



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KESİRLİ KABLO DENKLEMİNİN UYUMLU  
TÜREV OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIK  
ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI**

**Burcu YAŞKIRAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mayıs-2018  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Burcu YAŞKIRAN tarafından hazırlanan "KESİRLİ KABLO DENKLEMİNİN UYUMLU TÜREV OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI" adlı tez çalışması 11/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

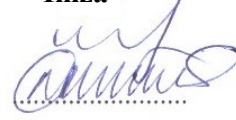
### Jüri Üyeleri

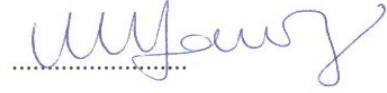
**Başkan**  
Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

**Danışman**  
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ

**Üye**  
Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

### İmza







Yukarıdaki sonucu onaylarım.

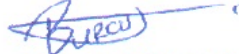
  
Prof. Dr. Mehmet KARALI  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

  
Burcu YAŞKIRAN  
11/05/2018

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## KESİRLİ KABLO DENKLEMİNİN UYUMLU TÜREV OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Burcu YAŞKIRAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ

2018, 66 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

Bu tezde zaman-kesirli bir boyutlu kablo denklemi ele alınmıştır. Kablo denkleminin çözümünde kesirli operatör olarak uyumlu türev operatörü (UTO) kullanılmıştır. UTO ile tanımlanan kesirli kablo denklemi (UKKD)'nin çözümünde kullanılacak olan yaklaşık-analitik metotlardan; Adomian ayrışım yöntemi (AAY), varyasyonel iterasyon metodu (VİM), homotopi analiz metodu (HAM), homotopi pertürbasyon metodu (HPM), modifiye homotopi pertürbasyon metodu (MHPM) ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM) üzerinde durulmuştur. Bu çalışmanın asıl amacı, literatürde var olan ve bahsi geçen yaklaşık-analitik metotları UTO ile yeniden tanımlayıp bu metotlarla UKKD'nin yaklaşık-analitik çözümlerini bulmaktır. Ayrıca uyumlu türev operatörünün 2014 yılında tanımlanmış olmasından dolayı bu alanda yeterince çalışma yoktur. Bu tez çalışmasıyla birlikte UTO ile ilgili yeni bir uygulama literatüre girecektir.

**Anahtar Kelimeler:** Adomian ayrışım yöntemi, Uyumlu türev operatörü, Homotopi analiz metodu, Homotopi pertürbasyon metodu, İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, Kesirli kablo denklemi, Modifiye homotopi pertürbasyon metodu, Varyasyonel iterasyon metodu.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL  
CABLE EQUATION WITH CONFORMABLE DERIVATIVE OPERATOR**

**Burcu YAŞKIRAN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Asst. Prof. Mehmet YAVUZ**

**2018, 66 Pages**

**Jury**

**Asst. Prof. Dr. Mehmet YAVUZ**

**Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR**

**Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ**

In this thesis, time-fractional one dimensional cable equation has been considered. Conformable derivative operator (CDO) has been used as a fractional operator in cable equation. Adomian decomposition method (ADM), variational iteration method (VIM), homotopy analysis method (HAM), homotopy perturbation method (HPM), modified homotopy perturbation method (MHPM) and reduced differential transform method (RDTM) have been emphasized in the solution of the conformable fractional cable equation (CFCE). The main aim of this study is to redefine the approximate-analytical methods that are mentioned above with CDO and to find the approximate-analytical solutions of CFCE with these suggested methods. Furthermore, since the conformable derivative operator had been defined in 2014, there are a little bit studies in this area. Therefore, a new application of CDO has been brought to the literature with this thesis.

**Keywords:** Adomian decomposition method, Conformable derivative operator, Fractional cable equation, Homotopy analysis method, Homotopy perturbation method, Modified homotopy perturbation method, Reduced differential transform method, Variational iteration method.

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında, her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca hep yanımda olan her konuda olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da bana güç ve cesaret veren desteğini hiçbir zaman esirgemeyen başta annem ve babam olmak üzere bütün aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Burcu YAŞKIRAN  
KONYA-2018

# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
TABLO LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Kaynak Araştırması .....	2
1.1.1. Kesirli Analiz İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar .....	2
1.1.2. Kesirli Kablo Denklemi İle İlgili Bazı çalışmalar .....	4
1.1.3. Kesirli Kablo Denkleminin Çözümünde Kullanılacak Olan Metodlar İle İlgili Bazı Çalışmalar.....	5
<b>2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....</b>	<b>8</b>
2.1. Temel Tanımlar.....	8
2.2. Temel Fonksiyonlar .....	10
2.2.1. Gamma Fonksiyonu.....	10
2.2.2. Beta Fonksiyonu .....	11
2.3. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller .....	12
2.3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali .....	12
2.3.2. Caputo Kesirli Türevi .....	13
2.3.3. Uyumlu Türev ve İntegrali .....	14
<b>3. KESİRLİ KABLO DENKLEMİ.....</b>	<b>19</b>
<b>4. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>22</b>
4.1. Adomian Ayrışım Yöntemi .....	22
4.1.1. Adomian Polinomlarının Türetilmesi .....	24
4.1.2. Adomian Ayrışım Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması.....	26

4.1.3. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü	28
4.2. Varyasyonel İterasyon Metodu	29
4.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	30
4.2.2. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözümü	32
4.3. Homotopi Analiz Metodu	35
4.3.1. Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi	36
4.3.2. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi	38
4.3.3. Homotopi Analiz Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	39
4.3.4. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine Homotopi Analiz Metodu ile Çözümü	40
4.4. Homotopi Pertürbasyon Metodu	42
4.4.1. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	43
4.4.2. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü	44
4.4.3. Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodu	46
4.4.4. Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	48
4.4.5. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü	49
4.5. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu	51
4.5.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu	51
4.5.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu	52
4.5.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu	52
4.5.4. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	55
4.5.5. Uyumlu Kesirli Kablo Denklemine İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü	56
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b>	<b>59</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>61</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>66</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1. Sınır hücresi.....	19
Şekil 3.2. Sınırlar arasındaki iletim .....	20
Şekil 4.1. $\alpha = 0.30$ ve $\alpha = 0.70$ için kablo denkleminin AAY ile çözümü.....	29
Şekil 4.2. $\alpha = 0.30$ ve $\alpha = 0.70$ için kablo denkleminin VİM ile çözümü. ....	34
Şekil 4.3. $\alpha$ 'nın farklı değerleri için kablo denkleminin kesin çözümü ile AAY ve VİM çözümlerinin karşılaştırılması.....	35
Şekil 4.4. $\alpha = 0.35$ ve $\alpha = 0.65$ için kablo denkleminin HPM ile çözümü.....	46
Şekil 4.5. $\alpha = 0.90$ ve $\alpha = 1$ için kablo denkleminin HPM ile çözümü.....	46
Şekil 4.6. $\alpha = 0.35$ ve $\alpha = 0.65$ için kablo denkleminin MHPM ile çözümü. ....	50
Şekil 4.7. Kablo denkleminin $\alpha = 0.90$ için MHPM ile çözümü ve kesin çözümü.....	51
Şekil 4.8. Kablo denkleminin $\alpha = 1$ için İDDM ile çözümü ve kesin çözümü.....	58

## TABLO LİSTESİ

<b>Tablo 2.1.</b> Gamma fonksiyonunun bazı değerleri.....	10
<b>Tablo 4.1.</b> Bazı fonksiyonların Adomian polinomları.....	24
<b>Tablo 4.2.</b> Kablo denkleminin AAY ve VİM ile çözümünden elde edilen mutlak hata $ \tilde{u}_k(x,t) - u(x,t) $ .....	34
<b>Tablo 4.3.</b> $t = 0.1$ değeri için kablo denkleminin HAM ile çözümü.....	42
<b>Tablo 4.4.</b> $t$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu .....	53
<b>Tablo 4.5.</b> Lineer olmayan fonksiyonlar için $t$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu .....	54
<b>Tablo 4.6.</b> Bazı fonksiyonların dönüşümleri.....	56



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu
$B(z, w)$	: İki değişkenli beta fonksiyonu
$D_a^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
$J_a^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$D_{*a}^\alpha$	: Caputo kesirli türev operatörü
$T_{*t}^\alpha$	: Uyumlu türev operatörü
$I_{*t}^\alpha$	: Uyumlu integral operatörü
$A_n$	: Adomian polinomları
$L$	: Lineer terimler
$N$	: Lineer olmayan terimler
$R$	: Lineer operatörün geri kalanı
$\lambda$	: Lagrange çarpanı
$\delta$	: Düzeltme fonksiyoneli
$\tilde{u}_n$	: Sınırlanmış varyasyon
$p$	: Homotopi parametresi
$D_m(\phi)$	: $\phi$ 'nin $m$ . mertebeden homotopi türevi
$\alpha$	: Alfa
$\lceil \alpha \rceil$	: $\alpha$ 'dan büyük veya alfaya eşit olan en küçük tam sayı
$\zeta$	: Ksi

### Kısaltmalar

UTO	: Uyumlu Türev Operatörü
UKKD	: Uyumlu Kesirli Kablo Denklemi
AAV	: Adomian Ayrışım Yöntemi
VİM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
MHPM	: Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodu
DDM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
İDDM	: İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

## 1. GİRİŞ

Geçmişten bugüne gerçek yaşamda ortaya çıkan fiziksel olayları anlayabilmek ve çözebilmek için matematiksel ifadelerden yani denklemlerden yararlanılmıştır. Diferansiyel denklemler bu tür problemlerin modellenmesinde önemli bir yere sahiptir. Teknolojinin ilerlemesi ile birlikte çeşitli bilim dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin yetersizliği dikkat çekmektedir. Bu sebeple klasik analizdeki türev ve integral tanımlarının tamsayı mertebeden reel veya kompleks mertebeye genişletilmesiyle kesirli analiz ortaya çıkmıştır. Kesirli analizde farklı türev tanımlarının olması, probleme göre en uygun tanımın kullanılması sonucunda çözümün en iyi şekilde bulunmasını sağlar. Günümüzde; biyolojik sistemleri modellemede, biyofizik, biyomühendislik, elektromanyetik teori, fizik ve kontrol teorisi, ekonomi, finans, tıp, deprem bilimleri, viskoelastik materyallerin fiziksel durumlarının modellenmesi, analitik ve sayısal yöntemler gibi alanlarda kesirli analiz kullanılmaktadır. Örneğin; tıp alanında insan vücudundaki sistemlerin daha kolay anlaşılması ve dinamik davranışlarının incelenmesi için bu sistemlerin matematiksel modellemeleri oluşturulmaktadır. Aynı zamanda matematiksel olarak sistemlerin modellenmesi deneysel çalışmaları desteklediği için oldukça önemlidir.

Bu çalışmada zaman-kesirli bir boyutlu kablo denklemi ele alınmıştır. Kablo denklemi sinir hücrelerindeki iyonların difüzyonunun modellenmesinde kullanılmaktadır. Kesirli operatör olarak ise bu denklemde uyumlu türev operatörü (UTO) kullanılmıştır. Uyumlu türev operatörü baz alınarak tanımlanan uyumlu kesirli kablo denklemi (UKKD)'nin çözümünde kullanılacak olan yaklaşık-analitik metotlardan; Adomian ayrışım yöntemi (AAY), varyasyonel iterasyon metodu (VİM), homotopi analiz metodu (HAM), homotopi pertürbasyon metodu (HPM), modifiye homotopi pertürbasyon metodu (MHPM) ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM) detaylı bir şekilde anlatılmış ve bu yöntemlerle UKKD çözülmüştür.

Bu tezde birinci bölüm giriş bölümü olup kesirli analiz ve kablo denkleminin çözümünde kullanılacak olan yaklaşık-analitik metotların literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde temel tanımlar, temel fonksiyonlar, kesirli türev ve kesirli integral tanımlarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli kablo denkleminin genel yapısı ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde UKKD'nin çözümünde kullanılacak olan yaklaşık-analitik metotların teorisi anlatılmış ve UKKD'nin bu metotlarla çözümü yapılmıştır. Ayrıca elde edilen çözüm fonksiyonlarını geometrik olarak yorumlayabilmek için bu fonksiyona ait şekil ve tablolara yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasının beşinci ve son bölümünde ise UKKD'nin yaklaşık-analitik çözümlerinin şekil ve tablolara göre sonuçları değerlendirilmiştir.

## 1.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde, kesirli analiz, kablo denklemi ve bu çalışmada kablo denkleminin çözümünde kullanılacak olan metotlar ile ilgili literatürde yapılmış bazı çalışmalara yer verilmiştir.

### 1.1.1. Kesirli Analiz İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar

Kesirli analiz ilk kez Eylül 1695'te L'Hospital tarafından Leibnitz'e  $n = 1/2$  olması durumunda  $d^n/dx^n$  ifadesinin nasıl hesaplanacağını bir mektupla sormasıyla birlikte ortaya çıkmıştır (Nishimoto, 1991).

Aralık 1695'te Bernoulli, Leibniz'e "Türevlerin kesirli veya irrasyonel" olması durumu ile ilgili sorular sorduğu bir mektup yazmıştır. Leibniz de bir önceki mektuba benzer fakat genel mertebeli türev yapısı hakkında L'Hospital'a yolladığına kıyasla daha detaylı bilgiler veren bir mektubu Bernoulli'ye göndermiştir (Weilbeer, 2005).

1716 yılında Leibniz'in ölmesi ile kesirli mertebeli türevle ilgili araştırmalar sona ermemiştir. 1783 yılında Euler bu konuya makalesinde yer vermiş ve ilk defa faktöriyelin genelleştirilmesi olan Gamma fonksiyonunu sunmuştur (Weilbeer, 2005).

1772 yılında Lagrange tam sayı mertebeli diferansiyel operatörler için üstlerin bir kuralını geliştirmiş ve daha sonra belirli şartlar altında üstlerin keyfi seçimlere dönüşebileceğini bulmuştur (Lagrange, 1775).

1812 yılında "Théorie analytique des probabilités" adlı kitap çıkaran Laplace, kesirli türevin tanımını detaylı olarak ilk kez bu kitapta vermiştir. Bu kitapta Laplace bir integral ile gösterilen fonksiyonlar için kesirli türev tanımını bulmuştur (Weilbeer, 2005).

1819 yılında Lacroix “Traité du calcul différentiel et du calcul intégral” adlı kitabında tam sayı mertebeli türevin genelleştirilmesiyle kesirli mertebeli türevin elde edilebileceğini söylemiştir (Weilbeer, 2005). Ayrıca Euler’in bulduğu Gamma fonksiyonunu kullanarak kesirli mertebeden türevi formülize etmiştir. Lacroix’in elde ettiği bu formül Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla benzerdir (Ross, 1975).

1822 yılında Fourier kesirli mertebeli türevin başka bir tanımını vermiştir. Fourier bu tanımı yaparken ne Lacroix’in çalışmasındaki tanıma ne de Laplace’ın çalışmasındaki gibi bir tanıma ihtiyaç duymamıştır (Fourier, 1822).

1823 yılında Abel Tautochrone probleminde açığa çıkan bir integral denklemini çözmek için kesirli mertebeden türevi kullanmıştır (Abel, 1823). Samko vd. de çıkardıkları kitapta Abel’in çalışmasına değinmişlerdir (Samko, Kilbas ve Marichev, 1993).

1837’de Abel’in bu çalışmasından sonra kesirli analizle ilgili ilk çalışmalar Liouville tarafından yapılmıştır (Liouville, 1837). Liouville ilk olarak seriye açılabilen bir fonksiyon ele almış ve kesirli türev tanımını uygulamıştır (Ross, 1975; Weilbeer, 2005). Daha sonra bu tanımda  $\alpha$ ’nın seçiminde sınırlamaları olduğu görülmüştür ve  $\alpha$  keyfi parametre olmak üzere  $f(x)=1/x^\alpha$  şeklindeki fonksiyonların kesirli türevi hesaplanmıştır (Fowler, 1975).

1847 yılında ise Riemann, Taylor serisinin genelleştirilmesini göz önüne almış ve fonksiyonun  $\alpha$ . mertebeden kesirli integralini bulmuştur. Fakat Riemann bu çalışmasını yayınlamamıştır. Riemann öldükten sonra bu çalışmasına 1876 yılında “Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass- Bernhard Riemann” adlı yayında yer verilmiştir (Ross, 1975). Riemann’ın kesirli türev tanımı ve Liouville’nin kesirli integral tanımı birleştirilerek birçok yazar tarafından Riemann-Liouville tanımının gelişmesi sağlamıştır (Hilfer, 2000; Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006; Oldham ve Spanier, 1974).

1867-1868 yılları arasında Grünwald ve Letnikov sonlu fark yaklaşımı yardımıyla kesirli türev tanımını yapmışlardır. Bu tanımın bazı şartlar altında Riemann-Liouville tanımına denk olduğunu ispatlamışlardır (Kilbas vd., 2006; Podlubny, 1999; Samko vd., 1993).

Caputo 1967 yılında başlangıç şartları ile verilen kesirli türevlere sahip diferensiyel denklemler için “Caputo kesirli türevi” olarak bilinen kesirli türev tanımını yapmıştır (Caputo, 1967).

Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımlarının yanı sıra;

2014 yılında Khalil vd. tarafından yeni bir türev operatörü olan uyumlu türev operatörü (UTO) tanımlanmıştır (Khalil, Al Horani, Yousef ve Sababheh, 2014). Literatürdeki bütün kesirli türev tanımları sadece klasik türev tanımındaki lineer olma özelliğini sağlarken, UTO'nun klasik türevdekine benzer limit formuna sahip olduğu ve klasik türevdeki çarpım ve bölüm kurallarını sağladığı görülmektedir. UTO sağladığı bu özelliklerden dolayı kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde sıklıkla kullanılmaktadır.

Farklı tarz problemlerin çözümlerinde UTO kullanılmıştır. Bunlardan bazıları:

2015 yılında Abdeljawad, uyumlu Laplace dönüşümünü ve uyumlu kesirli kuvvet serisinin açılımını tanımlamıştır (Abdeljawad, 2015).

2015 yılında Batarfi vd. tarafından uyumlu operatörü sınır değer problemlerine uygulanmıştır (Batarfi, Losada, Nieto ve Shammakh, 2015).

