



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**EĞRİLERİN VE YÜZEYLERİN BACKLUND
DÖNÜŞÜMÜ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Mümine ÇALIŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Mayıs-2025
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Mümine Çalış tarafından hazırlanan “Eğrilerin ve Yüzeylerin Backlund Dönüşümü Üzerine Bir Çalışma” adlı tez çalışması 28/05/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Danışman

Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Üye

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Mümine ÇALIŞ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EĞRİLERİN VE YÜZEYLERİN BACKLUND DÖNÜŞÜMÜ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mümine ÇALIŞ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2025, 88 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Bu tezde, eğriler ve yüzeyler için yapılmış olan Backlund dönüşümü incelenmiştir. İlk olarak, üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında eğri ve yüzeylerin temel özellikleri açıklanmıştır. Ardından, Öklid uzayında eğri ve yüzeyler için tanımlanan Backlund dönüşümüne dair çalışmalar sunulmuş; devamında ise Backlund dönüşümü Minkowski uzayında ele alınmıştır. Eğriler üzerine yapılan çalışmalarda, Backlund dönüşümünün sabit burulmalı eğrilere kısıtlandığı ve bu dönüşümle yeni eğrilerin tanımlandığı görülmüştür. Yüzeyler üzerine yapılan çalışmalarda ise, sabit Gauss eğrilğine sahip yarı küresel yüzeylerden yine aynı türden yüzeylerin elde edildiği ifade edilmiştir. Minkowski uzayındaki çalışmalarda, eğriler ve yüzeyler timelike ya da spacelike olmalarına göre ayrı ayrı incelenmiş; elde edilen farklılıklar çalışmanın sonuç kısmında tablolar yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Backlund Dönüşümü, Eğriler, Sabit Burulma, Sabit Gauss Eğrilği.

ABSTRACT

MS THESIS

**A STUDY ON BACKLUND TRANSFORMATION
OF CURVES AND SURFACES**

Mümine ÇALIŞ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTIN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2025, 88 Pages

Jury

Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

In this thesis, Backlund transformation for curves and surfaces is investigated. First, the fundamental properties of curves and surfaces are introduced in three-dimensional Euclidean and Minkowski spaces. Then, studies focusing on Backlund transformations defined in Euclidean space are presented. Subsequently, the Backlund transformation is examined in the context of Minkowski space. For curves, it is shown that the Backlund transformation is restricted to those with constant torsion, and new curves are constructed through this transformation. For surfaces, it is observed that pseudo-spherical surfaces with constant Gaussian curvature give rise to new surfaces of the same type. In the Minkowski space, curves and surfaces are analyzed separately according to whether their characterization are timelike or spacelike, and the distinctions between them are compared in the conclusion section of the study using tables.

Keywords: Backlund Transformation, Constant Gaussian Curvature, Constant Torsion, Curves.

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam sũresince engin bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden, her zaman yol gũsterici tutumuyla ũzerimde bũyũk emeği bulunan, birlikte çalıőmaktan ve ũđrencisi olmaktan onur ve mutluluk duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Melek ERDOĞDU'ya en içten teőekkũrlerimi ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yũksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen tũm değerli hocalarıma teőekkũr ederim. Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan, varlıklarıyla bana gũ veren sevgili aileme sonsuz teőekkũr ederim. Tez sũrecinde desteğini esirgemeyen, kıymetli arkadaőlarıma da içtenlikle teőekkũr ederim.

Mũmine ÇALIŞ
KONYA-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
2.1. Öklid Uzayında Yapılan Çalışmalar	3
2.2. Minkowski Uzayında Yapılan Çalışmalar	6
2.3. Diğer Çalışmalar	8
2.4. Güncel Literatür ve Yeni Yaklaşımlar.....	9
3. TEMEL BİLGİLER	10
3.1. Öklid Uzayında Eğriler.....	10
3.2. Öklid Uzayında Yüzeyleyler	20
3.2.1. Yüzeyley Teğet Düzlemi	21
3.2.2. Şekil Operatörü.....	23
3.2.3. Gauss ve Ortalama Eğrilik.....	26
3.3. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar	27
3.3.1. Minkowski Uzayında Eğriler.....	30
3.3.1.1. Eğrinin Timelike Olması Durumu	31
3.3.1.2. Eğrinin Spacelike Olması Durumu	31
3.3.2. Minkowski Uzayında Yüzeyleyler	33
4. ÖKLİD UZAYINDA BACKLUND DÖNÜŞÜMÜ	36
4.1. Öklid Uzayında Eğrilerin Backlund Dönüşümü.....	36
4.2. Öklid Uzayında Yüzeyleylerin Backlund Dönüşümü	49
5. MINKOWSKI UZAYINDA BACKLUND DÖNÜŞÜMÜ	57
5.1. Minkowski Uzayında Eğrilerin Backlund Dönüşümü.....	58
5.2. Minkowski Uzayında Null Olmayan Yüzeyleylerin Backlund Dönüşümü	69
6. SONUÇLAR	78
6.1. Öklid Uzayındaki Sonuçlar	78
6.2. Minkowski Uzayındaki Sonuçlar	80
6.3. Karşılaştırmalı Sonuçlar	85
7. KAYNAKLAR	86

