T.C.

NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SZASZ OPERATÖRLERİNİN DUNKL ANALOGUNUN STANCU TİPİ GENELLEŞMESİ

Fatih KARAKOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2017

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatih Karakoç tarafından hazırlanan “Szasz Operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesi ” adlı tez çalışması 18/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI	…………………..
Danışman Prof. Dr. Nesip AKTAN	…………………..
Üye Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fatih KARAKOÇ

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZASZ OPERATÖRLERİNİN DUNKL ANALOGUNUN STANCU TİPİ GENELLEŞMESİ

Fatih KARAKOÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2017, 44 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu tezde Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesini tanımlayarak bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yaklaşımlar teorisi hakkında bilgiler verilip, bu teori hakkında literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde lineer pozitif operatörler tanıtılmış ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesini tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini incelenmiş ve tanımladığımız operatörün merkezi momentleri hesaplanmıştır. Ayrıca operatörün süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilmiştir.

Dördüncü bölümde tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra tanımladığımız operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-*K* fonksiyoneli yardımıyla hesaplanmıştır. Son olarak tanımladığımız operatörler için Voronovskaja tipi teorem verilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstien polinomu, Korovkin teoremi, Lineer pozitif operatörler, Lipschitz sınıfı, Peetre-K fonksiyoneli, Süreklilik modülü, Szasz operatörleri, Szasz Operatörlernini Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesi, Voronowskaja teoremi.

ABSTRACT

MS THESIS

STANCU TYPE GENERALIZATION OF DUNKL ANALOGUE OF SZASZ OPERATOR

Fatih KARAKOÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2017, 44 Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

In this thesis, the approximation properties were studied by defining Stancu Type Generalization of Dunkl Analogue of Szasz Operators.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, informations were given about the approximation theory, literature scan was done about this theory.

In the second part, linear positive operators were introduced and main properties which are supplied by linear pozitive operators were studied.

In the third part, the approximation properties were studied by defining Stancu Type Generalization of Dunkl Analogue of Szasz Operators and central moments of the operator that we defined were calculated. Besides, speed of approximation of these operators was estimated with the help of modulus of continuity and the function in the Lipschitz class.

In the fourth part, approximation properties to continuous functions in weighted space of this operator that we defined were studied. After that, speed of approximation in a weighted space of the operator that we defined was calculated by the help of both weighted modulus of continuity and Peetre-K functional. At last, Voronowskaja type theorem was given for operators that we defined.

Finally, in the fifth part, results were given.

Keywords: Bernstein polinomials, the Korovkin theorem, positive linear operators, Lipschitz class, Peetre's K-functionals, modulus of continuity, Szasz operators, Stancu Type Generalization of Dunkl Analogue of Szasz Operators, the Voronowskaja theorem.

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN (Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Fatih KARAKOÇ
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$L_n(f;x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$C[a,b]$	Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$\\|f\\|_{C[a,b]}$	C$[a,b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm.
$f_n(x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü.
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar.
$B_n(f;x)$	Bernstein Polinomları.
$S_n(f;x)$	Szasz operatörleri.
$S_n^*(f;x)$	Szasz operatörlerinin Dunkl Analogu.
$S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$	Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesi.
$C_{x^2}^*[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tanımlı $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı.
$K_2(f,\delta)$	Peetre-K fonksiyoneli.
$\Omega(f;\delta)$	f fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi matematiğin birçok dalıyla yakından ilişkilidir. Yaklaşımlar teorisi herhangi bir fonksiyonu, daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmeyi amaçlar. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında daha kolay bilgi edinmemizi sağlar. 1885 yılında Weierstarss kapalı bir $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan polinomların varlığını göstermiştir. Daha sonra Bernstein 1912 yılında Weierstarss'ın bu ifadesinin ispatı olarak, $[0,1]$ aralığında bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomları aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Bernstein'ın ifade ettiği bu polinomlar lineer pozitif operatörlerdir. Bernstein operatörleri tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genelleşmeleri ele alınmıştır. Örneğin Stancu 1968 yılında bir genelleşmesini aşağıdaki şekilde vermiştir. (Stancu 1968)

$0 \le \alpha \le \beta$ olmak üzere

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Literatürde Bernstein-Stancu operatörleri olarak geçen bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri Stancu tarafından incelenmiştir (Stancu 1968). Korovkin ise Bernstein operatörlerinden yola çıkarak lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili verdiği teoremle sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın gerçekleşmesi için sadece üç şartın incelenmesinin yeterli olacağını ifade etmiş ve bu teorem sayesinde Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer and Hahn operatörleri gibi operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu teorem yardımıyla sonlu aralıktaki lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenebilmiştir. Oysa Szasz operatörleri gibi birçok operatör sınırsız aralıklarda tanımlandığından bunların ancak ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenebilmektedir.

Szasz, Bernstein operaörünü sonlu aralıktan sonsuz aralığa genişleterek aşağıdaki şekilde operatörü tanımlamıştır; (Szasz 1950)
$x \in [0,\infty)$ ve $f \in C[0,\infty)$ için $S_n: C[0,\infty) \to C[0,\infty)$,

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

Szasz operatörü bu şekilde tanımladıktan sonra literatürde bu operatörün yaklaşım özellikleri ve operatörlerin çeşitli genelleşmeleri incelenmiştir(Aral ve ark. 2014, Wood 1969, Atakut ve Büyükyazıcı 2010, Acar ve ark. 2011, Gupta ve ark. 2006, Karaisa ve ark. 2015). Sucu bu operatörün Dunkl Analogu'nu aşağıdaki gibi tanımlayarak, bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Sucu 2014).

$$S_n^*(f;x) = \frac{1}{e_\mu^{nx}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$$

Burada,

$$e_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\gamma_\mu(k)}$$

şeklindedir. Ayrıca $k \in N_0$ ve $\mu > -1/2$ olmak üzere γ_μ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\gamma_\mu(2k) = \frac{2^{2k} k!\Gamma(k+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+1/2)} \quad \text{ve} \quad \gamma_\mu(2k+1) = \frac{2^{2k+1} k!\Gamma(k+\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1/2)}$$

γ_μ aynı zamanda aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$\gamma_\mu(k+1) = (\mathrm{k}+1+2\mu\theta_{k+1})\gamma_\mu(k), k \in N_0$$

Eğer; $k \in 2N_0$ olursa θ_k 0 olur, $k \in 2N_0+1$ olursa θ_k 1 olur.

$\mu \geq 0$ ve $x \geq 0$ için yukarıda tanımlanan operatör lineer pozitif operatör olur.

