



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2024
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA tarafından hazırlanan “KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 25/07/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

.....

Danışman

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

Üye

Prof. Dr. Ozan ÖZKAN

.....

Üye

Prof. Dr. Yasin ASAR

.....

Üye

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

25/07/2024

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2024, 57 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
Prof. Dr. Yasin ASAR
Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışmada ilk olarak kesirli mertebeden türevin tarihçesinden ve klasik analizden kesirli analize geçiş serüveninden bahsedilmiştir. Ardından bir kesirli mertebeden türev yaklaşımı olarak “beta türev” ile alakalı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca diğer kesirli türev yaklaşımlarına göre avantajlarına değinilmiştir. Daha sonra birtakım mühendislik alanlarında, biyolojik olgularda ve birçok yaşamsal olayın matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılmakta olan doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin bazı türlerinden bahsedilmiştir. Yardımcı denklem yönteminin işleyişinden bahsedilmiş ve doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerden; Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi, değiştirilmiş ve geliştirilmiş Korteweg de Vries (ImKdV) denklemi ve Phi-4 (ϕ^4) denkleminin bu yöntem sayesinde çözümüne yer verilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçların genel değerlendirilmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Beta Türev, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem, Geliştirilmiş ve değiştirilmiş Korteweg de Vries (ImKdV), Kesirli Analiz, Phi-4(ϕ^4), Yardımcı denklem yöntemi

ABSTRACT

Ph.D. THESIS

A STUDY ON THE SOLUTION OF FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Year, 57 Pages

Jury

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
Prof. Dr. Yasin ASAR
Assoc. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

In this work, the history of fractional order derivative and the course of transition from classical analysis to fractional analysis are introduced at first. Then, definitions and theorems are given about a fractional order derivative approach named "beta derivative". Also, its advantages over other fractional derivative approaches are mentioned. After that, some types of nonlinear fractional order partial differential equations, which are used to explain in engineering fields, biological events and many life events, are introduced. Directions about using auxiliary equation method are denoted and solutions of the Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) equation, improved and modified Korteweg de Vries (ImKdV) equation and Phi-4 (ϕ^4) equation which are nonlinear fractional order differential equations, is given using this method. At last, a general evaluation of the obtained results was made.

Keywords: Auxiliary equation method, Beta Derivative, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Improved and modified Korteweg de Vries (ImKdV), Fractional calculus, Fractional order partial differential equation, Phi-4 (ϕ^4)

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Lisans eğitimimden itibaren çalışma hayatıma yön veren ve akademik duruşuyla kendisini örnek almaya gayret ettiğim kıymetli danışmanım Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya; süreç boyunca karşılaştığım türlü zorluklara rağmen çalışmamı tamamlayabilmem için gerekli olan bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman benden esirgemediği sabırla 2. Danışmanlık görevini yürüten saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali KURT' a, tez izleme komitesi üyeleri sayın Prof. Dr. Ozan ÖZKAN ve Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU hocalarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu uzun soluklu süreç boyunca maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyip yanımda ve ardımda duran sevgili babam Mustafa ŞAHİNKAYA' ya ve aksatmak durumunda kaldığım sorumluluklarıma rağmen yükümü hafifleten fedakâr eşim Betül ŞAHİNKAYA' ya teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Son olarak, doktora dönemim boyunca 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı ile bana desteklerini sunan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ve Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB)'na teşekkürlerimi sunarım.

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
2.1. Bazı Özel Tanımlı Fonksiyonlar.....	7
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	7
2.1.2. Beta Fonksiyonu	8
2.1.3. Hata Fonksiyonu	9
2.1.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu	9
2.1.5. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu	9
2.2. Bazı Keyfi Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları	10
2.2.1. Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali	10
2.2.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali.....	10
2.2.3. Caputo Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali	12
2.2.4. Erdelyi-Kober Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali	13
2.2.5. Hadamard Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali	13
2.3. Beta Türev.....	14
2.4. Yardımcı Denklem Yöntemi.....	25
3. YÖNTEMİN UYGULANMASI	28
3.1. Caudrey-Dodd-Gibbon Denklemine Uygulaması	28
3.1.1. Çözümün Geometrik ve Fiziksel Yorumu	35
3.2. Geliştirilmiş ve Değiştirilmiş Korteweg-de Viries Denklemine Uygulanması ...	38
3.3. Phi-4 (ϕ^4) Denklemine Uygulanması	42
3.3.1. Çözümün Geometrik ve Fiziksel Yorumu	47
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	50
5. KAYNAKLAR	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ξ :	Ksi
δ :	Delta
λ :	Lamda
μ :	Mü
α :	Alpha
β :	Beta
θ :	Teta
Δ :	Delta
ε :	Epsilon
ζ :	Zeta
η :	Eta
ρ :	Rho
\mathbb{N} :	Doğal Sayılar Kümesi
\mathbb{R} :	Reel Sayılar Kümesi
$\Gamma(x)$:	Gamma Fonksiyonu
$\beta(x, y)$:	Beta Fonksiyonu
ϕ^4 :	Phi-4 Denklemi

Kısaltmalar

KdV:	Korteweg de Viries
IMKdV:	Improved and Modified Korteweg de Viries
CDG:	Caudrey-Dodd-Gibbon

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaşamsal süreç içerisinde karşılaşılan birtakım olayları anlamlandırma ve açıklama ihtiyacı insanlık tarihinin en kadim duygularındandır. Bu anlamda günlük hayat içerisinde gerçekleşen biyolojik, ekonomik veya bir takım mühendislik olaylarının matematiksel modellemeler yardımıyla ifade edilmesi söz konusu olayların analiz edilebilmesi açısından kullanılagelen bir yaklaşım olmuştur. Evrende meydana gelen tüm bu olayların denklemlere dönüştürülmesi diferansiyel denklemler sayesinde mümkün hale gelmiştir.

Diferansiyel denklemler, bir bağımlı değişken ile bu değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren adi diferansiyel denklemler ile en az iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere iki sınıfta incelenir (Simmons, 2016). Günlük hayatın farklı alanlarında gerçekleşmekte olan olaylar çoğu zaman birden fazla bağımsız değişkenin etkileşimi sonucu ortaya çıktığı için bilhassa son yıllarda araştırmacılar kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü üzerine yoğunlaşmıştır (Myint-U ve Debnath, 2007).

Bilim insanları ilk yıllarda klasik analizin temelini oluşturan adi türev sayesinde tam sayı mertebeli kısmi diferansiyel denklemleri kullanarak yaşanan olayları çözümlenmeye çalışmış olsa da gerçekleşen kompleks olayların daha kesin ve güvenilir sonuçlarının elde edilmesi ihtiyacı kesirli analizin doğuşuna zemin hazırlamıştır. Genel anlamda kesirli analiz; türev ve integralin tam sayı mertebeden ifade edildiği klasik analizin aksine keyfi mertebeden ifade edilebildiği bir yaklaşıma dayanmaktadır. Bu durum klasik analize karşı kesirli analizi daha avantajlı hale getiren bazı kazanımlara neden olmaktadır. Kesirli analiz yapısı itibarıyla çoklu bileşen içeren olayların ifade edilmesinde daha geniş bir serbestlik sunar. Adi türev kullanımından dolayı herhangi bir olay ile alakalı önemli birtakım parametrelerin ihmal edilmesi söz konusu olurken kesirli mertebeden türev yaklaşımı sayesinde söz konusu yanılısama oldukça azalmaktadır. Bu durum modellenen olayın klasik türeve nazaran daha geniş bir kararlılık bölgesine ulaşmasını ve daha güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlar (Srivastava ve ark., 2020). Tüm bu avantajlar farklı disiplinlerde yer alan problemlerin kesirli analiz yardımıyla ele alınmasına neden olmuştur. Malzeme bilimi, hesaplamalı biyoloji, robot teknolojileri, okyanus mühendisliği, biyomedikal mühendislik, akışkanlar dinamiği, dalga denklemi ve elektrokimyasal kinetikler gibi daha birçok alanda kullanılmaktadır (Atangana ve Secer,

2013). Kesirli analiz kavramı bilim dünyası tarafından özellikle son yüzyılda yoğun ilgi görmesine karşın varlığı esasen çokta yeni değildir.

Kesirli analiz, 17. yüzyılın sonlarında Leibnitz ile aralarındaki yazışmaları sırasında L'Hospital'in $n=1/2$ için $d^n y/dx^n$ ifadesinin ne anlam ifade ettiğini sormasıyla literatürde yerini almıştır. Leibnitz daha o günlerde bu sorunun cevabının ilerleyen zamanlarda çok önemli sonuçlar doğuracak bir paradoks olduğunu söylemiştir (Oldham ve Spanier, 1974). Tarihsel süreç Leibnitz'i haklı çıkarmış ve geride bıraktığımız 300 yılı aşkın bir süredir pek çok matematikçi bu alanda çalışmalar yaparak kesirli analizin gelişimine katkı sağlamıştır (Podlubny, 1999).

İlk olarak 1772 yılında Lagrange tam sayı mertebeden diferansiyel operatörler için geçerli olan

$$\frac{d^\alpha}{dk^\alpha} \frac{d^\beta}{dk^\beta} y = \frac{d^{\alpha+\beta}}{dk^{\alpha+\beta}} y$$

eşitliğinin α ve β kesirli olduğunda da geçerli olup olmadığını araştırmıştır. 1819 yılında Fransız matematikçi Lacroix, diferansiyel ve integral hesap hakkında yayınladığı 700 sayfalık çalışmasında bu konuya da yer vermiştir. β bir pozitif tam sayı olmak üzere $y = k^\beta$ fonksiyonunun α . mertebeden türevini

$$\frac{d^\alpha y}{dk^\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} k^{\beta-\alpha}, \beta \geq \alpha$$

biçimde ifade etmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş özel bir faktöriyel fonksiyonu olan Gamma fonksiyonunu kullanarak, $\alpha=1/2$ ve $\beta \in \mathbb{R}^+$ için $y = k^\theta$ fonksiyonunun $1/2$. mertebeden keyfi türevini

$$\frac{d^{1/2} y}{dk^{1/2}} = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma\left(\theta+\frac{1}{2}\right)} k^{\theta-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlamıştır. Sonrasında yukarıdaki yaklaşıma $y = k$ fonksiyonunu örnek olarak vermiş ve $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(2)=1$ eşitlikleri sayesinde fonksiyonun türevini

$$\frac{d^{1/2}}{dk^{1/2}}(k) = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}$$

olarak elde etmiştir. Bu sonuçlar kendisinden sonraki dönemde Riemann–Liouville keyfi mertebeden türev yaklaşımı tarafından elde edilen sonuçlarla aynıdır (Ross, 1975). Daha sonra ki yıllarda Abel, Fourier, Laplace ve daha birçok önemli isim bu alanda çalışmalar yapmaya devam etmiştir (Podlubny, 1999).

Tüm bu çalışmalar sonucunda klasik analizde yer alan tek türlü adi (bayağı) türev tanımının aksine kesirli analizde birbirinden farklı türev tanımlarının yapılabildiği ortaya çıkmıştır. Farklı türev yaklaşımları sayesinde herhangi bir problemin çözümü için en uygun kesirli türev tanımı tercih edilerek daha güvenilir sonuçlara ulaşmak mümkün hale gelmiştir. Bugün literatürde Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hadamard, Riesz Marchaud, Erdely-Cober, Atangana-Baleanu ve daha başka kesirli türev tanımları yer almaktadır. Fakat tüm bu kesirli mertebeden türev tanımlarında türev mertebesi tam sayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade tam sayı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır (Oldham ve Spanier, 1974; Samko ve ark., 1993; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999; Hilfer, 2000).

