}$  olacak şekilde  $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{X}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- (c)  $n \rightarrow \infty$  iken  $X_n \rightarrow \bar{X}$  ise  $\bar{X}$  denge noktasına çekim noktasıdır denir.
- (d)  $\bar{X}$  denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası ise  $\bar{X}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

$F$  dönüşümünün  $\bar{X}$  denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F(\bar{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y_n}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y_n}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

olmak üzere, (3.35) sisteminin  $\bar{X}$  noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi,

$$Z_{n+1} = J_F(\bar{X})Z_n, \quad n \in N_0 \quad (3.38)$$

şeklindedir ve (3.38) sisteminin  $\bar{X}$  denge noktası civarındaki karakteristik polinomu  $a_0 > 0$  olmak üzere,

$$P(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir.

**Tanım 3.12.** Eğer (3.39) karakteristik polinomunun tüm kökleri mutlak değerce 1 den farklı ise  $\bar{X}$  denge noktasına hiperboliktir denir. Eğer (3.39) polinomunun en az bir kökü mutlak değerce 1 e eşit ise  $\bar{X}$  denge noktasına nonhiperboliktir (hiperbolik olmayan) denir (Kulenovic ve Merino, 2002).

**Teorem 3.3.**  $\bar{X}$ , (3.35) sisteminin bir denge noktası olsun. Eğer (3.35) in bu denge noktasındaki  $J_F(\bar{X})$  Jakobiyen matrisinin bütün öz değerleri  $|\lambda| < 1$  açık birim diskinin içinde kalıyorsa  $\bar{X}$  lokal asimptotik kararlıdır. Öz değerlerden en az biri bu açık birim diskin dışında kalıyorsa  $\bar{X}$  kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).



denkleminin çözümleridir. Birinci denklemi ikincisinde kullanarak

$$\bar{y} \left[ ab(1-\bar{y})(1-a\bar{y}+a\bar{y}^2) \right] = 0$$

bulunur.  $\bar{y}$  denklemin iki tarafında da çarpan olarak bulunduğu için  $\bar{y} = 0$  in bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca  $\bar{y} = 0$  için  $\bar{x} = 0$  elde edilir. Böylece  $(0,0)$  bir denge noktasıdır. Bu durumda

$$ab(1-\bar{y})(1-a\bar{y}+a\bar{y}^2)-1=0$$

veya

$$\bar{y}^3 - 2\bar{y}^2 + \frac{a+1}{a}\bar{y} + \frac{1-ab}{a^2b} = 0$$

denkleminin çözümleri diğer denge noktalarının ikinci bileşenlerini verecektir. Bu denklemin çözümleri açık olarak elde edilebilir. Fakat çok karışık ve uzun ifadeler ortaya çıktığından burada köklerin açık ifadeleri verilmeyecektir. Amacımız pozitif bir denge noktasının varlığını göstermektir. Şimdi

$$P(y) = y^3 - 2y^2 + \frac{a+1}{a}y + \frac{1-ab}{a^2b} \quad (4.3)$$

olsun. (4.3) polinomunun kökleri bize diğer denge noktalarını verecektir. (4.3) polinomu için (3.9) daki polinomdan  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -\frac{a+1}{a}$  ve  $\gamma = \frac{ab-1}{a^2b}$  olacağından,  $P$  polinomunun diskriminantı (3.10) yardımıyla hesaplanabilir. Böylece (4.3) polinomunun diskriminantı

$$\Delta = \frac{4}{a} \left( \frac{a+1}{a} \right)^2 + \frac{1-ab}{a^2b} \left( 4 + \frac{9}{a} + \frac{27}{a^2b} \right) \quad (4.4)$$

bulunur. (4.4) ten  $ab$  değerine göre denklemin kökleri hakkında yorum yapabiliriz.