2016 yılında Avcı vd. silindirik bir plaka üzerindeki ısı denkleminde uyumlu türev operatörünü kullanmışlar (Avcı, D, Eroglu ve Ozdemir, 2016) ve aynı zamanda 2017 yılında radyal simetrik bir plaka üzerindeki ısı denkleminde türev operatörü olarak UTO'yu uygulamışlardır (Avcı, Derya, Eroglu ve Ozdemir, 2017).

Acan vd. UTO'yu varyasyonel iterasyon metoduna (Acan, Oturanc ve Keskin, 2017), daha sonra Adomian ayrışım metodu ve İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu üzerinde uygulayarak bazı lineer ve lineer olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık-analitik çözümlerini bulmuşlardır (Acan ve Baleanu, 2017).

Çenesiz vd. Burgers tipi denklemlerin çözümlerinde UTO'yu kullanarak kesin çözüm elde etmişlerdir (Çenesiz, Baleanu, Kurt ve Tasbozan, 2017).

Yavuz, UTO'yu Adomian ayrışım metodu ve modifiye homotopi pertürbasyon metodu üzerinde uygulayarak bazı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmuştur (Yavuz, 2018).

Ilei vd. kesirli Bernoulli ve Riccati denklemlerinin genel çözümlerini UTO yardımıyla bulmuşlardır (Ilei, Biazar ve Ayati, 2017).

### 1.1.2. Kesirli Kablo Denklemi İle İlgili Bazı Çalışmalar

Kesirli kablo denkleminin yaklaşık çözümü literatürde çok az olup, 2009 yılında Liu vd. tarafından kapalı sayısal metodu (Liu, Yang ve Turner, 2009), 2011 de Murillo

vd. kompakt sonlu fark yöntemi (Murillo ve Yuste, 2011) ve 2012 de ise Hu vd. sayısal fark metodu (Hu ve Zhang, 2012) ile elde etmişlerdir.

Fakat daha önceki çalışmalarda kullanılan türev operatörü Caputo ya da Riemann-Liouville türev operatörü olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada kesirli kablo denkleminin çözümünde türev operatörü olarak UTO kullanılacaktır.

Ayrıca bu tez çalışmasının bir ürünü olarak UTO'nun Adomian ayrışım yöntemi ve varyasyonel iterasyon metoduna uygulanmasıyla kesirli kablo denkleminin yaklaşık-analitik çözümü elde edilmiştir (Yavuz ve Yaskiran, 2017).

### **1.1.3. Kesirli Kablo Denkleminin Çözümünde Kullanılacak Olan Metodlar İle İlgili Bazı Çalışmalar**

Adomian ayrışım yöntemi (AAY) ile ilgili çalışmalar;

AAY ilk defa 1988 yılında Adomian tarafından lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için ortaya çıkarılmıştır (Adomian, 1988).

Adomian vd. başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmuşlardır (Abbaoui ve Cherruault, 1995; Adomian, 1990).

Wazwaz vd. lineer olmayan operatörlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için yeni bir algoritma geliştirmişlerdir (Wazwaz, A.-M., 2000; Wazwaz, A.-M. ve El-Sayed, 2001).

2012 yılında Duan vd. AAY'nin kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmasını ele almışlardır (Duan, Rach, Baleanu ve Wazwaz, 2012).

Varyasyonel iterasyon metodu (VİM) ile ilgili çalışmalar;

1978 yılında Inokuti vd. tarafından kuantum mekaniğinde lineer olmayan problemlerin çözümü için genel Lagrange çarpanı yöntemi (LÇY) geliştirilmiştir (Inokuti, Sekine ve Mura, 1978).

Daha sonra genel LÇY temel alınarak VİM ilk kez 1997 yılında He tarafından ileri sürülmüş (He, 1997) ve 1998 de kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde ilk kez uygulanmıştır (He, 1998).

2006 da Odibat vd. kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin yaklaşık-analitik çözümlerinde VİM den yararlanmışlardır (Odibat ve Momani, 2006).

Bu metod daha sonra Soltanian vd. tarafından cebirsel denklemlere uygulanmıştır (Soltanian, Karbassi ve Hosseini, 2009).

2009 yılında Wazwaz da kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde VİM ve AAY den yararlanmış (Wazwaz, A. M., 2009).

Homotopi analiz metodu (HAM) ile ilgili çalışmalar;

HAM ilk olarak 1992 de Liao tarafından homotopi kavramı kullanılarak lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için tanımlanmıştır (Liao, 1992).

Bu yöntem birçok bilimci tarafından Fisher denklemi (Tan, Xu ve Liao, 2007), ısı yayılımı denklemi (Abbasbandy, 2007), Zakharov-Kuznatsov denklemi (Molliq, Noorani, Hashim ve Ahmad, 2009) vb. çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Zurigat vd. HAM'ı kesirli mertebeye sahip cebirsel diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Zurigat, Momani ve Alawneh, 2010).

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ve modifiye homotopi pertürbasyon metodu (MHPM) ile ilgili çalışmalar;

1999 yılında He, HPM'yi oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramından yararlanmış ve lineer olmayan problemlerin çözümü için problemleri lineerleştirmiştir (He, 1999a). Daha sonra bazı lineer olmayan denklemlerin HPM ile yaklaşık çözümünü bulmuştur (He, 2000, 2003, 2004, 2005).

2007 de Odibat tarafından HPM geliştirilerek modifiye homotopi pertürbasyon metodu (MHPM) tanımlanmıştır. Bu metod HPM ile karşılaştırıldığında seri çözümünün daha hızlı yakınsadığı ve dolayısıyla uygulanan alanlarda daha hızlı çözüme ulaşıldığı sonucuna varılmıştır (Odibat, 2007).

2008 de Abdulaziz vd. lineer ve lineer olmayan denklemlere HPM ve MHPM'yi uygulamışlardır (Abdulaziz, Hashim ve Momani, 2008).

MHPM'nin bazı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanıldığı farklı çalışmalar mevcuttur (Odibat ve Momani, 2008; Yavuz, 2018; Yavuz ve Özdemir, 2019).

Diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) ile ilgili çalışmalar;

DDM ilk olarak 1986 yılında Zhou tarafından elektrik devre analizindeki problemlerin çözümünde kullanılmıştır (Zhou, 1986).

Chen vd. ise ilk kez DDM den hareketle kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için iki boyutlu DDM'yi tanıtmışlar ve bazı denklemlerin çözümü için bu metottan yararlanmışlardır (Chen ve Ho, 1999).

Ayaz iki boyutlu DDM den hareketle üç boyutlu DDM'yi tanıtmış (Ayaz, 2003), Kurnaz vd. ise N-boyutlu DDM'yi tanıtmışlardır (Kurnaz ve Oturanç, 2005).

Bunların yanı sıra Keskin vd. lineer olmayan fonksiyonların diferansiyel dönüşümlerinin karşılığını hesaplamışlardır (Keskin ve Oturanç, 2008).

2009 yılında ise Keskin vd. lineer olmayan fonksiyonlar için verilen tanımlardan yararlanarak İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM)'nu tanıtmışlardır (Keskin ve Oturanç, 2009).

Acan vd. İDDM'yi kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Acan, Fırat, Keskin ve Oturanç, 2016).



## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

### 2.1. Temel Tanımlar

**Tanım 2.1.**  $f(x)$ ,  $I$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

limiti varsa,  $f(x)$ 'e bir  $x_0 \in I$  noktasında türemlenebilir (diferansiyellenebilir) denir ve bu limite  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki türevi adı verilir (Thomas, Finney, Weir ve Giordano, 2003).

**Tanım 2.2.** Bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesi tam sayı değil de rasyonel sayı ise bu türeve kesirli türev denir (Podlubny, 1998).

**Tanım 2.3.** Bir bağımlı değişken ve bu bağımlı değişkenin bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir (Podlubny, 1998). Diğer bir deyişle kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir.

**Tanım 2.4.** Diferansiyel denklem, bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeriyorsa denkleme kesirli adi diferansiyel denklem denir (Podlubny, 1998). Örneğin,  $D^{1/2}y(t) + 5y^2(t) - 3 = 0$  denklemi bir kesirli adi diferansiyel denklemdir.

**Tanım 2.5.** Diferansiyel denklem, bağımlı değişkenin bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeriyorsa denkleme kesirli kısmi diferansiyel denklem

denir (Podlubny, 1998). Örneğin,  $D_{x,t}^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  denklemi

bir kesirli kısmi diferansiyel denklemdir.

**Tanım 2.6.** Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen koşullar altındaki probleme başlangıç değer problemi ve bu koşullara da başlangıç değer koşulları denir. Bağımsız değişkenin

farklı değerleri için verilen koşullar altındaki probleme ise sınır değer problemi, bu koşullara da sınır değer koşulları denir (Debnath, 2011).

**Tanım 2.7.** Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli türevin mertebesine denklemin mertebesi ve en yüksek mertebeli türevin derecesine (kuvvetine) ise denklemin derecesi denir (Podlubny, 1999).

**Tanım 2.8.** Bir diferansiyel denklemde,

- bağımlı değişkenin tüm türevleri birinci mertebeden
- bağımlı değişken ve türevleri hiçbir zaman çarpım durumunda olmayan
- katsayılarının sadece bağımsız değişkenin fonksiyonları veya sabit olması

koşullarını sağlayan denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Lineer bir diferansiyel denklemin genel formu  $P_0(x) \neq 0$  olmak üzere

$$P_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + P_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \dots + P_0(x)y(x) = Q(x) \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada  $D^{\alpha_j}$ , ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) kesirli diferansiyel operatördür ve lineerdir.

(2.1) denkleminin lineerlik koşullarını sağlamayan denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklemler denir (Debnath, 2011). Örneğin,

$$x^3 D^{3/2}y(x) + y(x) = e^x \text{ ve } D^{2\alpha}y(x) + D^\alpha y(x) - y(x) = 0 \text{ denklemleri lineer iken,}$$

$$D^{2/3}y(x) = y^2(x) \text{ ve } y(x)D^{3/2}y(x) + D^{3/5}y(x) = x^3 \text{ denklemleri lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir.}$$

**Tanım 2.9.** (2.1) denkleminde  $Q(x) = 0$  ise bu denkleme homojen diferansiyel denklem denir.  $Q(x) \neq 0$  ise bu denkleme homojen olmayan diferansiyel denklem denir (Debnath, 2011).

**Tanım 2.10.** Eğer  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında her mertebeden türevi varsa, yani  $k = 0, 1, 2, \dots$  için  $f^{(k)}(x_0)$  mevcutsa bu fonksiyon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) toplamına  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında

Taylor serisi ve  $x_0 = 0$  için ise Maclaurin serisi denir (Thomas vd., 2003).

## 2.2. Temel Fonksiyonlar

### 2.2.1. Gamma Fonksiyonu

**Tanım 2.2.1.** Gamma fonksiyonu  $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, \dots\}$  olmak üzere

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, & \text{Re}(z) > 0 \\ \Gamma(z+1)/z, & \text{Re}(z) \leq 0, \quad z \neq 0, -1, \dots \end{cases} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır (Weilbeer, 2005).

**Teorem 2.2.1.** Gamma fonksiyonu

1.  $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, \dots\}$  için  $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) = z!$
2.  $z \in \mathbb{N}$  için  $\Gamma(z) = (z-1)!$
3.  $z \in \mathbb{C} / \{0, 1, 2, \dots\}$  için  $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$

$$4. \text{ Re}(z) > 0 \text{ için } \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

5. Tamsayı olmayan  $\forall z \in \mathbb{C}$  için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ ve } \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

özelliklerine sahiptir (Weilbeer, 2005).

Gamma fonksiyonuna ait bazı değerler hesaplanmış olup aşağıda verilmiştir (Podlubny, 1999).

**Tablo 2.1.** Gamma fonksiyonunun bazı değerleri

$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(0)$	Tanımsız

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	$\infty$

### 2.2.2. Beta Fonksiyonu

**Tanım 2.2.2.** İki değişkenli Beta fonksiyonu  $z, w \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır (Weilbeer, 2005).

**Teorem 2.2.2.** Beta fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Weilbeer, 2005).

1.  $\text{Re}(z), \text{Re}(w) > 0$  için (2.4) denklemi

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

integrali ile tanımlanır.

2. Beta fonksiyonu

- a)  $B(z, w) = B(w, z)$

- b)  $B(z, w) = B(z+1, w) + B(z, w+1)$

özelliklerine sahiptir (Weilbeer, 2005).

### 2.3. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Bu bölümde kesirli analizde kullanılan Riemann-Liouville, Caputo ve uyumlu türev ve integral tanımlarından bahsedilecektir. Bu çalışmada kesirli kablo denkleminin çözümünde kesirli operatör olarak uyumlu türev operatörü kullanılacaktır. Bu yüzden uyumlu operatörü üzerinde daha detaylı durulacaktır.

#### 2.3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

**Tanım 2.3.1.1.**  $\alpha > 0$  için  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville (R-L) integral operatörü

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad t > a$$

şeklinde tanımlanır.  $\alpha = 0$  olduğu durumda ise

$$J_a^0 f(x) = f(x)$$

dir (Ahmad, 2015).

$f, x \geq a$  için sürekli ve  $\alpha, \beta > 0$  olmak üzere Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri şu şekildedir (Das, 2011) :

1.  $J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x)$
2.  $J_a^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 J_a^\alpha f_1(x) + c_2 J_a^\alpha f_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**Teorem 2.3.1.1.**  $f(x) = (x-a)^\gamma$  olmak üzere

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (x-a)^{\gamma+\alpha}, \quad x \geq a, \alpha > 0, \gamma > -1$$

biçiminde gösterilir (Diethelm, 2010).

**Tanım 2.3.1.2.**  $\alpha > 0, a \in \mathbb{R}, x > a$  ve  $m-1 < \alpha < m$  olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

$$(D_a^\alpha f)(x) = D^m \left[ D_a^{-(m-\alpha)} f(x) \right] = D^m \left[ J_a^{(m-\alpha)} f(x) \right] = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} dt \right]$$

olarak tanımlanır (Ahmad, 2015; Das, 2011; Diethelm, 2010).

R-L kesirli türevine ait

$[a, b]$  üzerinde sürekli  $f, f_1, f_2$  fonksiyonlarının  $D_a^\alpha$  türevleri mevcut olmak üzere

1.  $D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x)$ ,
  2.  $J_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} [D_a^{\alpha-k-1} f(a)] \frac{x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}$ ,
  3.  $D_a^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 D_a^\alpha f_1(x) + c_2 D_a^\alpha f_2(x)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,
  4.  $D_a^\alpha D_a^\beta f(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} [D_a^{\beta-k-1} f(a)] \frac{x^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)}$ ,
- $m-1 < \alpha < m$ ,  $n-1 < \beta < n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

5.  $[0, b]$  üzerinde sürekli  $f(x)$  fonksiyonu ve  $D_0^\alpha$  türevi mevcut olmak üzere

$$f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ koşulu altında,}$$

$$D_0^n D_0^\alpha f(x) = D_0^{\alpha+n} f(x) = D_0^\alpha D_0^n f(x), m-1 < \alpha < m, n \in \mathbb{N}.$$

özellikleri verilebilir (Das, 2011; Oldham ve Spanier, 1974).

**Teorem 2.3.1.2.**  $f(x) = (x-a)^\gamma$  ve  $x > a$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > L$ ,  $L = \max(-1, \alpha-1)$  olmak üzere

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (x-a)^{\gamma-\alpha}$$

biçiminde gösterilir. Özel olarak bir sabitin R-L kesirli türevi genelde sıfır olmaz, yani  $f(t) = 1$  olmak üzere

$$D_a^\alpha 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} 1^{-\alpha} \neq 0$$

olmaktadır (Samko vd., 1993).

### 2.3.2. Caputo Kesirli Türevi

Caputo kesirli integrali R-L kesirli integrali ile eşdeğerdir ve  $J_a^\alpha$  ile gösterilir.

**Tanım 2.3.2.1.**  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m-1 < \alpha < m$  için Caputo türev operatörü  $D_{*a}^\alpha$  şeklinde gösterilir ve

$$D_{*a}^\alpha f(x) = J_a^{m-\alpha} D_a^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} dt, x > a$$

şeklinde tanımlanır (Caputo, 1967; Diethelm, 2010).

Caputo türevine ait

$[a, b]$  aralığında sürekli  $f, f_1, f_2$  fonksiyonlarının  $D_{*a}^\alpha$  türevleri mevcut olmak üzere

1.  $D_{*a}^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x)$
2.  $J_a^\alpha D_{*a}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k, a \geq 0$
3.  $D_{*a}^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 D_{*a}^\alpha f_1(x) + c_2 D_{*a}^\alpha f_2(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
4.  $[0, b]$  üzerinde sürekli  $f(x)$  fonksiyonu ve  $D_{*0}^\alpha$  türevi mevcut olmak üzere  $f^{(k)}(0) = 0, k = m, m+1, \dots, n$  koşulu altında,  
 $D_{*0}^n D_{*0}^\alpha f(x) = D_{*0}^{n+\alpha} f(x) = D_{*0}^\alpha D_{*0}^n f(x), m-1 < \alpha < m, n \in \mathbb{N}$
5.  $f \in C^k[a, b], \alpha, \beta > 0, l \leq k, k, l \in \mathbb{N}$  ve  $\alpha, \alpha + \beta \in [l-1, l]$  olmak üzere  
 $D_{*a}^\alpha D_{*a}^\beta f(x) = D_{*a}^{\alpha+\beta} f(x)$

özellikleri verilebilir (Ahmad, 2015).

R-L ve Caputo kesirli türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle gösterilir.

**Teorem 2.3.2.1.**  $\alpha > 0, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ ,

$$D_{*a}^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D_a^k f(a)$$

dır (Caputo, 1969).

**Teorem 2.3.2.2.**  $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$  ve  $k, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

1.  $D_{*a}^\alpha k = 0,$
2.  $D_{*a}^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, & \beta \in \mathbb{N} \text{ ve } \beta \geq m \text{ ya da } \beta \notin \mathbb{N} \text{ ve } \beta > m-1 \\ 0, & \beta \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\} \end{cases}$

biçiminde gösterilir (Ahmad, 2015).