Geçtiğimiz yıllarda bilim insanları lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler yardımıyla farklı mühendislik alanlarına ait birtakım olayları, bilinen bazı hastalıkları ve daha birçok fiziksel veya yaşamsal olguyu matematiksel olarak başarılı bir şekilde tanımlayabilmiştir. Kesin çözümlerinin doğrudan elde edilemeyen doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi ile alakalı farklı yöntemler ortaya atılmıştır. Konu üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda; Homojen denge yöntemi (Wang ve ark., 1996), Basit denklem yöntemi (Kudryashov, 2005), Tanh fonksiyonu yöntemi (Al-Khaled ve ark., 2008), G/G'-genişletme yöntemi (Wang ve ark., 2008), Dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon yöntemi (Ma ve Lee, 2009), Varyasyonel iterasyon yöntemi (Youse ve ark., 2009), Adomian ayrıştırma yöntemi (Rajaram ve Naja, 2009; Li, 2009), Homotopi pertürbasyon yöntemi (Hesameddini ve Peyrovi, 2009), Hirota'nın çift doğrusal yöntemi (Zhou ve ark., 2010), Cole-Hopf dönüşüm yöntemi (Salas ve Gomez, 2010), Jacobi eliptik fonksiyonu genişletme yöntemi (Fu ve ark., 2011), Backlund dönüşüm yöntemi (Jianming ve ark., 2011) ve F-genişletme yöntemi (Kumar ve ark., 2012) gibi pek çok yöntem ortaya konulmuştur. Öte yandan gelişen bilgisayar teknolojilerine paralel olarak kullanılagelen

Matlab, Maple ve Mathematica gibi matematiksel programlar, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal, analitik veya yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi sürecini hızlandırmış ve yapılan çalışmalara katkı sağlamıştır.

Araştırmacılar farklı disiplinlerde yer alan olayların modellenmesi sonucu ortaya çıkan doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri uygun kesirli türev yaklaşımı ve bir kısmı yukarıda ifade edilen çeşitli çözüm yöntemlerini kullanarak çözümlenmişlerdir.

Kurt ve arkadaşları (2015); conformable türevli ve zaman kesirli Burgers denkleminin öncelikle Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla tam çözümlerini daha sonra Homotopi Analiz Yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümlerini bulmuş ve elde edilen bu iki çözümü karşılaştırmışlardır.

Atangana ve Alkahtani (2015); kızamıkçık virüsünün yayılım modelini beta türev yardımıyla inceleyip söz konusu modelin karışıklığından dolayı Sumudu dönüşümünü kullanarak yeni bir yaklaşım elde etmişlerdir.

Taşbozan ve arkadaşları (2016); zaman kesirli conformable türevli iki boyutlu Boussinesq denklemi ve birleştirilmiş KdV (Korteweg de-Viries)-mKdV (değiştirilmiş Korteweg de-Viries) denklemlerinin yeni tam çözümlerini Jacobi eliptik fonksiyon yöntemiyle elde etmişlerdir.

Sahoo ve Saha (2016); değiştirilmiş Korteweg de Viries (mKdV) denkleminin yeni tip tam analitik çözümlerini bulmak için (G'/G) – genişleme yöntemi ve geliştirilmiş (G'/G) – genişleme yöntemlerini kullanmışlardır.

Bonyah ve arkadaşları (2017); iyi tanımlanmış birer bilgisayar virüsü modeli olan Piqueira ve Piqueira-Araujo denklemlerini beta türev yardımıyla inceleyip söz konusu modellerin analitik çözümlerini Laplace pertübasyon ve Homotopi ayrıştırma yöntemlerini kullanarak elde etmişlerdir.

Tariq ve Akram (2017); kesirli karmaşık dönüşüm yoluyla tanh yöntemini kullanarak doğrusal olmayan zaman kesirli Cahn-Allen denkleminin yeni dalga çözümleriyle Phi-4 denkleminin tam ve analitik çözümlerini elde etmiştir.

Çenesiz ve arkadaşları (2017); birinci integral yöntemini kullanarak doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden zaman kesirli Burgers denklemini, değiştirilmiş Burgers denklemini ve Burgers-Korteweg-de Vries denklemlerinin yeni analitik çözümlerini conformable keyfi mertebeden türev tanımı yardımıyla elde etmişlerdir.

Aguilar ve arkadaşları (2018); alt denklem yöntemi yardımıyla doğrusal olmayan genelleştirilmiş uzay zaman Schrödinger denkleminin analitik çözümlerini beta türev kullanarak elde etmişlerdir.

Uddin ve arkadaşları (2020); manyetik değişime bağlı olarak ferromanyetik dönüşüm zincirini temsil eden Heisenberg modeline uyumlu, doğrusal olmayan bir yapı üzerinde beta türevi kullanarak (2+1) boyutunda doğrusal olmayan Schrödinger denklemini incelemişlerdir.

Yalçinkaya ve arkadaşları (2021); okyanus mühendisliğinde kullanılan zaman kesirli modellerden: simetrik düzenli uzun dalga denklemi ile Ostrovsky denkleminin soliton ve periyodik dalga çözümünü, beta türev ve zincir kuralı yardımıyla elde etmişlerdir.

Pandır ve arkadaşları (2021); doğrusal olmayan Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan denklemine beta türev yardımıyla, değiştirilmiş üstel fonksiyon metodu uygulayarak yeni soliton çözümleri elde etmişlerdir.

Singh ve arkadaşları (2022); plazma fiziği ve lazer optiklerde kullanılan kesirli mertebeden Caputo türevli Caudre-Dodd-Gibbon denklemini yarı analitik bir yöntem olan homotopi analizi Sumudu dönüşüm yöntemiyle ele almışlar ve denklemin yeni yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir.

Akram ve arkadaşları (2022); uzay-zaman kesirli Phi-4 denkleminin dalga çözümlerini elde etmek için genişletilmiş (G'/G^2) – genişletme yöntemi ve değiştirilmiş yardımcı denklem yöntemlerini hem beta türev hem de M-kesik türev yaklaşımlarını kullanarak çözümlenmişler ve iki farklı türev yaklaşımına göre elde edilen çözümlerin karşılaştırmasını yapmışlardır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler ile bilinen bazı kesirli mertebeden türev yaklaşımlarına yer verilmiştir. Ayrıca, tezimizin temelini oluşturan beta türe ve ait tanım ve teoremlere yer verilmiş, beta türevin sağladığı avantajlardan da kısaca bahsedilmiştir.

Tanım 2.1. Herhangi bir fonksiyonu ve bu fonksiyona ait türevleri içeren denklemlere diferansiyel denklemler denir. Diğer bir deyişle diferansiyel denklemler, bir bağımlı değişken ile bu değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlerdir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere iki ana başlıkta incelenir.

Bağımsız m ve n değişkenleri ve bağımlı bir u değişkeni için diferansiyel denklem

$$f\left(m, u, \frac{du}{dm}, \frac{d^2u}{dm^2}, \frac{d^3u}{dm^3}, \dots\right) = 0$$

şeklinde ifade ediliyorsa adi diferansiyel denklem,

$$f(m, n, u, u_m, u_n, u_{mm}, u_{nn}, u_{mn}, \dots) = 0$$

şeklinde ifade ediliyorsa kısmi diferansiyel denklem denir (Yaşar, 2005).

Tanım 2.2. Bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere kesirli mertebeden bayağı (adi) diferansiyel denklem denir (Benghorbal, 2004). Sabit katsayılı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin genel hali

$$p_k D^{\alpha_k} y(u) + p_{k-1} D^{\alpha_{k-1}} y(u) + \dots + p_1 D^{\alpha_1} y(u) + p_0 D^{\alpha_0} y(u) = f(u)$$

şeklinde ifade edilebilir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.3. Bağımlı bir değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler denir (Podlubny, 1999).

2.1. Bazı Özel Tanımlı Fonksiyonlar

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

Gama fonksiyonu $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} du \quad (2.1.1.1)$$

olarak tanımlanır. Gama fonksiyonunun,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (2.1.1.2)$$

özellği mevcuttur. Buradan

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (2.1.1.3)$$

eşitliği yazılabilir. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (2.1.1.4)$$

eşitliği vardır. Buradan

$$\Gamma(1) = 1 \quad (2.1.1.5)$$

eşitliğinin sağlandığı olduğu görülebilir.

Şimdi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterelim:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \quad (2.1.1.6)$$

yazılabilir. Bu denklemde $u = v^2$ ve $du = 2v dv$ değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \quad (2.1.1.7)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (2.1.1.8)$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(v^2+z^2)} dz dv \quad (2.1.1.9)$$

ve

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \pi \quad (2.1.1.10)$$

olup $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu görülmektedir (Podlubny, 1999).

2.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu $p > 0$ ve $q > 0$ olmak üzere

$$\beta(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \quad (2.1.2.1)$$

olarak tanımlanır.

Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.1.2.2)$$

şeklindedir (Arkfen, 1995).

2.1.3. Hata Fonksiyonu

Hata fonksiyonu $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad (2.1.3.1)$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon

$$erf(0) = 0 \text{ ve } erf(\infty) = 1 \quad (2.1.3.2)$$

eşitliklerini sağlar. $erfc$ ile gösterilen tamamlayıcı hata fonksiyonu, hata fonksiyonu cinsinden

$$erfc(u) = 1 - erf(u) \quad (2.1.3.3)$$

şeklindedir (Miller ve Ross, 1993).

2.1.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere

$$E_\alpha(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{\Gamma(\alpha p + 1)} \quad (2.1.4.1)$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).

2.1.5. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu

Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{\Gamma(\alpha p + \beta)} \quad (2.1.5.1)$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).

2.2. Bazı Keyfi Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları

2.2.1. Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali

Tanım 2.2.1.1. $m > 0$ olmak üzere $f(u)$ fonksiyonu her (a, u) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu durumda, m . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}^{RL}D_u^{-m} f(u) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^u (u-\xi)^{m-1} f(\xi) d\xi \quad (2.2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.2.1.2. $k - \alpha > 0$ olacak şekilde α sayısını ele alalım. Bu durumda, $k - \alpha$ mertebeden Reimann-Liouville kesirli türevi

$${}^{RL}D_u^{k-\alpha} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{du^k} \int_a^u (u-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (2.2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralin yakınsak olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. (2.2.1.2) ifadesinde $p = k - \alpha$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_u^p f(u) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{du^k} \int_a^u (u-\xi)^{k-p-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{d^k}{du^k} \left({}^{RL}D_u^{-(k-p)} f(u) \right), \quad (k-1 \leq p < k) \end{aligned} \quad (2.2.1.3)$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

2.2.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali

Tanım 2.2.2.1. $m, m \leq q < m+1$ şartını sağlayan bir tam sayı, $f(u)$ fonksiyonu sürekli ve $f^{(k)}(u)$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$) türevleri $[a, u]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda, $f(u)$ fonksiyonunun q . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\begin{aligned}
{}^GLD_u^q f(u) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=u-a}} h^{-q} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{q}{r} f(u-rh) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(u-a)^{-q+k}}{\Gamma(-q+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-q+m+1)} \int_a^u (u-\xi)^{-q+m} f^{(m+1)}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999). Burada

$$\binom{q}{r} = \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-r+1)}{r!} \quad (2.2.2.1)$$

şeklinde alınmıştır.