SİMGELER

\mathbb{E}^n	:	n boyutlu Öklid Uzayı
\mathbb{E}_1^n	:	n boyutlu Minkowski Uzayı
I, J	:	Reel uzayın açık aralıkları
α, β, γ	:	α (alfa), β (beta), γ (gama) eğrileri
a	:	α eğrisinin başlangıç noktası
b	:	α eğrisinin bitiş noktası
t	:	Eğrinin keyfi parametre fonksiyonu
h	:	Parametre değişim fonksiyonu
s	:	Eğrinin yay uzunluğu parametre fonksiyonu
\mathbf{v}	:	Hız vektörü
Δ	:	Delta
$yay(\alpha)$:	α eğrisinin yay uzunluğu
d	:	Çemberin yarıçap uzunluğu
\mathbf{T}	:	α eğrisinin teğet vektör alanı
\mathbf{N}	:	α eğrisinin normal vektör alanı
\mathbf{B}	:	α eğrisinin binormal vektör alanı
$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$:	α eğrisinin Frenet - Serret Çatısı
κ	:	α eğrisinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	α eğrisinin burulma fonksiyonu
$\tilde{\alpha}$:	α eğrisinin Backlund dönüşümü olan eğri
$\tilde{\mathbf{T}}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin teğet vektör alanı
$\tilde{\mathbf{N}}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin normal vektör alanı
$\tilde{\mathbf{B}}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin binormal vektör alanı
$\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin Serre-Frenet Çatısı
$\tilde{\kappa}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu
$\tilde{\tau}$:	$\tilde{\alpha}$ eğrisinin burulma fonksiyonu
U	:	\mathbb{E}^2 de bağlantılı bir açık küme
φ	:	Yüzeyin koordinat fonksiyonu
φ^{-1}	:	Yüzeyin koordinat fonksiyonunun tersi
\mathbb{M}	:	Yüzey
p	:	Yüzeyin üzerinde bir nokta
q	:	Yüzeyin koordinat fonksiyonunu p ye karşılık geldiği nokta
V	:	\mathbb{E}^3 'ün açık alt kümesi
$T_p(\mathbb{M})$:	\mathbb{M} yüzeyininin p noktasındaki teğet uzayı
$\mathbf{Ger}\{ \quad \}$:	Gerilen uzay
v_p	:	p noktasındaki teğet vektörü
$\mathcal{X}^\perp(\mathbb{M})$:	Yüzeye dik tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi

\mathbf{W}	:	Yüzey üzerinde vektör alanı
D	:	Kovaryant türev operatörü
$D_{v_p} \mathbf{W}$:	\mathbf{W} vektör alanının v_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türevi
y_1, y_2, y_3	:	\mathbb{E}^3 uzayının koordinat fonksiyonları
$D_V \mathbf{W}$:	\mathbf{W} vektör alanının V vektör alanı yönündeki kovaryant türevi
S	:	Yüzeyin şekil operatörü
K	:	Gauss eğriliği
H	:	Ortalama eğriliği
p^*	:	p noktasının Backlund dönüşümünün karşılık geldiği nokta
\mathbb{M}^*	:	\mathbb{M} yüzeyinin Backlund dönüşümü olan yüzey
K^*	:	Yüzeyin Backlund dönüşümü olan yüzeyinin Gauss eğriliği
H^*	:	Yüzeyin Backlund dönüşümü olan yüzeyinin ortalama eğriliği
N_p	:	\mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki normal vektörü
N_{p^*}	:	\mathbb{M}^* yüzeyinin p^* noktasındaki normal vektörü
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:	Yüzeyin birim dik çatısı
$\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$:	Yüzeyin Backlund dönüşümü olan yüzeyinin birim dik çatısı
k_1, k_2	:	Yüzeyin asal eğrilikleri
f	:	Doğru kongruansı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Öklid iç çarpımı
\times	:	Öklid uzayında vektörel çarpım
$\ \cdot \ $:	Öklid normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$:	Lorentz çarpımı
\times_L	:	Lorentz vektörel çarpım
$\ \cdot \ _L$:	Lorentz normu
X	:	$\cosh \phi$
Y	:	$\sinh \phi$
E, F, G	:	Birinci temel form katsayıları
l, m, n	:	İkinci temel form katsayıları
\wedge	:	Diferansiyel formların dış (exterior) çarpımı

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, matematiksel yapıların lokal ve global özelliklerini anlamaya yönelik önemli bir alandır. Bu alan içerisinde özellikle eğriler ve yüzeyler üzerinde gerçekleştirilen dönüşümler, hem matematiksel kuramlar açısından hem de fiziksel modellerin anlaşılmasında büyük bir öneme sahiptir. Bu dönüşümlerden biri olan Backlund dönüşümü, ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında İsveçli matematikçi Albert Victor Backlund tarafından sabit negatif Gauss eğriliğine sahip yüzeyler arasında tanımlanmış ve diferansiyel geometriye önemli katkılar sunmuştur (Backlund, 1880).

Backlund dönüşümünün temel amacı, belirli geometrik ve analitik koşulları sağlayan bir yüzeyden, aynı türden ancak farklı bir yüzeyi inşa edebilmektir. İlk örneklerinde, yarı-küresel yüzeyler arasında yapılan bu dönüşüm sayesinde, aynı sabit negatif eğriliğe sahip yeni yüzeylerin elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu dönüşüm, özellikle yüzeyler arasında sabit uzaklık ve sabit açı koşullarını sağlayan doğrusal bağlantılar üzerinden tanımlanmıştır. Böylece, geometri ile diferansiyel denklemler arasındaki ilişki güçlendirilmiş ve integrallenebilir sistemlerle olan bağlantılar ortaya konulmuştur.

Zamanla Backlund dönüşümleri yalnızca yüzeylerle sınırlı kalmamış; eğriler üzerinde de uygulanabilir hale gelmiştir. Sabit burulmaya ve sabit eğriliğe sahip eğriler arasında kurulan dönüşümler, hem Öklid hem de Minkowski uzaylarında tanımlanarak literatürde önemli bir yer edinmiştir. Eğriler üzerindeki Backlund dönüşümlerinde, Frenet - Serret çatıları, eğrilik ve burulma fonksiyonları arasındaki yapısal ilişkiler temel alınmakta; timelike, spacelike ve null türünden eğriler için farklı dönüşüm mekanizmaları geliştirilmektedir. Bu tür dönüşümler sayesinde sabit burulmalı eğrilerden yeni eğriler üretilebilmekte ve bunların geometrik karakteristikleri analiz edilebilmektedir (Nemeth, 2000; Özdemir & Çöken, 2009; Özdemir ve ark., 2014; Erdoğan & Özdemir, 2018; Erdoğan & Yavuz, 2022).