### 2.3.3. Uyumlu Türev ve İntegrali

**Tanım 2.3.3.1.**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $\forall t > 0$  ve  $\alpha \in (0, 1]$  için  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden uyumlu türevi

$$T_{*t}^{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

biçiminde gösterilir (Khalil vd., 2014).

**Teorem 2.3.3.1.**  $\alpha \in (0,1]$  için  $f$  ve  $g$ ,  $t > 0$  noktasında  $\alpha$  diferansiyellenebilir olsun.

O halde

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için  $T_{*t}^{\alpha}(af + bg) = aT_{*t}^{\alpha}(f) + bT_{*t}^{\alpha}(g)$ ,
2.  $T_{*t}^{\alpha}(fg) = fT_{*t}^{\alpha}(g) + gT_{*t}^{\alpha}(f)$ ,
3.  $T_{*t}^{\alpha}(f/g) = \frac{gT_{*t}^{\alpha}(f) - fT_{*t}^{\alpha}(g)}{g^2}$ ,
4. Eğer  $f(t)$  diferansiyellenebilirse  $T_{*t}^{\alpha}(f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$ ,
5.  $\forall k \in \mathbb{R}$  için  $T_{*t}^{\alpha}(t^k) = kt^{k-\alpha}$ ,
6. Tüm  $f(t) = k$  biçimindeki sabit fonksiyonlar için  $T_{*t}^{\alpha}(f(t)) = 0$  dır (Khalil vd., 2014).

**İspat.**

1. 
$$T_{*t}^{\alpha}(af + bg) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[af(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + bg(t + \varepsilon t^{1-\alpha})] - [af(t) + bg(t)]}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)] + b[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon}$$

$$= aT_{*t}^{\alpha}(f) + bT_{*t}^{\alpha}(g)$$
2. 
$$T_{*t}^{\alpha}(fg) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} f(t) \right)$$

$$= T_{*t}^{\alpha} f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_{*t}^{\alpha} g(t)$$

yazılabilir.  $g$  fonksiyonu  $t$  de sürekli olduğu için  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$  olup ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
3. \quad T_{*t}^{\alpha}(f/g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]g(t) - [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon}g(t) - \frac{[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon}f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} \\
&= \frac{gT_{*t}^{\alpha}(f) - fT_{*t}^{\alpha}(g)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $g$  fonksiyonu  $t$  de sürekli olduğu için  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$  dir.

4. Tanım 2.3.3.1 de  $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$  dönüşümü yaparsak

$$T_{*t}^{\alpha}(f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$$

elde edilir.

5. (4)'ün ispatından faydalanılarak

$$T_{*t}^{\alpha}(t^k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^k - t^k}{ht^{\alpha-1}}$$

limitindeki  $(t+h)^k$  ifadesine binom açılımı uygulandığında

$$\begin{aligned}
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \binom{k}{0} t^k + \binom{k}{1} t^{k-1} h + \binom{k}{2} t^{k-2} h^2 + \dots + \binom{k}{r} t^{k-r} h^r + \dots + \binom{k}{k} h^k \right) - t^k}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^k + kt^{k-1}h + \binom{k}{2} t^{k-2} h^2 + \dots + \binom{k}{r} t^{k-r} h^r + \dots + \binom{k}{k} h^k - t^k}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left( kt^{k-1} + \binom{k}{2} t^{k-2} h^1 + \dots + \binom{k}{r} t^{k-r} h^{r-1} + \dots + \binom{k}{k} h^{k-1} \right)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \left( kt^{k-1} + \binom{k}{2} t^{k-2} h^1 + \dots + \binom{k}{r} t^{k-r} h^{r-1} + \dots + \binom{k}{k} h^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$T_{*t}^{\alpha} (t^k) = kt^{k-\alpha}$$

olur.

6.  $T_{*t}^{\alpha} (f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$  den faydalanarak tüm  $f(t) = k$  biçimindeki sabit

fonksiyonlar için

$$T_{*t}^{\alpha} (k) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} k = t^{1-\alpha} \cdot 0 = 0$$

olur.

**Tanım 2.3.3.2.**  $\alpha \in (n, n+1]$  için  $f$ ,  $t > 0$  noktasında  $n$ -kez diferansiyellenebilir olsun.  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden uyumlu türevi,

$$T_{*t}^{\alpha} (f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır (Anderson ve Ulness, 2015; Atangana, Baleanu ve Alsaedi, 2015; Batarfi vd., 2015; Khalil vd., 2014). Burada  $\lceil \alpha \rceil$ ,  $\alpha$  dan büyük veya ona eşit olan en küçük tam sayıdır.

**Lemma 2.3.3.1.**  $f$ ,  $t$  de  $n$ -kez diferansiyellenebilir olsun.  $\forall t > 0$  ve  $\alpha \in (n, n+1]$  için

$$T_{*t}^{\alpha} (f(t)) = t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f^{\lceil \alpha \rceil} (t)$$

biçiminde gösterilir (Khalil vd., 2014).

**Tanım 2.3.3.3.**  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $t \geq a$  ve  $f$  fonksiyon olmak üzere  $\alpha$  mertebeli uyumlu integrali

$$I_{*t}^{\alpha} (f(t)) = T_{*t}^{-\alpha} (f(t)) = \int_a^t \frac{f(\zeta)}{\zeta^{1-\alpha}} d\zeta$$

olarak tanımlanır (Khalil vd., 2014).

**Teorem 2.3.3.2.**  $f$  sürekli bir fonksiyon ve  $0 < \alpha \leq 1$  olsun. Bu durumda  $\forall t > a$  için

1.  $T_{*t}^{\alpha} I_{*t}^{\alpha} (f(t)) = f(t)$
2.  $I_{*t}^{\alpha} T_{*t}^{\alpha} (f(t)) = f(t) - f(a)$

olur (Khalil vd., 2014).

**İspat:**  $f$  sürekli bir fonksiyon olduğu için türevlenebilir. Bundan dolayı

1. 
$$\begin{aligned} T_{*t}^{\alpha} I_{*t}^{\alpha} (f(t)) &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_{*t}^{\alpha} (f(t)) \\ &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\zeta)}{\zeta^{1-\alpha}} d\zeta \\ &= t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \\ &= f(t) \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} I_{*t}^{\alpha} T_{*t}^{\alpha} (f(t)) &= I_{*t}^{\alpha} \left( t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \right) \\ &= \int_a^t \frac{\zeta^{1-\alpha} \frac{d}{d\zeta} f(\zeta)}{\zeta^{1-\alpha}} d\zeta \\ &= \int_a^t f'(\zeta) d\zeta \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned}$$

**Teorem 2.3.3.3.**  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon,  $f^{(n)}(t)$  sürekli ve  $\alpha \in (n, n+1]$  olsun.

Bu durumda,  $\forall t > a$  için

1.  $T_{*t}^{\alpha} I_{*t}^{\alpha} (f(t)) = f(t)$
2.  $I_{*t}^{\alpha} T_{*t}^{\alpha} (f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$

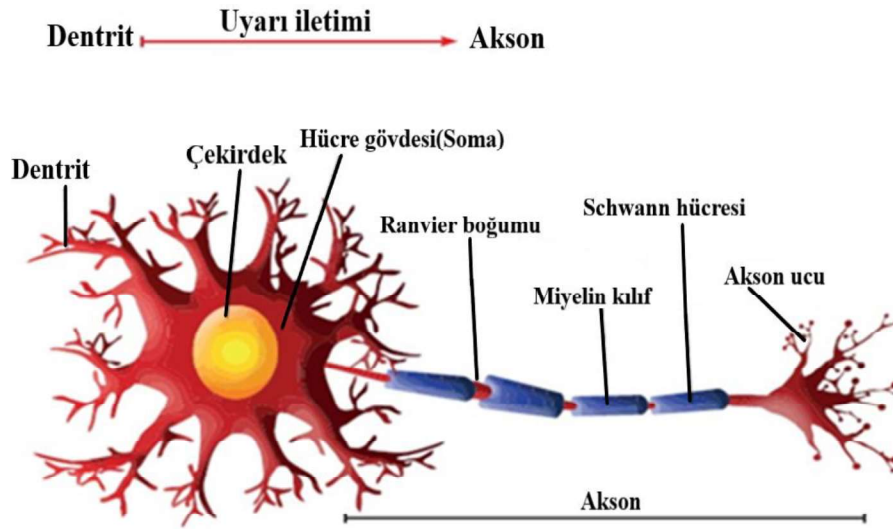
olur (Khalil vd., 2014).

### 3. KESİRLİ KABLO DENKLEMİ

Tıp alanında insan vücudundaki irili ufaklı sistemlerin matematiksel modellerinin kurulması insan vücudundaki sistemlerin modellerini elde etmemize ve o sistemleri anlamamıza yardımcı olmaktadır. Sinir hücrelerinin fizyolojik yapılarını ve dinamik davranışlarını incelemek üzere geliştirilen matematiksel modellemeler deneysel çalışmaları desteklemesi açısından önemlidir.

Sinir sistemi, sinir hücrelerinden (nöronlardan) oluşmaktadır. Sinir sistemindeki uyarıları elektriksel veya kimyasal yollarla aktarılmasını nöronlar sağlar. Nöronlar, vücudun iç ve dış çevresinden gelen uyarıları merkezi sinir sistemine, merkezi sinir sisteminden gelen yanıtları da organlara aktarır. Nöronlar; hücre gövdesi (soma), dendritler ve aksondan oluşmaktadır.

Hücre gövdesi; zar, sitoplazma ve çekirdekten oluşur. Hücre gövdesinden ağaç dalları gibi uzanan bir veya daha fazla sayıda olan kısa uzantılara dendrit, bir tane olan uzantıya ise akson denir. Dendritler, dıştan gelen uyarıyı somaya, akson ise uyarıyı somadan alıp iletilecek yere taşır. Yani sinir hücrelerinin iletim yönü dendritten aksone doğrudur.



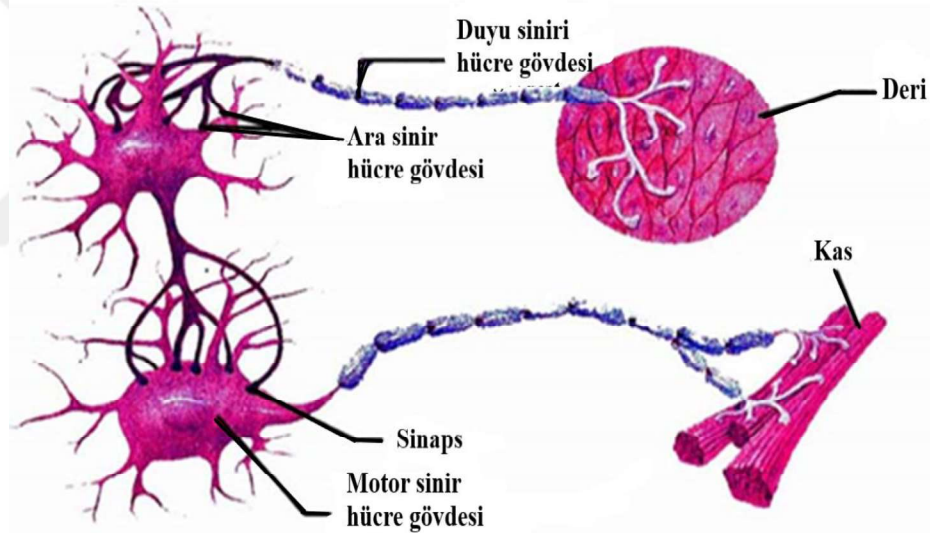
Sinir hücrelerinin (Nöron) yapısı

Şekil 3.1. Sinir hücresi

Bazı sinir hücrelerinin aksonları miyelin adı verilen kılıfla kaplıdır. Miyelin kılıfın üzerinde ranvier boğumu denilen boğumlar bulunmaktadır. Miyelin kılıf aksonun

diğer sinir hücrelerinin uyarılarından etkilenmesini ve iletim boyunca veri kaybının oluşmasını engeller. Bu sayede uyarılar daha hızlı iletilir. Miyelin kılıfta herhangi bir hasar olduğunda ise iletim bozulur. Miyelin kılıfa sahip olmayan nöronlar da vardır. Bu şekilde olan nöronların aksonları, schwann hücreleri ile örtülüdür.

Sinirler vücudun her bölgesinden gelen uyarıları ilgili merkeze ve merkezi sinir sisteminden gelen emirleri ise ilgili organlara iletir. Uyarıları merkezi sinir sistemine ileten sinirlere duyu sinirleri, kaslara ve salgı bezlerine ileten sinirlere ise motor sinirler denir. Duyu sinirleri ve motor sinirleri arasındaki iletişimi sağlayan sinirlere de ara sinirler denir. Sinir hücreleri arasındaki bilgilerin geçiş noktasına ise sinaps denir. Sinapslar, bilgi iletiminden sorumludur. Özetle, sinir hücreleri kendi aralarında elektrik devrelerine benzeyen bir iletişim sağlar (Kerçek, 2013).



Şekil 3.2. Sinirler arasındaki iletim

Çeşitli bölgelerinden değişik zamanlarda ileti alan dendritlerin, elektrik akımının akışını tanımlayan kablo modeli Rall tarafından geliştirilmiştir (Rall, 1957). Burada Rall, bir-boyutlu kablo modelinde nöronların elektrik akımının akışını kısmi diferansiyel denklemler kullanarak tanımlamaktadır.

Daha sonra sinir hücrelerinin karmaşık yapılarından dolayı sinir hücrelerindeki iyonların difüzyonunun modellenmesinde farklı kesirli türev operatörleri kullanılarak kesirli kablo denklemi geliştirilmiştir. Bunlara örnek olarak, Langlands vd. iyonların difüzyonunu modellemede (Langlands, Henry ve Wearne, 2005), Henry vd. iyonların anormal elektrodifüzyonu modellemede (Langlands vd., 2005), Reynolds plazma

zarının içinden geçen proteinlerin difüzyonunu modellemede (Reynolds, 2005) kesirli kablo denklemini türetmişlerdir.

Genel haliyle kesirli kablo denklemi (KKD):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}_0T_{*t}^{1-\gamma_1} \left( K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) - \mu_0^2 {}_0T_{*t}^{1-\gamma_2} u(x,t) + f(x,t), \quad (3.1)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.2)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(L,t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

(3.2) başlangıç koşulu ve (3.3) sınır koşullarıyla birlikte (3.1) denklemlerle verilir (Liu vd., 2009). Burada  $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ ,  $K > 0$  ve  $\mu_0^2$  sabitler ve  ${}_0T_{*t}^{1-\gamma_1} u(x,t)$  de  $1-\gamma_1$  mertebeli uyumlu türevidir.

(3.1) denkleminde özel olarak  $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$  alınır ve denkleme  ${}_0T_{*t}^{\alpha-1}$  operatörü uygulanırsa zaman-kesirli bir boyutlu kablo denklemi

$${}_0T_{*t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) + {}_0T_{*t}^{\alpha-1} f(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4)$$

veya Lemma 2.3.3.1 den

$$t^{1-\alpha} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) + t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} {}_0T_{*t}^{-1} f(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilir. Burada başlangıç koşulu

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.6)$$

ve sınır koşulları

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.7)$$

olarak ele alınacaktır.  $f$  fonksiyonu ise

$$f(x,t) = 2 \sin \pi x \left( t + (\pi^2 + 1) \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right)$$

dir. Başlangıç ve sınır koşulları altında (3.5) denkleminin kesin çözümü  $u(x,t) = t^2 \sin \pi x$  dir (Liu vd., 2009).

#### 4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde uyumlu türev operatörü kullanılarak tanımlanan kesirli kablo denkleminin yaklaşık-analitik çözümünü bulabilmek için öncelikle Adomian ayrışım yöntemi (AAY), varyasyonel iterasyon metodu (VİM), homotopi analiz metodu (HAM), homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM) anlatılacaktır. Daha sonra bu metodların kesirli diferansiyel denklemlere uygulanışı gösterilecek olup kesirli kablo denklemi (KKD)'nin bu yöntemlerle çözümü yapılacaktır.

##### 4.1. Adomian Ayrışım Yöntemi

Yöntemi açıklamak için,

$$F[u(x,t)] = g(x,t) \quad (4.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $u(x,t)$  bilinmeyen fonksiyon ve  $g(x,t)$  sürekli bir fonksiyon olup  $F$  ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan operatörü gösterebiliriz.  $L$  yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatörü,  $R$  lineer operatörün geri kalan kısmını,  $N$  ise lineer olmayan operatörü ifade etsin. Böylece (4.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (4.2)$$

şeklinde verebiliriz. (4.2) denkleminin her iki tarafına  $L^{-1}$  ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (4.3)$$

bulunur. Ayrışım metodu,  $u(x,t)$  bilinmeyen fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (4.4)$$

şeklinde seri formunda ve lineer olmayan terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.5)$$

biçiminde ayrıştırır.  $u$  ve  $Nu$  'lar sırası ile,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \quad (4.6)$$

$$f(u) = Nu = N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (4.7)$$

olarak elde edilir.  $A_n$  Adomian polinomlarının genel hali

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \quad (4.8)$$

Taylor seri açılımına dayanır (Adomian, 1988). Burada  $\lambda \in \mathbb{R}$  uygunluk için alınan bir parametredir.

(4.8) denkleminde lineer olmayan terim  $Nu$  yani  $f(u)$ ,  $u = u_0$  noktasında

Taylor serisine açılırsa

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2!} f''(u_0)(u - u_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(u_0)(u - u_0)^3 + \dots \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada

$$u - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (4.10)$$

şeklinde. (4.10) denklemi (4.9) denkleminde yerine yazılır ve indislerin toplamına göre düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 f'(u_0) \\ A_2 &= u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f''(u_0) \\ A_3 &= u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f'''(u_0) \\ A_4 &= u_4 f'(u_0) + \left( \frac{1}{2!} u_1^2 + u_1 u_2 \right) f''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 f^{(iv)}(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde bulunur (Adomian, 1994; Seng, Abbaoui ve Cherruault, 1996).

(4.4) ve (4.5) denklemlerini (4.2) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(x, 0) + L^{-1}g - L^{-1}R \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (4.12)$$

elde ederiz. Burada  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x, 0) + L^{-1}g \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ &\vdots \\ u_{k+1} &= -L^{-1}Ru_k - L^{-1}A_k, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır. Eğer  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  seri yakınsıyor ise (4.1) denkleminin çözümü,

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x, t) \quad (4.14)$$

biçiminde gösterilir. Fakat uygulamada  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\tilde{u}_k = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \quad (4.15)$$

veya

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= u_0 \\ \tilde{u}_2 &= u_0 + u_1 \\ \tilde{u}_3 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ \tilde{u}_{n+1} &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde bulunur.