Bu tezde yaklaşımlar teorisi hakkında literatür taraması yapılacak, lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve bu operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Daha sonra bu tezde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir. İlerleyen bölümlerde Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesi tanımlanıp bu operatörün kapalı aralıkta Korovkin teoremi yardımıyla yakınsama özellikleri incelenecektir. Ayrıca süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar tanımlanıp bunlar yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Daha sonra ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları incelenip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenecektir. Daha sonra ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Bununla birlikte son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1 (Operatör)

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere X kümesinden Y kümesine olan bir L dönüşümüne *operatör* denir. Bu durumda X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık gelir. Bu Lf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer $L(f;x)$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.2 (Lineer Operatör)

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$L: X \to Y$

şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f, g \in X$ ve her $a_1, a_2 \in IR$ için

$$L(a_1 f + a_2 g) = a_1 L(f) + a_2 L(g)$$

koşulu sağlanıyorsa L operatörüne *lineer operatör* denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.3 (Pozitif Operatör)

Eğer bir L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyorsa yani;

f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$f \geq 0$ iken $L(f;x) \geq 0$

oluyorsa L operatörüne *pozitif operatör* denir (Korovkin 1960).

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere *lineer pozitif operatörler* denir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Aşağıdaki yardımcı teoremler lineer pozitif operatörlerin literatürde var olan özellikleridir.

Yardımcı Teorem 2.1.1

Lineer pozitif operatörler monoton azalmayandır. Yani $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat:
X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. $f, g \in X$ için $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan $L(g - f) \geq 0$ elde edilir. Ayrıca L operatörü lineer olduğundan $L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0$ elde edilir. Böylece $L(f) - L(g) \leq 0$ dir.

Yardımcı Teorem 2.1.2

L bir lineer pozitif operatör ise $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat:
X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Her hangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1.1}$$

dir. L operatörü lineer pozitif olduğu için Yardımcı Teorem 2.1.1 den dolayı monoton artan olduğu için (2.1.1)'den

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.1.2}$$

elde edilir. L operatörü lineer olduğundan

$L(-|f|) = -L(|f|)$'dir. Bunun (2.1.2)'de kullanılmasıyla;

$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.4 (Fonksiyon Dizisi)

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x)'$ e bir $fonksiyon\ dizisi$ denir ve (f_n) ile gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.5 (Operatör Dizisi)

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$L : X \rightarrow Y$

şeklindeki L operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f;x)$'e bir $operatör\ dizisi$ denir ve (L_n) ile gösterilir. $L_n(f;x)$, L_n operatörünün f'e uygulandığını ve sonucun x' e bağlı olduğunu gösterir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.6 (Fonksiyon Uzayı)

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ $fonksiyon\ uzay$ı denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \underset{a<x<b}{\text{maks}}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.7 (Düzgün Yakınsama)

Bir (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

yada daha açık olarak;

$$\lim_{n\to\infty} \underset{a<x<b}{\text{maks}}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir (Musayev ve ark. 2003).

Korovkin, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.1.1 (P.P. Korovkin Teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \tag{2.1.3}$$

olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a,b]$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere $i = 0,1,2$ için

$$L_n(\mathrm{e}_i;x) \rightrightarrows x^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

dir (Korovkin 1953).

İspat:

Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| \leq \delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı $\delta > 0$ reel sayısı vardır.

$|t-x| > \delta$ olduğunda ise (2.1.3)'ten ve üçgen eşitsizliğinden dolayı:

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{2.1.4}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer;

$|t-x| > \delta$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından;

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.1.5}$$

sağlanır.

(2.1.4) ve (2.1.5)'ten

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılır. O halde;

$|t-x|\le\delta$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

$|t-x|>\delta$ için $|f(t)-f(x)|<2M_f\dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$

elde edilir. Dolayısıyla her $t\in\mathbb{R}$ ve her $x\in[a,b]$ için:

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.1.6}$$

dir. Eğer $i=0,1,2$ koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f(t);x)-f(x)\right\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanır. Şimdi bunu gösterelim;

Lineerlikten:

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)|\\
&= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|\\
&= |L_n((f(t)-f(x));x)+f(x)(L_n(f(x);x)-1)|\\
&= |L_n((f(t)-f(x));x)+f(x)(L_n(1;x)-1)|
\end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le|L_n((f(t)-f(x));x)|+|f(x)||(L_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t)-f(x))\le|f(t)-f(x)|$$

olduğundan;

$$|L_n((f(t)-f(x));x)|\le|L_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

elde edilir. Operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)|\ge 0$$

olduğundan;

$$|L_n(|f(t)-f(x)|;x)|=L_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

dir. Böylece;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|$$

olduğu gösterilir. (2.1.3)'ten

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|$$

elde edilir. (L_n) monoton artan olduğundan (2.1.6)'nın kullanılmasıyla;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right| \tag{2.1.7}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)&=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\+x^2L_n(1;x)\end{bmatrix}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\+x^2L_n(1;x)-x^2\end{bmatrix}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bulduğumuz ifadenin (2.1.7)'de kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned}
\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le{}&\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}\\
&+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|
\end{aligned}$$

Elde edilir. $i=0,1,2$ koşullarının son eşitsizlikte kullanılmasıyla;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|<\varepsilon$$

bulunur. O halde;

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.8 (Merkezi Moment)

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$L: X \to Y$

şeklindeki L operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için (L_n) operatör dizisi verilsin.

$$L_n\left((t-x)^k; x\right),\ \{k = 0,1,2,\dots\}$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin *k-yıncı merkezi momenti* denir (Lorentz 1953).

Tanım 2.1.9 (Yaklaşım Hızı)

(α_n) ve (β_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \leq \beta_n$ ve $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ ve $\beta_n \to 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisininkinden daha *hızlıdır* denir.

Teorem 2.1.1' de lineer pozitif bir $(L_n(f;x))$ operatör dizisinin belirli şartlar altında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermiştik. Bu durumda $\|L_n(f) - f\|$ ifadesini sıfıra yakınsayan bir dizi olarak düşünebiliriz. Böylece $n \to \infty$ için $\beta_n \to 0$ olmak üzere; eğer

$$\|L_n(f) - f\| \leq M\beta_n$$

olacak şekilde bir (β_n) dizisi bulabilirsek, (β_n)'nin sıfıra yaklaşım hızı $L_n(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşma hızını değerlendirmemize yardımcı olur. Bu değerlendirmeyi yapmak için birçok yöntem vardır. Şimdi bu yöntemleri açıklayalım:

Tanım 2.1.10 (Süreklilik Modülü)

$f \in C[a,b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *Süreklilik Modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Süreklilik Modülünün Özellikleri

i. $\omega(f;\delta)\geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1)\leq \omega(f;\delta_2)$

iii. $\omega(f+g;\delta)\leq \omega(f;\delta)+\omega(\mathrm{g};\delta)$

iv. $m\in IN$ için $\omega(f;\mathrm{m}\delta)\leq \mathrm{m}\,\omega(f;\delta)$

v. $\lambda \in IR^{+}$ için $\omega(f;\lambda\delta)\leq (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$

vi. $\left|f(t)-f(x)\right|\leq \omega\left(f;|t-x|\right)$

vii. $\left|f(t)-f(x)\right|\leq \left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$

viii. $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega\left(f;\delta\right)=0$

dir (Altomare ve Campiti 1994).