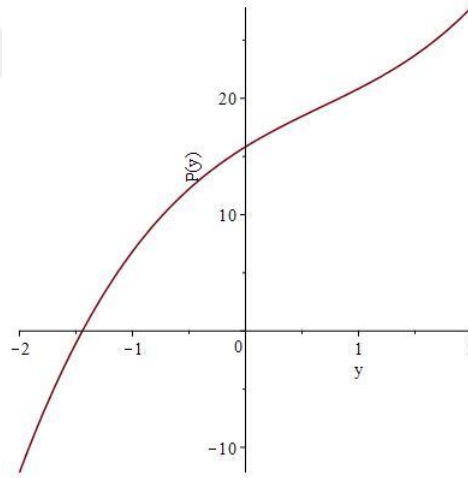
$0 < ab < 1$  şartını sağlayan  $ab$  değerleri için her zaman  $\Delta > 0$  olacağından Lemma 3.1 e göre  $P$  polinomunun bir reel ve iki kompleks kökü vardır. Öte yandan, (4.3) polinomunda  $y = 0$  için

$$P(0) = \frac{1-ab}{a^2b} > 0$$

olur. Bu da polinom eğrisinin dikey eksenini pozitif tarafta kestiğini gösterir. (4.3) polinomu için

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} P(y) = -\infty$$

olduğundan yatay eksenini negatif tarafta keser. Yani bu durumda tek reel denge noktası negatiftir. (Bkz. Şekil 4.1)

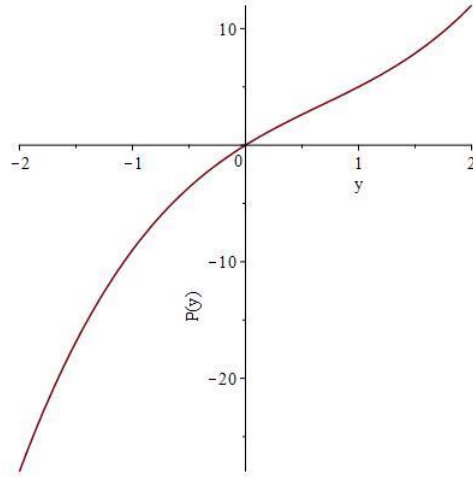


Şekil 4.1:  $a = 0.2$  ve  $b = 1.2$  için tek reel kök negatiftir.

$ab = 1$  için her zaman  $\Delta > 0$  olacağından yine bir reel ve iki kompleks kök vardır. Ayrıca (4.3) polinomunda sabit terim yoktur. Yani bu durumda

$$P(y) = y \left( y^2 - 2y + \frac{a+1}{a} \right)$$

olup tek reel kök  $y = 0$  dır. (Bkz. Şekil 4.2)



Şekil 4.2:  $a = 0.2$  ve  $b = 5$  için tek reel kök sıfırdır.

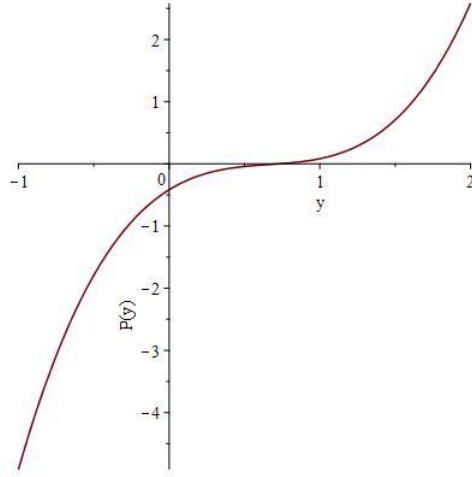
$ab > 1$  için (4.4) diskriminantı hakkında kesin bir yargıda bulunamayız. Burada  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$  ve  $\Delta < 0$  durumlarından herhangi biri olabilir. Fakat tam olarak bir pozitif reel kökün varlığını garanti edebiliriz. Gerçekten, (4.3) polinomunda  $y = 0$  için

$$P(0) = \frac{1-ab}{a^2b} < 0$$

olur. Bu da polinom eğrisinin dikey eksenini negatif tarafta kestiğini gösterir. (4.3) polinomu için

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P(y) = \infty$$

olduğundan, eğri yatay eksenini pozitif tarafta keser. Yani bu durumda en az bir pozitif reel  $y$  değeri vardır. Bu da en az bir pozitif reel denge noktasının varlığı anlamına gelir. (Bkz. Şekil 4.3)



Şekil 4.3:  $a = 2$  ve  $b = 3$  için en az bir pozitif kök vardır.