#### 4.1.1. Adomian Polinomlarının Türetilmesi

Wazwaz, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Adomian polinomlarını hesaplamada daha kullanışlı bir metot geliştirmiştir (Wazwaz, A.-M., 2000). Wazwaz'ın metoduna göre  $A_n$  Adomian polinomları aşağıdaki Tablo 4.1. de verilmiştir.

**Tablo 4.1.** Bazı fonksiyonların Adomian polinomları

Fonksiyon	Adomian Polinomları
$F(u) = u^2$	$A_0 = u_0^2,$ $A_1 = 2u_0u_1,$ $A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2,$ $A_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3,$ $A_4 = u_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_0u_4,$ $\vdots$
Polinom tipinde $n \in \mathbb{Z}^+$ $F(u) = u^n$	$A_0 = u_0^n,$ $A_1 = nu_0^{(n-1)}u_1,$ $A_2 = \frac{1}{2}n(n-1)u_0^{(n-2)}u_1^2 + nu_0^{(n-1)}u_2,$ $A_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)u_0^{(n-3)}u_1^3 + n(n-1)u_0^{(n-2)}u_1u_2 + nu_0^{(n-1)}u_3,$ $\vdots$

Polinom tipinde $n \in \mathbb{Z}^-$ $F(u) = u^n$	$A_0 = -u_0^{-n},$ $A_1 = -nu_0^{-(n+1)}u_1,$ $A_2 = -\frac{1}{2}n(n+1)u_0^{-(n+2)}u_1^2 - nu_0^{-(n+1)}u_2,$ $A_3 = -\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)u_0^{-(n+3)}u_1^3 - n(n+1)u_0^{-(n+2)}u_1u_2 - nu_0^{-(n+1)}u_3,$ $\vdots$
$F(u) = uu_t$	$A_0 = u_0(u_0)_t,$ $A_1 = (u_0)_t u_1 + u_0(u_1)_t,$ $A_2 = (u_0)_t u_2 + (u_1)_t u_1 + (u_2)_t u_0,$ $A_3 = (u_0)_t u_3 + (u_1)_t u_2 + (u_2)_t u_1 + (u_3)_t u_0,$ $\vdots$
$F(u) = \sin u$	$A_0 = \sin u_0,$ $A_1 = u_1 \cos u_0,$ $A_2 = u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!}u_1^2 \sin u_0,$ $A_3 = u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!}u_1^3 \cos u_0,$ $\vdots$
$F(u) = \cos u$	$A_0 = \cos u_0,$ $A_1 = -u_1 \sin u_0,$ $A_2 = -u_2 \sin u_0 - \frac{1}{2!}u_1^2 \cos u_0,$ $A_3 = -u_3 \sin u_0 - u_1 u_2 \cos u_0 - \frac{1}{3!}u_1^3 \sin u_0,$ $\vdots$
$F(u) = \sinh u$	$A_0 = \sinh u_0,$ $A_1 = u_1 \cosh u_0,$ $A_2 = u_2 \cosh u_0 + \frac{1}{2!}u_1^2 \sinh u_0,$ $A_3 = u_3 \cosh u_0 + u_1 u_2 \sinh u_0 + \frac{1}{3!}u_1^3 \cosh u_0,$ $\vdots$
$F(u) = \cosh u$	$A_0 = \cosh u_0,$ $A_1 = u_1 \sinh u_0,$ $A_2 = u_2 \sinh u_0 + \frac{1}{2!}u_1^2 \cosh u_0,$ $A_3 = u_3 \sinh u_0 + u_1 u_2 \cosh u_0 + \frac{1}{3!}u_1^3 \sinh u_0,$ $\vdots$

$F(u) = e^u$	$A_0 = e^{u_0},$ $A_1 = u_1 e^{u_0},$ $A_2 = \left(u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2\right) e^{u_0},$ $A_3 = \left(u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3\right) e^{u_0},$ $\vdots$
$F(u) = e^{-u}$	$A_0 = e^{-u_0},$ $A_1 = -u_1 e^{-u_0},$ $A_2 = \left(-u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2\right) e^{-u_0},$ $A_3 = \left(-u_3 + u_1 u_2 - \frac{1}{3!} u_1^3\right) e^{-u_0},$ $\vdots$
$F(u) = \ln u, u > 0$	$A_0 = \ln u_0,$ $A_1 = \frac{u_1}{u_0},$ $A_2 = \frac{u_2}{u_0} - \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u_0^2},$ $A_3 = \frac{u_3}{u_0} - \frac{u_1 u_2}{u_0^2} + \frac{1}{3} \frac{u_1^3}{u_0^3},$ $\vdots$

#### 4.1.2. Adomian Ayrışım Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$T_{*t}^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} = t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t}$  ifadesi  $\alpha$ . mertebeden uyumlu türevi gösterebiliriz.  $f$  lineer

olmayan bir fonksiyon ve  $v$  de sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) = f(u, u_x, u_{xx}) + v(x,t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.17)$$

lineer olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. (4.17) denklemini lineer ve lineer olmayan şeklinde iki ayrı parçaya ayırdığımızda

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) + L(u(x,t)) + N(u(x,t)) = v(x,t) \quad (4.18)$$

veya

$$t^{[\alpha]-\alpha} \frac{\partial^{[\alpha]} u(x,t)}{\partial t^{[\alpha]}} + L(u(x,t)) + N(u(x,t)) = v(x,t) \quad (4.19)$$

denklemini elde edilir (Acan ve Baleanu, 2017). Burada  $L$  lineer,  $N$  lineer olmayan operatör olup (4.19) denkleminin her iki tarafına  $T_{*t}^\alpha$  operatörünün tersi olan uyumlu

integral operatörü  $I_{*t}^\alpha = \int_0^t \frac{1}{\zeta^{1-\alpha}}(\cdot) d\zeta$  yi uygularsak,

$$I_{*t}^\alpha T_{*t}^\alpha (u(x,t)) = I_{*t}^\alpha v(x,t) - I_{*t}^\alpha L(u(x,t)) - I_{*t}^\alpha N(u(x,t)) \quad (4.20)$$

elde ederiz. (4.20) denklemini düzenlersek

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^{(k)} u(x,0)}{\partial t^k} + I_{*t}^\alpha v(x,t) - I_{*t}^\alpha L(u(x,t)) - I_{*t}^\alpha N(u(x,t)) \quad (4.21)$$

olur. Adomian ayrışım yöntemine göre,  $u(x,t)$  'nin sonsuz seri şeklinde ayrışımı

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (4.22)$$

olarak ve (4.18) denklemindeki lineer olmayan operatörünün ayrışımı

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, (u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (4.23)$$

ifadesi ile verilir. Burada  $A_n$  'ler Adomian polinomları olarak adlandırılır ve

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}$$

biçiminde gösterilir (Adomian, 1988).

(4.22) ve (4.23) ayrışimleri (4.21) denkleminin her iki tarafında yerine konulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^{(k)} u_n(x,0)}{\partial t^k} + I_{*t}^\alpha v - I_{*t}^\alpha L \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - I_{*t}^\alpha \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (4.24)$$

bulunur.  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  serisinin iterasyon terimleri

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x,0) + I_{*t}^\alpha v, \\ u_1 &= -I_{*t}^\alpha L u_0 - I_{*t}^\alpha A_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$u_{n+1} = -I_{*t}^\alpha L u_n - I_{*t}^\alpha A_n, n \geq 0$$

şeklinde bulunur. Bu durumda (4.18) denkleminin yaklaşık-analitik çözümü kesik seri yardımıyla

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sum_{n=0}^k u_n(x,t)$$

veya

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(x, t)$$

biçiminde bulunur.

#### 4.1.3. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda kesirli kablo denkleminin Adomian ayrışım yöntemi (AAY) ile çözümü yapılacaktır. (3.5) denkleminin her iki tarafına  $I_{*t}^\alpha$  operatörünü uygularsak,

$$u(x, t) = u(x, 0) + I_{*t}^\alpha (t^{1-\alpha} f(x, t)) + I_{*t}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) \right) \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.22) denklemini (4.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + I_{*t}^\alpha (t^{1-\alpha} f(x, t)) + I_{*t}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)$$

elde edilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$  serisinin iterasyon terimleri, (3.6) başlangıç koşuluna göre

$$u_0 = u(x, 0) + I_{*t}^\alpha (t^{1-\alpha} f(x, t)) = 2 \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + \frac{(\pi^2 + 1)t^{\alpha+2}}{\Gamma(3 + \alpha)} \right),$$

$$u_1 = I_{*t}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 \right) = -2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)t^{\alpha+2}}{2(\alpha + 2)} + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{2\alpha+2}}{(2\alpha + 2)\Gamma(3 + \alpha)} \right),$$

$$u_2 = I_{*t}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1 \right) = 2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{2\alpha+2}}{2(\alpha + 2)(2\alpha + 2)} + \frac{(\pi^2 + 1)^3 t^{3\alpha+2}}{(2\alpha + 2)(3\alpha + 2)\Gamma(3 + \alpha)} \right),$$

⋮

$$u_n = I_{*t}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - u_{n-1} \right)$$

$$= 2(-1)^n \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)^n t^{n\alpha+2}}{2(\alpha + 2)(2\alpha + 2) \cdots (n\alpha + 2)} + \frac{(\pi^2 + 1)^{n+1} t^{(n+1)\alpha+2}}{(2\alpha + 2)(3\alpha + 2) \cdots ((n+1)\alpha + 2)\Gamma(3 + \alpha)} \right).$$

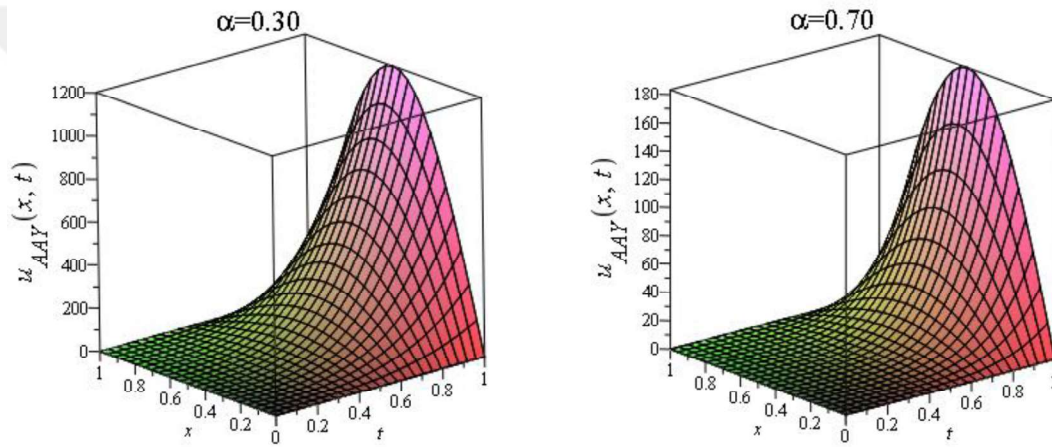
şeklinde elde edilir. Adomian serisinin bileşenlerinin geri kalan terimleri benzer şekilde hesaplanabilir. Böylece (3.5) denkleminin AAY ile yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(x, t) = t^2 \sin \pi x \left( 1 + \frac{2(\pi^2 + 1)t^\alpha}{\Gamma(3 + \alpha)} - \frac{(\pi^2 + 1)t^\alpha}{(\alpha + 2)} - \frac{2(\pi^2 + 1)^2 t^{2\alpha}}{(2\alpha + 2)\Gamma(3 + \alpha)} \right. \\ \left. + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{2\alpha}}{(\alpha + 2)(2\alpha + 2)} + \frac{2(\pi^2 + 1)^3 t^{3\alpha}}{(2\alpha + 2)(3\alpha + 2)\Gamma(3 + \alpha)} + \dots \right)$$

şeklinde elde edilir. (3.5) denkleminin AAY ile  $\alpha=1$  için kesin çözümü

$$u(x, t) = t^2 \sin \pi x$$

biçiminde elde edilir (Yavuz ve Yaskiran, 2017).



Şekil 4.1.  $\alpha = 0.30$  ve  $\alpha = 0.70$  için kablo denkleminin AAY ile çözümü.

## 4.2. Varyasyonel İterasyon Metodu

Bu metotta,  $L$  lineer,  $N$  lineer olmayan operatör,  $u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyon ve  $g(x, t)$  homojenliği bozan sürekli bir fonksiyon olmak üzere genel hali ile

$$Lu + Nu = g(x, t) \quad (4.27)$$

diferansiyel denklemi ele alalım.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre denklemin

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\zeta) (Lu_n(x, \zeta) + N\tilde{u}_n(x, \zeta) - g(x, \zeta)) d\zeta \quad (4.28)$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada  $\lambda$  Lagrange çarpanı (Inokuti vd., 1978),  $\tilde{u}_n$  sınırlanmış varyasyon (Finlayson, 1972) olup  $\delta\tilde{u}_n = 0$  'dır.

Ayrıca (4.28) denkleminde düzeltme fonksiyoneli adı verilir. Bu fonksiyonele varyasyon uygulandığında  $\delta u_n(0) = 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(x,t) &= \delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta \lambda(\zeta) (Lu_n(x,\zeta) + N\tilde{u}_n(x,\zeta) - g(x,\zeta)) d\zeta \\
&= \delta u_n(x,t) + \int_0^t \delta \lambda(\zeta) (Lu_n(x,\zeta) - g(x,\zeta)) d\zeta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Buradan, oluşan Euler-Lagrange problemi çözülerek Lagrange çarpanı  $\lambda(\zeta)$  belirlenir. Ardından, başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon  $u_0$  olarak seçilmek suretiyle  $n > 0$  için  $u_n$  terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x,t)$$

olarak elde edilir (He, 1999b).

#### 4.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$$T_{*t}^\alpha u(x,t) = f(u, u_x, u_{xx}) + v(x,t), \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in N \tag{4.30}$$

kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $f$  lineer olmayan bir fonksiyon,  $u$  bilinmeyen fonksiyon,  $v$  homojenliği bozan fonksiyon ve  $T_{*t}^\alpha$  ise  $\alpha$ . mertebeden uyumlu türev operatörüdür.

(4.30) denkleminin başlangıç ve sınır değer koşulları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= h(x), \quad 0 < \alpha \leq 1 \\
u(x,t) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= h(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = k(x), \quad 1 < \alpha \leq 2 \\
u(x,t) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde (4.30) denklemini Lemma 2.3.3.1 den

$$t^{[\alpha]-\alpha} \frac{\partial^{[\alpha]} u(x,t)}{\partial t^{[\alpha]}} = f(u, u_x, u_{xx}) + v(x,t) \tag{4.33}$$

şeklinde gösterilir. Varyasyonel iterasyon metodunun temel özelliği (4.33) denklemini için bir düzeltme fonksiyoneli kurmaktır. Bu düzeltme fonksiyoneli varyasyonel iterasyon metoduna göre

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\zeta) \left[ \frac{\partial^m u_n(x,\zeta)}{\partial \zeta^m} - f(\tilde{u}_n, (\tilde{u}_n)_x, (\tilde{u}_n)_{xx}) - v(x,\zeta) \right] d\zeta \quad (4.34)$$

şeklinde elde edilir (Acan vd., 2017). Burada Lagrange çarpanı  $\lambda$  olmak üzere en yüksek mertebeli türev hariç diğer tüm terimlere,  $\delta$  sınırlanmış varyasyon operatörü uygulanırsa  $\delta \tilde{u}_n = 0$  olur. (4.34) denkleminde varyasyon uygulandığında

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \left( \int_0^t \lambda(\zeta) \left[ \frac{\partial^m u_n(x,\zeta)}{\partial \zeta^m} - v(x,\zeta) \right] d\zeta \right) \quad (4.35)$$

denklemini elde edilir.

(4.35) denkleminde  $m = 1$  için  $\delta u$  'nun katsayılarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek,

$$1 + \lambda(\zeta) = 0,$$

$$\lambda'(\zeta) = 0$$

elde edilir ve Lagrange çarpanı  $\lambda(\zeta) = -1$  olarak bulunur. Bulunan bu değer (4.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_n(x,\zeta)}{\partial \zeta} - f(u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}) - v(x,\zeta) \right] d\zeta \quad (4.36)$$

iterasyon formülü elde edilir. Bu durumda başlangıç şartı

$$u_0(x,0) = h(x)$$

olur.

Benzer şekilde  $m = 2$  için de  $\delta u$  'nun katsayılarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek,

$$1 + \lambda(\zeta) = 0,$$

$$\lambda''(\zeta) = 0$$

bulunur. Böylece Lagrange çarpanı  $\lambda(\zeta) = \zeta - t$  olarak bulunur ve (4.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t (\zeta - t) \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_n(x,\zeta)}{\partial \zeta} - f(u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}) - v(x,\zeta) \right] d\zeta \quad (4.37)$$

şeklinde yazılır. Başlangıç şartı da,

$$u_0(x,0) = h(x) + tk(x)$$

olur.

(4.35) denkleminde  $\delta u$  'nun katsayılarını ayrı ayrı sıfıra eşitleyerek  $\alpha$  'nın mertebesine göre,

$$1 + \lambda(\zeta) = 0,$$

$$\frac{\partial^m \lambda(\zeta)}{\partial \zeta^m} = 0$$

elde edilir ve buradan Lagrange çarpanı

$$\begin{cases} \lambda(\zeta) = -1, & m = 1 \\ \lambda(\zeta) = \zeta - t, & m = 2 \\ \vdots \\ \lambda(\zeta) = (-1)^m \frac{(\zeta - t)^{m-1}}{(m-1)!}, & m \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde oluşturulur (Wu, 2011).

Belirlenen Lagrange çarpanına göre (4.34) denkleminin yaklaşık-analitik çözümü kesik seri yardımıyla

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$$

şeklinde elde edilir (Momani ve Odibat, 2006).