$f(u)$ fonksiyonu $[a, u]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere $f(u)$ fonksiyonunun q . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$${}^GLD_u^{-q} f(u) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=u-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{q}{r} f(u-rh) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^u (u-\xi)^{q-1} f(\xi) d\xi \quad (2.2.2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$\left[\begin{matrix} q \\ r \end{matrix} \right] = \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+r+1)}{r!} \quad (2.2.2.3)$$

dir. Eğer $f'(u)$ türevi $[a, u]$ kapalı aralığında sürekli ise o zaman (2.2.2.2) denkleminin sağ tarafına bir defa kısmi integrasyon uygularsak

$${}^GLD_u^{-q} f(t) = \frac{f(a)(u-a)^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_a^u (u-\xi)^q f'(\xi) d\xi \quad (2.2.2.4)$$

elde edilir. $f(u)$ fonksiyonu $[a, u]$ kapalı aralığında $m+1$ defa sürekli differansiyellenebilir ise o zaman (2.2.2.2) denkleminde

$${}^GLD_u^{-q} f(u) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(u-a)^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(q+m+1)} \int_a^u (u-\xi)^{q+m} f^{(m+1)}(\xi) d\xi$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

2.2.3. Caputo Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali

Tanım 2.2.3.1. $f(u)$ fonksiyonu p defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere $p-1 < a < p$ için Caputo Kesirli türevi

$${}^c D_u^\alpha f(u) = D^{\alpha-p} D^p f(u) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_a^u \frac{f^{(p)}(\xi) d\xi}{(u-\xi)^{\alpha+1-p}} \quad (2.2.3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999). $f(u)$ fonksiyonu $\alpha \rightarrow p$ için (2.2.3.1) de tanımlanan Caputo kesir mertebeden türevi $f(u)$ fonksiyonunun p tam sayı mertebeden türevi verir. Gerçekten $0 < p-1 < \alpha < p$ ve $f(u)$ fonksiyonu her $L > a$ için $[a, L]$ aralığında $p+1$ mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow p} {}^c D_u^\alpha f(u) &= \lim_{\alpha \rightarrow p} \left(\frac{f^{(p)}(a)(u-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(p-\alpha+1)} \int_a^u \frac{f^{(p+1)}(\xi) d\xi}{(u-\xi)^{\alpha-p}} \right) \\ &= f^{(p)}(a) + \int_a^u f^{(p+1)}(\xi) d\xi = f^{(p)}(u), \quad p=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

dir. Böylece Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarında olduğu gibi Caputo yaklaşımında da tam sayı mertebeden türevin arasındaki noktalarda Caputo anlamında kesirli türev hesaplanabilir. Caputo kesirli türevinin uygulamalarda sıkça kullanılan

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(u) = f(u) \quad (2.2.3.2)$$

ve

$$D^{-\alpha} D^\alpha f(u) = f(u) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \quad (2.2.3.3)$$

özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

2.2.4. Erdelyi-Kober Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali

Tanım 2.2.4.1. $f(u)$ sonlu (a, b) aralığında tanımlı, sürekli, integrallenebilir, p kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon; $a, \eta, \rho \in \mathbb{R}$ ve $a, \rho > 0$ olmak koşulu ile a . mertebeden Erdelyi-Kober sol ve sağ taraflı kesirli integralleri sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$I_{a+; \rho, \mu}^{\alpha} f(u) = \frac{\rho u^{-\rho(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^u \frac{t^{\rho\mu+\rho-1} f(t) dt}{(u^{\rho} - t^{\rho})^{1-\alpha}} \quad (0 \leq a < u < b \leq \infty) \quad (2.2.4.1)$$

$$I_{b-; \rho, \mu}^{\alpha} f(u) = \frac{\rho x^{\rho\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_u^b \frac{t^{\rho(1-\alpha-\eta)} f(t) dt}{(t^{\rho} - u^{\rho})^{1-\alpha}} \quad (0 \leq a < u < b \leq \infty) \quad (2.2.4.2)$$

(2.2.4.1) ve (2.2.4.2) eşitlikleri ile verilen Erdelyi-Kober sol ve sağ taraflı kesirli integrallere tekabül eden $f(u)$ fonksiyonuna ait $(0 \leq a < u < b \leq \infty)$ aralığında, $n = [a] + 1$ olmak üzere, Erdelyi-Kober kesirli türev tanımları da aşağıdaki gibidir:

$$D_{a+; \rho, \mu}^{\alpha} f(u) = \rho u^{-\rho\mu} \left(\frac{1}{\rho u^{\rho-1}} D \right)^n u^{\rho(n+\eta)} I_{a+; \rho, \eta+\alpha}^{n-\alpha} f(u) \quad (2.2.4.3)$$

$$D_{b-; \rho, \mu}^{\alpha} f(u) = u^{\rho(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\rho u^{\rho-1}} D \right)^n u^{\rho(n-\eta-\alpha)} I_{b-; \rho, \eta+\alpha-n}^{n-\alpha} f(u) \quad (2.2.4.4)$$

(Samko ve ark., 1978; Kilbas ve Trujillo, 2001; Kilbas ve ark., 2006)

2.2.5. Hadamard Kesirli Mertebeden Türev ve İntegrali

Tanım 2.2.5.1. $f(u)$ sonlu (a, b) aralığında sürekli, integrallenebilir, n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak ve $a \in \mathbb{R}$ koşuluyla, $f(u)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ taraflı Hadamard kesirli türevleri aşağıdaki gibidir:

$$D_{a+}^{\alpha} f(k) = \left(u \frac{d}{du} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^u \left(\log \frac{u}{k} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(k)}{k} dk, \quad (a < u < b) \quad (2.2.5.1)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(k) = \left(-u \frac{d}{du} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_b^u \left(\log \frac{k}{u} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(k)}{k} dk, \quad (a < u < b) \quad (2.2.5.2)$$

(Samko ve ark., 1978; Kilbas ve Trujillo, 2001; Kilbas ve ark., 2006)

2.3. Beta Türev

Tanım ve özellikleri verilen kesirli mertebeden türev yaklaşımları arasında Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları en çok kullanılan iki tanım olmuştur. Bu iki türev tanımı aşağıda belirtilen bazı dezavantajlara sahiptir,

1. Riemann-Liouville türev tanımında bir sabitin türevi sıfır değildir.
2. Caputo türev tanımı, f fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu varsayar.
3. Her iki kesirli türev tanımı da iki fonksiyonun çarpımının türevinin bilinen formülünü sağlamaz.
4. Her iki kesirli türev tanımı da iki fonksiyonun bölümünün türevinin bilinen formülünü sağlamaz.
5. Her iki kesirli türev tanımı da zincir kuralını sağlamaz.

Bu ve bunun gibi başka dezavantajlar araştırmacıları söz konusu şartları sağlayan yeni bir kesirli türev tanımının arayışına itmiştir (Atangana, 2015).

Tanım 2.3.1. Γ (gamma) fonksiyonu

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^{\infty} t^{\zeta-1} e^{-t} dt$$

olmak üzere $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ için g fonksiyonunun β -türevi,

$${}_0^A D_t^\beta g(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - g(t)}{\varepsilon}, & t \geq 0, 0 < \beta \leq 1 \\ g(t) & , t \geq 0, \beta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki limit mevcutsa, g 'nin β diferansiyellenebilir olduğu söylenir. Burada $\beta = 1$ için ${}_0^A D_t^\beta g(t) = \frac{d}{dt} g(t)$ elde edildiğine dikkat edilmelidir (Atangana, 2015)

Tanım 2.3.2. H bir kesirli operatör olmak üzere aşağıdaki şartları sağlaması halinde kesirli türev olarak adlandırılabilir (Atangana, 2015):

1. Fonksiyonun bir noktadaki H operatörü, o noktadaki değişim oranını gösterir.
2. Sıfırıncı mertebeden $H(f)$ 'in sonucu f olur.

3. $a, b \in \mathbb{R}$ için $H(af(t) + bg(t)) = aH(f(t)) + bH(g(t))$ ise H lineerdir.
4. $a \in \mathbb{R}$ için $H(af) = aH(f)$ olur.
5. $H(f + g) = H(f) + H(g)$ olur.
6. $H(f - g) = H(f) - H(g)$ olur.
7. $h(x) = f(x)g(x)$ için $H(h(x)) = H(f(x))g(x) + f(x)H(g(x))$ olur.
8. $h(x) = f(g(x))$ için $H(h(x)) = H(f(x))g'(x) + f'(x)H(g(x))$ olur.
9. $f^{-1}(x) = g(x)$ olmak üzere $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$ olup

$$H(g) = \frac{I(t, \beta)}{H(f(g))}$$
 olur.
10. $h(x) = 1/f(x)$ için $H(h(x)) = -\frac{H(f(x))}{(f(x))^2}$ olur.
11. $H\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{H(f)g - H(g)f}{g^2}$ olur.
12. Herhangi bir açık aralıkta $H(f(x)) > 0$ şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu o aralıkta artandır.
13. Herhangi bir açık aralıkta $H(f(x)) < 0$ şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu o aralıkta azalandır.
14. Herhangi bir açık aralıkta $H(f(x)) = 0$ şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu o aralıkta sabittir.
15. H operatörü yukarıdaki şartları sağlıyor ve G operatörü de H 'nin ters operatörü ise G 'ye kesirli integral operatörü denir.
16. H operatöründe mertebeye tam sayı olarak seçilirse adi türev ile aynı sonuçlar elde edilir.

Caputo kesirli operatörü yukarıda verilen 1., 8., 9. ve 10. şartları sağlamaz. Öte yandan Riemann-Liouville kesirli operatörünün de 1., 8., 9., 10. ve 16. şartları sağlamadığı görülmektedir. Şu hâlde Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları için kesirli türev yerine kesirli operatör tanımını kullanmak daha doğru olacaktır (Atangana, 2015).

Teorem 2.3.1. Beta kesirli operatörü Tanım 2.3.2. de belirtilen şartları sağlayan bir kesirli türev yaklaşımıdır (Atangana, 2015).

İspat. f ve g , $[a, b]$ aralığında türevlenebilir ve beta türevlenebilir iki fonksiyon, $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Beta türev tanımından

$${}^A D_t^0 g(t) = g(t)$$

eşitliğini elde edebiliriz ki bu da 2. koşulun ispatı olur. Şimdide 3., 4., 5. ve 6. koşulların ispatına bakalım. Beta türev tanımından,

$${}^A D_t^\beta (\alpha g(t) + \mu f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\alpha g + \mu f) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (\alpha g + \mu f)(t)}{\varepsilon}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\alpha g + \mu f) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (\alpha g + \mu f)(t)}{\varepsilon} \\ &= \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - g(t)}{\varepsilon} + \mu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - f(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

yazılabilir ve sonuç olarak

$${}^A D_t^\beta (\alpha g(t) + \mu f(t)) = \alpha {}^A D_t^\beta (g(t)) + \mu {}^A D_t^\beta (f(t))$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu denklemde $\alpha = 0, 1, -1$ değerlerini yerine yazarak 4., 5. ve 6. koşulları ispat etmiş oluruz. Şimdi de 7. koşulun ispatına geçelim. Beta türev tanımından

$${}^A D_t^\beta (g(t) f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(gf) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (gf)(t)}{\varepsilon}$$

yazılır. Pay kısmına aşağıdaki işlem uygulanırsa

$$\begin{aligned}
(gf) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (gf)(t) &= (gf) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (gf)(t) \\
&+ f \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) g(t) \\
&- f \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) g(t)
\end{aligned}$$

denklemin son hali

$$\begin{aligned}
{}^A D_t^\beta (g(t) f(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(gf) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (gf)(t)}{\varepsilon} \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) \left[g \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - g(t) \right]}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada gerekli limit işlemleri yapılırsa

$${}^A D_t^\beta (g(t) f(t)) = {}^A D_t^\beta (g(t)) f(t) + {}^A D_t^\beta (f(t)) g(t)$$

elde edilir ki bu 7. koşulun ispatıdır. Şimdi de 8. koşulun ispatına bakalım, tanım gereği

$${}^A D_t^\beta ((gof)(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(gof) \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (gof)(t)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Bu denklemde $h = \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta}$ değişken değiştirmesi yaparak

$${}^A D_t^\beta ((gof)(t)) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(gof)(t+h) - (gof)(t)}{h}$$

denklemini elde edebiliriz. Gerekli işlemler yapılırsa

$${}_0^A D_t^\beta ((g \circ f)(t)) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(t)+h) - g(f(t))}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+t) - f(t)}{h}$$

sonucuna ulaşılabacaktır. f türevlenebilir olduğu için

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

olduğunu biliyoruz. Böylelikle denklemin son hali

$${}_0^A D_t^\beta ((g \circ f)(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g \left(f(t) + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - g(f(t))}{\varepsilon} f'(t)$$