Öte yandan;  $a$ ,  $\bar{x}$  ve  $\bar{y}$  nin pozitifliğinden ve (4.2) nin birinci denkleminde

$$0 < \bar{y}(1 - \bar{y}) \Rightarrow 0 < \bar{y} < 1$$

olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde;  $b$ ,  $\bar{x}$  ve  $\bar{y}$  nin pozitifliğinden ve (4.2) nin ikinci denkleminde

$$0 < \bar{x}(1 - \bar{x}) \Rightarrow 0 < \bar{x} < 1$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla pozitif denge noktası  $(0,1) \times (0,1)$  bölgesindedir.

Sonuç olarak;

- I.  $0 < ab < 1$  ise bir  $(0,0)$  denge noktası ve bir de negatif denge noktası var olup pozitif denge noktası yoktur.
- II.  $ab = 1$  ise  $(0,0)$  denge noktası çift katlı olup pozitif denge noktası yoktur.
- III.  $ab > 1$  ise  $0 < \bar{x} < 1$  ve  $0 < \bar{y} < 1$  şartlarını sağlayan pozitif reel bir denge noktası daima vardır.

#### 4.2.1. Sıfır denge noktasının kararlılık incelemesi

Bu kısımda,  $(0,0)$  denge noktasının kararlılığı incelenecektir.

(4.1) sistemi,

$$F\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ay_n(1-y_n) \\ bx_n(1-x_n) \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ay_n(1-y_n) \\ bx_n(1-x_n) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. (4.5) sisteminin sıfır denge noktasını  $\bar{X}_0 = (0,0)^T$  ile gösterelim.

Ayrıca

$$f(x_n, y_n) = ay_n(1-y_n), \quad g(x_n, y_n) = bx_n(1-x_n)$$

denirse

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_n} = a - 2ay_n, \quad \frac{\partial g}{\partial x_n} = b - 2bx_n, \quad \frac{\partial g}{\partial y_n} = 0$$

kısmi türevleri elde edilir ve böylece  $F$  vektör dönüşümünün Jakobiyeni

$$J_F = \begin{pmatrix} 0 & a - 2ay_n \\ b - 2bx_n & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

olur.  $J_F$  Jakobiyen matrisinin  $\bar{X}_0 = (0,0)$  sıfır denge noktasındaki değeri

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

olup  $\bar{X}_0$  sıfır denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistem

$$X_{n+1} = J_F(\bar{X}_0)X_n$$

veya açık olarak

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan  $J_F(\bar{X}_0)$  matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - ab = 0$$

ve bu denklemin kökleri,  $\lambda_1 = \sqrt{ab}$  ve  $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$  olarak bulunur. Açıktır ki eğer  $0 < ab < 1$  ise tüm kökler için  $|\lambda| < 1$  olacağından  $\bar{X}_0$  sıfır denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer  $ab = 1$  ise  $\bar{X}_0$  sıfır denge noktası nonhiperboliktir. Eğer  $ab > 1$  ise bu kökler için  $|\lambda| > 1$  olacağından  $\bar{X}_0$  sıfır denge noktası kararsızdır.

#### 4.2.2. Pozitif denge noktasının kararlılık incelemesi

Bu kısımda, pozitif denge noktasının kararlılığı araştırılacaktır. Bu durumda  $ab > 1$  dir. (4.5) sisteminin pozitif denge noktasını  $\bar{X}_+ = (\bar{x}, \bar{y})^T$  ile gösterelim. Bu durumda  $J_F$  Jakobiyen matrisinin  $\bar{X}_+$  pozitif denge noktasındaki değeri, (4.6) dan

$$J_F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & a - 2a\bar{y} \\ b - 2b\bar{x} & 0 \end{pmatrix}$$

olup  $\bar{X}_+$  pozitif denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistem

$$X_{n+1} = J_F(\bar{X}_+) X_n$$

veya açık olarak

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a - 2a\bar{y} \\ b - 2b\bar{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan  $J_F(\bar{X}_+)$  matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - ab(2\bar{x} - 1)(2\bar{y} - 1) = 0$$

ve bu denklemin kökleri,  $\lambda_1 = \sqrt{ab(2\bar{x} - 1)(2\bar{y} - 1)}$  ve  $\lambda_2 = -\sqrt{ab(2\bar{x} - 1)(2\bar{y} - 1)}$  olarak bulunur. O halde eğer

$$|(2\bar{x} - 1)(2\bar{y} - 1)ab| < 1$$

ise  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$  olur ki bu  $\bar{X}_+$  pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu anlamına gelir.

Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

**Teorem.4.1.**  $a, b$  parametreleri ve  $x_0, y_0$  başlangıç değerleri pozitif reel sayılar olsun.

Bu durumda (4.1) sistemi için aşağıdakiler doğrudur:

- 1) Eğer  $0 < ab < 1$  ise (4.1) sisteminin  $(0,0)$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- 2) Eğer  $ab = 1$  ise  $\bar{X}_0$  sıfır denge noktası nonhiperboliktir.
- 3) Eğer  $ab > 1$  ise (4.1) sisteminin  $(0,0)$  denge noktası kararsızdır.
- 4) Eğer  $ab > 1$  ve  $|(2\bar{x} - 1)(2\bar{y} - 1)ab| < 1$  ise (4.1) sisteminin pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

### 4.3. Sistemin Çözülebilirliği

Bu kısımda, (4.1) sisteminin  $a = b = -2$ ,  $a = b = 2$  ve  $a = b = 4$  durumlarında çözülebilir olduğu gösterilecektir.

#### $a = b = -2$ durumu

(4.1) lojistik fark denklem sisteminin  $a = b = -2$  için çözülebildiğini gösterelim. Bu durumda (4.1) sistemi

$$x_{n+1} = -2y_n(1 - y_n), \quad y_{n+1} = -2x_n(1 - x_n) \quad (4.7)$$

olur. Eğer (4.7) sisteminde birinci denklem için

$$x_n = \frac{1}{2} - \cos u_n \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{2} - \cos v_n$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa bu denklem

$$\frac{1}{2} - \cos u_{n+1} = -2 \left( \frac{1}{2} - \cos v_n \right) \left( \frac{1}{2} + \cos v_n \right)$$

olacaktır ve

$$\frac{1}{2} - \cos u_{n+1} = -2 \left( \frac{1}{4} - \cos^2 v_n \right)$$

elde edilir. Şimdi

$$\cos^2 v_n = \frac{1 + \cos 2v_n}{2}$$

özdeşliğini kullanarak denklemini

$$\frac{1}{2} - \cos u_{n+1} = -2 \left( -\frac{1}{4} - \frac{\cos 2v_n}{2} \right)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bazı işlemlerden sonra

$$\cos u_{n+1} = -\cos 2v_n$$

denklemini elde edilir. Ayrıca

$$-\cos 2v_n = \cos(\pi - 2v_n)$$

olduğundan

$$\cos u_{n+1} = \cos(\pi - 2v_n)$$

ve böylece

$$u_{n+1} = -2v_n + \pi \quad (4.8)$$

elde ederiz. Sistemin ikinci denklemini için de aynı işlemleri yaptığımızda

$$v_{n+1} = -2u_n + \pi \quad (4.9)$$

elde edilecektir. (4.8) ve (4.9) denklemleri birinci mertebeden homojen olmayan lineer bir fark denklem sistemi oluştururlar. (4.8) ve (4.9) denklemlerini ayırarak

$$u_{2n+1} = -2v_{2n} + \pi \quad (4.10)$$

$$u_{2n+2} = -2v_{2n+1} + \pi \quad (4.11)$$

$$v_{2n+1} = -2u_{2n} + \pi \quad (4.12)$$

$$v_{2n+2} = -2u_{2n+1} + \pi \quad (4.13)$$

denklemlerini elde ederiz. (4.12) denklemini (4.11) denkleminde kullandığımızda

$$u_{2n+2} = 4u_{2n} - \pi \quad (4.14)$$

denklemini ve (4.10) denklemini (4.13) denkleminde kullandığımızda

$$v_{2n+2} = 4v_{2n} - \pi \quad (4.15)$$

denklemini elde ederiz. (4.14) ve (4.15) denklemleri (3.11) formunda olup genel çözümleri (3.13) de  $p = 4$  ve  $q = -\pi$  alınarak bulunabilir. Bu durumda

$$u_{2n} = (-2)^{2n} \left( u_0 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \quad (4.16)$$

$$v_{2n} = (-2)^{2n} \left( v_0 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \quad (4.17)$$

formüllerini elde ederiz. (4.17) denklemini de (4.10) denkleminde ve (4.16) denklemini (4.12) denkleminde yerine yazdığımızda

$$u_{2n+1} = (-2)^{2n+1} \left( v_0 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3}$$

$$v_{2n+1} = (-2)^{2n+1} \left( u_0 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3}$$