#### 4.2.2. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözümü

Bu kısımda uyumlu kesirli kablo denkleminin varyasyonel iterasyon metodu (VİM) ile çözümü yapılacaktır. (3.5) denkleminde VİM uygularsak  $0 < \alpha \leq 1$  olduğundan

$$\lambda(\zeta) = -1 \text{ ve}$$

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_n(x, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_n(x, \zeta)}{\partial x^2} + u_n(x, \zeta) - \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} T_{*\zeta}^{-1} f(x, \zeta) \right] d\zeta$$

iterasyon formülünü elde ederiz. (3.6) başlangıç koşulunu kullanarak iterasyon yardımıyla diğer değerler de

$$u_0 = u(x, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \int_0^t \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_0(x, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_0(x, \zeta)}{\partial x^2} + u_0(x, \zeta) - \zeta^{1-\alpha} f(x, \zeta) \right] d\zeta \\ &= 2 \sin \pi x \left( \frac{t^{3-\alpha}}{3-\alpha} + (\pi^2 + 1) \frac{t^3}{3\Gamma(2+\alpha)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 - \int_0^t \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_1(x, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_1(x, \zeta)}{\partial x^2} + u_1(x, \zeta) - \zeta^{1-\alpha} f(x, \zeta) \right] d\zeta \\
&= 4 \sin \pi x \left( \frac{t^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{(\pi^2 + 1)t^3}{3\Gamma(2+\alpha)} \right) - 2 \sin \pi x \left( \frac{t^{4-2\alpha}}{4-2\alpha} + \frac{(\pi^2 + 1)t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad - 2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^4}{4 \cdot 3 \cdot \Gamma(2+\alpha)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_2 - \int_0^t \left[ \zeta^{1-\alpha} \frac{\partial u_2(x, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_2(x, \zeta)}{\partial x^2} + u_2(x, \zeta) - \zeta^{1-\alpha} f(x, \zeta) \right] d\zeta \\
&= 6 \sin \pi x \left( \frac{t^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{(\pi^2 + 1)t^3}{3\Gamma(2+\alpha)} \right) - 6 \sin \pi x \left( \frac{t^{4-2\alpha}}{4-2\alpha} + \frac{(\pi^2 + 1)t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad - 6 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^4}{4 \cdot 3 \cdot \Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad + 2 \sin \pi x \left( \frac{t^{5-3\alpha}}{5-3\alpha} + \frac{(\pi^2 + 1)t^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad + 2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)t^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)(3-\alpha)} + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{5-\alpha}}{3(5-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad + 2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)t^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)(4-2\alpha)} + \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{5-\alpha}}{(5-\alpha)(4-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \right) \\
&\quad + 2 \sin \pi x \left( \frac{(\pi^2 + 1)^2 t^{5-\alpha}}{(5-\alpha)(4-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{(\pi^2 + 1)^3 t^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(2+\alpha)} \right),
\end{aligned}$$

⋮

olarak hesaplanır ve bu iterasyon devam ettirilerek serinin diğer terimleri de hesaplanabilir. (3.5) denkleminin VİM ile çözümü, seri formunda

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$$

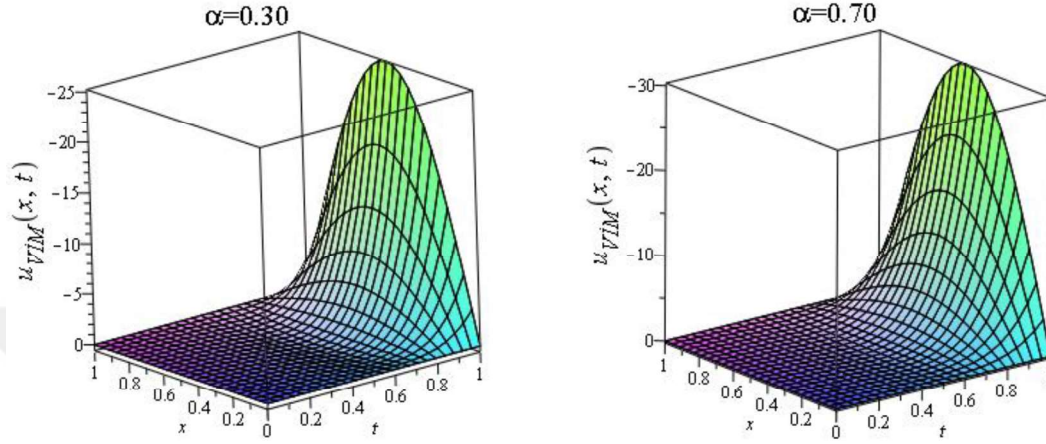
şeklinde bulunur ve  $\alpha = 1$  alınırsa

$$\begin{aligned}
u_n(x, t) &= t^2 \sin \pi x \left( \frac{6}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{6t}{3\Gamma(3)} - \frac{6}{2} - (\pi^2 + 1) \frac{6t}{3\Gamma(3)} - (\pi^2 + 1) \frac{6t}{3 \cdot 2} \right. \\
&\quad \left. (\pi^2 + 1) \frac{6t^2}{4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

şeklinde ve kesin çözümü

$$u(x,t) = t^2 \sin \pi x$$

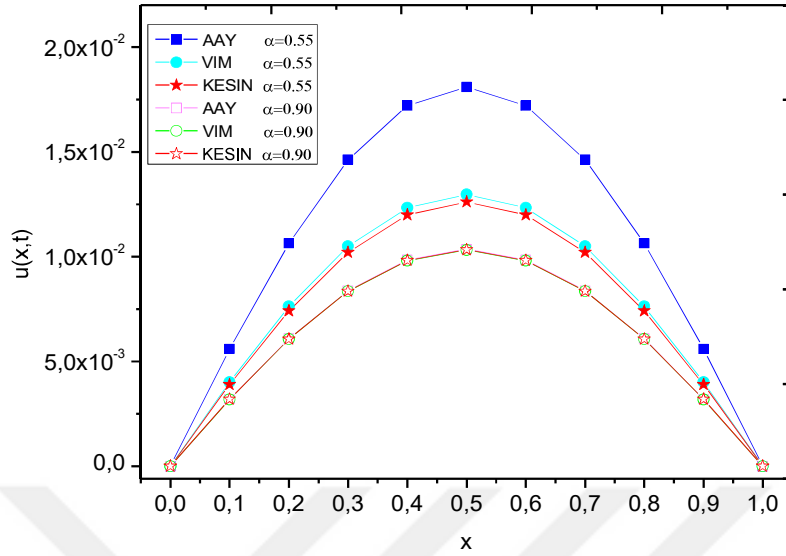
biçiminde elde edilir (Yavuz ve Yaskıran, 2017).



Şekil 4.2.  $\alpha = 0.30$  ve  $\alpha = 0.70$  için kablo denkleminin VİM ile çözümü.

Tablo 4.2. Kablo denkleminin AAY ve VİM ile çözümünden elde edilen mutlak hata  $|\tilde{u}_e(x,t) - u(x,t)|$

x	t	$\alpha = 0.35$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 0.95$	
		AAY	VİM	AAY	VİM	AAY	VİM
$10^{-3}$	0.10	0.00046588	0.00000281	0.00000076	0.00000042	0.00000004	0.00000000
	0.50	13.5023030	13.7112263	0.00847201	0.00038284	0.00206843	0.00143082
	0.70	322.724387	323.473669	0.05919425	0.00774314	0.02011917	0.01250838
$10^{-5}$	0.10	0.00000466	0.00000003	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
	0.50	0.13502325	0.13711249	0.00008472	0.00000383	0.00002068	0.00001431
	0.70	3.22724918	3.23474201	0.00059194	0.00007743	0.00020119	0.00012508
$10^{-6}$	0.10	0.00000047	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
	0.50	0.01350233	0.01371125	0.00000847	0.00000038	0.00000207	0.00000143
	0.70	0.32272492	0.32347420	0.00005919	0.00000774	0.00002012	0.00001251
$10^{-8}$	0.10	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
	0.50	0.00013502	0.00013711	0.00000008	0.00000001	0.00000002	0.00000001
	0.70	0.00322725	0.00323474	0.00000059	0.00000008	0.00000020	0.00000013



Şekil 4.3.  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için kablo denkleminin kesin çözümü ile AAY ve VİM çözümlerinin karşılaştırılması

#### 4.3. Homotopi Analiz Metodu

Homotopi analiz metodu lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan yaklaşık-analitik bir yöntemdir. Homotopi analiz metodu topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramı üzerine kurulmuştur.

**Tanım 4.3.1.**  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar üzerinde tanımlanan  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$  sürekli dönüşümleri arasında her  $x \in X$  için

$$\mathcal{H}(x,0) = f(x) \text{ ve } \mathcal{H}(x,1) = g(x)$$

olacak şekilde  $\mathcal{H}: X \times [0,1] \rightarrow Y$  sürekli bir dönüşümü varsa  $f$  ve  $g$  ye homotopiktir denir ve  $f \approx g$  ile gösterilir.  $\mathcal{H}$  dönüşümüne  $f$  ve  $g$  arasında homotopidir denir.

Yani;

$$\mathcal{H}(x,p) = (1-p)f(x) + pg(x)$$

$f(x)$  ve  $g(x)$  dönüşümleri arasında bir homotopi oluşturur. Burada  $p$  parametresine homotopi parametresi veya gömme parametresi denir (Liao, 2012).

**Tanım 4.3.2.**  $\phi$ ,  $p$  homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun.  $m \geq 0$  bir tamsayı olmak üzere;

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (4.38)$$

şeklinde tamamlanan  $D_m(\phi)$ 'ye  $\phi$ 'nin  $m$ . mertebeden homotopi veya deformasyon türevi denir. Bu türev yüksek mertebeden deformasyon denklemlerini türetmek için kullanılır (Liao, 2009).

**Tanım 4.3.3.**  $\mathcal{N}[u] = 0$  bir lineer olmayan denklem,  $\phi$ ; Maclaurin serisi

$$\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m p^m \quad (4.39)$$

olan  $p \in [0,1]$  homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun.

$$\Pi[\phi, p] = 0, \quad p \in [0,1]$$

denklemler ailesine  $\mathcal{N}[u] = 0$ 'ın sıfıncı derece deformasyon denklemi denir.

Eğer  $p = 1$  ise bu denklem

$$u = \phi|_{p=1} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (4.40)$$

olmak üzere başlangıçta alınan  $\mathcal{N}[u] = 0$  denklemine denktir. (4.39) serisine homotopi serisi ve (4.40) serisine  $\mathcal{N}[u] = 0$ 'ın homotopi seri çözümü denir.  $u_m$  lerin oluşturduğu denklemlere  $m$ . derece deformasyon denklemleri denir (Liao, 2009).

#### 4.3.1. Sıfıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

$\mathcal{N}$  lineer olmayan bir operatör,  $u(x,t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $x$  konum değişkeni ve  $t$  de zaman değişkeni olmak üzere,

$$\mathcal{N}[u(x,t)] = 0 \quad (4.41)$$

lineer olmayan genel bir diferansiyel denklemi ele alalım.  $u_0(x,t)$  bir başlangıç yaklaşımı,  $\hbar \neq 0$  bir yardımcı parametre,  $H(x,t) \neq 0$  bir yardımcı fonksiyon ve  $L$  ise

$$f(x,t) = 0 \Rightarrow L[f(x,t)] = 0 \quad (4.42)$$

şartını sağlayan bir yardımcı lineer operatör olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\phi(x,t;p); u_0(x,t), H(x,t), \hbar, p] = \\ (1-p)\{L[\phi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} - p\hbar H(x,t) \mathcal{N}[\phi(x,t;p)] \end{aligned} \quad (4.43)$$

homotopisi kurulabilir.  $\hbar$  yardımcı parametresi ve yardımcı fonksiyon  $H(x,t)$ , metot için önemli rol oynamaktadır. Bu yöntemin avantajı;  $u_0(x,t)$  başlangıç şartını,  $L$  yardımcı lineer operatörünü,  $\hbar$  yardımcı parametresini ve  $H(x,t)$  yardımcı fonksiyonunu seçme serbestliğini tanımasıdır. (4.43) homotopisinin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$\mathcal{H}[\phi(x,t;p); u_0(x,t), H(x,t), \hbar, p] = 0$$

ve sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi

$$(1-p)\{L[\phi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} = p\hbar H(x,t) \mathcal{N}[\phi(x,t;p)] \quad (4.44)$$

şeklinde elde edilir. Denklemin çözümü olan  $\phi(x,t;p)$ , sadece  $u_0(x,t)$ ,  $H(x,t)$ ,  $L$  ve  $\hbar$  ye bağlı olmayıp  $p \in [0,1]$ 'e de bağlıdır.

(4.44) sıfıncı mertebeden deformasyon denkleminde  $p = 0$  alınırsa

$$L[\phi(x,t;0) - u_0(x,t)] = 0 \quad (4.45)$$

denklemine dönüşür. (4.42) özelliğini (4.45) de uygularsak

$$\phi(x,t;0) = u_0(x,t) \quad (4.46)$$

elde edilir.

(4.44) denkleminde  $\hbar \neq 0$  ve  $H(x,t) \neq 0$  olduğundan  $p = 1$  iken

$$\mathcal{N}[\phi(x,t;1)] = 0 \quad (4.47)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem ve (4.41) denkleminde

$$\phi(x,t;1) = u(x,t) \quad (4.48)$$

denklemi elde edilir. (4.46) ve (4.48) denklemlerine göre,  $p$  parametresi 0'dan 1'e artarken  $\phi(x,t;p)$ ,  $u_0(x,t)$  den  $u(x,t)$  kesin çözümüne değişir. Bu değişime homotopide deformasyon denir.  $m$ . derece deformasyon denklemlerinin türevi

$$u_0^{[m]}(x,t) = \left. \frac{\partial^m \phi(x,t;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (4.49)$$

olarak tanımlanır.  $\phi(x,t;p)$   $p$  ye göre Taylor serisine açılırsa

$$\phi(x, t; p) = \phi(x, t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_0^{[m]}(x, t)}{m!} p^m \quad (4.50)$$

elde edilir. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x, t; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} = D_m(\phi) \quad (4.51)$$

olarak alınır.  $D_m(\phi)$ ,  $\phi$ 'nin  $m$ . mertebeden türevidir. (4.46) denklemi ve (4.51) denklemi (4.50) denklemine yerine yazılırsa,

$$\phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) p^m \quad (4.52)$$

olarak bulunur. (4.52) denklemi homotopi serisi olarak adlandırılır.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminde  $u_0(x, t)$ ,  $H(x, t)$ ,  $L$  ve  $\hbar$  aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçilir.

1. Her  $p \in [0, 1]$  için  $\phi(x, t; p)$ , (4.44) sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin çözümüdür.
2.  $m = 1, 2, \dots$  için  $u_0^{[m]}(x, t)$  deformasyon türevidir mevcuttur.
3.  $\phi(x, t; p)$ 'nin (4.52) kuvvet serisi  $p = 1$  de yakınsaktır.

(4.48) ve (4.52) eşitliklerinden ve yukarıdaki özelliklerden çözüm serisi

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) \quad (4.53)$$

olarak bulunur (Liao, 2003).

### 4.3.2. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi

$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$  vektörü tanımlansın. Tanım 4.3.2 ye göre,  $u_m(x, t)$ 'nin denklemi (4.44) sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminde türetilir. (4.44) denkleminde  $p$  parametresine göre  $m$  kez türev alındıktan sonra  $m!$  ile bölünür ve  $p = 0$  alınır,  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi olarak adlandırılan

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(u_{m-1}(x, t)) \quad (4.54)$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (4.55)$$

ve

$$R_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi(x,t;p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (4.56)$$

olarak tanımlıdır. (4.56) denkleminde (4.52) kullanılırsa

$$R_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} \mathcal{N} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) p^n \right] \right\} \Big|_{p=0}$$

denklemini elde edilir.

Verilen herhangi bir lineer olmayan  $\mathcal{N}$  operatörü için (4.54) yüksek mertebe deformasyon denklemi,  $R_m(\bar{u}_{m-1})$  terimi ve  $L$  yardımcı operatörü ile oluşturulur. (4.54) denkleminin sağ tarafı sadece  $\bar{u}_{m-1}$ 'e bağlı olduğundan iteratif olarak (4.56) denkleminde göre çözümlenerek  $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots$  değerleri bulunur.  $u(x,t)$ 'nin  $m$ . yaklaşımı

$$\sum_{k=0}^m u_k(x,t) \quad (4.57)$$

serisi ile bulunur (Liao, 2003).

### 4.3.3. Homotopi Analiz Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$F\mathcal{N}$  lineer olmayan kesirli operatör,  $u(x,t)$  bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F\mathcal{N}[u(x,t)] = 0 \quad (4.58)$$

genel bir kesirli diferansiyel denklemi ele alalım.

HAM kullanılarak sıfırıncı deformasyon denklemi

$$(1-p) \{L[\phi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} = p\hbar H(x,t) F\mathcal{N}[\phi(x,t;p)] \quad (4.59)$$

şeklinde yazılır. Burada  $p \in [0,1]$  homotopi parametresini,  $\hbar$  yardımcı parametreyi,

$H(x,t)$  yardımcı fonksiyonu ve  $L$  yardımcı lineer operatörü göstermektedir.  $L = T_{*t}^\alpha$  olmak üzere

$$L[\phi(x,t;p)] = T_{*t}^\alpha[\phi(x,t;p)], \quad n-1 < \alpha \leq n$$

şeklinde gösterilir.

$$\phi(x, t; 0) = u_0(x, t), \quad \phi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (4.60)$$

olup  $p$  parametresi 0'dan 1'e değıştikçe  $\phi(x, t; p)$  de  $u_0(x, t)$  den  $u(x, t)$  kesin çözümüne değışir. Taylor teoremi ile

$$\phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) p^m \quad (4.61)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (4.62)$$

dir.  $p = 1$  de (4.61) serisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$$

elde edilir.  $\vec{u}_n$  vektörü  $\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$  ile tanımlanırsa  $m$ . dereceden deformasyon denklemi

$$T_{*t}^{\alpha} \{u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)\} = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) \quad (4.63)$$

olarak elde edilir. Burada

$$R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} F \mathcal{N}^c [\phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0}$$

dır. (4.63) denkleminin her iki tarafına  $I_{*t}^{\alpha}$  operatörü uygulanırsa

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) - \chi_m \sum_{k=0}^{n-1} u_{m-1}^{(k)}(x, 0) \frac{t^k}{k!} + I_{*t}^{\alpha} \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) \quad (4.64)$$

elde edilir (Dehghan, Manafian ve Saadatmandi, 2010).