Tanım 2.1.11 (Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar)

$0<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha}$ koşulunu sağlayan fonksiyonlara *Lipschitz sınıfındandır* denir. M 'ye de *Lipschitz sabiti* denir ve $f\in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12 (Ağırlıklı Fonksiyon Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığında tanımlı, M_f f ' e bağlı sabit olmak üzere $\left|f(x)\right|\leq M_f\left(1+x^2\right)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan kümeye $B_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* denir. $B_{x^2}[0,\infty)$ uzayının sürekli fonksiyonlardan oluşan alt uzayına $C_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon* uzayı denir. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonlardan oluşan $C_{x^2}[0,\infty)$ uzayının alt uzayına $C^{*}_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* denir. $C^{*}_{x^2}[0,\infty)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{x^2}=\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.13 (Ağırlıklı Süreklilik Modülü)

$f \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{x\in[0,\infty),h\leq\delta} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı olan $\Omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *ağırlıklı süreklilik modülü* denir (Atakut, Ispir 2002).

Ağırlıklı Süreklilik Modülünün Özellikleri

$f \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Ashieser 1956 ve Ispir 2001).

i. $\Omega(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$

iii. $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

iv. $m \in N$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

v. Herhangi $\delta > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

vi. $|f(t)-f(x)| \leq (1+x^2)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t)-f(x)| \leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\lambda\delta)$

Tanım 2.1.14 (Peetre-*K* Fonksiyoneli)

$[0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye $C_B[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$ şeklinde tanımlıdır. $\forall\delta > 0$ için Peetre-*K* fonksiyoneli

$$K_2(f,\delta) = \inf_{x\in C_B^2[0,\infty)} \left\{\|f-h\| + \delta\|h''\|\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada

$$C_B^2[0,\infty)=\{h\in C_B[0,\infty):h',h''\in C_B[0,\infty)\}\text{'dir.}$$

$\exists C>0$ öyle ki $K_2(f,\delta)\le C\omega_2(f,\delta)$ burada $\omega_2(f,\delta)$ ikinci dereceden süreklilik modülü olmak üzere

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0<p<\sqrt{\delta}}\ \sup_{x\in[0,\infty)}\left|f(x+2p)-2f(x+p)+f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır (Lorentz 1953). Ayrıca $\omega(f,\delta)$, $f\in C_B[0,\infty)$'nin genel süreklilik modülüdür.

Tanım 2.1.15 (Voronovskaja Asimptotik Yaklaşım)

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ ise (α_n) dizisine sonsuz küçülendir denir. (α_n) ve (β_n) dizileri sonsuz küçülen diziler olsun. Buna göre

i. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ ise (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisinden *daha hızlıdır* denir.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=\infty$ ise (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (α_n) dizisinden *daha hızlıdır* denir.

iii. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=1$ ise (α_n) ve (β_n) dizilerinin sıfıra yaklaşma *hızı aynıdır* denir.

iv. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=c$ ise c ye *asimptotik değer,* (β_n) dizisine de (α_n) dizisinin *asimptotik hızı* denir. Yani (α_n) nin sıfıra yaklaşım hızı (β_n) nin sıfıra yaklaşım hızıyla belirenir. Çünkü c, n'ye bağlı olmayan bir sabittir. Operatörlerde

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|L_n(f;x)-f(x)\right|}{\beta_n}=A(n,x)$ ise $A(n,x)$ fonksiyonu asimptotik değer, (β_n) dizisi de $\left|L_n(f;x)-f(x)\right|$'in asimptotik hızıdır.

3. SZASZ OPERATÖRLERİNİN DUNKL ANALOGUNUN STANCU TİPİ GENELLEŞMESİ

Bu bölümde Karaisa ve Karakoç tarafından literatüre kazandırılan Stancu Type Generalization of Dunkl Analogoue of Szasz Operator isimli çalışması detaylı bir şekilde incelecektir (Karaisa ve Karakoç 2016). Ayrıca Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesini tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini inceleyip tanımladığımız operatörün merkezi momentlerini hesaplayacağız. Ayrıca süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenecektir.

3.1. Operatörün Oluşturulması ve Yaklaşım Özellikleri

$n\in N$ ve $0\le\alpha\le\beta$ için Szasz operatörünün Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})=\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right) \tag{3.1.1}$$

Bu operatörde $\alpha=\beta=0$ alınırsa $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ operatöründen Sucu tarafından yapılan Szasz operatörünün Dunkl Analogu elde edilir. Eğer $\mu=\alpha=\beta=0$ alınırsa $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ operatöründen Szasz operatörü elde edilir. Operatörü oluşturduktan sonra operatörün yaklaşım özelliklerine geçelim.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz operatörünün Dunkl Analogunun yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.1

$n\in N$ olmak üzere $\forall x\in[0,\infty)$ ve için

$$S_n^*(1;x)=1$$

$$S_n^*(t;x)=x$$

$$S_n^*(t^2;x)=x^2+\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x}{n}$$

$$S_n^*(t^3;x)=x^3+\left(3-2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x^2}{n}+\left(1+4\mu^2+4\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x}{n^2}$$

$$S_n^*(t^4;x)=x^4+\left(6+4\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x^3}{n}+\left(7+4\mu^2-8\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x^2}{n^2}+$$
$$+\left(1+12\mu^2+2\mu(3+4\mu^2)\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x^2}{n^3}$$

Eşitlikleri sağlanır(Sucu 2014).

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.2

$n\in N$ olmak üzere $\forall x\in[0,\infty)$ ve $0\le\alpha\le\beta$ için

$$S_n^{\alpha,\beta}(1;x)=1$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t;x)=\frac{nx}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^2;x)=\frac{n^2x^2}{(n+\beta)^2}+\frac{A_0nx}{(n+\beta)^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^3;x)=\frac{n^3x^3}{(n+\beta)^3}+\frac{A_1n^2x^2}{(n+\beta)^3}+\frac{A_2nx}{(n+\beta)^3}+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^4;x)=\frac{n^4x^4}{(n+\beta)^4}+\frac{A_3n^3x^3}{(n+\beta)^4}+\frac{A_4n^2x^2}{(n+\beta)^4}+\frac{A_5nx}{(n+\beta)^4}+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

eşitlikleri geçerlidir ve burada

$$A_0 = 2\alpha + 1 + 2\mu \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

$$A_1 = 3\alpha + 3 - 2\mu \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

$$A_2 = 1 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 4\mu^2 + 2\mu\left(2 + 3\alpha\right) \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

$$A_3 = 6 + 4\alpha + 4\mu \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

$$A_4 = 7 + 4\mu^2 + 6\alpha^2 + 12\alpha - 8\mu\left(1 + \alpha\right) \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

$$A_5 = 1 + 12\mu^2 + 2\alpha\left(2 + 8\mu^2 + 2\alpha^2 + 3\alpha\right) + 2\mu\left(3 + 4\mu^2 + 8\alpha + 6\alpha^2\right) \frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

dir.