Backlund dönüşümleri, yalnızca Öklid uzayında değil, aynı zamanda Minkowski uzayı, de Sitter ve anti-de Sitter gibi diğer yarı-Riemann geometrilerinde de incelenmiş; böylelikle geometri-fizik ilişkisi daha geniş bir perspektiften ele alınmıştır. Özellikle Minkowski uzayında yapılan çalışmalar, yüzeylerin spacelike veya timelike özelliklerine

göre farklı davranışlar sergilediğini göstermekte ve bu bağlamda Backlund dönüşümünün Lorentzian geometri içindeki önemini ortaya koymaktadır (Chern & Terng, 1980; Tenenblat & Terng, 1980; Tian, 1995; Zuo ve ark., 2002; Şimşek & Özdemir, 2016).

Bu tez çalışmasında, eğriler ve yüzeyler üzerinde tanımlanan Backlund dönüşümleri sistematik biçimde incelenmiş, klasik sonuçlar ile birlikte güncel yaklaşımlara da yer verilmiştir. Çalışma boyunca, hem Öklid uzayındaki hem de Minkowski uzayındaki eğriler ve yüzeyler için tanımlanan Backlund dönüşümleri teorik ve uygulamalı olarak ele alınmıştır. Ayrıca sabit eğrilik, sabit burulma gibi geometrik nicelikler üzerinden dönüşüm yapılarına ilişkin karşılaştırmalı analizler gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar tablolar aracılığıyla sunulmuştur.

Bu tez, diferansiyel geometri içerisinde önemli bir yere sahip olan Backlund dönüşümünün eğriler ve yüzeyler üzerindeki etkisini ele alarak, hem teorik alt yapıyı güçlendirmeyi hem de bu dönüşümün farklı geometrik ortamlarda nasıl davrandığını göstermeyi amaçlayan bütüncül bir derleme çalışma niteliğindedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

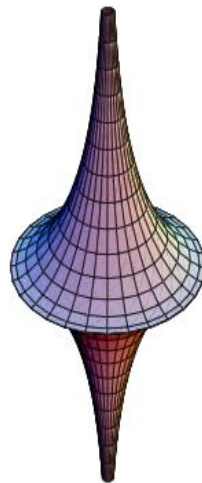
Backlund dönüşümleri üzerine yapılan çalışmalar, tarihsel olarak diferansiyel geometrinin gelişimiyle paralel bir seyir izlemiş ve bu dönüşümler hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında önemli sonuçlar doğurmuştur. Bu bölümde, literatürde eğriler ve yüzeyler üzerine tanımlanan Backlund dönüşümleri ile ilgili yapılmış temel ve güncel çalışmalar detaylı şekilde incelenmektedir. İlk olarak Öklid uzayında gerçekleştirilen klasik dönüşüm örneklerine yer verilirken, devamında Minkowski uzayında yapılan genişletilmiş çalışmalara değinilmiştir. Ayrıca farklı geometrik ortamlarda yapılan özgün katkılar ve Backlund dönüşümünün soliton teorisi, integrallenebilir sistemler ve modern fizik gibi alanlardaki yeri vurgulanmıştır. Böylece, bu dönüşümün matematiksel altyapısı kadar fiziksel uygulama alanlarına dair kapsamlı bir literatür taraması sunulmaktadır.

2.1. Öklid Uzayında Yapılan Çalışmalar

Backlund dönüşümünün ilk ortaya çıktığı ve sistematik olarak geliştirildiği ortam olan Öklid uzayı, bu dönüşümün temel prensiplerinin anlaşıldığı klasik diferansiyel geometri alanıdır. Bu alt bölümde, sabit negatif Gauss eğriliğine sahip yüzeyler arasındaki dönüşümlerin tanımlanmasına öncülük eden Backlund ve Bianchi'nin çalışmaları ile başlayan tarihsel süreç incelenmiştir. Ayrıca sabit burulmalı eğriler üzerindeki dönüşümler, doğru kongruansları, Sine-Gordon denklemi ile olan bağlantılar ve soliton teorisiyle ilişkili sonuçlar sunulmuştur. Bu kapsamda, dönüşümün teorik altyapısı kadar geometrik ve analitik koşulları da ele alınmaktadır.

Adını İsveçli matematikçi Albert Victor Backlund'dan alan Backlund dönüşümü ilk olarak 1880'lerde L. Bianchi ve Backlund tarafından, Öklid uzayındaki yarı-küresel yüzeylerin dönüşümü olarak tanıtılmıştır (Backlund, 1880). Backlund, yarı-küresel doğru kongruanslarının karşılık geldiği sınır noktaları arasındaki r mesafesi sabit ve bu noktalardaki fokal yüzeylerin normallerinin sabit bir θ açısı oluşturması durumunda eğrilik değerinin aynı negatif sabite eşit olması gerektiğini ispatlamıştır. Bu durumda eğrilik değeri $-\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ negatif sabit değerine eşit olmuştur (Palais & Terng, 2006; Eisenhart, 2013).