#### 4.3.4. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin Homotopi Analiz Metodu ile Çözümü

Bu kısımda uyumlu kesirli kablo denkleminin homotopi analiz metodu (HAM) ile çözümü yapılacaktır. Özel olarak (4.63) yüksek mertebeden deformasyon denkleminde  $H(x, t) = 1$  alınacaktır. (4.63) denkleminde  $H(x, t)$  yerine yazılırsa

$$T_{*t}^{\alpha} \{u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)\} = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)), \quad \hbar \neq 0 \quad (4.65)$$

elde edilir.

(3.5) denkleminde HAM uygulandığında

$$R_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + u_{m-1}(x,t) - (1-\chi_m) t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T_{*t}^{-1} f(x,t)$$

olup denklemi düzenlersek

$$R_m(\bar{u}_{m-1}(x,t)) = t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + u_{m-1}(x,t) - (1-\chi_m) t^{1-\alpha} f(x,t) \quad (4.66)$$

elde edilir. Böylece (4.65) denkleminin her iki tarafına  $I_{*t}^\alpha$  uygulanırsa

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \int_0^t \frac{1}{\zeta^{1-\alpha}} (R_m(\bar{u}_{m-1}(x,\zeta))) d\zeta \quad (4.67)$$

olur. (4.55) ve (4.66) ifadeleri (4.67) denkleminde yerine yazılırsa, (3.5) denkleminin çözüm elemanları (3.6) başlangıç koşulundan başlayarak;

$$u_0(x,t) = 0,$$

$$u_1(x,t) = -2\hbar \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right),$$

$$u_2(x,t) = -2(1+\hbar) \hbar \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) \\ - 2\hbar^2 \sin \pi x \left( (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} \right)$$

$$u_3(x,t) = -2(1+\hbar)^2 \hbar \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) \\ - 4(1+\hbar) \hbar^2 \sin \pi x \left( (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} \right) \\ - 2\hbar^3 \sin \pi x \left( (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^3 \frac{t^{3\alpha+2}}{(3\alpha+2)(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} \right)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak (3.5) denkleminin HAM ile yaklaşık çözümü

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots \\ = t^2 \sin \pi x \left( -\hbar - \frac{2\hbar(\pi^2 + 1)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} - (1+\hbar)\hbar - \frac{2(1+\hbar)\hbar(\pi^2 + 1)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2(\pi^2 + 1)t^\alpha}{(\alpha+2)} - \frac{2\hbar^2(\pi^2 + 1)^2 t^{2\alpha}}{(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} + \dots \right)$$

şeklinde dir. Bu çözümde  $\alpha = 1$  için kesin çözüm  $u(x,t) = t^2 \sin \pi x$  dir.

**Tablo 4.3.**  $t = 0.1$  değeri için kablo denkleminin HAM ile çözümü

$x$	$\alpha$	$h = -0.01$	$h = -0.05$	$h = -0.5$	$h = -1$
0.1	$\alpha = 0.40$	0.0003524602	0.0015827153	0.0042553848	0.0199840077
	$\alpha = 0.60$	0.0002245001	0.0010373006	0.0038109095	0.0060632691
	$\alpha = 0.80$	0.0001582580	0.0007427406	0.0033620446	0.0037064371
0.2	$\alpha = 0.40$	0.0006704190	0.0030105034	0.0080942229	0.0380118415
	$\alpha = 0.60$	0.0004270246	0.0019730629	0.0072487806	0.0115330231
	$\alpha = 0.80$	0.0003010247	0.0014127766	0.0063949888	0.0070500624
0.3	$\alpha = 0.40$	0.0009227527	0.0041436025	0.0111407420	0.0523188114
	$\alpha = 0.60$	0.0005877490	0.0027156881	0.0099770906	0.0158738445
	$\alpha = 0.80$	0.0004143249	0.0019445202	0.0088019470	0.0097035784
0.4	$\alpha = 0.40$	0.0010847608	0.0048710968	0.0130967277	0.0615044515
	$\alpha = 0.60$	0.0006909403	0.0031924829	0.0117287734	0.0186608234
	$\alpha = 0.80$	0.0004870681	0.0022859206	0.0103473093	0.0114072406
0.5	$\alpha = 0.40$	0.0011405850	0.0051217743	0.0137707145	0.0646696074
	$\alpha = 0.60$	0.0007264977	0.0033567751	0.0123323622	0.0196211509
	$\alpha = 0.80$	0.0005121337	0.0024035592	0.0108798049	0.0119942825
0.6	$\alpha = 0.40$	0.0010847608	0.0048710968	0.0130967277	0.0615044515
	$\alpha = 0.60$	0.0006909403	0.0031924829	0.0117287734	0.0186608234
	$\alpha = 0.80$	0.0004870681	0.0022859206	0.0103473093	0.0114072406
0.7	$\alpha = 0.40$	0.0009227527	0.0041436025	0.0111407420	0.0523188114
	$\alpha = 0.60$	0.0005877490	0.0027156881	0.0099770906	0.0158738445
	$\alpha = 0.80$	0.0004143249	0.0019445202	0.0088019470	0.0097035784
0.8	$\alpha = 0.40$	0.0006704190	0.0030105034	0.0080942229	0.0380118415
	$\alpha = 0.60$	0.0004270246	0.0019730629	0.0072487806	0.0115330231
	$\alpha = 0.80$	0.0003010247	0.0014127766	0.0063949888	0.0070500624
0.9	$\alpha = 0.40$	0.0003524602	0.0015827153	0.0042553848	0.0199840076
	$\alpha = 0.60$	0.0002245001	0.0010373006	0.0038109095	0.0060632691
	$\alpha = 0.80$	0.0001582580	0.0007427406	0.0033620446	0.0037064371
1.0	$\alpha = 0.40$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
	$\alpha = 0.60$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
	$\alpha = 0.80$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

#### 4.4. Homotopi Pertürbasyon Metodu

Bu metotta  $L$  lineer operatör,  $N$  lineer olmayan operatör ve  $f(r)$  homojenliği bozan sürekli bir fonksiyon,  $\Omega$  tanım kümesi ve  $\Gamma$  ise tanım kümesinin sınırı olmak üzere,

$$Lu + Nu = f(r), \quad r \in \Omega \quad (4.68)$$

ve sınır şartı

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (4.69)$$

olan genel lineer olmayan diferansiyel denklemi ele alalım.  $p \in [0,1]$  gömme parametresi ve  $v(r,p): \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere (4.68) denklemine homotopi uygulanırsa

$$\mathcal{H}(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_o)] + p[L(v) + N(v) - f(r)] = 0 \quad (4.70)$$

veya

$$\mathcal{H}(v,p) = L(v) - L(u_o) + pL(u_o) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (4.71)$$

şeklinde oluşturulur. Burada  $u_o$  (4.68) denkleminin başlangıç şartıdır ve sınır şartını sağlar. (4.71) denkleminde  $p=0$  ve  $p=1$  değerleri için sırasıyla

$$\mathcal{H}(v,0) = L(v) - L(u_o) = 0$$

ve

$$\mathcal{H}(v,1) = L(v) + N(v) - f(r) = 0$$

elde edilir. (4.71) denkleminin çözümü  $p$ 'nin kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylelikle (4.68) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x,t) = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

şeklinde elde edilir (He, 1999a).

#### 4.4.1. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Lineer olmayan

$$T_{*t}^{\alpha} u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) = v(x,t), \quad t > 0, \quad (4.72)$$

kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $L$  lineer operatör,  $N$  lineer olmayan operatör,  $v$  sürekli bir fonksiyon ve  $T_{*t}^{\alpha}$ ,  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $\alpha$  mertebeli uyumlu türevini gösterir. Başlangıç şartı

$$u^{(k)}(x,0) = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

olmak üzere homotopi tekniğiyle, (4.72) denklemi için homotopi şu şekilde oluşturulabilir:

$$(1-p)T_{*t}^{\alpha} u(x,t) + p[T_{*t}^{\alpha} u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - v(x,t)] = 0, \quad (4.73)$$

veya

$$T_{*t}^{\alpha} u(x,t) + p \left[ L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - v(x,t) \right] = 0, \quad p \in [0,1] \quad (4.74)$$

elde edilir.

Homotopi parametresi  $p = 0$  alınır (4.74) denkleminin lineerleştirilmiş hali

$T_{*t}^{\alpha} u = 0$  şeklinde yazılır. (4.74) denkleminde  $p = 1$  yazılırsa (4.72) denklemini verir.

Bu nedenle (4.74) denkleminin çözümü  $p$ 'nin kuvvet serisi olarak

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (4.75)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.75) denklemi (4.74) denkleminde yerine yazıldığında  $p$ 'nin aynı kuvvetleri için terimleri eşitleyerek bir dizi lineer denklemler

$$\begin{aligned} p^0 : T_{*t}^{\alpha} u_0 &= 0, \quad u_0^{(k)}(x,0) = f_k(x), \\ p^1 : T_{*t}^{\alpha} u_1 &= -L(u_0) - N(u_0) + v(x,t), \quad u_1^{(k)}(x,0) = 0, \\ p^2 : T_{*t}^{\alpha} u_2 &= -L(u_1) - N(u_0, u_1), \quad u_2^{(k)}(x,0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir ve (4.76) deki denklemlerin her birine sırasıyla  $I_{*t}^{\alpha}$  uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \\ u_1 &= -I_{*t}^{\alpha} [L(u_0)] - I_{*t}^{\alpha} [N(u_0)] + I_{*t}^{\alpha} [v(x,t)], \\ u_2 &= -I_{*t}^{\alpha} [L(u_1)] - I_{*t}^{\alpha} [N(u_0, u_1)], \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.72) denkleminin yaklaşık-analitik çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

şeklinde gösterilir (Abdulaziz vd., 2008).

#### 4.4.2. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü

Bu kısımda uyumlu kesirli kablo denklemini homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ile çözümü yapılacaktır. (3.6) başlangıç koşulu ve (3.5) denklemine HPM uygularsak, (4.74) homotopi denkleminin göre pertürbasyon serisi

$$\begin{aligned}
p^0 : T_{*t}^\alpha u_0 &= 0, u_0(x, 0) = 0, \\
p^1 : T_{*t}^\alpha u_1 &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 + T_{*t}^\alpha T_{*t}^{-1} f(x, t), u_1(x, 0) = 0, \\
p^2 : T_{*t}^\alpha u_2 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1, u_2(x, 0) = 0, \\
p^3 : T_{*t}^\alpha u_3 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2, u_3(x, 0) = 0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.77}$$

şeklinde elde edilir. (4.77) denklemlerine sırasıyla  $I_{*t}^\alpha$  uygulanırsa  $u_0, u_1, u_2$  ve  $u_3$  bileşenlerini

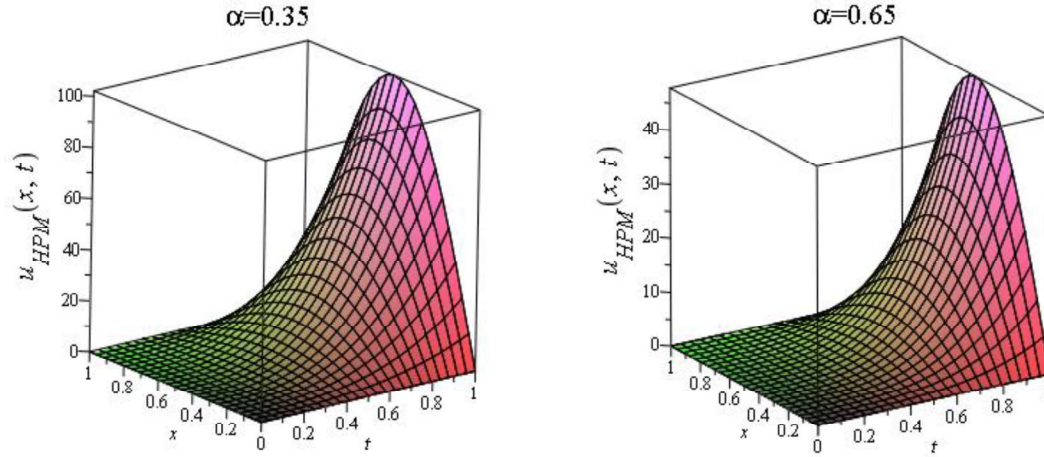
$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= 0, \\
u_1(x, t) &= 2 \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(3+\alpha)} \right), \\
u_2(x, t) &= -2 \sin \pi x \left( (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)\Gamma(3+\alpha)} \right), \\
u_3(x, t) &= 2 \sin \pi x \left( (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^3 \frac{t^{3\alpha+2}}{(3\alpha+2)(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplayabilir ve bu şekilde devam ederek, homotopinin geri kalan terimleri elde edilebilir. Ardından (3.5) denkleminin yaklaşık çözümü

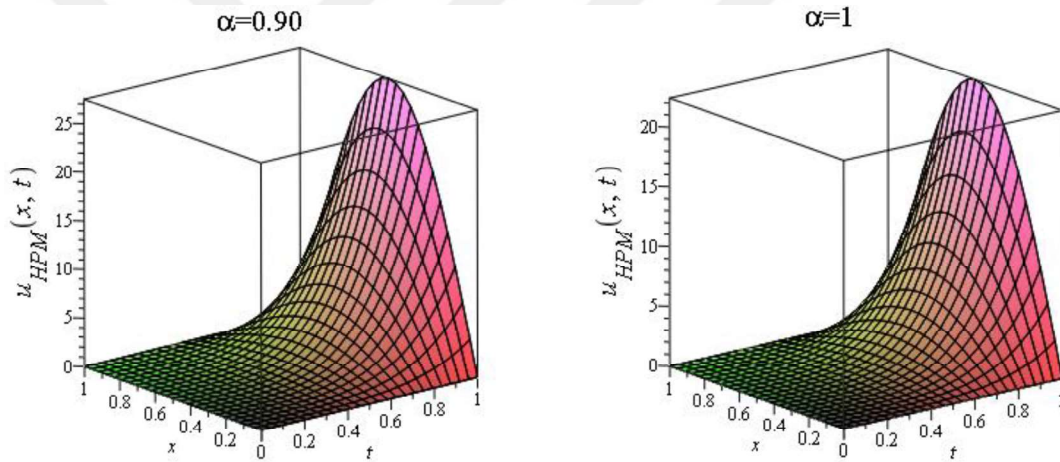
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \\
&= 2 \sin \pi x \left( \frac{t^2}{2} + (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(3+\alpha)} - (\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)} - (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)\Gamma(3+\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{2(\alpha+2)(2\alpha+2)} + (\pi^2 + 1)^3 \frac{t^{3\alpha+2}}{(3\alpha+2)(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.5) denkleminin HPM ile  $\alpha=1$  için kesin çözümü  $u(x, t) = t^2 \sin \pi x$  biçiminde elde edilir.

Aynı zamanda bu metotla (3.5) denkleminin HAM ile çözümünde  $\hbar = -1$  alındığında  $u_0, u_1, u_2, \dots$  bileşenlerinin HPM çözümüyle aynı geldiği de gösterilmiştir.



Şekil 4.4.  $\alpha = 0.35$  ve  $\alpha = 0.65$  için kablo denkleminin HPM ile çözümü.



Şekil 4.5.  $\alpha = 0.90$  ve  $\alpha = 1$  için kablo denkleminin HPM ile çözümü.

#### 4.4.3. Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodu

Modifiye homotopi pertürbasyon yöntemini vermek için (4.68) denkleminde  $f$  fonksiyonu,

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)$$

Şeklinde parçalanabilen bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

İlk varsayım olarak  $f$  fonksiyonu

$$f(r) = f_0(r) + f_1(r)$$

şeklinde iki terimden oluşsun. Böylelikle (4.68) denklemin homotopisi

$$\mathcal{H}(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_o)] + p[L(v) + N(v) - f_1(r)] = f_0(r) \quad (4.78)$$

veya

$$\mathcal{H}(v, p) = L(v) - L(u_o) + p[L(u_o) + N(v) - f_1(r)] = f_0(r) \quad (4.79)$$

şeklinde gösterilir. (4.79) denkleminde  $p = 0$  ve  $p = 1$  için sırasıyla

$$\mathcal{H}(v, 0) = L(v) - L(u_o) = f_0(r)$$

ve

$$\mathcal{H}(v, 1) = L(v) + N(v) - f_1(r) = f_0(r)$$

elde edilir. Burada aynı zamanda  $f_0(r) = 0$  ve  $f_1(r) = f(r)$  olarak seçilirse MHPM'nin HPM'ye eşit olduğu görülür (Odibat, 2007).

İkinci varsayım olarak  $f$  fonksiyonu  $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)$  ise (4.68) denklemin

homotopisi

$$\mathcal{H}(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_o)] + p[L(v) + N(v)] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r) \quad (4.80)$$

veya

$$\mathcal{H}(v, p) = L(v) - L(u_o) + p[L(u_o) + N(v)] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r) \quad (4.81)$$

şeklinde gösterilir (Odibat, 2007).

Eğer  $f$  fonksiyonu ikiden daha fazla terimden oluşuyorsa (4.80) veya (4.81) denkleminde  $f_0$  terimi  $u_0$ ,  $f_1$  terimi  $u_1$ ,  $f_2$  terimi  $u_2$  içinde hesaplanır ve hesaplama işlemi böyle devam eder. Bu varsayım hesaplamaları kolaylaştıracaktır ve böylece seri çözümün yakınsamasını hızlandıracaktır.

Verilen homotopi esas alınarak, HPM'nin yeni modifikasyon algoritmasının kolayca gözlemlenmesi mümkündür. Bu metotla (4.78)-(4.81) denklemlerinin HPM'ye göre her bir bileşenin içerdiği terimlerin sayısı ve hesaplamaların boyutu azalır. Ayrıca her bir bileşendeki terimlerin azaltılması çözümü kolaylaştırır (Odibat, 2007).