İspat. Yardımcı Teorem 3.1.1 ve $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ tanımından;

i)

$$S_n^{\alpha,\beta}(1;\mathrm{x}) = \frac{1}{e_\mu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} = S_n^*(1;\mathrm{x}) = 1$$

dir.

ii)

$$\begin{aligned}
S_n^{\alpha,\beta}(t;x) &= \frac{1}{e_\mu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} f\left(\frac{k + 2\mu\theta_k + \alpha}{n+\beta}\right) \\
&= \frac{1}{(n+\beta)e_\mu(nx)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} \left(k + 2\mu\theta_k\right) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} \right\} \\
&= \frac{n}{(n+\beta)} \frac{1}{e_\mu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} \frac{\left(k + 2\mu\theta_k\right)}{n} + \frac{\alpha}{(n+\beta)} \frac{1}{e_\mu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} \\
&= \frac{n}{(n+\beta)} S_n^*(t;x) + \frac{\alpha}{(n+\beta)} S_n^*(1;x) \\
&= \frac{nx}{n+\beta} + \frac{\alpha}{n+\beta}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii)

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^2;x)=\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2e_\mu(nx)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}(k+2\mu\theta_k)^2+2\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}(k+2\mu\theta_k)+\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right\}$$

$$=\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{(k+2\mu\theta_k)^2}{n^2}+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{(k+2\mu\theta_k)}{n}$$
$$+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}$$

$$=\frac{n^2}{(n+\beta)^2}S_n^*(t^2;x)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}S_n^*(t;x)+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}S_n^*(1;x)$$

$$=\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\left(x^2+\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)\frac{x}{n}\right)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^2;x)=\frac{n^2x^2}{(n+\beta)^2}+\frac{\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

bulunur.

iv)

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^3;x)=\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)^3$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^3e_\mu(nx)}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}(k+2\mu\theta_k)^3+3\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}(k+2\mu\theta_k)^2+\\+3\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}(k+2\mu\theta_k)+\alpha^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{n^3}{(n+\beta)^3}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{(k+2\mu\theta_k)^3}{n^3}+\frac{3\alpha n^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{(k+2\mu\theta_k)^2}{n^2}$$
$$+\frac{3\alpha^2n}{(n+\beta)^3}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{(k+2\mu\theta_k)}{n}+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^3;x)=\frac{n^3}{(n+\beta)^3}S_n^*(t^3;x)+\frac{3\alpha n^2}{(n+\beta)^3}S_n^*(t^2;x)+\frac{3\alpha^2 n}{(n+\beta)^3}S_n^*(t;x)+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}S_n^*(1;x)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^3;x)=\frac{n^3x^3}{\left(n+\beta\right)^3}+\frac{A_1n^2x^2}{\left(n+\beta\right)^3}+\frac{A_2nx}{\left(n+\beta\right)^3}+\frac{\alpha^3}{\left(n+\beta\right)^3}$$

Bulunur.

v)

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^4;x)=\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)^4$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^4e_\mu(nx)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(k+2\mu\theta_k\right)^4+4\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(k+2\mu\theta_k\right)^3+6\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(k+2\mu\theta_k\right)^2\\ \displaystyle+4\alpha^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(k+2\mu\theta_k\right)^1+\alpha^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\end{array}\right\}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^4;x)=\frac{n^4}{(n+\beta)^4}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{\left(k+2\mu\theta_k\right)^4}{n^4}+\frac{4\alpha n^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{\left(k+2\mu\theta_k\right)^3}{n^3}$$

$$+\frac{6\alpha^2n^2}{(n+\beta)^4}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{\left(k+2\mu\theta_k\right)^2}{n^2}+\frac{4\alpha^3 n}{(n+\beta)^4}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{\left(k+2\mu\theta_k\right)}{n}$$

$$+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}$$

$$=\frac{n^4}{(n+\beta)^4}S_n^*(t^4;x)+\frac{4\alpha n^3}{(n+\beta)^4}S_n^*(t^3;x)+\frac{6\alpha^2n^2}{(n+\beta)^4}S_n^*(t^2;x)+\frac{4\alpha^3n}{(n+\beta)^4}S_n^*(t;x)+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}S_n^*(1;x)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(t^4;x)==\frac{n^4x^4}{\left(n+\beta\right)^4}+\frac{A_3n^3x^3}{\left(n+\beta\right)^4}+\frac{A_4n^2x^2}{\left(n+\beta\right)^4}+\frac{A_5nx}{\left(n+\beta\right)^4}+\frac{\alpha^4}{\left(n+\beta\right)^4}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

Teorem 3.1.1

$E=\left\{ f: x\in[0,\infty), \dfrac{f(x)}{x^2+1} \text{ yakınsaktır, } x\to\infty \right\}$, $f\in C[0,\infty)\cap E$ ve $A\in IR^{+}$ olmak üzere (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörü f fonksiyonuna $[0,A]$ aralığında düzgün yakınsar.

İspat:

Korovkin teoremi (Altomare ve Campiti 1994) gereğince $i=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{\alpha,\beta}(t^i;x)-x^i\right\|_{C[0,A]}=0$$

olduğu gösterilmelidir.

i)

$i=0$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{\alpha,\beta}(1;x)-1\right|=0$$

olduğu açıktır.

ii)

$i=1$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{\alpha,\beta}(t;x)-x\right|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{nx}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}-x\right|$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{\alpha,\beta}(t;x)-x\right|&=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{-\beta x}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}\right|\\&\le\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{\beta x}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}\right|\\&\le\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta A}{n+\beta}\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir.

iii)

$i=2$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)-x^2\right|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{n^2x^2}{\left(n+\beta\right)^2}+\frac{\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{\left(n+\beta\right)^2}+\frac{\alpha^2}{\left(n+\beta\right)^2}-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{1}{\left(n+\beta\right)^2}\left\{n^2x^2+\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx+\alpha^2\right\}-x^2\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(n+\beta\right)^2}\left\{\max_{0\le x\le A}\left(\left|-2n\beta-\beta^2\right|\right)x^2+\left|2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right|nx+\left|\alpha^2\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(n+\beta\right)^2}\left\{\max_{0\le x\le A}\left(2n\beta+\beta^2\right)x^2+\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx+\alpha^2\right\}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(n+\beta\right)^2}\left\{\left(2n\beta+\beta^2\right)A^2+\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nA+\alpha^2\right\}$$

$$=0$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminden (Altomare ve Campiti 1994) $\left[0,A\right]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f\right\|_{C[0,A]}=0$ sağlanır ki böylece $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu gösterilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Tanım 2.1.8 ile verilen merkezi momentleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.3

(3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ operatörlerinin Tanım 2.1.8 ile verilen merkezi momentlerinin bazılarının eşitleri;

$$S_n^{\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^0;x\right)=1$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^1;x\right)=\frac{-\beta x}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)=\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=\left\{\begin{array}{l}\frac{x^4\beta^4}{(n+\beta)^4}+\frac{x^3\left(24\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^3+32\beta\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^2+C_1n-4\alpha\beta^3\right)}{(n+\beta)^4}\\+\frac{x^2\left(C_2n^2-C_3n+6\alpha^2\beta^2\right)}{(n+\beta)^4}+\frac{x\left(C_4n-4\alpha^3\beta\right)}{(n+\beta)^4}+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}\end{array}\right\}$$

şeklindedir ve ayrıca;

$$C_1=6\beta^2\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right),$$

$$C_2=3-12\mu^2-(24+32\alpha)\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)},$$

$$C_3=4\beta\left(1+3\alpha+4\mu^2+(4+6\alpha)\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right),$$

$$C_4=1+2\alpha\left(2+3\alpha+8\mu^2\right)+12\mu^2+\left(6+8\mu^2+16\alpha+12\alpha^2\right)\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}$$

dir.