olduğu görülebilir. Başta yapmış olduğumuz değişken değiştirmesinde

$$u_n = \arccos \left( \frac{1}{2} - x_n \right), \quad v_n = \arccos \left( \frac{1}{2} - y_n \right)$$

yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\arccos\left(\frac{1}{2}-x_{2n}\right) &= (-2)^{2n}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-x_0\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3} \\ \arccos\left(\frac{1}{2}-y_{2n}\right) &= (-2)^{2n}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-y_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3} \\ \arccos\left(\frac{1}{2}-x_{2n+1}\right) &= (-2)^{2n+1}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-y_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3} \\ \arccos\left(\frac{1}{2}-y_{2n+1}\right) &= (-2)^{2n+1}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-x_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned}x_{2n} &= \frac{1}{2} - \cos\left((-2)^{2n}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-x_0\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) \\ y_{2n} &= \frac{1}{2} - \cos\left((-2)^{2n}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-y_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) \\ x_{2n+1} &= \frac{1}{2} - \cos\left((-2)^{2n+1}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-y_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) \\ y_{2n+1} &= \frac{1}{2} - \cos\left((-2)^{2n+1}\left(\arccos\left(\frac{1}{2}-x_n\right)-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

çözümlerine ulaşılmış oluruz.

**$a = b = 2$  durumu**

(4.1) lojistik fark denklem sisteminin  $a = b = 2$  için de bir çözümü olduğunu gösterelim. Bu durumda (4.1) sistemi

$$x_{n+1} = 2y_n(1-y_n), \quad y_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \quad (4.18)$$

olur. (4.18) in birinci denkleminde

$$x_{n+1} = 2y_n(1 - y_n)$$

$$x_{n+1} = 2y_n - 2y_n^2$$

$$2x_{n+1} = 4y_n - 4y_n^2$$

$$2x_{n+1} - 1 = -1 + 4y_n - 4y_n^2$$

$$2x_{n+1} - 1 = -(2y_n - 1)^2$$

eşitliğini ve ikinci denklemden

$$y_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$$

$$y_{n+1} = 2x_n - 2x_n^2$$

$$2y_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2$$

$$2y_{n+1} - 1 = -1 + 4x_n - 4x_n^2$$

$$2y_{n+1} - 1 = -(2x_n - 1)^2$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer  $2x_n - 1 = u_n$  ve  $2y_n - 1 = v_n$  değişken değiştirmelerini yaparsak

$$u_{n+1} = -v_n^2, \quad v_{n+1} = -u_n^2 \quad (4.19)$$

sistemini elde ederiz. İterasyonla

$$v_1 = -u_0^2$$

$$u_2 = -(-u_0^2)^2 = -u_0^4 = -u_0^{2^2}$$

$$v_3 = -u_2^2 = -(-u_0^4)^2 = -u_0^{2^3}$$

$$u_4 = -(-u_2^2)^2 = -(-u_0^{2^3})^2 = -u_0^{2^4}$$

⋮

$$u_{2n} = -u_0^{2^{2n}}$$

ve

$$\begin{aligned}
u_1 &= -v_0^2 \\
v_2 &= -(-v_0^2)^2 = -v_0^4 = -v_0^{2^2} \\
u_3 &= -v_2^2 = -(-v_0^4)^2 = -v_0^{2^3} \\
v_4 &= -(-v_2^2)^2 = -(-v_0^{2^3})^2 = -v_0^{2^4} \\
&\vdots \\
v_{2n} &= -v_0^{2^{2n}}
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. (4.19) sisteminde elde edilenleri yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
u_{2n+1} &= -v_{2n}^2 = -(-v_0^{2^{2n}})^2 = -v_0^{2^{4n}} \\
v_{2n+1} &= -u_{2n}^2 = -(-u_0^{2^{2n}})^2 = -u_0^{2^{4n}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Başta yaptığımız değişken değiştirmeler ile de

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{1}{2} - \frac{(2x_0 - 1)^{2^{2n}}}{2} \\
y_{2n} &= \frac{1}{2} - \frac{(2y_0 - 1)^{2^{2n}}}{2} \\
x_{2n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{(2y_0 - 1)^{2^{4n}}}{2} \\
y_{2n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{(2x_0 - 1)^{2^{4n}}}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**$a = b = 4$  durumu**