şeklinde olur. Bu ise

$${}_0^A D_t^\beta ((g \circ f)(t)) = {}_0^A D_t^\beta (g(f(t))) \cdot f'(x)$$

eşitliğini verir ve böylelikle 8. koşul ispatlanmış olur. Diğer bir koşul olan 9. koşul için f fonksiyonunun tersinin g fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Böylelikle $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$ olacaktır. Burada 8. koşulu kullanarak

$${}_0^A D_t^\beta ((g \circ f)(t)) = {}_0^A D_t^\beta (t) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{2-2\beta}$$

ifadesinden

$${}_0^A D_t^\beta (f(t)) = \frac{l(t, \beta)}{{}_0^A D_t^\beta [g(f(t))]}, \quad l(t, \beta) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{2-2\beta}$$

sonucuna ulaşabiliriz ki bu 9. koşulun ispatı olmuş olur. Yine tanım üzerine gerekli işlemler yapılırsa

$${}_0^A D_t^\beta (f^{-1}(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{-1} \left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - f^{-1}(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t)}{\varepsilon f\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) f(t)} = -\frac{{}^A D_t^\beta (f(t))}{f^2(x)}$$

elde edilir bu ise 10. koşulun ispatıdır. Sıradaki koşul için beta türev tanımından

$${}^A D_t^\beta \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g^{-1})\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - (f \cdot g^{-1})(t)}{\varepsilon}$$

yazabiliriz, burada 7. ve 10. koşulları kullanarak

$${}^A D_t^\beta \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{{}^A D_t^\beta (g(t)) f(t) - {}^A D_t^\beta (g(t)) f(t)}{g^2(t)}$$

sonucuna ulaşırız. Böylelikle 11. koşul ispatlanmış olur. Sıradaki koşulumuz için ${}^A D_t^\beta (f(t))$ türevinin bir açık aralıkta pozitif değerli olduğunu kabul edelim, $t_1 > t_2$ için beta türev tanımından

$$\frac{f\left(t_1 + \varepsilon \left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)}{\varepsilon} > 0$$

yazabiliriz ve buradan

$$f\left(t_1 + \varepsilon \left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) > 0$$

elde edilir. Her iki tarafın limitini alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_1 + \varepsilon \left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) = f(t_1) - f(t_2) > 0$$

sonucuna ulaşırız ki böylelikle 12. koşul ispatlanmış olur. Benzer şekilde, ${}^A_0D_t^\beta(f(t))$ türevinin bir açık aralıkta negatif değerli olduğunu kabul edelim, $t_1 < t_2$ için beta türev tanımından

$$\frac{f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)}{\varepsilon} < 0$$

yazabiliriz ve buradan

$$f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) < 0$$

elde edilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) = f(t_1) - f(t_2) < 0$$

sonucuna ulaşırız ki böylelikle 13. koşul da ispatlanmış olur. Yine benzer şekilde ${}^A_0D_t^\beta(f(t))$ türevinin bir açık aralıkta sifıra eşit olduğunu kabul edelim, $t_1 = t_2$ için beta türev tanımından

$$\frac{f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)}{\varepsilon} = 0$$

yazabiliriz,

$$f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) = 0$$

elde edilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) = f(t_1) - f(t_2) = 0$$

sonucuna ulaşırız ki böylelikle 14. koşul da ispatlanmış olur. Ve son olarak 16. koşulun sağlandığı da açıkça görülmüş olur (Atangana, 2015).

Teorem 2.3.2. $\beta \in [0,1]$ için $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında tanımlı f fonksiyonu, $x_0 \geq a$ koşulunu sağlayan noktada β -türevli ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir (Atangana, 2015).

İspat. Kabul edelim ki f fonksiyonu β -türevli olsun,

$${}^A_0D_t^\beta (f(t_0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon \\ &= {}^A_0D_t^\beta (f(t_0)).0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve böylece,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0) \right) + f(t_0) \\ &= 0 + f(t_0) = f(t_0) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu aşamada, $t = t_0 + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$ olacak şekilde alınırsa

$$\varepsilon = \frac{(t-t_0)}{\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}$$

eşitliği bulunur ve burada $\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{\frac{t-t_0}{\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}} \rightarrow 0} f(t) = f(t_0)$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik

$$\lim_{t-t_0 \rightarrow 0} f(t) = f(t_0) \text{ veya } \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

şeklinde yazılabilir ve bu teoremin ispatı olur (Atangana, 2015).

Teorem 2.3.3. $f : [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve türevli ise f fonksiyonu β -türevlenebilirdir (Atangana, 2015).

İspat. f türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

limiti vardır. Bu aynı zamanda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

limitinin de varlığını sağlar. Burada $\varepsilon = h \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ alınırsa $h = \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$

eşitliği elde edilir ve yerine yazılırsa yukarıdaki limit ifadesi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t)}{\varepsilon} = {}_0^A D_t^\beta (f(t))$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur (Atangana, 2015).

Teorem 2.3.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, (a, b) aralığında türevli ve β -türevli bir fonksiyon olmak üzere $c \in (a, b)$ için ortalama değer teoremi

$${}^A D_t^\beta (f(c)) = h(\beta, a, b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

şeklinde sağlanır (Atangana, 2015).

İspat. Herhangi bir noktadaki türevin temel yorumuna göre $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren eğim $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ oranıyla bulunur (Arkfen, 1985). Şimdi c ve d sabitler olmak üzere

$$J(t) = f(t) - d \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} t$$

eşitliğini tanımlayalım. Burada f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli olduğu için J türevlenebilirdir. Ayrıca d sabitini

$$J(a) = J(b) = f(a) - d \left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} a = f(b) - d \left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} b$$

eşitliğince gösterilen Rolle teoremini sağlayacak şekilde seçtik. Bu ifadeyi yeniden düzenleyerek

$$d = \frac{f(b) - f(a)}{b \left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} - a \left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta}} \quad (2.3.4.1)$$

elde ederiz. Sonuç olarak Rolle teoremine göre, J türevlenebilir ve $J(a) = J(b)$ olduğundan $J'(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. Ayrıca,

$$J'(x) = f'(x) - d \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} - d(1-\beta) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{-\beta}$$

eşitliği vardır. Böylelikle, $J'(c) = 0$ eşitliği

$$d = \frac{f'(c)}{\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} - \left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta}} \quad (2.3.4.2)$$

eşitliğini gerektirir. Burada (2.3.4.1) ve (2.3.4.2) ifadelerini eşitleyelim

$$\frac{f'(c)}{\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} - \left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta}} = \frac{f(b) - f(a)}{b\left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} - a\left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}$$

Şimdi eşitliğin her iki tarafına da

$$\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} = \frac{f(b) - f(a)}{b\left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} - a\left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}$$

olacak şekilde

$$\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \left[\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} + \left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} \right]$$

ifadesini ekleyelim. Öte yandan, f türevlenebilir olduğu için

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

limiti vardır. Şimdi $h = \left(b + \frac{1}{\Gamma(b)}\right)^{1-\beta}$ değişkeni için oldukça küçük bir değişimi

incelersek

$${}^A_0D_r^\beta(f(c)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(c + \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(c)}{\varepsilon}$$

eşitliğini elde ederiz. Daha sonra

$$h(\beta, c, a, b) = \frac{(b-a) \left[\left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} + \left(c + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{-\beta} \right]}{b \left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} - a \left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta}}$$

olmak üzere

$${}_0^A D_t^\beta (f(c)) = h(\beta, c, a, b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eşitliği elde edilir ki bu da teoremin ispatıdır (Atangana, 2015).

2.4. Yardımcı Denklem Yöntemi

Kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$H \left(u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, u \frac{\partial u}{\partial x}, u^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right) = 0 \quad (2.4.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. σ ve p sabitler olmak üzere (2.4.1)'de

$$\xi = \sigma x + p \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \quad (2.4.2)$$

dalga dönüşümünü ve zincir kuralını (Abdeljawad, 2015) kullanılarak gerekli cebirsel işlemler yapılacak olursa x ve t bağımsız değişkenleri yerine tek değişken olan ξ 'ye geçilir. Dolayısıyla (2.4.1) denklemini

$$P(U, U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.4.3)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur. a, b, c reel sabitler ve $z(\xi)$

$$\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \quad (2.4.4)$$

yardımcı adi diferansiyel denkleminin çözümü, $a_i (i=0,1,2,\dots,n)$ reel sabitler ve n pozitif tamsayı olmak üzere (2.4.3) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i z^i(\xi) \quad (2.4.5)$$

eşitliğini kullanarak bulunabilir. Burada n parametresi (2.4.3) denkleminde yer alan en büyük mertebeli lineer olan ve lineer olmayan terimlere dayalı denge prensibi yardımıyla elde edilir (Malfliet, 1992). (2.4.5)'ten gelen eşitlik (2.4.3)'te yerine yazılırsa $z(\xi)$ 'nin kuvvetlerinden oluşan cebirsel bir denkleme ulaşılır. Denklemden katsayıların 0'a eşitlenmesiyle a, b, c ve a_i parametrelerine bağlı cebirsel bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminin bahsi geçen parametrelere bağlı çözümüyle (2.4.4) denkleminin kesin çözümlerinin aşağıda verilen tabloda yerine yazılması ile analitik çözümler elde edilir.

$$1) \frac{-ab \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b^2 - ac \left(1 + \varepsilon \tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2} \quad a > 0$$

$$2) \frac{abc \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b^2 - ac \left(1 + \varepsilon \coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2} \quad a > 0$$

$$3) \frac{2a \operatorname{sech}(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \operatorname{sech}(\sqrt{a}\xi)} \quad a > 0, \Delta > 0$$

$$4) \frac{2a \sec(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \sec(\sqrt{-a}\xi)} \quad a < 0, \Delta > 0$$

$$5) \frac{2a \operatorname{csch}(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{-\Delta} - b \operatorname{csch}(\sqrt{a}\xi)} \quad a > 0, \Delta < 0$$

$$6) \frac{2a \csc(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \csc(\sqrt{-a}\xi)} \quad a < 0, \Delta > 0$$

$$7) \frac{-a \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b + 2\varepsilon\sqrt{ac} \tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)} \quad a > 0, c > 0$$

$$8) \frac{-a \sec^2\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}{b + 2\varepsilon\sqrt{-ac} \tan\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)} \quad a < 0, c > 0$$

$$9) \frac{a \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b + 2\varepsilon\sqrt{ac} \coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)} \quad a > 0, c > 0$$

$$10) \frac{-a \operatorname{csc}^2\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}{b + 2\varepsilon\sqrt{-ac} \cot\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)} \quad a < 0, c > 0$$

$$11) -\frac{a}{b} \left[1 + \varepsilon \tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right) \right] \quad a > 0, \Delta = 0$$

$$12) -\frac{a}{b} \left[1 + \varepsilon \coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right) \right] \quad a > 0, \Delta = 0$$

$$13) \frac{4ae^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{(e^{\varepsilon\sqrt{a}\xi} - b)^2 - 4ac} \quad a > 0$$

$$14) \frac{\pm 4a\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{1 - 4ace^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}} \quad a > 0, b = 0$$

Tablo 2.4.1. $\Delta = b^2 - 4ac$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere (2.4.4) denkleminin çözümleri.