İspat:

i)

$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^0;x\right)=S_n^{\alpha,\beta}(1;x)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^0;x\right)=1$dir.

ii)

$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x);x\right)=\frac{-\beta x}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}$ olduğunu gösterelim;

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x);x\right)=S_n^{\alpha,\beta}(t;x)-S_n^{\alpha,\beta}(x;x)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x);x\right)=S_n^{\alpha,\beta}(t;x)-xS_n^{\alpha,\beta}(1;x)=\frac{nx}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}-x=\frac{-\beta x}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

dir.

iii)

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)=\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$ olduğunu

gösterelim;

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)=S_n^{\alpha,\beta}\left((t^2-2xt+x^2);x\right)$$

$$=S_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)-2xS_n^{\alpha,\beta}\left(t;x\right)+x^2S_n^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)$$

$$=\frac{n^2x^2}{(n+\beta)^2}+\frac{\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}-2x\left(\frac{nx}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+x^2$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)=\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

dir.

iv)

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^4\beta^4}{(n+\beta)^4}+\dfrac{x^3\left(24\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^3+32\beta\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^2+C_1n-4\alpha\beta^3\right)}{(n+\beta)^4}\\ +\dfrac{x^2\left(C_2n^2-C_3n+6\alpha^2\beta^2\right)}{(n+\beta)^4}+\dfrac{x\left(C_4n-4\alpha^3\beta\right)}{(n+\beta)^4}+\dfrac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}\end{array}\right\}$$

olduğunu gösterelim;

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=S_n^{\alpha,\beta}\left((t^4-4t^3x+6t^2x^2-4tx^3+x^4);x\right)$$

$$=S_n^{\alpha,\beta}\left(t^4;x\right)-4xS_n^{\alpha,\beta}\left(t^3;x\right)+6x^2S_n^{\alpha,\beta}\left(\mathrm{t}^2;x\right)$$

$$-4x^3S_n^{\alpha,\beta}\left(t;x\right)+x^4S_n^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)==\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n^4x^4}{(n+\beta)^4}+\dfrac{A_3n^3x^3}{(n+\beta)^4}+\dfrac{A_4n^2x^2}{(n+\beta)^4}+\dfrac{A_5nx}{(n+\beta)^4}+\dfrac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}\\ -4x\left(\dfrac{n^3x^3}{(n+\beta)^3}+\dfrac{A_1n^2x^2}{(n+\beta)^3}+\dfrac{A_2nx}{(n+\beta)^3}+\dfrac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}\right)\\ +6x^2\left(\dfrac{n^2x^2}{(n+\beta)^2}+\dfrac{A_0nx}{(n+\beta)^2}+\dfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\right)-4x^3\left(\dfrac{nx}{n+\beta}+\dfrac{\alpha}{n+\beta}\right)+x^4\end{array}\right\}$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^4\beta^4}{(n+\beta)^4}+\dfrac{x^3\left(24\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^3+32\beta\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}n^2+C_1n-4\alpha\beta^3\right)}{(n+\beta)^4}\\ +\dfrac{x^2\left(C_2n^2-C_3n+6\alpha^2\beta^2\right)}{(n+\beta)^4}+\dfrac{x\left(C_4n-4\alpha^3\beta\right)}{(n+\beta)^4}+\dfrac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}\end{array}\right\}$$

dir.

3.2. Szasz Operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Yaklaşım Hızı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını daha önce tanımlarını ve özelliklerini verdiğimiz süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yapacağız.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 3.2.1

$f\in C[0,\infty)\cap E$ olmak üzere (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right),$$

şeklindedir ve ayrıca

$$\delta_{n,x}=\left(\frac{\beta^2}{\left(n+\beta\right)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{\left(n+\beta\right)^2}x+\frac{\alpha^2}{\left(n+\beta\right)^2}\right)^{1/2} \text{ dır.}$$

İspat:

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\left(f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right)\right|$$

elde edilir.

$\dfrac{1}{e_\mu(nx)}\geq 0$ ve $\dfrac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\geq 0$ olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right|$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii.) özelliğinde $t=\dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}$ seçimiyle

$$\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right|\leq\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\left(1+\frac{\left|\dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|}{\delta}\right)\omega\left(f,\delta\right)$$

$$=\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}+\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{\left|\dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|}{\delta}\right)\omega\left(f,\delta\right)$$

Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$=\omega\left(f,\delta\right)\left\{1+\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{\left|\dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|}{\delta}\right\}$$

$$=\omega\left(f,\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\frac{\left(nx\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right\} \tag{3.2.1}$$

bu ifadede

$$M=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak düşünülürse

$$M=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla;

$$M\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_n^*(1;x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir ve Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$M\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bunun (3.2.1) de yerine yazılmasıyla;

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(nx)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(S_n^{\alpha,\beta}\left((\mathrm{t}-\mathrm{x})^2;\mathrm{x}\right)\right)^{1/2}\right\}$$

elde edilir. Burada $\delta=\delta_{n,x}$ olarak seçilirse ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 3.2.2

$f \in Lip_M(\alpha)$, $0<\alpha\le 1$ olmak üzere (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı; $M \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \le M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha},$$

şeklindedir.

İspat:

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| = \left|\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x)\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right)\right|$$

elde edilir.

$\dfrac{1}{e_\mu(nx)} \ge 0$ ve $\dfrac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} \ge 0$ olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \le \frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right| \tag{3.2.2}$$

olur. Diğer taraftan;

$f \in Lip_M(\alpha) \Rightarrow \left|f(t)-f(x)\right| \le M\left|t-x\right|^{\alpha}$

dır. Burada $t=\dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}$ seçersek

$$\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right| \le M\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\alpha}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin (3.2.2)'de kullanılmasıyla;

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le \frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}M\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\alpha}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\alpha}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right) \tag{3.2.3}$$

elde edilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçersek $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olur ve (3.2.3)'ten

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\alpha}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte Hölder eşitsizliğinin kullanılmasıyla;

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$\le M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(S_n^*(1;x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur ve buradan

$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\left(S_n^{\alpha,\beta}\left((\mathrm{t}-\mathrm{x})^2;\mathrm{x}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3'ten ve

$$\delta_{n,x}=\left(\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\right)^{1/2}$$ seçimiyle

$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha}$ elde edilir böylece ispat tamamlanır.