Backlund dönüşümü aracılığıyla bir yarı-küresel sabit negatif Gauss eğrilik değerine sahip yüzey, yeni bir yarı-küresel (pseudo-spherical) yüzeye dönüştürüldüğü ifade edilmiştir. Klasik diferansiyel geometride yeni yüzey, eski yüzeye belirli sabit uzunluktaki bir doğru aracılığı ile her iki yüzeye teğet olup sabit uzunluklu bir doğru ile bağlantılıdır ve bu teğet doğrusunun, eski ve yeni yüzeylere teğet olduğu karşılıklı noktalardaki normalleri arasındaki açı sabit olarak bulunmuştur (Calini & Ivey, 1998).



Şekil 2.1. Yarı-küresel (pseudo-spherical) yüzey örneği

f doğru kongruansları yarı-küresel kongruanslar olan yüzeylerdir. Doğru kongruansları, bir yüzeyi diğerine doğrular aracılığıyla dönüştürmenin klasik yöntemi olarak ortaya çıkmıştır. Doğru kongruansları, doğruların iki parametrelili ailesi olarak görülüp doğrular uzayındaki yüzeyler olarak incelenmiştir. Ayrıca yarı-küresel yüzeyin, sabit negatif Gauss eğrilik değerine sahip olan diğer bir yüzeye dönüşümü ile ilgili Backlund teoreminin ispatı verilmiştir (Shepherd, 1999). Terng tarafından doğru kongruansları ve Backlund teoremi arasındaki ilişki anlatılmıştır. Bir M yüzeyi tanımlayıp özelliklerini açıklanmış ve Gauss eğrilik değeri -1 olan yüzeyler için Backlund teoremi ve ispatı verilmiştir (Terng, 2003).

Üç boyutlu Öklid uzayında tanımlanan klasik Backlund Teoremi, yarı-küresel doğru kongruanslarının fokal yüzeylerinin sabit negatif Gauss eğriliğine sahip ve eğrilik değerinin aynı olduğunu göstermektedir. Üç boyutlu Öklid uzayında Gauss eğrilik değeri -1 olan yüzeyler ile,

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \sin \phi$$

olarak bulunan Sinh-Gordon denkleminin ϕ çözüm kümeleri arasında bir ilişki elde edilmiştir. Böylece, Backlund Teoremi, başlangıç yüzeyinden Sinh-Gordon denkleminin çözümlerini elde etmek için alternatif bir yaklaşım sunmuştur. Dolayısıyla Backlund dönüşümü, soliton teorisinde önemli uygulamalara sahiptir (Rogers & Schief, 2002).

Calini ve Ivey'in çalışmasında sabit burulma değerine sahip olan eğriler üzerinde, Backlund dönüşümü incelenmiştir. Ayrıca Backlund dönüşümünün asimptotik doğruları asimptotik doğrulara götürdüğü ifade edilmiştir. Yarı-küresel bir yüzeydeki asimptotik doğruların burulma değeri sabit olduğundan, Backlund dönüşümü sabit burulma değerine sahip olan eğrilere kısıtlandırılmıştır. Yani, sabit burulma değerine sahip bir eğriden Backlund dönüşümü ile yine sabit burulma değerine sahip bir eğri elde edilmiştir. Backlund dönüşümü kullanarak, eğrinin burulma değerini sabit tutan bir dönüşümdür (Calini & Ivey, 1998).

Nemeth, Calini ve Ivey tarafından yapılan çalışmanın tersini ortaya koyarak, üç boyutlu Öklid uzayında yay uzunluğu parametresiyle tanımlanan iki eğri arasında özel bir dönüşüm tanımlamıştır. Bu dönüşümde, karşılık gelen noktalar için üç temel koşul sağlandığında, eğrilerin burulmalarının eşit ve sabit bir değere sahip olduğunu göstermiştir (Németh, 1998). İlk koşul, ele alınan eğrilerin oskülütör düzlemlerinin kesişiminin, bu eğriler üzerindeki karşılık gelen noktaları birleştiren doğruyu oluşturmasıdır. Bu bağlamda, iki eğri arasındaki doğru parçası sabit uzunlukta olmalıdır. İkinci koşulda, tanımlanan doğru parçası ile her iki eğri arasında sabit ve doksan dereceye eşit olmayan bir açı bulunmalı ve bu açı her iki eğri için de aynı olmalıdır. Üçüncü koşul ise, karşılık gelen noktalardaki eğrilerin binormal vektörlerinin aynı doğrultuda olması ve aralarındaki açının sıfırdan farklı sabit bir değere sahip olmasıdır. Nemeth, bu üç koşulun sağlanması durumunda, ilgili dönüşümün geçerli olduğunu ispatlamıştır (Németh, 1998). Ayrıca bu teoremi, n boyutlu Öklid uzayındaki eğrileri kapsayacak şekilde genelleştirerek daha geniş bir bağlama taşımıştır (Németh, 2000).

Tenenblat ve Terng, Backlund teoremini $2n - 1$ boyutlu Öklid uzayında tanımlı olan en boyutlu altmanifoldlar için genelleştirerek, yarı-küresel doğru kongruansları aracılığıyla elde edilen bu altmanifoldların kesitsel eğrilik değerlerinin sabit olduğunu göstermiştir. Söz

konusu sabit, eğriliği belirleyen açı ve mesafe parametrelerine bağlıdır (Tenenblat & Terng, 1980). Buna ek olarak, Aminov ve Sym, dört boyutlu Öklid uzayında tanımlı iki boyutlu yarı-küresel yüzeyler arasında uygulanabilir bir Backlund dönüşümü ortaya koymuşlardır (Aminov & Sym, 2000). Öte yandan Tian, Backlund teoremini üç boyutlu Öklid uzayında, asal eğrilikler ile bir parametre arasında kurulan özel bir ilişkiye bağlı olarak negatif bir sabit Gauss eğriliğine sahip yüzeyler için genelleştirmiştir (Tian, 1995).