3. YÖNTEMİN UYGULANMASI

Fizik bilimleri, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, oşinografi, astrofizik, kimyasal olguların modellenmesi, okyanus mühendisliği ve biyomedikal mühendislik gibi pek çok farklı alanda karşımıza çıkan doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi araştırmacılar tarafından bilhassa son yıllarda yoğun ilgi görmüştür.

Bu bölümde yardımcı denklem yöntemi kullanılarak farklı disiplinlerde karşımıza çıkan doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerden; Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi, geliştirilmiş ve değiştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi ve $\Phi^4(\phi^4)$ denklemi ele alınmış, her bir denklem için yeni çözümler elde edilmiştir.

3.1. Caudrey-Dodd-Gibbon Denklemine Uygulaması

Doğrusal olmayan optikler; bir ışık demetinin rengini, uzay ve zamandaki şeklini değiştirmemizi ve insanlar tarafından şimdiye kadar gerçekleştirilen en kısa olayları oluşturmamızı sağlar. Doğrusal olmayan optik olaylar, optik iletişim sistemlerinin, optik algılama ve malzeme araştırmalarının birçok bileşeninin temelini oluşturur.

Bu kısımda, bükülme ve akışkanlar dinamiği, kimyasal kinetik, plazma fiziği, kuantum alan teorisi, kristal dislokasyonları ve doğrusal olmayan optikteki modele karşılık gelen zaman kesirli Caudrey-Dodd-Gibbon

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 30u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 30 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 180u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

denklemi ele alınmıştır.

Bugüne kadar araştırmacılar tarafından farklı kesirli türev yaklaşımlarıyla incelenen bu denklemin beta kesirli türev yardımıyla henüz literatürde görülmemiş yeni kesin çözümleri elde edilmiştir.

Birçok yazar, bu denklemin tek çözümlerini elde etmek için çalışmıştır (Wazwaz, 2006, 2008; Cao ve ark., 1999; Lou, 1993). Daha önceki çalışmalarda araştırmacılar tarafından denklemin fiziksel olarak izahı yapılmış (Aiyer ve ark., 1986), açık hareketli dalga çözümleri tanh yöntemi kullanılarak elde edilmiş (Cao ve ark., 1989), homotopi

pertürbasyon yöntemiyle bu denklemi çözmek için uygulanan diğer bazı yöntemler (He, 2006; Tari ve ark., 2007; Ozis ve Yıldırım, 2007; Sadighi ve Ganji, 2007) ve varyasyonel yineleme yöntemi uygulanmıştır (Wazwaz, 2007-2008; He ve Wu, 2006-2007; He, 2007; Odibat ve Momani, 2006).

u bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi Beta türev yaklaşımına göre düzenlenirse

$$D_x^5 u + 30u D_x^3 u + 30D_x u D_x^2 u + D_t^\beta u + 180u^2 D_x u = 0 \quad (3.1.1)$$

denklemi elde edilir. Zincir kuralı (Abdeljawad, 2015) ve (2.4.2)' de yer alan dalga dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilen bir takım cebirsel işlemler sayesinde

$$u(x, t) = U(\xi)$$

eşitliği elde edilir ve bu sayede denklem (3.1.1) de yer alan kısmi diferansiyel denklem

$$m^5 U^{(4)} + 30m^3 U U'' + nU + 60m U^3 = 0 \quad (3.1.2)$$

formunda adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.1.2) denkleminde yer alan en yüksek mertebeli lineer olan ve olmayan terimlere dayalı denge prensibi sayesinde $n = 2$ bulunur (Malfliet, 1992). Elde edilen n değerinin (2.4.5) eşitliğinde yazılmasıyla

$$U(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) + a_2 z^2(\xi) \quad (3.1.3)$$

eşitliği sağlanır. Burada, denklem (3.1.3) ve yöntemin tanımından gelen

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \quad (3.1.4)$$

diferansiyel denklemi (3.1.2)'ye uygulanacak olursa $z(\xi)$ 'ye bağlı bir cebirsel denklem elde edilir. Bu denklemde $z(\xi)$ 'nin eş kuvvetlerinin katsayılarının 0'a eşitlenmesiyle cebirsel denklem sistemine ulaşılır ve bu sistemin a, b, c ve a_0 parametrelerine bağlı çözümüyle (3.1.4) denkleminin kesin çözümlerinin Tablo (2.4.1.)' de yazılmasıyla aşağıdaki çözümlere ulaşılır (Şahinkaya ve ark., 2024).

$$\begin{aligned}
 u_{1,2} = & \frac{(15 - \sqrt{105}) a_0 \operatorname{sech}^4 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\left(1 \pm \tanh \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)^2}{4} \right)^2} \\
 & a_0 + \frac{(\sqrt{105} - 15) a_0 \operatorname{sech}^2 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 - \frac{\left(1 \pm \tanh \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)^2}{480 a_0^5 n^2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{3,4} = & \frac{(15 - \sqrt{105})a_0 \operatorname{csch}^4 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\left(1 \pm \operatorname{coth} \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2}{4} \right)^2} \\
 a_0 - & \frac{(\sqrt{105} - 15)a_0 \operatorname{csch}^2 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 - \frac{\left(1 \pm \operatorname{coth} \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2}{480a_0^5 n^2} \right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{5,6} &= \frac{(15 - \sqrt{105}) a_0 \operatorname{sech}^4 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{4 \left(1 \pm \tanh \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)^2} \\
a_0 + &= \frac{(\sqrt{105} - 15) a_0 \operatorname{sech}^4 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 \pm \tanh \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)} \\
u_{7,8} &= \frac{(15 - \sqrt{105}) a_0 \operatorname{sec}^4 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{4 \left(1 \pm i \tan \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)^2} \\
a_0 + &= \frac{(\sqrt{105} - 15) a_0 \operatorname{sec}^2 \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 \pm i \tan \left(30 a_0^2 \sqrt{a_0 (15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60 a_0^2} \right) \right) \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{9,10} &= \frac{(15 - \sqrt{105})a_0 \operatorname{csch}^4 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{4 \left(1 \pm \operatorname{coth} \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2} \\
a_0^- &= \frac{(\sqrt{105} - 15)a_0 \operatorname{csch}^2 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 \pm \operatorname{coth} \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)} \\
u_{11,12} &= \frac{(15 - \sqrt{105})a_0 \operatorname{csc}^4 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{4 \left(1 \pm i \cot \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2} \\
a_0^+ &= \frac{(\sqrt{105} - 15)a_0 \operatorname{csc}^2 \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right)}{2 \left(1 \pm i \cot \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(15 - \sqrt{105})} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t\right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)}
\end{aligned}$$

$$u_{13,14} = \frac{(15 - \sqrt{105})a_0 \left(1 \pm \tanh \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2}{4}$$

$$a_0 + \frac{(\sqrt{105} - 15)a_0 \left(1 \pm \tanh \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)}{2}$$

$$u_{15,16} = \frac{(15 - \sqrt{105})a_0 \left(1 \pm \coth \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)^2}{4}$$

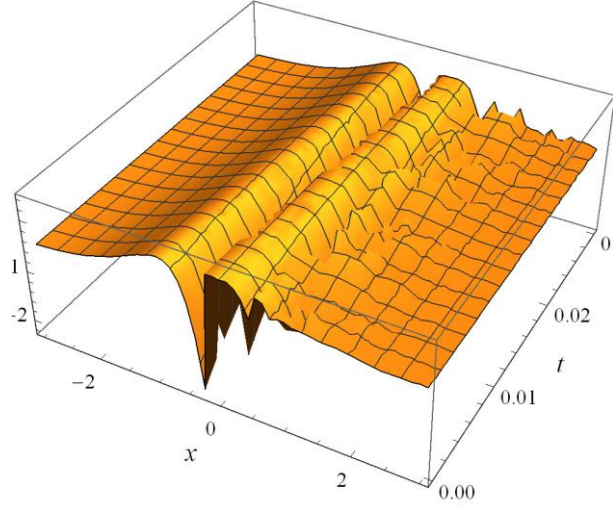
$$a_0 + \frac{(\sqrt{105} - 15)a_0 \left(1 \pm \coth \left(30a_0^2 \sqrt{a_0(\sqrt{105} - 15)} \left(\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} - \frac{x}{60a_0^2} \right) \right) \right)}{2}$$

3.1.1. Çözümün Geometrik ve Fiziksel Yorumu

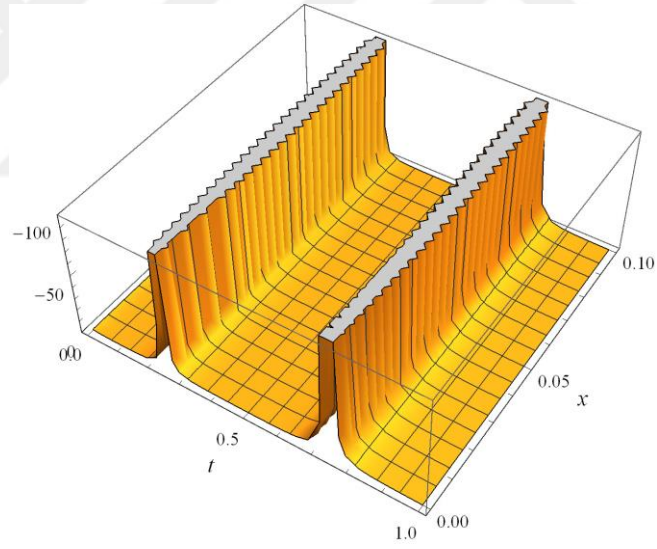
İletişimin temel altyapısını kuşatan telekomünikasyon başta olmak üzere, elektrik sinyallerinin nöronlar üzerindeki hareketi gibi çeşitli uygulamalı alanlarda kullanılmakta olan solitonlar herhangi bir ortamda yayılırken enerjinin taşınmasına olanak sağlayan titreşimler şeklinde tanımlanır. Titreşimler zamanla dalgaların oluşmasına neden olur. Oluşan dalgalar genlik, frekans ve dalga boyuna bağlı olarak kategorize edilir (Hirota, 2004).

Hızı ve yapısı değişmeden güçlenerek yayılım gösteren lineer olmayan dalgalara solitary (tekil dalgalar) denir ve ilk olarak 19. yüzyılda John Scott Russel tarafından hareket etmekte olan bir gemiye eşlik eden dalgaların gözlemlenmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Daha sonra laboratuvar ortamında çok defa deneysel olarak kurgulanan bu gözlem sayesinde solitary dalgalarının yapısı ve özellikleri hakkında detaylı bilgilere ulaşılabilmektedir. Tekil dalgalar yapı itibarıyla, maruz kaldıkları herhangi bir etkiye rağmen mevcut özelliklerini koruyup güçlenerek yayılımına devam edebildiği için taşınan verileri güvenli olarak istenen yere ulaştırması amacıyla fiber optik ve haberleşme ağlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Hirota, 2004).

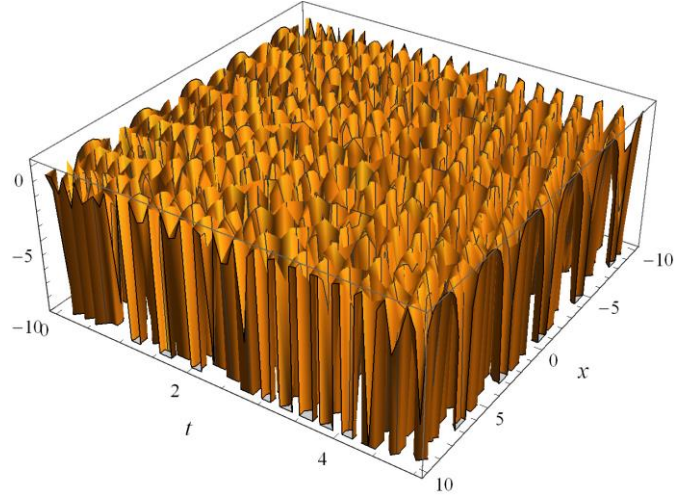
Bu kısımda (3.1.1)'e ait bazı çözümlerin grafiksel gösterimlerine yer verilmiş ve böylece çözümlerin fiziksel davranışları açıklanmıştır. Şekil 3.2.1, Şekil 3.2.2, Şekil 3.2.3 ve Şekil 3.2.4 'ten de görüleceği üzere karanlık soliton, tekil soliton ve hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen solitonların denklemin kullanıldığı lineer olmayan optikler başta olmak üzere farklı alanlarda faydalı yorumlamalara olanak sağlayacağı düşünülmektedir.