4. OPERATÖRÜN AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir. Daha sonra $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-*K* fonksiyoneli yardımıyla tahmin edilecektir. Son olarak $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörü için Voronovskaja tipi teorem verilecektir.

4.1. Operatörün Ağırlıklı Uzaylarda Düzgün Yakınsaklığı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 4.1.1

$\rho\left(x\right)=1+x^2$ ağırlıklı fonksiyon olsun. Eğer $f\in C_{x^2}\left[0,\infty\right)$ ise M pozitif bir reel sayı olmak üzere

$\left\|S_n^{\alpha,\beta}\left(\rho,x\right)\right\|_{x^2}\le 1+M$ 'dir.

İspat:

Yardımcı teorem 3.1.2'den ve lineerlikten

$$S_n^{\alpha,\beta}\left(\rho;x\right)=S_n^{\alpha,\beta}\left(1+x^2;x\right)=S_n^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)+S_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}\left(\rho;x\right)=1+\frac{n^2x^2}{\left(n+\beta\right)^2}+\frac{\left(2\alpha+1+2\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{\left(n+\beta\right)^2}+\frac{\alpha^2}{\left(n+\beta\right)^2}$$

yazabiliriz. $C_{x^2}\left[0,\infty\right)$ uzayındaki norma göre

$$\left\|S_n^{\alpha,\beta}(\rho;x)\right\|_{x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)}\left\{\frac{1+\dfrac{n^2x^2}{(n+\beta)^2}+\dfrac{\left(2\alpha+1+2\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2}+\dfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}}{1+x^2}\right\}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{n^2x^2}{(n+\beta)^2(1+x^2)}+\dfrac{\left(2\alpha+1+2\mu\dfrac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2(1+x^2)}\\ +\dfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2(1+x^2)}\end{array}\right\}$$

$$\left\|S_n^{\alpha,\beta}(\rho;x)\right\|_{x^2} \le 1+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}+\frac{(\alpha+1/2+\mu)n}{(n+\beta)^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+\beta)^2}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}=0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\alpha+1/2+\mu)n}{(n+\beta)^2}=0$ olduğundan buradan pozitif bir M reel sayısı elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\|S_n^{\alpha,\beta}(\rho,x)\right\|_{x^2} \le 1+M$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

Teorem 4.1.1

Her $f\in C_{x^2}^*[0,\infty)$ için (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörü

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right\|_{x^2}=0$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

Gadzhiev tarafından verilen ağırlıklı Korovkin teoremi gereğince (Gadzhiev 1974)

$\upsilon = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_\upsilon;x) - e_\upsilon(x)\right\|_{x^2} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

i) $\upsilon = 0$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{\alpha,\beta}(1;x) - 1\right\|_{x^2} = 0$$

yazabiliriz.

ii) $\upsilon = 1$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_1;x) - e_1(x)\right\|_{x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{nx}{n+\beta} + \frac{\alpha}{n+\beta} - x\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{\alpha - \beta x}{(n+\beta)(1+x^2)}\right| \le \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{\alpha + \beta x}{(n+\beta)(1+x^2)}\right| \le \frac{\alpha+\beta}{n+\beta}$$

ve

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_1;x) - e_1(x)\right\|_{x^2} = 0$ elde edilir.

iii) $\upsilon = 2$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_2;x) - e_2(x)\right\|_{x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{n^2x^2}{(n+\beta)^2} + \frac{\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} - x^2\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{\left(-2n\beta-\beta^2\right)x^2}{(n+\beta)^2(1+x^2)} + \frac{\left(2\alpha+1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)nx}{(n+\beta)^2(1+x^2)} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2(1+x^2)}\right|$$

$$\le \frac{\beta(2n+\beta)}{(n+\beta)^2} + \frac{(\alpha+1/2+\mu)n}{(n+\beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

ve

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_2;x) - e_2(x)\right\|_{x^2} = 0$ elde edilir.

Elde ettiğimiz bu bağıntılardan $\upsilon = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S_n^{\alpha,\beta}(e_\upsilon;x) - e_\upsilon(x)\right\|_{x^2} = 0$$

şartları sağlanır böylece ispat tamamlanır.

4.2. Operatörün Ağırlıklı Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızı

Bu bölümde $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla tahmin edilecektir.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 4.2.1

$f \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ ve $M_{(\alpha,\beta,\mu)}$ n'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3} \leq M_{(\alpha,\beta,\mu)}\left(1+\frac{n}{(n+\beta)^2}\right)\Omega\left(f;\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülünün vii. özelliğinde

$$\left|f(t) - f(x)\right| \leq 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\lambda\delta)$$

burada $t = \dfrac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}$ alınırsa

$$\left|f(t) - f(x)\right| \leq 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta} - x\right|}{\delta}\right)\left(1+\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta} - x\right)^2\right)\Omega(f;\lambda\delta)$$

elde edilir. Böylece

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le\frac{1}{e_\mu(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}\right)-f(x)\right|$$
$$\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)$$
$$\times\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(1+\frac{\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|}{\delta}\right)\left(1+\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\right)\right\}$$

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|=2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\\+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\\+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\end{array}\right\}$$

Burada

$$A=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right| \text{ ve}$$

$$B=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2$$

olsun.

$$A=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla,

$$A\le\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}$$
$$=\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}\cdot\left(S_n^{\alpha,\beta}(1;x)\right)^{1/2}$$

olup Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$A\le \frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right|\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\left(\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}$$

yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla,

$$B\le \frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+2\mu\theta_k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^4\frac{1}{e_\mu(nx)}\frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)}\right)^{1/2}$$

elde edilen bu A ve B eşitsizliklerini yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| &\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)\\ &\times\begin{pmatrix}1+S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+\frac{1}{\delta}\sqrt{S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)}\\ +\frac{1}{\delta}\sqrt{S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten $0\le\alpha\le\beta$ ve $x\in[0,\infty)$ olduğu için

$$S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)\le\frac{n}{(n+\beta)^2}\left((\beta+\alpha)^2+1+2\mu\right)\left(x^2+x+1\right),$$

$$\begin{aligned}S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)&\le\frac{n}{(n+\beta)^2}\begin{pmatrix}\alpha^4+\beta^4+8\mu^3+12\mu^2+24\mu+32\mu(\alpha+\beta)\\ +6\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2\right)+4\mu\left(2\mu\alpha+3\alpha+3\beta^2\right)+4\alpha+3\end{pmatrix}\\ &\times\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde edip bunların yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| &\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)\\ &\times\left\{1+A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}\left(\sqrt{A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)}+\sqrt{A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)B_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)}\right)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)=\left((\beta+\alpha)^2+1+2\mu\right)\left(x^2+x+1\right),$$

$$B_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)=\begin{pmatrix}\alpha^4+\beta^4+8\mu^3+12\mu^2+24\mu+32\mu(\alpha+\beta)\\ +6\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2\right)+4\mu\left(2\mu\alpha+3\alpha+3\beta^2\right)+4\alpha+3\end{pmatrix}\cdot\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$$

şeklindedir.