2.2. Minkowski Uzayında Yapılan Çalışmalar

Backlund dönüşümünün farklı metrik uzaylarında uygulanabilirliğini incelemek amacıyla yapılan araştırmalar, özellikle Minkowski uzayında dikkat çekici sonuçlar ortaya koymuştur. Bu bölümde, spacelike ve timelike yüzeyler ile eğriler için tanımlanan Backlund dönüşümleri ele alınarak, klasik dönüşüm şartlarının Lorentz uzayında nasıl değiştiği analiz edilmiştir. Ayrıca sinh-Gordon tipi denklemlerle olan bağlantılar, sabit eğrilik koşullarının fiziksel anlamı ve dönüşüm sonucunda elde edilen geometrik yapıların karakteristikleri detaylandırılmıştır. Böylece, Backlund dönüşümünün Öklid uzayından farklı olarak Minkowski uzayında nasıl biçimlendiği ve farklı sonuçlara yol açtığı ortaya konulmuştur.

Backlund dönüşümü Minkowski uzayında da araştırılmıştır. Hem yüzeyler hem de eğriler için incelenmiştir. McNertney, üç boyutlu Minkowski uzayında sabit pozitif Gauss eğrilik değerine sahip yüzeyler arasında tanımlanabilen Backlund dönüşümünü ele almıştır. Çalışmada, verilen bir Minkowski yüzeyinden ortak teğet doğrular boyunca taşınarak elde edilen yeni yüzeylerin, başlangıç yüzeyi ile aynı eğrilik değerini taşıdığı gösterilmiştir. Bu dönüşümün mümkün olabilmesi için, sabit pozitif eğrilik değerinin hem gerekli hem de yeterli bir koşul olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen yüzeylerin Sinh-Gordon denkleminin çözümleriyle ilişkili olduğu belirtilmiş, böylece Lorentz uzayında klasik Backlund teorisinin genel bir yorumu sunulmuştur (McNertney, 1980). Palmer'in çalışmasında, bir Backlund dönüşümü 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit negatif eğrilik değerine sahip olan spacelike yüzeyler ile sabit negatif eğrilik değerine sahip olan timelike yüzeyler arasında oluşturulmuştur (Palmer, 1990). Ayrıca Tian, Öklid uzayındaki Gauss eğrilik değeri $K = -1$ olan yüzeyler üzerindeki Backlund dönüşümü, üç boyutlu Minkowski uzayına genelleştirmiştir (Tian, 1997).

Abdel-Baky, klasik Backlund teoremini üç boyutlu Minkowski uzayına genelleyerek hem spacelike hem de timelike yüzeyler için geçerli olan versiyonlarını ortaya koymuştur. Çalışmada, yarı-küresel doğru kongruansları ile ilişkili iki yüzey arasında sabit uzaklık ve normaller arasındaki sabit açı koşullarının sağlanması durumunda, her iki yüzeyin de sabit Gauss eğriliğine sahip olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca Gauss eğriliği değerlerini sırasıyla $-\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$, $-\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ ve $\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$ bulmuştur. Ayrıca, bu dönüşüm yapılarının Sinh-Gordon tipi diferansiyel denklemlerle bağlantılı olduğunu ve Backlund dönüşümü ile ilişkileri ifade edilmiştir. Böylece, Minkowski uzayında Backlund dönüşümünün geometrik yapısı hem teorik düzeyde hem de diferansiyel denklemlerle ilişkili olarak incelenmiştir (Abdel-Baky, 2005). Üç boyutlu Minkowski uzayında, spacelike ve timelike eğriler için Backlund dönüşümü araştırılmıştır (Özdemir & Çöken, 2009). Üç boyutlu Minkowski uzayında timelike yüzeyler ile ilgili olarak yapılan çalışmalarda, bu yüzeylerin Gauss denklemleri, parametrizasyon türleri ve sabit eğrilik koşulları farklı yaklaşımlar ele alınmıştır. İnalçık bu çalışmada, timelike dönele, helikoidal ve genelleştirilmiş silindir yüzeylerin Gauss denklemlerini elde ederek, bu yüzeyler için izotermik koşulları ve sabit ortalama eğrilik değerlerini incelemiştir. Bu çalışma, Backlund dönüşümlerinin uygulanabilir olduğu farklı yüzey türlerinin daha iyi anlaşılmasına katkı sunmaktadır (İnalçık, 2014).

Minkowski uzay-zamanda aynı sabit eğrilik değerine sahip olan iki spacelike eğri arasında Backlund dönüşümü tanımlanmıştır ayrıca bu iki spacelike eğri ile eğrilik değeri arasındaki ilişkinin beş farklı durumu incelenmiştir (Özdemir vd., 2014). Şimşek ve Özdemir bu çalışmada elde edilen sonuçları $2n - 1$ boyutlu Minkowski uzayında n boyutlu altmanifoldlara genelleştirilerek dört farklı durum için Backlund dönüşümünü ispatlamışlardır (Şimşek & Özdemir, 2016). Minkowski uzay-zamanda timelike eğriler arasında Backlund dönüşümü tanımlanmıştır. Bu çalışmada, timelike Backlund eğrilerinin Frenet - Serret çatıları arasındaki ilişkiyi belirleyen dönme matrisleri incelenmiştir. İkisi spacelike hiperdüzlemde küresel dönme ve biri timelike hiperdüzlemde hiperbolik dönme olmak üzere üç farklı durumda, eğrilerin Frenet - Serret çatıları ve eğrilik fonksiyonları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İşaret farkını dikkate alarak timelike Backlund eğrilerin eşit ikinci burulma fonksiyonuna sahip olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca Backlund dönüşümü, sabit bir burulma değerine sahip timelike eğriyi yine sabit burulma değerine sahip olan başka bir timelike eğriye götüren dönüşüm olarak tanımlanmıştır (Erdoğan & Özdemir, 2018).