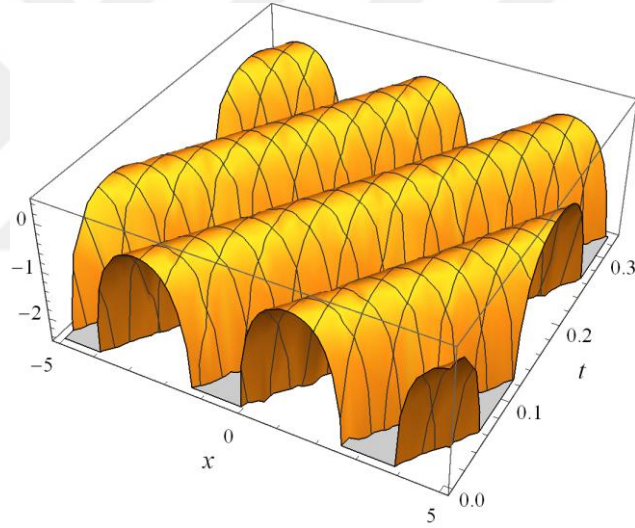
Şekil 3.1.1.1. $a_0 = -0.55$, $n = 0.45$, $b = 1.41$ ve $\beta = 0.65$ için u_1 in 3-boyutlu gösterimi karanlık solitondur.



Şekil 3.1.1.2. $a_0 = 0.36$, $n = 0.1$, $b = 1$ ve $\beta = 0.25$ için u_5 in 3-boyutlu gösterimi tekil solitondur.



Şekil 3.1.1.3. $a_0 = 0.6$, $n = 1$, $b = 1$ ve $\beta = 0.7$ için u_7 nin 3-boyutlu gösterimidir.



Şekil 3.1.1.4. $a_0 = 0.55$, $n = 0.45$, $b = 1.41$ ve $\beta = 0.65$ için u_9 un 3-boyutlu gösterimidir.

3.2. Geliştirilmiş ve Değiştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemine Uygulanması

Kökenleri 19. yüzyılda J. Scott Russel tarafından fark edilen soliton dalgalarına (Russel, 1844) dayanan KdV denklemi ilk olarak 20. yüzyılda Alman matematikçi Korteweg ve öğrencisi de-Vries tarafından bulunan soliton dalga çözümleri ile beraber ortaya konulmuştur (Ali, 1989). Tsunami olarak adlandırılan dev okyanus dalgalarını modellerken, plazma fiziğinin çeşitli olaylarını gözlemlerken ve harmonik olmayan kafes gibi fiziksel sistemlerin çalışmasında kullanılan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir (Korteweg ve Vries, 1895).

Daha önceden araştırmacılar tarafından analitik çözümleri (Zabusky, 1967; Fornberg ve Whitham, 1978), çözümlerin varlık ve tekliği (Gardner ve ark., 1967), nümerik çözümleri (Zabusky ve Kruskal, 1965; Wahibin, 1974) yapılmıştır.

Bu kısımda, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir çeşidi olan geliştirilmiş ve değiştirilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin yeni tam çözümlerini yardımcı denklem yöntemini kullanarak elde edilmiştir.

v bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$v_t + v^2 v_x + v_{xxx} + v_{xxt} = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlı IMKdV (Improved and Modified KdV) denklemi, zaman kesirli Beta türev yaklaşımına göre düzenlenirse

$$D_t^\beta v + v^2 D_x v + D_{xxx} v + D_t^\beta D_{xx} v = 0 \quad (3.2.2)$$

denklemi elde edilir. Zincir kuralı (Abdeljawad, 2015) ve (2.4.2)' de yer alan dalga dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilen bir takım cebirsel işlemler sayesinde

$$v(x, t) = V(\xi)$$

eşitliği elde edilir ve bu sayede denklem (3.2.2) de yer alan kısmi diferansiyel denklem

$$nV' + mV^2V' + m^3V''' + m^2nV''' = 0 \quad (3.2.3)$$

formunda adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.2.3) denkleminde yer alan en yüksek mertebeli lineer olan ve olmayan terimlere dayalı denge prensibi sayesinde $n = 2$ bulunur (Malfliet, 1992). Elde edilen n değerinin (2.4.5) eşitliğinde yazılmasıyla

$$V(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) + a_2 z^2(\xi) \quad (3.2.4)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. Son olarak, denklem (3.2.4)'ü ve yöntemin tanımından gelen

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \quad (3.2.5)$$

diferansiyel denklemi (3.2.3)'e uygulanacak olursa $z(\xi)$ 'ye bağlı bir cebirsel denklem elde edilir. Bu denklemde $z(\xi)$ 'nin eş kuvvetlerinin katsayılarının 0'a eşitlenmesiyle cebirsel denklem sistemine ulaşılar ve bu sistemin a, b, c ve a_0 parametrelerine bağlı çözümlüyle (3.2.5) denkleminin kesin çözümlerinin Tablo (2.4.1.)'de yazılmasıyla aşağıdaki çözümlere ulaşılar:

$$v_{1,2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2 - 2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{ab^2m} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2 + 2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2 - 2} \left(b^2 - \frac{1}{4} b^2 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2 + 2)} + mx \right) \right) \right)^2 \right)}$$

$$v_{3,4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{ab^2m} \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2} \left(b^2 - \frac{1}{4} b^2 \left(1 \pm \operatorname{coth} \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right) \right)^2}$$

$$v_{5,6} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{abm} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2} \left(b \pm \sqrt{b^2} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}$$

$$v_{7,8} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{abm} \operatorname{sec}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2} \left(b \pm \sqrt{-b^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}$$

$$v_{9,10} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{abm} \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2} \left(b \pm \sqrt{b^2} \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}$$

$$v_{11,12} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{abm} \operatorname{csc}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2} \left(b \pm \sqrt{-b^2} \cot \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}$$

$$v_{13,14} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{am} \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2}}$$

$$v_{15,16} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{am}}{\sqrt{-am^2-2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{am} \left(1 \pm \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{a} \left(\frac{am^3 \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta(am^2+2)} + mx \right) \right) \right)}{\sqrt{-am^2-2}}$$

3.3. Phi-4 (ϕ^4) Denkleminin Uygulanması

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel bir denklem olan Phi-4 denklemi; parçacık fiziğinde bükülme ve bükülme önleyici dalgaların etkileşime girdiği durumu modelleyen Klein-Gordon denkleminin özel bir formu olarak düşünülebilir (Dashen ve ark., 1975; Deng ve ark., 2009). Nükleer fizik başta olmak üzere farklı alanlarda kullanılmakta olan Phi-4 denklemleri ile ilgili bugüne kadar çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Değiştirilmiş basit denklem yöntemiyle Phi-4 denkleminin kesin çözümleri (Akter ve Akbar, 2015), Weierstrass eliptik fonksiyon yöntemiyle denklemin dalga çözümleri (Deng ve ark., 2009), Jacobi-Gauss-Lobatto sıralama yöntemiyle denklemin spektral çözümleri (Bhrawy ve ark., 2013), tanh yöntemiyle denklemin tam analitik çözümleri (Tariq ve Akram, 2017) ve daha başka yöntemler sayesinde denklemin çeşitli çözümleri elde edilmiştir (Rezazadeh ve ark., 2018; Liu, 2021; Akbulut ve ark., 2016).

Bu kısımda, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin diğer bir çeşidi olan Phi-4 (ϕ^4) denkleminin yeni tam çözümleri yardımcı denklem yöntemi yardımıyla elde edilmiştir.

w bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$w_{tt} - aw_{xx} - \lambda w - \gamma w^2 = 0 \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlı Phi-4 (ϕ^4) denklemi, zaman kesirli beta türev yaklaşımına göre düzenlenirse

$$D_t^{(2\beta)} w - aD_{xx} w - \lambda w - \gamma w^2 = 0 \quad (3.3.2)$$

denkleminin elde edilir. Zincir kuralı (Abdeljawad, 2015) ve (2.4.2)' de yer alan dalga dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilen bir takım cebirsel işlemler sayesinde

$$w(x, t) = W(\xi)$$

eşitliği elde edilir ve bu sayede denklem (3.3.2) de yer alan kısmi diferansiyel denklem

$$n^2 W'' - m^2 a W'' - \lambda W - \gamma W^2 = 0 \quad (3.3.3)$$

formunda adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.3.3) denkleminde yer alan en yüksek mertebeli lineer olan ve olmayan terimlere dayalı denge prensibi sayesinde $n = 1$ bulunur (Malfliet, 1992). Elde edilen n değerinin (2.4.5) eşitliğinde yazılmasıyla

$$W(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) \quad (3.3.4)$$

eşitliği sağlanır. Burada, denklem (3.3.4) ve yöntemin tanımından gelen

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \quad (3.3.5)$$

diferansiyel denklemi (3.3.4)'e uygulanacak olursa $z(\xi)$ 'ye bağlı bir cebirsel denklem elde edilir. Bu denklemde $z(\xi)$ 'nin eş kuvvetlerinin katsayılarının 0'a eşitlenmesiyle cebirsel denklem sistemine ulaşılır ve bu sistemin a, b, c ve a_0 parametrelerine bağlı çözümüyle (3.3.5) denkleminin kesin çözümlerinin Tablo (2.4.1.)'de yazılmasıyla aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$w_{1,2} = a_0 - \frac{3a_0 b^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{b^2 - \frac{1}{4} b^2 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2} + \frac{3a_0 b^4 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{2 \left(b^2 - \frac{1}{4} b^2 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right) \right)^2}$$

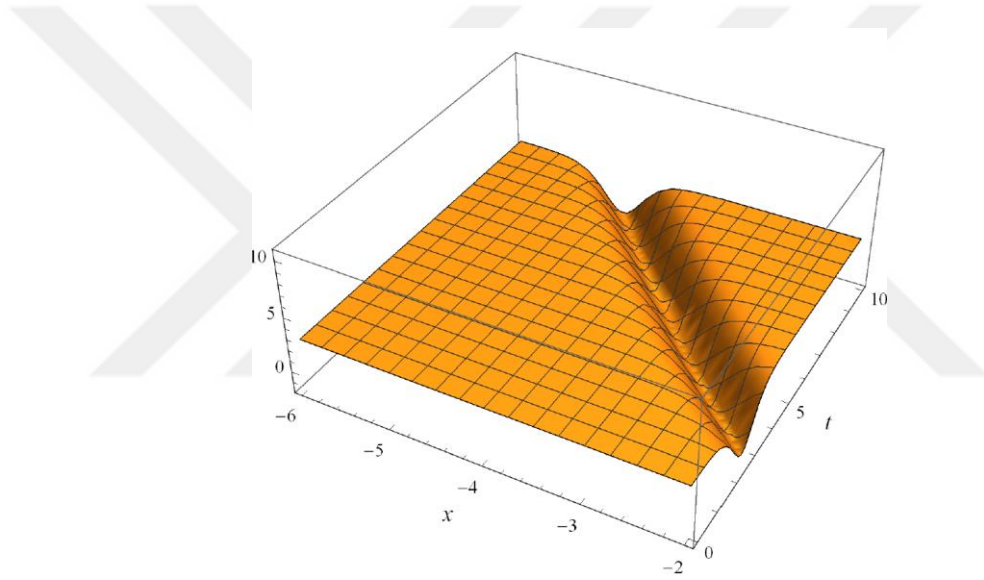
$$\begin{aligned}
w_{3,4} = a_0 + & \frac{3a_0b^2 \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{b^2 - \frac{1}{4}b^2 \left(1 \pm \operatorname{coth} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2} \\
& + \frac{3a_0b^4 \operatorname{csch}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{2 \left(b^2 - \frac{1}{4}b^2 \left(1 \pm \operatorname{coth} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right) \right)^2} \\
w_{5,6} = a_0 + & \frac{3a_0b^2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{2 \left(\sqrt{b^2} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) + b \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3a_0 b \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{b \pm \sqrt{b^2} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)} \\
w_{7,8} = a_0 + & \frac{3a_0 b^2 \operatorname{csch}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{2 \left(b \pm \sqrt{b^2} \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2} \\
& + \frac{3a_0 b \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{b \pm \sqrt{b^2} \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}
\end{aligned}$$