#### 4.4.4. Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

(4.72) denklemde  $v$  fonksiyonu  $v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$  şeklinde parçalanabilen bir fonksiyon olsun. O zaman (4.72) denkleminin homotopisi

$$(1-p)T_{*t}^{\alpha}u(x,t) + p\left[T_{*t}^{\alpha}u(x,t) + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx})\right] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t) \quad (4.82)$$

veya

$$T_{*t}^{\alpha}u(x,t) + p\left[L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx})\right] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x,t), \quad p \in [0,1] \quad (4.83)$$

şeklinde yazılır. (4.83) denkleminin çözümü  $p$ 'nin kuvvet serisi olarak

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots$$

yazılabileceğinden bu seri (4.83) denklemde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} p^0 : T_{*t}^{\alpha}u_0 &= v_0(x,t), \quad u_0^{(k)}(x,0) = f_k(x), \\ p^1 : T_{*t}^{\alpha}u_1 &= -L(u_0) - N(u_0) + v_1(x,t), \quad u_1^{(k)}(x,0) = 0, \\ p^2 : T_{*t}^{\alpha}u_2 &= -L(u_1) - N(u_0, u_1) + v_2(x,t), \quad u_2^{(k)}(x,0) = 0, \\ p^3 : T_{*t}^{\alpha}u_3 &= -L(u_2) - N(u_0, u_1, u_2) + v_3(x,t), \quad u_3^{(k)}(x,0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.84)$$

elde edilir ve (4.84) denklemlerine sırasıyla  $I_{*t}^{\alpha}$  operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + I_{*t}^{\alpha} [v_0(x,t)], \\ u_1 &= -I_{*t}^{\alpha} [L(u_0)] - I_{*t}^{\alpha} [N(u_0)] + I_{*t}^{\alpha} [v_1(x,t)], \\ u_2 &= -I_{*t}^{\alpha} [L(u_1)] - I_{*t}^{\alpha} [N(u_0, u_1)] + I_{*t}^{\alpha} [v_2(x,t)], \\ u_3 &= -I_{*t}^{\alpha} [L(u_2)] - I_{*t}^{\alpha} [N(u_0, u_1, u_2)] + I_{*t}^{\alpha} [v_3(x,t)], \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur (Abdulaziz vd., 2008).

Burada eğer  $v_0(x,t) = v(x,t)$  ve  $v_1(x,t) = 0$  olarak seçilirse çözümün AAY'ye,  $v_0(x,t) = 0$  ve  $v_1(x,t) = v(x,t)$  olarak seçildiğinde ise çözümün HPM'ye eşit olduğu görülmektedir. Yani homojenliği bozan fonksiyonun parçalanmasına göre AAY ve HPM'deki  $u_0, u_1, u_2$  ve  $u_3, \dots$  bileşenlerinin MHPM'deki çözüm fonksiyonları ile aynı olduğu görülmektedir.

#### 4.4.5. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin Modifiye Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü

Bu kısımda uyumlu kesirli kablo denklemini modifiye homotopi pertürbasyon metodu (MHPM) ile çözümlü yapılacaktır. (3.5) denkleminde  $T_{*t}^{\alpha-1} f(x,t)$  fonksiyonu düzenlenirse

$$\begin{aligned} T_{*t}^{\alpha-1} f(x,t) &= t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T_{*t}^{-1} f(x,t) \\ &= t^{1-\alpha} f(x,t) \\ &= t^{1-\alpha} 2 \sin \pi x \left( t + (\pi^2 + 1) \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \right) \\ &= 2 \sin \pi x \left( t^{2-\alpha} + (\pi^2 + 1) \frac{t^2}{\Gamma(\alpha+2)} \right) \end{aligned}$$

olur. Burada  $T_{*t}^{\alpha-1} f(x,t) = g(x,t)$  olsun. Kesin çözüm için en iyi sonucu verecek

şekilde  $g$  fonksiyonu,  $g_0(x,t) = 2t^{2-\alpha} \sin \pi x$  ve  $g_1(x,t) = 2(\pi^2 + 1) \frac{t^2}{\Gamma(\alpha+2)} \sin \pi x$

olarak parçalanır ve MHPM uygulansa,

(3.6) başlangıç koşulu ve (4.83) homotopi denkleminde göre pertürbasyon serisi

$$\begin{aligned} p^0 : T_{*t}^{\alpha} u_0 &= g_0(x,t), \quad u_0(x,0) = 0, \\ p^1 : T_{*t}^{\alpha} u_1 &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 + g_1(x,t), \quad u_1(x,0) = 0, \\ p^2 : T_{*t}^{\alpha} u_2 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1, \quad u_2(x,0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.85}$$

şeklinde elde edilir. (4.85) denklemlerine sırasıyla  $I_{*t}^{\alpha}$  operatörü uygulanırsa

$u_0, u_1, u_2$  ve  $u_3$  gibi bileşenleri

$$u_0(x,t) = t^2 \sin \pi x,$$

$$u_1(x,t) = -(\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2} \sin \pi x + 2(\pi^2 + 1) \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(3+\alpha)} \sin \pi x,$$

$$u_2(x,t) = (\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)(\alpha+2)} \sin \pi x - 2(\pi^2 + 1)^2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)\Gamma(3+\alpha)} \sin \pi x,$$

$$u_3(x,t) = -\frac{(\pi^2+1)^3 t^{3\alpha+2}}{(3\alpha+2)(2\alpha+2)(\alpha+2)} \sin \pi x + 2 \frac{(\pi^2+1)^3 t^{3\alpha+2}}{(3\alpha+2)(2\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)} \sin \pi x,$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Bu durumda yaklaşık çözüm

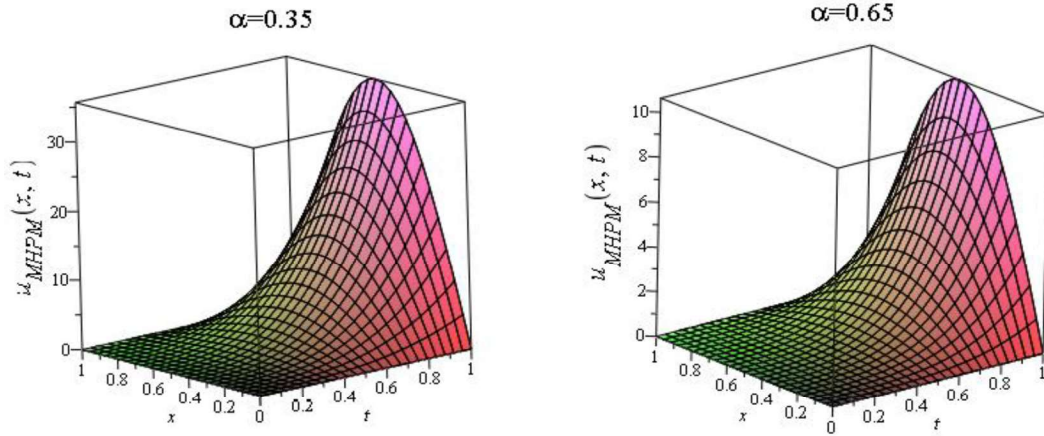
$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots$$

$$= t^2 \sin \pi x \left( 1 - \frac{(\pi^2+1)t^\alpha}{\alpha+2} + \frac{2(\pi^2+1)t^\alpha}{\Gamma(3+\alpha)} + \frac{(\pi^2+1)^2 t^{2\alpha}}{(2\alpha+2)(\alpha+2)} - \frac{2(\pi^2+1)^2 t^{2\alpha}}{(2\alpha+2)\Gamma(3+\alpha)} + \dots \right)$$

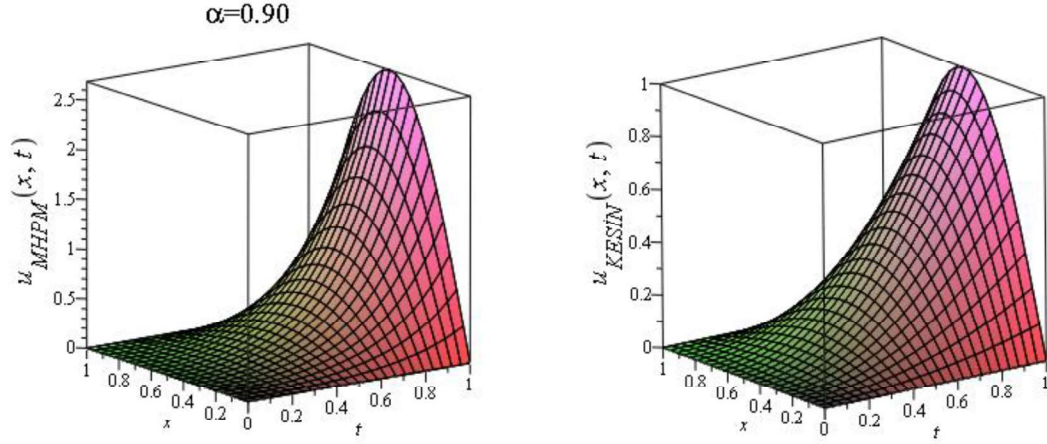
şeklinde elde edilir ve bu seri toplamında  $\alpha = 1$  yazıldığında (3.5) denkleminin kesin çözümü olan

$$u(x,t) = t^2 \sin \pi x$$

elde edilir.



Şekil 4.6.  $\alpha = 0.35$  ve  $\alpha = 0.65$  için kablo denkleminin MHPM ile çözümü.



Şekil 4.7. Kablo denkleminin  $\alpha = 0.90$  için MHPM ile çözümü ve kesin çözümü.

#### 4.5. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Öncelikle indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun daha iyi anlaşılabilmesi için kısaca diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) anlatılacaktır. Daha sonra indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM) ve İDDM'nin kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmasından bahsedilecektir. Uyumlu kesirli kablo denkleminin İDDM ile çözümü  $t$ 'ye bağlı olarak yapılacağından bu bölümde sadece  $t$  boyunca hesaplanacak dönüşümden bahsedilecektir.

##### 4.5.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

$v(x)$ , tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $V(k)$  olur.  $V(x)$ 'in bir boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$V(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \quad (4.86)$$

olarak tanımlanır. Dönüşüm fonksiyonunun tersi ise

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} V(k) x^k \quad (4.87)$$

şeklinde tanımlanır. (4.86) ve (4.87) eşitliklerinden

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} x^k$$

elde edilir (Zhou, 1986).

#### 4.5.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Benzer şekilde iki değişkenli  $v(x, y)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $V(k, h)$  olmak üzere,  $v(x, y)$ 'in iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (4.88)$$

olarak tanımlanır. Dönüşüm fonksiyonunun tersi ise

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} V(k, h) x^k y^h \quad (4.89)$$

şeklinde tanımlanır. (4.88) ve (4.89) eşitliklerinden

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h$$

elde edilir (Chen ve Ho, 1999).

#### 4.5.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

İki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h$$

şeklinde ele alalım. Buradan  $u(x, t)$  fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x, t) \right]_{\substack{x=0 \\ t=0}}$$

olarak elde edilir.

$$u_{x,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{k,h} x^k t^h$$

olduğundan fonksiyonu açarsak

$$U_{0,0}, U_{1,0}x, U_{2,0}x^2, \dots, U_{0,1}t, U_{1,1}xt, U_{1,2}xt^2, \dots, U_{0,2}t^2, U_{1,2}xt^2, \dots$$

elde edilir. Bu açılımdaki terimleri

$$t^0 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,0} x^k, t^1 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,1} x^k, t^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,2} x^k, \dots$$

gibi  $t$ 'nin kuvvetlerine göre düzenlersek buradan çözüm fonksiyonu

$$u_{x,t} = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

şeklinde elde edilir (Keskin ve Oturanc, 2009).

**Tanım 4.5.3.1.** İki değişkenli  $u(x,t)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$U(k,h)$  olmak üzere,  $u(x,t)$ 'nin  $t$  boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h \quad (4.90)$$

şeklindedir (Keskin, 2010).

**Tanım 4.5.3.2.** İki değişkenli  $u(x,t)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$U(k,h)$  olmak üzere,  $u(x,t)$ 'nin  $t$  boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[ \frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x,t) \right]_{t=0} \quad (4.91)$$

şeklindedir (Keskin, 2010).

**Tanım 4.5.3.3.**  $U_h(x)$  indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h \quad (4.92)$$

şeklinde tanımlanır. (4.91) ve (4.92) eşitliklerinden

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left[ \frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x,t) \right]_{t=0} t^h \quad (4.93)$$

elde edilir (Keskin, 2010).

**Tablo 4.4.**  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$u(x,t)$	$U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[ \frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x,t) \right]_{t=t_0}$

$u(x,t) = av(x,t) \pm bw(x,t)$	$U_h(x) = aV_h(x) \pm bW_h(x)$
$u(x,t) = v(x,t)w(x,t)$	$U_h(x) = \sum_{r=0}^h V_r(x)W_{h-r}(x)$
$u(x,t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} v(x,t)$	$U_h(x) = \frac{\partial^s}{\partial x^s} V_h(x)$
$u(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} v(x,t)$	$U_h(x) = \frac{(h+r)!}{h!} V_{h+r}(x)$
$u(x,t) = x^m t^n$	$U_h(x) = x^m \delta(h-n), \delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h = n \\ 0, & h \neq n \end{cases}$

**Tanım 4.5.3.4.**  $u(x,t)$ 'nin lineer olmayan operatörü  $Nu(x,t)$  olmak üzere,

$Nu(x,t)$ 'nin  $t$  boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$N_h(x) = \frac{1}{h!} \left[ \frac{\partial^h}{\partial t^h} Nu(x,t) \right]_{t=0} = \frac{1}{h!} \left[ \frac{\partial^h}{\partial t^h} Nu \left( \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h \right) \right]_{t=0} \quad (4.94)$$

şeklinde tanımlanır (Keskin, 2010).

**Tablo 4.5.** Lineer olmayan fonksiyonlar için  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$Nu(x,t) = u^m(x,t)$	$N_0(x) = U_0^m(x)$ $N_1(x) = mU_0^{m-1}(x)U_1(x)$ $N_2(x) = \frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(x)U_1^2(x) + mU_0^{m-1}(x)U_2(x)$ $\vdots$
$Nu(x,t) = \cos(u(x,t))$	$N_0(x) = \cos(U_0(x))$ $N_1(x) = -\sin(U_0(x))U_1(x)$ $N_2(x) = -\sin(U_0(x))U_2(x) - \frac{1}{2!}\cos(U_0(x))U_1^2(x)$ $\vdots$
$Nu(x,t) = e^{u(x,t)}$	$N_0(x) = e^{U_0(x)}$ $N_1(x) = U_1(x)e^{U_0(x)}$ $N_2(x) = \left( U_2(x) + \frac{1}{2}U_1^2(x) \right) e^{U_0(x)}$ $\vdots$

#### 4.5.4. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

**Tanım 4.5.4.1.**  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı  $u(x,t)$  fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.  $u(x,t)$ 'nin  $t$  boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$U_h^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^h h!} \left[ \left( {}_{\alpha} T_{*t}^{(h)} u \right) \right]_{t=t_0}$$

şeklinde tanımlanır (Acan ve Baleanu, 2017). Burada  $U_h^\alpha(x)$  dönüşüm fonksiyonu ve

$${}_{\alpha} T_{*t}^{(h)} u(x,t) = \underbrace{\left( {}_{\alpha} T_{*t} \, {}_{\alpha} T_{*t} \cdots {}_{\alpha} T_{*t} \right)}_{h \text{ kez}} u(x,t) \quad \text{ise} \quad \alpha. \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad \text{mertebeden} \quad h\text{-kez}$$

diferansiyellenebilen uyumlu türev operatörüdür.

**Tanım 4.5.4.2.**  $U_h^\alpha(x)$ 'nin  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h^\alpha(x) (t-t_0)^{\alpha h} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^h h!} \left[ {}_{\alpha} T_{*t}^{(h)} u \right]_{t=t_0} (t-t_0)^{\alpha h}$$

şeklinde tanımlanır (Acan ve Baleanu, 2017).

Ek olarak başlangıç koşullarının dönüşüm fonksiyonu

$$U_h^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha h)!} \left[ \frac{\partial^{\alpha h}}{\partial t^{\alpha h}} u(x,t) \right]_{t=t_0} & \text{if } \alpha h \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{if } \alpha h \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad \text{for } h = 0, 1, 2, \dots, \left( \frac{n}{\alpha} - 1 \right)$$

dur (Acan ve Baleanu, 2017). Burada  $n$ , uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denkleminin mertebesidir.

Lineer olmayan uyumlu kesirli diferansiyel denklem

$${}_{\alpha} T_{*t} u(x,t) = Lu(x,t) + Nu(x,t) + v(x,t), \quad (4.95)$$

ve başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) \quad (4.96)$$

olmak üzere (4.95) denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$\alpha(h+1)U_{h+1}^\alpha(x) = LU_h^\alpha(x) + NU_h^\alpha(x) + V_h^\alpha(x) \quad (4.97)$$

şeklinde elde edilir. (4.96) başlangıç şartının indirgenmiş diferansiyel dönüşümü ise

$$U_0^\alpha(x) = F_h^\alpha(x) \quad (4.98)$$

olur. (4.98) denklemi (4.97) denkleminde yerine yazılırsa ve  $h = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  değerleri için basit iteratif hesaplamalar kullanarak  $U_h^\alpha(x)$  fonksiyonu elde edilir. Daha sonra

$\{U_h^\alpha(x)\}_{h=0}^n$  fonksiyonunun ters dönüşümü ile (4.95) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h^\alpha(x) t^{h\alpha},$$

şeklinindedir ve burada  $n$ , yaklaşık çözümün basamağını gösterir. (4.95) denkleminin kesin çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t)$$

elde edilir.

Tanım 4.5.4.1 ve Tanım 4.5.4.2 den türetilen ve yaygın olarak kullanılan uyumlu kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşümü Tablo 4.6 da verilmiştir (Acan ve Baleanu, 2017).