(4.1) lojistik fark denklem sistemi için  $a = 4$  ve  $b = 4$  için de bir çözümü olduğunu gösterelim. Bu durumda (4.1) sistemi

$$x_{n+1} = 4y_n(1 - y_n), \quad y_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (4.20)$$

olur.(4.20) sisteminde  $x_n = \sin^2 u_n$  ve  $y_n = \sin^2 v_n$  değişken değiştirmelerini yaptığımızda birinci denklemden

$$\sin^2 u_{n+1} = 4 \sin^2 v_n (1 - \sin^2 v_n)$$

$$\sin^2 u_{n+1} = 4 \sin^2 v_n (\cos^2 v_n)$$

$$\sin u_{n+1} = 2 \sin v_n \cos v_n$$

$$\sin u_{n+1} = \sin 2v_n$$

ve benzer şekilde ikinci denklemden

$$\sin^2 v_{n+1} = 4 \sin^2 u_n (1 - \sin^2 u_n)$$

$$\sin^2 v_{n+1} = 4 \sin^2 u_n (\cos^2 u_n)$$

$$\sin v_{n+1} = 2 \sin u_n \cos u_n$$

$$\sin v_{n+1} = \sin 2u_n$$

elde edilir. Buradan da

$$u_{n+1} = 2v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n \quad (4.21)$$

sistemini elde etmiş oluruz. (4.21) sistemini ayırıştırarak

$$u_{2n+1} = 2v_{2n} \quad (4.22)$$

$$u_{2n+2} = 2v_{2n+1} \quad (4.23)$$

$$v_{2n+1} = 2u_{2n} \quad (4.24)$$

$$v_{2n+2} = 2u_{2n+1} \quad (4.25)$$

denklemlerini elde ederiz. (4.24) denklemini (4.23) denkleminde kullandığımızda

$$u_{2n+2} = 2u_{2n} \quad (4.26)$$

denklemini ve (4.22) denklemini (4.25) denkleminde kullandığımızda

$$v_{2n+2} = 2v_{2n} \quad (4.27)$$

denklemini elde ederiz. (4.26) ve (4.27) denklemleri (3.11) formunda olup genel çözümleri (3.13) da  $p = 2$  ve  $q = 0$  alınarak bulunabilir. Bu durumda

$$u_{2n} = 2^n u_0 \quad (4.28)$$

$$v_{2n} = 2^n v_0 \quad (4.29)$$

formüllerini elde ederiz. (4.29) denklemini de (4.22) denkleminde ve (4.28) denklemini (4.24) denkleminde yerine yazdığımızda

$$u_{2n+1} = 2^{n+1} v_0 \quad (4.30)$$

$$v_{2n+1} = 2^{n+1} u_0 \quad (4.31)$$

olduğu görülebilir. Başta yapmış olduğumuz  $x_n = \sin^2 u_n$  ve  $y_n = \sin^2 v_n$  değişken değiştirmelerinden

$$u_n = \arcsin \sqrt{x_n} \quad , \quad v_n = \arcsin \sqrt{y_n}$$

olur. (4.28)-(4.31) formülleri bu değişken değiştirmelerde yerlerine yazılırsa

$$x_{2n} = \sin^2 \left( 2^n \arcsin \sqrt{x_0} \right)$$

$$y_{2n} = \sin^2 \left( 2^n \arcsin \sqrt{y_0} \right)$$

$$x_{2n+1} = \sin^2 \left( 2^{n+1} \arcsin \sqrt{y_0} \right)$$

$$y_{2n+1} = \sin^2 \left( 2^{n+1} \arcsin \sqrt{x_0} \right)$$

çözümlerine ulaşılır.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada,  $a$  ve  $b$  pozitif reel parametreler ve  $x_0, y_0$  reel başlangıç değerleri olmak üzere, lojistik fark denkleminin iki boyutlu bir genelleştirmesi olan

$$x_{n+1} = ay_n(1 - y_n), \quad y_{n+1} = bx_n(1 - x_n)$$

fark denklem sistemi tanımlandı. Sistemin çözümlerinin sınırlılığı, denge noktaları ve denge noktalarının lokal kararlılıkları araştırıldı. Genel olarak sistemin çözüm karakterinin, parametrelerin  $ab$  çarpımına bağlı olduğu görüldü. Elde edilen sonuçlar Teorem 4.1 ile ifade edildi. Son olarak, sistemin  $a = b = -2$ ,  $a = b = 2$  ve  $a = b = 4$  durumlarında çözülebilir olduğu gösterildi.