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)$$
$$\times\left\{1+A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}\left(\sqrt{A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)}+\sqrt{A_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)B_{(\alpha,\beta,\mu)}(x)}\right)\right\}$$

eşitsizliğinde $\delta=\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}$ seçilip her iki taraf $\left(1+x^2\right)^3$ e bölünüp her iki tarafın $x\ge 0$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup_{x\ge 0}\frac{\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\le M_{(\alpha,\beta,\mu)}\left(1+\frac{n}{(n+\beta)^2}\right)\Omega\left(f;\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

4.3. Operatörün Voronovskaja Asimptotik Yaklaşımı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörü için Voronovskaja tipi teoremi verilecektir.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Voronovskaja tipi teoremi ile ilgilidir.

Teorem 4.3.1

f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve $x\in[0,\infty)$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$\lim_{n\to\infty} n\left(S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right)=(\alpha-x\beta)f'(x)+\frac{(1+2\mu)x}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

f fonksiyonu sabit bir x noktası için Taylor formülü

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}\left[f''(x)(t-x)^2+g(t,x)(t-x)^2\right]$$

şeklindedir. Burada $g(\bullet,x)$ x noktasında sürekli ve $\lim_{t\to x} g(t,x)=0$ dır.

Taylor formülünün her iki tarafına $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörü uygulanırsa

$$S_n^{\alpha,\beta}(f;x)=f(x)+f'(x)S_n^{\alpha,\beta}((t-x);x)+\frac{1}{2}f''(x)S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir ve buradan da Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\begin{aligned}S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)&=f'(x)\frac{\alpha-\beta x}{n+\beta}\\&+\frac{1}{2}f''(x)\left\{\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x\right\}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\\&+S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}n\left[S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right]&=f'(x)\frac{n(\alpha-\beta x)}{n+\beta}\\&+n\left(\frac{1}{2}f''(x)\left\{\frac{\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-nx)}{e_\mu(nx)}\right)-2\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x\right\}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\right)\\&+n.S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}n\left(S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right)=(\alpha-x\beta)f'(x)+\frac{(1+2\mu)x}{2}f''(x)+\lim_{n\to\infty}n.S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir. O halde

$\lim_{n\to\infty}n.S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)=0$ olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)\le\left(S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon^2(t,x);x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\tag{4.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varepsilon^2(x,x)=0$ ve $\varepsilon(\bullet,x)\in C_2^*[0,\infty)$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereğince

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon^2(t,x);x\right)=\varepsilon^2(x,x)=0\tag{4.3.2}$$

$[0,A]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Dolayısıyla (4.3.1), (4.3.2) ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\lim_{n\to\infty} n.S_n^{\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)=0$$

elde edilir ki buradan istenilen sonuca ulaşılır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} n\left(S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right)=(\alpha-x\beta)f'(x)+\frac{(1+2\mu)x}{2}f''(x)$$

elde edilir. Burada $(\alpha-x\beta)f'(x)+\frac{(1+2\mu)x}{2}f''(x)$ asimptotik değer, $\frac{1}{n}$ asimptotik hızdır.

4.4. Operatörün Peetre-*K* Fonksiyoneli Yaklaşım Hızı

Bu bölümde $S_n^{\alpha,\beta}$ operatörü ile ilgili Tanım 2.1.14 ile verilen Peetre-*K* fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Bunun için önce $f\in C_B[0,\infty), x\geq 0$ olmak üzere $\overline{S_n^{\alpha,\beta}}$ yardımcı operatörünü

$$\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)=S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right)+f(x)$$

şeklinde tanımlayıp daha sonra aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 4.4.1

$h\in C_B^2[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x\geq 0$ için

$$\left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)-h(x)\right|\leq \phi_n(x)\|h''\|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\phi_n(x)=\frac{2\beta^2x^2+2\alpha^2+n(1+2\mu)x}{(n+\beta)^2}$$

şeklindedir.

İspat:

Açık bir şekilde görülebilir ki $\overline{S_n^{\alpha,\beta}}\left(e_1-x;x\right)=0$'dir. $h\in C_B^2\left[0,\infty\right)$ olsun. h'nin Taylor açılımından

$$h(t)-h(x)=(t-x)h'(x)+\int_x^t(t-u)h''(u)\,du$$

elde edilir ki burada $t\in\left[0,\infty\right)$'dır. Yukarıdaki denklemin her iki yanına $\overline{S_n^{\alpha,\beta}}$ operatörlerini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)-h(x)&=h'(x)\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(t-x;x)+\overline{S_n^{\alpha,\beta}}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)\\&=\overline{S_n^{\alpha,\beta}}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)\\&=S_n^{\alpha,\beta}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)-\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}}\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}-u\right)h''(u)\,du\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)-h(x)\right|\le S_n^{\alpha,\beta}\left(\left|\int_x^t(t-u)h''(u)du\right|;x\right)+\left|\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}}\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}-u\right)h''(u)\,du\right| \qquad (4.4.1)$$

yazılır. Buradan da

$$\left|\int_x^t(t-u)h''(u)du\right|\le(t-x)^2\left\|h''\right\| \qquad (4.4.2)$$

olduğundan

$$\left|\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}}\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}-u\right)h''(u)\,du\right|\le\frac{(\alpha-x\beta)^2}{(n+\beta)^2}\left\|h''\right\| \qquad (4.4.3)$$

yazılabilir. (4.4.2) ve (4.4.3) eşitsizliklerinin (4.4.1) de yerine yazılmasıyla

$$\left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)-h(x)\right|\le\left\{S_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+\frac{(\alpha-x\beta)^2}{(n+\beta)^2}\right\}\left\|h''\right\|$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\begin{aligned}\left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)-h(x)\right|&\le\left\{\frac{2\beta^2x^2+2\alpha^2+n(1+2\mu)x}{(n+\beta)^2}\right\}\left\|h''\right\|\\&=\phi_n(x)\left\|h''\right\|\end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz Operatörünün Dunkl Analogunun Stancu Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 4.4.1

$f \in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x \geq 0$ için $C \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\phi_n(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{\alpha - x\beta}{n+\beta}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\phi_n(x)$ Yardımcı Teorem 4.4.1'deki gibidir.