**Tablo 4.6.** Bazı fonksiyonların dönüşümleri

Fonksiyon	Dönüşüm fonksiyonu
$u(x, t)$	$U_h^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^h h!} \left[ ({}_{\alpha} T_{*t}^{(h)} u) \right]_{t=t_0}$
$u(x, t) = av(x, t) \pm bw(x, t)$	$U_h^\alpha(x) = aV_h^\alpha(x) \pm bW_h^\alpha(x)$
$u(x, t) = v(x, t)w(x, t)$	$U_h^\alpha(x) = \sum_{r=0}^h V_r^\alpha(x) W_{h-r}^\alpha(x)$
$u(x, t) = T_{*t}^\alpha v(x, t)$	$U_h^\alpha(x) = \alpha(h+1)V_{h+1}^\alpha(x)$
$u(x, t) = x^m (t-t_0)^n$	$U_h^\alpha(x) = x^m \delta\left(h - \frac{n}{\alpha}\right), \delta\left(h - \frac{n}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } h = \frac{n}{\alpha} \\ 0, & \text{if } h \neq \frac{n}{\alpha} \end{cases}$

#### 4.5.5. Uyumlu Kesirli Kablo Denkleminin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü

Bu kısımda uyumlu kesirli kablo denklemini indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (İDDM) ile çözeceğiz. (3.5) denkleminde İDDM uygularsak, denkleminin dönüşümü Tanım 4.5.4.1 den

$$\alpha(h+1)U_{h+1}^\alpha(x) = \frac{\partial^2 U_h^\alpha(x)}{\partial x^2} - U_h^\alpha(x) + t^{1-\alpha} f(x, t) \quad (4.99)$$

şeklinde yazılır ve  $f(x,t)$  fonksiyonu için Tablo 4.6 deki değerler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(h+1)U_{h+1}^\alpha(x) &= \frac{\partial^2 U_h^\alpha(x)}{\partial x^2} - U_h^\alpha(x) \\ &+ 2 \sin \pi x \left( \delta\left(h - \frac{2-\alpha}{\alpha}\right) + (\pi^2 + 1) \frac{\delta\left(h - \frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma(2+\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (4.100)$$

elde edilir. (3.6) başlangıç koşulunun dönüşümü de

$$U_0^\alpha(x) = 0 \quad (4.101)$$

biçiminde elde edilir. (4.101) denklemi (4.100) denkleminde yerine yazılır ve  $h$ 'ın uygun değerleri için basit iteratif hesaplamalar yapılırsa

$$U_1^\alpha(x) = 0,$$

$$U_2^\alpha(x) = \sin \pi x,$$

$$U_3^\alpha(x) = -\frac{(\pi^2 + 1)}{2 + \alpha} \sin \pi x + \frac{2(\pi^2 + 1)}{\Gamma(3 + \alpha)} \sin \pi x,$$

$$U_4^\alpha(x) = \frac{(\pi^2 + 1)^2}{(2 + 2\alpha)(2 + \alpha)} \sin \pi x - \frac{2(\pi^2 + 1)^2}{(2 + 2\alpha)\Gamma(3 + \alpha)} \sin \pi x,$$

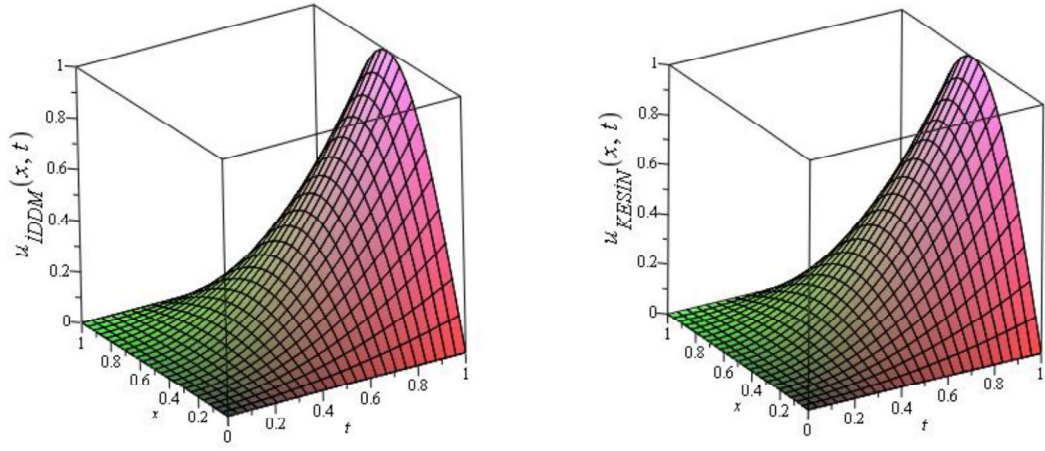
$$\vdots$$

$U_h^\alpha(x)$  fonksiyonunun bileşenlerini elde ederiz.

Daha sonra  $\{U_h^\alpha(x)\}_{h=0}^n$  fonksiyonunun ters dönüşümü ile (3.5) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x,t) &= \sum_{h=0}^{\infty} U_h^\alpha(x) t^{h\alpha} \\ &= t^2 \sin \pi x - \frac{(\pi^2 + 1)}{2 + \alpha} t^{2+\alpha} \sin \pi x + \frac{2(\pi^2 + 1)}{\Gamma(3 + \alpha)} t^{2+\alpha} \sin \pi x + \dots \end{aligned} \quad (4.102)$$

şeklinde elde edilir. (4.102) denkleminde  $\alpha = 1$  için (3.5) denkleminin kesin çözümü olan  $u(x,t) = t^2 \sin \pi x$  elde edilir.



Şekil 4.8. Kablo denkleminin  $\alpha = 1$  için İDDM ile çözümü ve kesin çözümü.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, zaman-kesirli bir boyutlu kesirli kablo denkleminin yaklaşık-analitik çözümleri elde edilmiştir. Kesirli türev operatörü olarak da uyumlu türev operatörü kullanılmıştır. Uyumlu kesirli kablo denklemi (UKKD)'nin çözümünü elde etmek için yaklaşık-analitik çözüm olan Adomian ayrışım yöntemi, varyasyonel iterasyon metodu, homotopi analiz metodu, homotopi pertürbasyon metodu, modifiye homotopi pertürbasyon metodu ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ele alınmıştır. Bulunan sonuçlar ve bundan sonraki yapılacak çalışmalar için öneriler şu şekilde sıralanabilir:

1. UKKD'nin AAY ve ViM ile elde edilen çözümlerinin  $\alpha = 0.30$  ve  $\alpha = 0.70$  değerleri için Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 üç boyutlu görüntüleri elde edilmiştir. Daha sonra Tablo 4.2 de  $x, t$  ve  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için mutlak hata tablosu oluşturulmuştur. Şekil 4.3 te ise  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için UKKD'nin kesin çözümü ile AAY ve ViM çözümlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.
2. UKKD'nin HAM ile elde edilen yaklaşık-analitik çözümünde  $x$  değişken ve  $t = 0.1$  iken  $h$  yardımcı parametresinin farklı değerlerinde çözüm fonksiyonun aldığı değerler bir tablo yardımı ile gösterilmiştir.
3. UKKD'nin HPM ile yaklaşık-analitik çözümü sonucunda elde edilen çözüm fonksiyonunda  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 üç boyutlu görüntüleri elde edilmiştir.
4. HAM da  $h$  yardımcı parametresinin  $h = -1$  değeri için HPM'ye eşit olduğu gösterilmiştir.
5. UKKD'nin MHPM ile yaklaşık-analitik çözümü sonucunda elde edilen çözüm fonksiyonunda  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 üç boyutlu görüntüleri elde edilmiş ve UKKD'nin kesin çözümünün üç boyutlu grafiğiyle aynı sonucu verdiği gözlemlenmiştir.
6. UKKD'nin HPM ve MHPM ile çözümünde  $\alpha$ 'nın aynı değerleri için oluşturulan Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 üç boyutlu grafikleri incelendiğinde MHPM ile çözümün grafiklerinin kesin çözüme daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.
7. MHPM de homojenliği bozan fonksiyonun parçalanmasına göre çözüm fonksiyonunun AAY veya HPM'ye eşit olduğu görülmektedir.

8. Son olarak İDDM ile çözümü yapılmış olup Şekil 4.8 de  $\alpha = 1$  değerinin UKKD'nin kesin çözümüyle aynı sonucu verdiği gözlemlenmiştir.
9. UKKD'nin kesin çözümüne hemen ulaştıran metotlar MHPM ve İDDM olduğu görülmüştür. Yani MHPM ve İDDM ile kesin sonuç daha kolay elde edilmekte iken diğer yöntemlerle yaklaşık olarak bir çözüm elde edilmektedir.
10. Öneri olarak bundan sonraki çalışmalarda lineer olmayan kesirli kablo denkleminde ve literatürdeki diğer lineer olmayan kesirli denklemlerde türev operatörü olarak uyumlu türev operatörü kullanılıp bu yöntemlerle yaklaşık-analitik çözümleri elde edilebilir.



## KAYNAKLAR

- Abbaoui, K. and Cherruault, Y., 1995, New ideas for proving convergence of decomposition methods, *Computers & Mathematics with Applications*, 29 (7), 103-108.
- Abbasbandy, S., 2007, Homotopy analysis method for heat radiation equations, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34 (3), 380-387.
- Abdeljawad, T., 2015, On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Abdulaziz, O., Hashim, I. and Momani, S., 2008, Application of homotopy-perturbation method to fractional IVPs, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216 (2), 574-584.
- Abel, N., 1823, Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 1, 11-18.
- Acan, O. and Baleanu, D., 2017, A new numerical technique for solving fractional partial differential equations, *arXiv preprint arXiv:1704.02575*.
- Acan, O., Firat, O., Keskin, Y. and Oturanc, G., 2016, Solution of conformable fractional partial differential equations by reduced differential transform method, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*.
- Acan, O., Oturanc, G. and Keskin, Y., 2017, Conformable variational iteration method, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5 (5), 172-178.
- Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135 (2), 501-544.
- Adomian, G., 1990, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 13 (7), 17-43.
- Adomian, G., 1994, Solving frontier problems of physics: The decomposition method kluwer, *Boston, MA*.
- Ahmad, R. S., 2015, An analytical solution of the fractional Navier-Stokes equation by residual power series method, PhD Thesis, *Zarqa University, Jordan*.
- Anderson, D. R. and Ulness, D. J., 2015, Newly defined conformable derivatives, *Adv. Dyn. Syst. Appl*, 10 (2), 109-137.
- Atangana, A., Baleanu, D. and Alsaedi, A., 2015, New properties of conformable derivative, *Open Mathematics*, 13 (1), 889-898.
- Avci, D., Eroglu, B. B. I. and Ozdemir, N., 2016, Conformable heat problem in a cylinder, *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications*, Novi Sad, Serbia, 572-558.
- Avci, D., Eroglu, B. B. I. and Ozdemir, N., 2017, Conformable heat equation on a radial symmetric plate, *Thermal Science*, 21 (2), 819-826.
- Ayaz, F., 2003, On the two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 143 (2-3), 361-374.
- Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J. J. and Shammakh, W., 2015, Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations, *Journal of function spaces*, 2015 (1), 6.
- Caputo, M., 1967, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II, *Geophysical Journal International*, 13 (5), 529-539.
- Caputo, M., 1969, *Elasticita e dissipazione*, Zanichelli, Bologna.
- Chen, C. o. K. and Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2-3), 171-179.

- Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A. and Tasbozan, O., 2017, New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative, *Waves in Random and Complex Media*, 27 (1), 103-116.
- Das, S., 2011, Functional fractional calculus, *Springer Science & Business Media*, Verlag Berlin Heidelberg.
- Debnath, L., 2011, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, *Springer Science & Business Media*.
- Dehghan, M., Manafian, J. and Saadatmandi, A., 2010, Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26 (2), 448-479.
- Diethelm, K., 2010, The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of caputo type, *Springer*, Germany.
- Duan, J.-S., Rach, R., Baleanu, D. and Wazwaz, A.-M., 2012, A review of the adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations, *Communications in Fractional Calculus*, 3 (2), 73-99.
- Finlayson, B., 1972, The method of weighted residual and variational principles, *Mathematics in Science and Engineering*, 87, 412.
- Fourier, J., 1822, Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier, *Chez Firmin Didot, père et fils*.
- Fowler, A. F., 1975, A study of fractional calculus: Its definitions and properties, PhD Thesis, *Texas State University*, Texas.
- He, J., 1997, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (4), 230-235.
- He, J., 1998, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 (1-2), 57-68.
- He, J., 1999a, Homotopy perturbation technique, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178 (3), 257-262.
- He, J., 1999b, Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International journal of non-linear mechanics*, 34 (4), 699-708.
- He, J., 2000, A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *International journal of non-linear mechanics*, 35 (1), 37-43.
- He, J., 2003, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation*, 135 (1), 73-79.
- He, J., 2004, Asymptotology by homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, 156 (3), 591-596.
- He, J., 2005, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26 (3), 695-700.
- Hilfer, R., 2000, Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives, *The Journal of Physical Chemistry B*, 104 (16), 3914-3917.
- Hu, X. and Zhang, L., 2012, Implicit compact difference schemes for the fractional cable equation, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (9), 4027-4043.
- Ilei, M., Biazar, J. and Ayati, Z., 2017, General solution of Bernoulli and Riccati fractional differential equations based on conformable fractional derivative, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 6 (2), 49-51.

- Inokuti, M., Sekine, H. and Mura, T., 1978, General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, *Variational method in the mechanics of solids*, 33 (5), 156-162.
- Kerçek, F., 2013, Elektromagnetik alanların sinir hücreleri ile etkileşiminin sayısal yöntemlerle incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.
- Keskin, Y., 2010, Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle çözülmesi, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Keskin, Y. and Oturanç, G., 2009, Reduced differential transform method for partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (6), 741-750.
- Keskin, Y. and Oturanç, G., 2008, The differential transform methods for nonlinear function and its applications, 9 (1), 69-76.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, *Elsevier*, Amsterdam.
- Kurnaz, A. and Oturanç, G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (6), 709-719.
- Lagrange, J. L., 1775, Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables, *Académie Royale Des Sciences et Belles Lettres*.
- Langlands, T., Henry, B. and Wearne, S., 2005, Solution of a fractional cable equation: Finite case, *Preprint, Submitted to Elsevier Science* <http://www.maths.unsw.edu.au/applied/filed/2005/amr05-33.pdf>.
- Liao, S., 1992, The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, Ph. D. Thesis, *Shanghai Jiao Tong University*, Shanghai
- Liao, S., 2003, Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, *CRC Press*, London.
- Liao, S., 2009, Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (4), 983-997.
- Liao, S., 2012, Homotopy analysis method in nonlinear differential equations, *Springer*, Verlag Berlin Heidelberg.
- Liouville, J., 1837, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires.
- Liu, F., Yang, Q. and Turner, I., 2009, Stability and convergence of two new implicit numerical methods for fractional cable equation, *Proceeding of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, San Diego, California, USA, 1015-1024.
- Molliq, R. Y., Noorani, M. S. M., Hashim, I. and Ahmad, R. R., 2009, Approximate solutions of fractional Zakharov-Kuznetsov equations by VIM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2), 103-108.
- Momani, S. and Odibat, Z., 2006, Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, *Physics Letters A*, 355 (4), 271-279.

- Murillo, J. Q. and Yuste, S., 2011, An explicit numerical method for the fractional cable equation, *International Journal of Differential Equations*, 2011, 12.
- Nishimoto, K., 1991, An essence of Nishimoto's fractional calculus (Calculus in the 21st Century): Integrations and differentiations of arbitrary order, *Descartes Press Company*.
- Odibat, Z., 2007, A new modification of the homotopy perturbation method for linear and nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 189 (1), 746-753.
- Odibat, Z. and Momani, S., 2006, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (1), 27-34.
- Odibat, Z. and Momani, S., 2008, Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos, Solitons & Fractals*, 36 (1), 167-174.
- Oldham, K. and Spanier, J., 1974, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order (Vol. 111), *Elsevier*, New York and London.
- Podlubny, I., 1998, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Academic Press*, San Diego.
- Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations, *Academic Press*, San Diego.
- Rall, W., 1957, Membrane time constant of motor neurons, *Science*, 126 (3271), 454.
- Reynolds, A., 2005, On the anomalous diffusion characteristics of membrane-bound proteins, *Physics Letters A*, 342 (5-6), 439-442.
- Ross, B., 1975, The development, theory and applications of the gamma function and a profile of fractional calculus, Ph. D. Thesis, *New York University*, New York.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., 1993, Fractional integrals and derivatives: theory and applications, *Gordon and Breach Yverdon*.
- Seng, V., Abbaoui, K. and Cherruault, Y., 1996, Adomian's polynomials for nonlinear operators, *Mathematical and Computer Modelling*, 24 (1), 59-65.
- Soltanian, F., Karbassi, S. and Hosseini, M., 2009, Application of He's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 41 (1), 436-445.
- Tan, Y., Xu, H. and Liao, S.-J., 2007, Explicit series solution of travelling waves with a front of Fisher equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 31 (2), 462-472.
- Thomas, G. B., Finney, R. L., Weir, M. D. and Giordano, F. R., 2003, Thomas' calculus, *Addison-Wesley Reading*.
- Wazwaz, A.-M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 111 (1), 33-51.
- Wazwaz, A.-M. and El-Sayed, S. M., 2001, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 122 (3), 393-405.
- Wazwaz, A. M., 2009, Partial differential equations and solitary waves theory, *Springer*, New York.
- Weilbeer, M., 2005, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background, Ph.D.Thesis, *Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität, Braunschweig*.

- Wu, G.-C., 2011, A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (8), 2186-2190.
- Yavuz, M., 2018, Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 8 (1), 1-7.
- Yavuz, M. and Özdemir, N., 2019, New numerical techniques for solving fractional partial differential equations in conformable sense, *Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications*, 49-62.
- Yavuz, M. and Yaskiran, B., 2017, Approximate-analytical solutions of cable equation using conformable fractional operator, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5 (4), 209-219.
- Zhou, J., 1986, Differential transformation and its applications for electrical circuits, *Huazhong University Press*, Wuhan, China.
- Zurigat, M., Momani, S. and Alawneh, A., 2010, Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic–differential equations by homotopy analysis method, *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (3), 1227-1235.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Burcu YAŞKIRAN  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Konya- 04.06.1989  
**Telefon** : 05556685512  
**Faks** :  
**e-mail** : burcu.yaskiran89@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Konya	2007
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	2013
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans	
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-2016	Selçuk Üniversitesi Doğanhisar Meslek Yüksekokulu	Öğretim Görevlisi

### YABANCI DİLLER

İngilizce

### YAYINLAR

Yavuz, M. and Yaskiran, B., 2017, Approximate-analytical solutions of cable equation using conformable fractional operator, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5 (4), 209-219.