Üç boyutlu Minkowski uzayında sabit eğrilik ve burulma değerine sahip olan null Cartan eğrileri incelenmiştir. Sabit eğrilik fonksiyonlarına sahip olan belirli bir null Cartan eğrisinin de sabit eğrilik fonksiyonlarına sahip olduğu görülmüştür. Bu durumda sabit eğrilik değerine sahip olan null Cartan eğrilerini yine sabit eğrilik değerine sahip olan eğrilere dönüştüren bir Backlund dönüşümü elde edilmiştir. Ayrıca null Cartan eğrilerinin Backlund dönüşümüne karşılık gelen eğrilerin sadece null Cartan eğrisi değil, timelike eğri veya spacelike eğrisi de olabileceği elde edilmiştir (Erdoğan & Yavuz, 2022).

2.3. Diğer Çalışmalar

Bu kısımda, Backlund dönüşümünün Öklid ve Minkowski uzayları dışındaki geometri ortamlarına nasıl genellendiği ele alınmaktadır. De Sitter ve anti-de Sitter uzaylarında yapılan uygulamalar, afin geometri bağlamındaki dönüşümler ve sabit ortalama eğrilik taşıyan yüzeyler üzerindeki Bianchi–Backlund dönüşümleri örneklenmiştir. Ayrıca Bishop çatısına göre tanımlanan dönüşümler ve minimal yüzeyler üzerindeki etkiler de bu bölümde incelenmiştir. Bu çalışmalar, dönüşümün yalnızca klasik geometriyle sınırlı kalmadığını, daha genel geometrik yapılarda da anlamlı bir şekilde kullanılabildiğini göstermektedir.

Chern ve Terng çalışmasında, üç boyutlu afin uzayında Backlund teoremini ispatlanmıştır (Chern & Terng, 1980). Backlund dönüşümü, üç boyutlu S_1^3 de Sitter uzayı ve H_1^3 anti-de Sitter uzayına genelleştirilmiştir (Zuo vd., 2002). Kobayashi ve Inoguchi, sabit ortalama eğrilik değerine sahip olan yüzeylerde tanımlı Bianchi–Backlund dönüşümünü incelemiş ve bu dönüşümün, bazı integrallenebilir sistem teknikleriyle eşdeğer olduğunu ortaya koymuştur (Kobayashi & Inoguchi, 2005).

Üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre Backlund dönüşümleri incelenmiştir (Karacan & Tunçer, 2012). Daha sonra Backlund teoreminde verilen üç şartın sağlanan spacelike eğrilerinin, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilik değerlerini koruduğu ispatlanmıştır (Karacan & Tunçer, 2015). Minimal yüzeyler (ortalama eğrilik değeri sıfır olan yüzeyler) üzerinde Backlund dönüşümü incelenerek, minimal bir yüzeyden yeni minimal yüzeyin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir (Per, 2015).

2.4. Güncel Literatür ve Yeni Yaklaşımlar

Backlund dönüşümünün matematiksel derinliği ve fiziksel uygulamalara açıklık kazandırması, onu güncel literatürde de önemli bir araştırma konusu haline getirmiştir. Bu bölümde, modern diferansiyel geometri, soliton teorisi, akışkanlar mekaniği ve plazma fiziği gibi disiplinlerde yapılan güncel çalışmalar sunulmuştur. Timelike Weingarten yüzeyleri, Darboux kongruansları, integrability koşulları ve Painlevé analizi gibi modern araçlarla elde edilen yeni yaklaşımlar incelenmiş; bu dönüşümün çağdaş matematik ve fizik literatüründeki yeri ve potansiyeli vurgulanmıştır.

Günümüzde Backlund dönüşümü ile ilgili çalışmalar yapılmaya devam etmektedir. Alluhaibi ve Abdel-Baky, üç boyutlu Minkowski uzayında tanımlı timelike Weingarten yüzeyleri ele alarak, bu yüzeyler arasında tanımlanan Darboux doğrusal kongruansları aracılığıyla Backlund dönüşümünü incelemiştir. Yüzeylerin Tschebyscheff açıları ile Sinh-Gordon denklemi arasında doğrudan bir ilişki kurarak, dönüşüm sonucunda elde edilen yüzeylerin de aynı türden Weingarten yüzeyler olduğu gösterilmiştir. Ayrıca çalışmada, tanımlanan parametrisasyonlar kullanılarak Backlund dönüşümünün çözümleriyle ilişkili tam çözüm yapılabilirlik (complete integrability) özelliği ispatlanmıştır (Alluhaibi & Abdel Baky, 2022).

Zhou ve arkadaşlarının çalışmasında, akışkanlar mekaniği ve plazma fiziği alanlarında $2 + 1$ boyutlu bir doğrusal olmayan evrim sistemi incelenmiştir. İncelenen sistemin belirli matematiksel koşulları sağlayıp sağlamadığına ise Painleve Analizi kullanılarak bakılmıştır ve nonlineer sistemler için oto-Backlund dönüşümü kullanılarak yeni çözümler elde edilmiştir (Zhou vd., 2024). Kelmer ve Tenenblat çalışmasında, üç boyutlu yarı öklidyen uzayında, timelike ve spacelike yüzeylere karşılık gelen altı farklı durum incelemiştir (Kelmer & Tenenblat, 2024).

3. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez kapsamında incelenecek olan eğri ve yüzeylere ilişkin kuramsal alt yapı sunulmaktadır. Öncelikle, üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında tanımlı eğri ve yüzeylerin temel özellikleri ele alınmakta; bu yapılarla ilişkin parametrizasyonlar, eğrilik ve burulma kavramları detaylandırılmaktadır. Ardından, yüzeylerin teğet düzlemleri, normal vektör alanları, şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğrilik gibi diferansiyel geometrinin temel kavramları sistematik biçimde açıklanmaktadır. Minkowski uzayına geçildiğinde ise, Lorentz-metrikli yapının getirdiği farklılıklar dikkate alınarak eğrilerin ve yüzeylerin timelike, spacelike ve null türlerine göre sınıflandırılması yapılmakta ve ilgili hesaplamalara ilişkin teorik altyapı sunulmaktadır. Bu temel bilgiler, ilerleyen bölümlerde ele alınacak olan Backlund dönüşümlerinin daha iyi anlaşılması açısından gerekli zemini oluşturmaktadır.

3.1. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 3.1.1 I ; bir açık aralık olmak üzere, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ dönüşümü I aralığının her noktasında parçalı sürekli ise, α' 'ya \mathbb{E}^3 uzayında bir **eğridir** denir. \mathbb{E}^3 uzayında bir α eğrisini,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

biçiminde yazarız. Bu gösterim, eğrinin parametrik olarak yazılışdır (Özdemir, 2020).

Tanım 3.1.2 Bir $\alpha: I \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin her $t \in I$ noktasındaki hız vektörü olan $\alpha'(t)$ vektörü birim vektör ise, yani $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise, α eğrisine **birim hızlı eğri** denir (Özdemir, 2020).

Örnek 3.1.1 \mathbb{E}^3 uzayında $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3}, t^2, 2t)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin, $\alpha(2)$ noktasındaki hız vektörünü bulalım.

$$\alpha'(t) = (t^2, 2t, 2)$$

olarak bulunur.

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(t^2)^2 + (2t)^2 + 2^2} = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} = \sqrt{(t^2 + 2)^2}$$

elde edilir.

$$\|\alpha'(t)\| = t^2 + 2 \neq 1$$

olup α birim hızlı bir eğri değildir. $\alpha(2)$ noktasındaki hız vektörü:

$$\mathbf{v}(2) = \alpha'(2) = (4,4,2)$$

şeklindedir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.1.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $J \subset \mathbb{E}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$h: J \rightarrow I, h(s) = t$$

difeomorfizmine, α eğrisi için bir **parametre dönüşümü** denir. $(\alpha \circ h)(s)$ eğrisine de $\alpha(t)$ eğrisinin $h(s)$ ile **yeniden parametrelendirilmesi** denir. Böylece, α eğrisinin t parametresi varken, yeniden parametrelendirerek s parametresine geçilmiş olur (Özdemir, 2020).

Örnek 3.1.2 $\alpha : (0,2) \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = (\sqrt{4-t^2}, 4-t^2, 1)$$

eğrisi verilsin. Bu eğriyi farklı şekillerde ifade etmek mümkündür. Burada, iki farklı şekilde parametrelendirilecektir. Eğri denkleminde,

$$\sqrt{4-t^2} = s \Rightarrow t = \sqrt{4-s^2}$$

alınmasının, eğri denklemini basitleştireceği açıktır. O halde,

$$h_1 : J_1 \rightarrow (0,2), h_1(s) = t = \sqrt{4-s^2}$$

fonksiyonu göz önüne alınarak, J_1 aralığı belirlenir. $t \in (0,2)$ iken, $s \in (0,2) = J_1$ olacaktır. h_1 fonksiyonunun $(0,2)$ aralığında hem kendisi hem de tersi diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu açıktır. Buna göre,

$$\beta(s) = (\alpha \circ h_1)(s) = (s, s^2, 1)$$

eğrisi elde edilir. Diğer taraftan, ikinci bir parametrizasyon olarak eğri denkleminde,

$$t = 2 \sin k$$

alınabilir. Bu durumda da eğri denklemini basitleşecektir. Buna uygun olarak tekrar parametrelendirilir. O halde,

$$h_2: J_2 \rightarrow (0,2), h_2(k) = 2 \sin k$$

fonksiyonunu göz önüne alınsın. J_2 aralığı belirlenebilir.

$$t = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$

olacağından, $J_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ açık aralığı olacaktır. h_2 fonksiyonu yine bir diffeomorfizmdir.

Buna göre,

$$\gamma(k) = (\alpha \circ h_2)(k) = (2 \cos k, 4 \cos^2 k, 1)$$

eğrisi elde edilir. Bu örnekte verilen,

$$\alpha: (0, 2) \rightarrow \mathbb{E}^3, \alpha(t) = (\sqrt{4-t^2}, 4-t^2, 1),$$

$$\beta: (0, 2) \rightarrow \mathbb{E}^3, \beta(s) = (s, s^2, 1),$$

$$\gamma: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{E}^3, \gamma(k) = (2 \cos k, 4 \cos^2 k, 1)$$

eğrilerinin hepsi, aynı eğrinin farklı gösterimleridir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.1.1 \mathbb{E}^3 uzayında, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ parametrizasyonu ile verilen α eğrisinin, $\alpha(t_1)$ ile $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$\text{yay}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

ile bulunur (Özdemir, 2020).

İspat: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$ eşitliğinde limite geçilirse,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

olur. Buradan,

$$s(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \|\alpha'(t)\|$$

eşitliğinden, $\alpha(t_1)$ ile $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$yay(\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

elde edilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.1.4 I bir açık aralık olmak üzere, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinde, eğer her $t \in I$ için, $\alpha'(t) \neq 0$ ise, α eğrisi **regüler eğri** olarak adlandırılır (Do Carmo, 2016).

Tanım 3.1.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$, regüler bir eğri olmak üzere, $t_0 \in I$ başlangıç noktası alınarak,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

şeklinde tanımlanan, $s(t) = f(t)$ fonksiyonuna **yay uzunluğu fonksiyonu** denir. s yeni bir parametre olarak alınabilir. s parametresine, **yay uzunluğu parametresi** denir. $\alpha'(t) \neq 0$ olduğundan, s yay uzunluğu fonksiyonu t nin diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Genellikle başlangıç noktası olarak $t_0 = 0$ alınır. Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise, eğriye **birim hızlı eğri** veya **yay parametresine göre verilmiş eğri** denir.