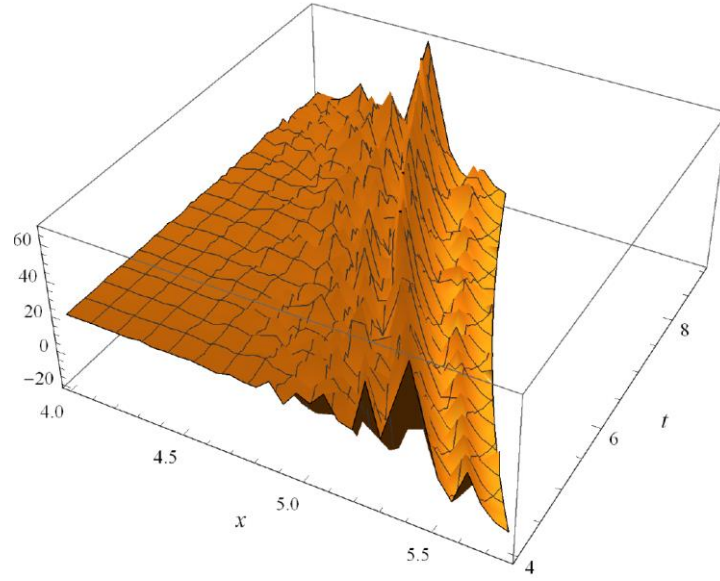
$$\begin{aligned}
w_{9,10} = a_0 + & \frac{3a_0b^2 \csc^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{2 \left(b \pm \sqrt{-b^2} \cot \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2} \\
& - \frac{3a_0b \csc^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)}{b \pm \sqrt{-b^2} \cot \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right)} \\
w_{11,12} = a_0 + & \frac{3}{2} a_0 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2 \\
& - 3a_0 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$w_{13,14} = a_0 + \frac{3}{2}a_0 \left(1 \pm \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)^2 - 3a_0 \left(1 \pm \coth \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{a_0 b}{a_1}} \left(mx + \frac{n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \right)^\beta}{\beta} \right) \right) \right)$$

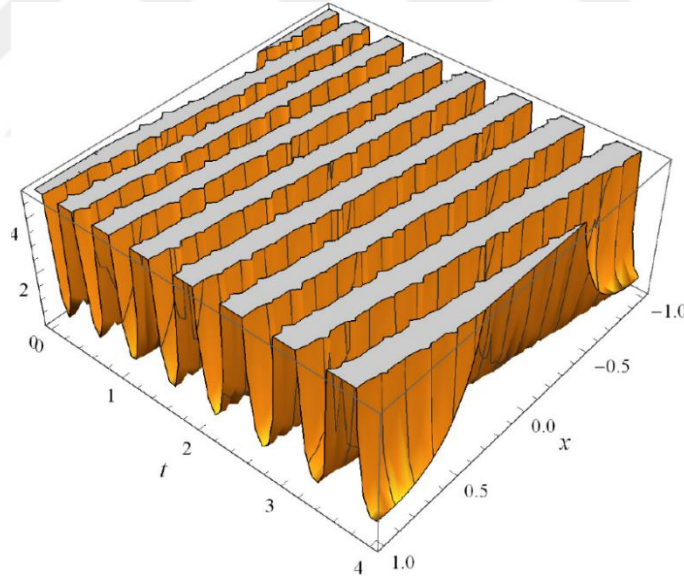
3.3.1. Çözümün Geometrik ve Fiziksel Yorumu



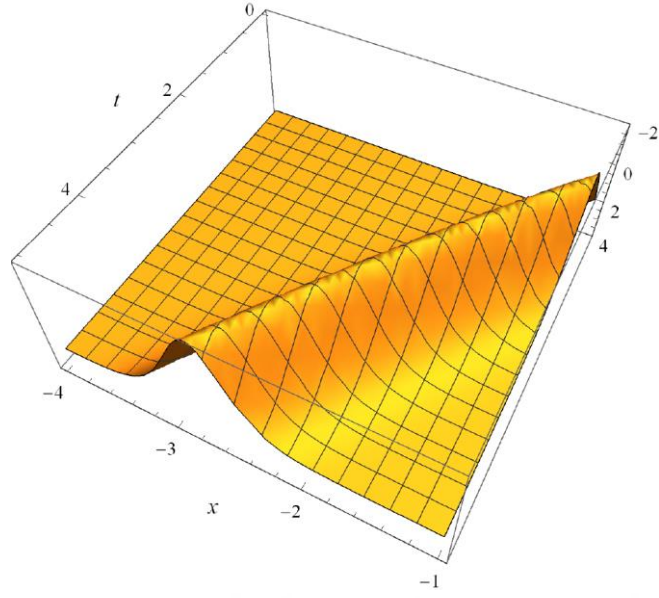
Şekil 3.3.1.1. $a_0 = 2.85$, $a_1 = 2.7$, $m = 2.2$, $n = 1.21$, $b = 2.5$ ve $\beta = 0.8$ için $w_{1,2}$ in 3-boyutlu gösterimi karanlık solitondur.



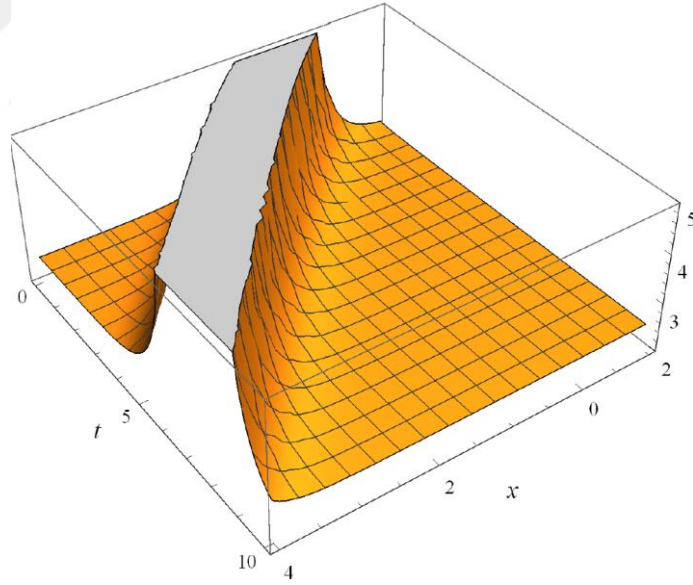
Şekil 3.3.1.2. $a_0 = 20$, $a_1 = 13$, $m = 1.95$, $n = 1.35$, $b = 0.8$ ve $\beta = 0.25$ için $w_{3,4}$ in 3-boyutlu gösterimi karanlık solitondur.



Şekil 3.3.1.3. $a_0 = -1.35$, $a_1 = 1.35$, $m = 1.15$, $n = 5.35$, $b = 2.8$ ve $\beta = 0.7$ için $w_{5,6}$ in 3-boyutlu gösterimi.



Şekil 3.3.1.4. $a_0 = 2.95$, $a_1 = 2.7$, $m = 2.2$, $n = 1.2$, $b = 2.5$ ve $\beta = 0.8$ için $w_{7,8}$ in 3-boyutlu gösterimi.



Şekil 3.3.1.5. $a_0 = 2.55$, $a_1 = 2.5$, $m = 2.12$, $n = -1.2$, $b = 0.95$ ve $\beta = 0.85$ için $w_{11,12}$ in 3-boyutlu gösterimi.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu çalışmada; doğrusal olmayan optikte kullanılan zaman kesirli Caudrey-Dodd-Gibbon denkleminin, dalga problemleri başta olmak üzere pek çok alanda kullanılan Korteweg de Vries denkleminin geliştirilmiş ve değiştirilmiş versiyonu olan ImKdV denkleminin, nükleer fizik ve parçacık fiziğinin çeşitli olgularını açıklamayı sağlayan Phi-4 (ϕ^4) denkleminin yeni ve farklı çözümlerini elde etmek için yardımcı denklem yöntemi kullanılmıştır. Bu araştırma, yardımcı denklem yönteminin matematiksel fizikteki doğrusal olmayan diğer kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için güvenilir, etkili ve kullanışlı bir yol sağladığını ortaya koymaktadır. Öte yandan, Beta kesirli türevini kullanmak, Caputo ve Reimann-Liouville türevlerinin sağlamadığı zincir kuralını sağlaması gibi bazı kolaylıklar sunmaktadır. Bu çalışmada Mathematica programı sayesinde birçok işlem yapılmıştır. Optik, nükleer fizik ve dalga problemleri hakkında çalışan araştırmacılar, verilen grafik yardımıyla çözümlerin fiziksel davranışlarını yorumlayabilirler. Bu çalışma; bilim insanlarına kesirli optiklerin, dalga denklemlerinin ve fiziksel olguların modellenmesi konusunda yeni bir fikir verebilir.

5. KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015, On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Netherlands, 279, 57-66.
- Aguilar, G. J. F., Martinez, Y. H. ve Baleanu, D., 2018, Beta-Derivative and Sub-Equation Method Applied to The Optical Solitons in Medium With Parabolic Law Nonlinearity and Higher Order Dispersion, *Optics*, Switzerland.
- Aiyer, R. N., Fuchssteiner, B. ve Oevel, W., 1986, Solitons and discrete eigenfunctions of the recursion operator of non-linear evolution equations: the Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, United Kingdom, 3755-3770.
- Al-Khaled, K., Al-Refai, M. ve Alawneh, A., 2008, Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations, *Applied Mathematics and Computation*, United States, 233-242.
- Ali, A. H. A., 1989, Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation, *Ph.D. Thesis*, University College of North Wales, Bangor, UK,1-2.
- Akbulut, A., Kaplan, M. ve Tascan, F., 2016, Conservation laws and exact solutions of Phi-four (Phi-4) equation via the (G'/G, 1/G)-expansion method, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 71(5), 439-446.
- Akram, G., Sadaf, M. ve Zainab, I., 2022, Observations of fractional effects of β -derivative and M-truncated derivative for space time fractional Phi-4 equation via two analytical techniques, *Chaos, Solitons & Fractals*, United Kingdom, 154, 111645.
- Akter, J. ve Akbar, M., A., 2015, Exact solutions to the Benney-Luke equation and the Phi-4 equations by using modified simple equation method, *Results in Physics*, 5, pp. 125-130.
- Arfken, G., 1985, Integral transforms, in: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Third Edition, Orlando, FL, pp. 794–864, ch. 16.
- Arfken, G., B., ve Weber, H., J., 1995, *Mathematical methods for physicist*, Academic Press, Fourth edition, Amsterdam, 959p.
- Atangana, A., 2015, *Derivative with a New Parameter Theory: Methods and Applications*, Academic Press, United Kingdom.
- Atangana, A. ve Alkahtani T. B. S., 2015, Modeling the spread of Rubella disease using the concept of with local derivative with fractional parameter, *Complexity*, United Kingdom, 21/6.
- Barkai, E., Metzler, R. ve Klafter, J., 2000, From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck Equation, *Physical Review E*, United States, 61, 132-138.