İspat:

$f \in C_B[0,\infty)$, $h \in C_B^2[0,\infty)$ için $S_n^{\alpha,\beta}$ tanımından

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq \left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f-h;x)\right| + \left|(f-h)(x)\right| + \left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(h;x) - h(x)\right|$$
$$+\left|f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x)\right|$$

ve

$$\left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(f;x)\right| \leq \|f\| S_n^{\alpha,\beta}(1;x) + 2\|f\| = 3\|f\|$$

yazılabilir.

Böylece

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq 4\|f-h\| + \left|\overline{S_n^{\alpha,\beta}}(h;x) - h(x)\right| + \omega\left(f; \frac{\alpha - x\beta}{n+\beta}\right)$$

elde edilir.

Burada Yardımcı Teorem 4.4.1 kullanılarak

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq 4\left(\|f-h\|+\phi_n(x)\|h''\|\right)+\omega\left(f;\frac{\alpha-x\beta}{n+\beta}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafında tüm $h\in C_B^2[0,\infty)$ için infimumunun alınmasıyla

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega_2\left(f,\sqrt{\phi_n(x)}\right)+\omega\left(f;\frac{\alpha-x\beta}{n+\beta}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde Karaisa ve Karakoç tarafından literatüre kazandırılan Stancu Type Generalization of Dunkl Analogoue of Szasz Operator isimli çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir (Karaisa ve Karakoç 2016). Ayrıca Szasz operatörlerinin Dunkl Analogunun Stancu tipi genelleşmesini $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ şeklinde tanımlayıp bu operatörün kapalı aralıkta bazı yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Bununla birlikte ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları verilip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenmiş, ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı elde edilmiştir. Son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar şunlardır.

1. $E=\left\{ f: x\in\left[0,\infty\right), \frac{f(x)}{x^2+1} \text{ yakınsaktır, x} \to \infty \right\}$, $f\in C\left[0,\infty\right)\cap E$ ve $A\in IR^{+}$ olmak üzere $S_n^{\alpha,\beta}(f;\mathrm{x})$ operatörü f fonksiyonuna $\left[0,A\right]$ aralığında düzgün yakınsaktır.
2. $f\in C\left[0,\infty\right)\cap E$ olmak üzere $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı
$$\left|S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right),$$
şeklindedir.
3. $f\in Lip_M\left(\alpha\right),\ 0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı;
$$\left|S_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha},$$
şeklindedir.

4. Her $f \in C^*_{x^2}[0,\infty)$ için $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörü

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right\|_{x^2}=0$$

eşitliğini sağlar.

5. $f \in C^*_{x^2}[0,\infty)$ olmak üzere $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x-f(x))\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\leq M_{(\alpha,\beta,\mu)}\left(1+\frac{n}{(n+\beta)^2}\right)\Omega\left(f;\sqrt{\frac{n}{(n+\beta)^2}}\right)$$

şeklindedir.

6. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve $x\in[0,\infty)$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$\lim_{n\to\infty} n\left(S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right)=(\alpha-x\beta)\,f\,'(x)+\frac{(1+2\mu)x}{2}\,f\,''(x)$$

eşitliği sağlanır. (Voronovskaja tipi teorem.)

7. $f\in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x\geq 0$ için

$$\left|S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega_2\left(f,\sqrt{\phi_n(x)}\right)+\omega\left(f;\frac{\alpha-x\beta}{n+\beta}\right)$$

olacak şekilde sabit bir $C>0$ sayısı vardır. **(**Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı.)

KAYNAKLAR

Acar, T., Gupta, V. and Aral, A. 2011, Rate of convergence for generalized Szasz operators, *Bull. Math. Sci*. 1.1, 99–113.

Altomare, F., Campiti, M. 1994, Korovkin type approximation theory and its applications. In: *De Gruyter Studies in Mathematics, vol.* 17. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Aral, A. 2014, Inoan, D. and Raşa, I., On the Generalized Szasz–Mirakyan Operators, *Results in Mathematics* 65.3-4, 441–452.

Ashieser, N.I.1947, Lecture on Approximation Theory, *OGIZ*, Moscow-Leningrand, (in Russian), Theory of approximation (in English). Translated by Hymann, *C.J. Frederick Ungar Publishing Co.*, New York 1956.

Atakut, C., Ispir, V. 2002, Approximation by modified Szasz-Mirakjan operators on weighted spaces. *Proc. Indian Acad. Sci. Math.* 112, 571–578.

Atakut, C., İ. Büyükyazıcı. 2010, Stancu type generalization of the Favard–Szasz Operators, *Appl. Math. Lett.*, 23, 1479-1482.

Gadzhiev, A.D. 1974, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. *Sov. Math. Dokl*. 15(5), 1433–1436.

Gupta, V., Noor , M. A. and Man Singh Beniwal 2006, Rate of convergence in simultaneous approximation for Szasz-Mirakyan-Durrmeyer operators, *J. Math. Anal. Appl.* 322.2, 964–970.

Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, 1-100 s, Ankara.

Ispir, N. 2001, On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turk. J. Math.* 26(3), 355–365.

Karaisa, A., Karakoç, F. 2016 Stancu Type Generalization of Dunkl Analogue of Szàsz Operators. *Adv. Appl. Clifford Algebras, 26: 1235-1248*. doi:10.1007/s00006-016-0643-4.

Karaisa, A., Tollu, D T. and Asar, Y. 2015, Stancu type generalization of *q*-Favard-Szasz operators, *Appl. Math. Comput*. 264, 249–257.

Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S*), Vol. 90, pp. 961- 964.

Korovkin, P.P. 1960, Linear Operators and Approximation Theory. *Russian Monographs and Texts on advanced Math*., III, 1-63p., Gordon&Breach.

Kreyszig, E. 1978, Introductory Functional Analysis with Applications. 82- 469. Toronto.

Lorentz, G.G. 1953, Bernstein Polynomials. *University of Toronto Press*, Toronto.

Musayev, B., Alp, M. ve Mustafayev, N. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 1204 s., Kütahya.

Stancu, D.D. 1968, Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roum. Math. Pure Appl*. 13, 1173-1194.

Sucu, S. 2014, Dunkl analogue of Szasz operators, *Appl. Math. Comput*. 244, 42–48.

Szasz, O. 1950, Generalization of S. Bernstein polynomials to the infinite interval, *J.Research Nat. Bur. Standards*, 45, 239-245.

Wood, B. 1969, Generalized Szasz operators for approximation in the complex domain, *SIAM J. Appl. Math.* 17 (4), 790–801.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Fatih KARAKOÇ
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Meram-1991
Telefon	**:** 05385027562
E-mail	**:** karakocfatih1905@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Karatay Süleyman Demirel Milli Piyango Anadolu Lisesi, Karatay, Konya	2009
Üniversite	:Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2013
Yüksek Lisans	:Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013	Ayaskent İrfan Kırdar Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YAYINLAR

Karaisa, A. and Karakoç, F. 2016, Stancu Type Generalization of Dunkl Analogue of Szàsz Operators. Adv. Appl. Clifford Algebras, 26: 1235-1248. doi:10.1007/s00006-016-0643-4.