### 5.2. Öneriler

Bu tezde tanımlanan sistem lojistik fark denklemin iki boyutlu bir genelleştirmesidir. Fakat başka genelleştirmeler de yapılabilir. Buna göre

$$x_{n+1} = ax_n(1 - y_n), \quad y_{n+1} = by_n(1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = ay_n(1 - x_n), \quad y_{n+1} = bx_n(1 - y_n)$$

sistemleri de birer çalışma konusu olabilir. Ayrıca lojistik fark denklemini üç boyutlu sistemlere genişletilerek yeni fark denklem sistemleri tanımlanabilir ve incelenebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- AlSharawi, Z. ve Angelos, J., 2006, On the periodic logistic equation, *Applied Mathematics and Computation*, 180(1), 342-352.
- Brown, A., 1981, Equations for periodic solutions of a logistic difference equation, *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 23(1), 78-94.
- Brown, A., 1982, Solutions of period seven for a logistic difference equation, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 26(2), 263-284.
- Camouzis, E. ve Ladas, G., 2007, *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*.
- Ding, X. ve Zhang, R., 2008, On the difference equation  $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})e^{-x_n}$ , *Advances in Difference Equations*, 2008, 1-7.
- Edwards, C. H. ve Penney, D. E., 2008, *Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*, Palme.
- El-Raheem, Z. F. ve Salman, S. M., 2014, On a discretization process of fractional-order logistic differential equation, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(3), 407-412.
- Elsadany, A. A. ve El-Sayed, A. M. A., 2012, On a complex logistic difference equation, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 4(1), 37-47.
- Feng, H., Ma, H. ve Ding, W., 2016, Global asymptotic behavior of positive solutions for exponential form difference equations with three parameters, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 6(3), 600-606.
- Hoppensteadt, F. C. ve Hymant, J. M., 1977, Periodic solutions of a logistic difference equation, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 32(1), 73-81.
- Kaya, G. ve Kartal, S., 2020, Conformable kesirsel mertebeden tam değer fonksiyonlu lojistik modelin kararlılık ve çatallanma analizi, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(3), 1080-1090.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.
- Khuong, V. Van ve Phong, M. N., 2013, On a System of Two Difference Equations of Exponential Form, *International Journal of Difference Equations*, 8(2), 215-223.

- Kocic, V. L. ve Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications, Springer Science + Business Media.
- Kulenovic, M. R. S. ve Merino, O., 2002, Discrete dynamical systems and difference equations with mathematica, Chapman and Hall/CRC,
- May, R., 1976, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 261(5560), 459-467.
- Öztürk, Y., Anapalı, A. ve Gülsü, M., 2017, A numerical scheme for continuous population models for single and interacting species, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 19(1), 12-28.
- Pamuk, S., 2005, The decomposition method for continuous population models for single and interacting species, *Applied Mathematics and Computation*, 163(1), 79-88.
- Pamuk, S. ve Pamuk, N., 2010, He's homotopy perturbation method for continuous population models for single and interacting species, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(2), 612-621.
- Philos, C. G., 1992, Oscillations in a nonautonomous delay logistic difference equation, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 35(1), 121-131.
- Raouf, A., 2012, Global behaviour of the rational Riccati difference equation of order two: the general case, *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(6), 947-961.
- Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer fark denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*.
- Stević, S., Ahmed, A. E. S., Kosmala, W. ve Šmarda, Z., 2021, On a class of difference equations with interlacing indices, *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1-16.
- Sucu, G., 2016, Bir ayırık av-avcı modelinin kararlılık ve çatallanma analizi, Yüksek Lisans Tezi, *TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Fen Bilimleri*, Ankara.
- Suneel, M., 2006, Electronic circuit realization of the logistic map, *Sādhanā*, 31(1), 69-78.
- Tekin, D., 2019, Tekil çatallanma, Yüksek Lisans Tezi, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kayseri.
- Ünal, H., 2011, Lojistik fark denkleminin çözümlerinin karakterleri, Yüksek Lisans Tezi, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kayseri.
- Zhou, Z. ve Zhang, Q., 1999, Global attractivity of a nonautonomous logistic difference equation with delay, *Computers and Mathematics with Applications*, 38, 57-64.