- Benghorbal, M. M., 2004, Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals, PhD thesis, *Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada*.
- Bhrawy, A. H., Assas, L. M. ve Alghamdi, M. A., 2013, An efficient spectral collocation algorithm for nonlinear Phi-four equations, *Boundary Value Problems*, Egypt, 2013(1), 87.
- Bonyah, E., Atangana, A. ve Khan, A. M., 2017, Modeling the spread of computer virus via Caputo fractional derivative and the beta-derivative, *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*. Germany.
- Cao, C. W., Wu, Y. T. ve Geng, X. G., 1999, On quasi-periodic solutions of the 2 + 1 dimensional Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada equation, *Physical Letters A*, United States, 256, 59-65.
- Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A. ve Tasbozan, O, 2017, New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative, *Waves in Random And Complex Media*, United Kingdom, 27(1), 103-116.
- Dashen, R. F., Hasslacher, B. ve Neveu, A., 1975, Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques, *Physical Review D*, United States, 11(12), 3424.
- Deng, X., Zhao, M. ve Li, X., 2009, Travelling wave solutions for a nonlinear variant of the Phi-4 equation, *Mathematical and Computer Modelling*, United Kingdom, 49(3-4), 2009, pp. 617-622.
- Fu, Z. T., Liu, S. K., Liu, S. D. ve Zhao, Q., 2011, New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, Netherlands, 290, 72-76.
- Fornberg, B. ve Whitham, G. B., 1978, A Numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, *Philosophical Transaction of The Royal Society A, Mathematical & Physical and Engineering Sciences*, vol. 289, pp. 373-404.
- Gardner, C. S., Green, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M., 1967, Method for solving Korteweg- de Vries equation, *Physical Review Letters*, vol. 19, pp. 1095-1100.
- Hilfer, R., 2000, Applications of fractional calculus in physics, *World Scientific*, Singapore.
- Hirota, R., 2004, The direct method in soliton theory, *Cambridge University Press*, 180-200.
- He, J. H. ve Wu, X. H., 2006, Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method, *Chaos Solitons Fractals*, United Kingdom, 29, 108-113.

- He, J. H., 2006, New interpretation of homotopy perturbation method, *International Journal of Modern Physics B*, Singapore, 20, 2561-2568.
- He, J. H. ve Wu, X. H., 2007, Variational iteration method: New development and applications, *Computers and Mathematics with Applications*, United Kingdom, 54, 881-894.
- He, J. H., 2007, Variational iteration method-some recent results and new interpretations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Greece, 207, 3-17.
- Hesameddini, E. ve Peyrovi, A., 2010, Homotopy perturbation method for second painleve equation and comparisons with analytic continuation extension and chebishev series method, *International Mathematical Forum*, Bulgaria, 629-637.
- Henry, B. I., Langlands, S. L. ve Wearne, S. L., 2008, Fractional Cable Models for Spiny Neuronal Dendrites, *Physical Review Letters*, United States, 100, 128103.
- Jianming, L., Jie, D. ve Wenjun, Y., 2011, Backlund transformation and new exact solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation, *Abstract and Applied Analysis*, United Kingdom, Article ID 935710.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J., 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier*, San Diego, 204.
- Kilbas, A. A. ve Trujillo, J. J., 2001, Differential equations of fractional order: methods, results and problem-I, *Applicable Analysis*, Switzerland, 78:(1-2):153-192.
- Kudryashov, N. A., 2005, Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, United Kingdom, 24(5), 1217-1231.
- Kumar, H., Malik, A. ve Chand, F., 2012, Analytical spatiotemporal soliton solutions to (3+1)-dimensional cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients, *Journal of Mathematical Physics*, United States, 53(10), 103704.
- Kurt, A., Çenesiz, Y. ve Tasbozan, O., 2015, On the solution of Burgers' equation with the new fractional derivative, *Open Physics*, Poland, 13(1).
- Korteweg, D. J. ve De-Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary wave, *Philosophical Magazine*, vol. 39, pp. 422-443.
- Li, J. L., 2009, Adomian's decomposition method and homotopy perturbation method in solving nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Greece, 168-173.
- Liu, C., 2021, Periodic solution of fractal Phi-4 equation, *Thermal Science*, Serbia, 25(2), Part B, 1345-1350.

- Lou, S. Y., 1993, Twelve sets of symmetries of the Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera equation, *Physical Letters A*, United States, 175, 23-26.
- Magin, R., Feng, X. ve Baleanu, D., 2009, Solving the fractional order bloch equation, *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, United States, 34A, 1, 16-23.
- Malfliet, W., 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, 60(7), 650- 654.
- Ma, W. X. ve Lee, J., H., 2009, A transformed rational function method and exact solutions to the dimensional Jimbo-Miwa equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, United Kingdom, 42, 1356-1363.
- Miller, K. S. ve Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, *Wiley*, United States.
- Myint-U, T. ve Debnath, L., 2007, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, *Springer Science & Business Media*, Boston.
- Odibat, Z. M. ve Momani, S., 2006, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Germany, 7, 27-36.
- Oldham, K. B. ve Spanier, J., 1974, The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York.
- Ozis, T. ve Yildirim, A., 2007, Traveling wave solution of KdV equation using He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Germany, 239-242.
- Pandır, Y., Gurefe, Y. ve Akturk, T., 2021, New soliton solutions of the nonlinear Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation with the beta-derivative, *Optical and Quantum Electronics*, United States , 54(4).
- Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, *Academic Press*, San Diego.
- Rajaram R. ve Naja, M., 2009, Analytical treatment and convergence of the adomian decomposition method for a system of coupled damped wave equations, *Applied Mathematics and Computation*, United States, 72-81.
- Rezazadeh, H., Korkmaz, A., Eslami, M., Vahidi, J., ve Asghari, R., 2018, Traveling wave solution of conformable fractional generalized reaction Duffing model by generalized projective Riccati equation method, *Optical and Quantum Electronics*, United States, 50(3), 150.
- Rezazadeh, H., Tariq, H., Eslami, M., Mirzazadeh, M. ve Zhou, Q., 2018, New exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Phi-4 equation, *Chinese Journal of Physics*, Taiwan, 56(6), 2805-2816.
- Ross, B., 1975, A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus, *Lecture Notes in Mathematics*, Germany, 457 (1975) 1–36.

- Russell, J. S., 1844, Report on Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, *John Murray*, Londra, s.311-390+1.
- Sadighi, A. ve Ganji, D. D., 2007, Solution of the generalized nonlinear Boussinesq equation using homotopy perturbation and variational iteration methods, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Germany, 435-443.
- Sahoo, S. ve Ray, S. S., 2016, Solitary wave solutions for time fractional third order modified KdV equation using two reliable techniques (G'/G)-expansion method and improved (G'/G)-expansion method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Netherlands, 448, 265-282.
- Salas A. H. ve Gomez, C. A., 2010, Application of the Cole-Hopf transformation for finding exact solutions to several forms of the seventh-order KdV equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Netherlands, Article ID 194329.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I., 1978, Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some Of Their Applications, *Nauka i Technica*, Minsk-Belarus.
- Samko, S., Kilbas, A. ve Marichev, O., 1993, Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications, *Gordon and Breach Science Publishers*, Pensilvanya.
- Simmons, G. F., 2016, Differential Equations with Applications and Historical Notes, *Chemical Rubber Company Press*, New York.
- Singh, J., Gupta, A. ve Baleanu, D., 2022, On the analysis of an analytical approach for fractional Caudrey-Dodd-Gibbon equations, *Alexandria Engineering Journal*, Egypt, 61(7), 5073-5082.
- Srivastava, H. M., Dubey, V. P., Kumar, R., Singh, J., Kumar, D. ve Baleanu, D., 2020, An efficient computational approach for a fractional order biological population model with carrying capacity, *Chaos, Solitons & Fractals*, United Kingdom, 138, 109880.
- Şahinkaya, A. F., Kurt, A. ve Yalçınkaya, İ., 2024, Investigating the new perspectives of Caudrey–Dodd–Gibbon equation arising in quantum field theory, *Optical and Quantum Electronics*, United States, 56, 813.
- Tari, H., Ganji, D. D. ve Rostamian, M., 2007, Approximate solutions of K (2,2), KdV and modified KdV equations by variational iteration method, homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Germany, 203-210.
- Tariq, H. ve Akram, G., 2017, New approach for exact solutions of time fractional Cahn-Allen equation and time fractional Phi-4 equation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Netherlands, 473, pp. 352-362.

- Tasbozan, O., Çenesiz, Y. ve Kurt, A., 2016, New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method, *The European Physical Journal Plus*, Germany, 131, 1-14.
- Uddin, F. M., Hafez, G. M., Hammouch, Z. ve Baleanu D., 2020, Periodic and rogue waves for Heisenberg models of ferromagnetic spin chains with fractional beta derivative evolution and obliqueness, *Waves in Random and Complex Media*, United Kingdom, 31, 6, 2135-2149.
- Wahibin, L. B., 1974, A Dissipative Galerkin Method for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equation. In *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 147-169.
- Wang, M., Zhou, Y. ve Li, Z., 1996, Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, *Physical Letters A*, United States, 216, 67-75.
- Wang, M., Li, X. ve Zhang, J., 2008, The G/G'-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, United States, 417-423.
- Wazwaz, A. M., 2006, Analytic study of the fifth order integrable nonlinear evolution equations by using the tanh method, *Applied Mathematics and Computation*, United Kingdom, 289-299.
- Wazwaz, A. M., 2007, The variational iteration method for a reliable treatment of the linear and the nonlinear Goursat problem, *Applied Mathematics and Computation*, United Kingdom, 193, 455-462.
- Wazwaz, A. M., 2007, The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs, *Computers and Mathematics with Applications*, United Kingdom, 54, 895-902.
- Wazwaz, A. M., 2007, The variational iteration method: A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations, *Computers and Mathematics with Applications*, United Kingdom, 54, 926-932.
- Wazwaz, A. M., 2008, A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method, *Chaos Solitons Fractals*, United Kingdom, 37, 1136-1142.
- Wazwaz, A. M., 2008, Multiple-soliton solutions for the fifth order Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) equation, *Applied Mathematics Computation*, Greece, 719-724.
- Weilbeer, M., 2005. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background, PhD Thesis, *Von der Carl-Friedrich-Gaub-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität*, Germany.
- Wyss, W., 2000, The fractional Black-Scholes equation, *Fractional Calculus Applied Analysis*, Germany, 3, 51-61.

- Yalçinkaya, İ., Ahmad, H., Tasbozan, O. ve Kurt, A., 2021, Soliton solutions for time fractional ocean engineering models with Beta derivative, *Journal of Ocean Engineering and Science*, China, 444-448.
- Yaşar, I., B., 2005, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*, Ankara.
- Youse, S. A., Lot, A. ve Dehghan, M., 2009, He's variational iteration method for solving nonlinear mixed volterra-fredholm integral equations, *Computers and Mathematics with Applications*, United Kingdom, 2172-2176.
- Yuste, S. B. ve Lindenberg, K., 2001, Subdiffusion-limited A+A Reactions, *Physical Review Letters*, United States, 87, 11, 118-301.
- Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D., 1965, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, 15(6), 240–243.
- Zabusky, N. J., 1967, A synergetic approach to problem of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Proceedings of the Symposium Nonlinear Partial Differential Equation, *Academic Press*, 223–258.
- Zhou, Z. J., Fu, J. Z. ve Li, Z. B., 2010, Maple packages for computing Hirota's bilinear equation and multisoliton solutions of nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, United States, 92-104.