Teorem 3.1.2 Regüler bir eğrinin, yay uzunluğu fonksiyonu kesin artan bir fonksiyondur (Özdemir, 2020).

İspat: Yay uzunluğu fonksiyonu,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

olduğundan,

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \geq 0$$

olacaktır. α regüler olduğundan, $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ olacaktır. $s(t)$ fonksiyonu her $t \in I$ artan bir fonksiyondur (Özdemir, 2020).

Teorem 3.1.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olmayan regüler bir eğri ise, her $s \in J$ için, eğrisi $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ eğrisi birim hızlı olacak şekilde $h: J \rightarrow I$ parametre dönüşümü vardır (Özdemir, 2020).

İspat: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için yay uzunluğu parametresini $t, t_0 \in I$ için,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

ile tanımlanan $s(t)$ fonksiyonu artan ve sürekli olduğundan bire bir olacaktır. $s(I) = J$ denir. O halde bu fonksiyon bire bir, örten ve regüler bir fonksiyondur ve tersi vardır. Bu fonksiyonun tersi olan $s^{-1} = t(s)$ fonksiyonunun, istenilen h fonksiyonudur. Yani, h fonksiyonunu kullanarak elde edilen $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ fonksiyonu birim hızlı eğridir. Öyle ki,

$$\|\beta'(s)\| = \|(\alpha \circ h)'(s)\| = |h'(s)| \|\alpha'(h(s))\|$$

eşitliğinde, ters fonksiyonun türevinin

$$(h^{-1})'(y_0) = \frac{1}{h'(x_0)}$$

olduğu kullanılırsa,

$$h'(s) = \frac{1}{s'(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}$$

elde edilir.

$$\|\beta'(s)\| = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} \cdot \|\alpha'(h(s))\| = 1$$

olduğu görülür (Özdemir, 2020).

Sonuç 3.1.1 Her eğri birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir (Özdemir, 2020).

Örnek 3.1.3 $\alpha: (0,5) \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\alpha(t) = (2\sin 3t, -2\cos 3t, 6t)$ eğrisi, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilecektir. Önce yay uzunluğu fonksiyonu incelenecektir.

$$\alpha'(t) = (6 \cos 3t, 6 \sin 3t, 6)$$

olduğundan,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(6 \cos 3u)^2 + (6 \sin 3u)^2 + 6^2} du = 6\sqrt{2} \int_0^t du$$

integralinden, $s(t) = 6\sqrt{2}t$ elde edilir. h parametre değişim fonksiyonu, $s(t)$ fonksiyonunun tersidir. Buna göre, $t = h(s) = \frac{s}{6\sqrt{2}}$ olur. O halde,

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \left(2 \sin \left(3 \frac{s}{6\sqrt{2}} \right), -2 \cos \left(3 \frac{s}{6\sqrt{2}} \right), 6 \frac{s}{6\sqrt{2}} \right)$$

ifade daha sade bir şekilde yazıldığında,

$$\beta(s) = \left(2 \sin \frac{\sqrt{2}s}{4}, -2 \cos \frac{\sqrt{2}s}{4}, \frac{\sqrt{2}s}{2} \right)$$

eğri, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilmiş olur (Özdemir, 2020).

Tanım 3.1.6 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\alpha' = \mathbf{T}$$

olarak tanımlanan \mathbf{T} vektörüne eğrinin **birim teğet vektör alanı** denir. $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ eşitliğinin türevinden

$$\langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle = 0$$

elde edilir. Yani birim hızlı bir eğride \mathbf{T}' vektörü, eğri boyunca teğete dik bir vektördür. Bu vektör birim olmayabilir. Bunun için, normunu alarak birim hale getirilir ve bu vektöre de **eğrinin normali** denir. Bu vektör \mathbf{N} ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

olacaktır. Artık eğri boyunca birbirine dik olan iki birim vektör elde edilir. Bu iki vektöre dik olan üçüncü vektörü de vektörel çarpımla elde edilir. Bu durumda eğri üzerinde birbirine dik üç birim vektör elde edilmiş olur. Vektörel çarpımla elde edilen üçüncü vektöre ise **eğrinin binormali** denir ve \mathbf{B} ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

olacaktır. Sonuç olarak $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya **Frenet çatısı** denir. Literatürde **Frenet - Serret çatısı** olarak da bilinir. Kısaca, α eğrisi birim hızlı ise

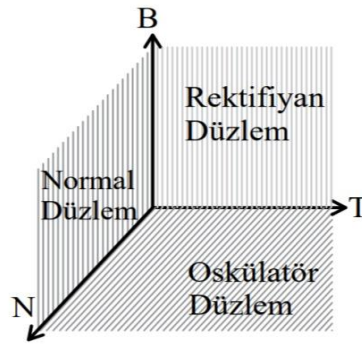
$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \quad (\text{Eğrinin teğeti}),$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \quad (\text{Eğrinin normali}),$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \quad (\text{Eğrinin binormalı})$$

biçiminde ifade edilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.1.7 Frenet - Serret vektörlerinin herhangi ikisinin geldiği düzlemlere farklı isimler verilir. \mathbf{T} ve \mathbf{N} 'nin geldiği düzleme **Oskülatör düzlem**, \mathbf{N} ve \mathbf{B} 'nin geldiği düzleme **Normal düzlem**, \mathbf{T} ve \mathbf{B} 'nin geldiği düzleme **Rektifiyan düzlem** denir (Özdemir, 2020).



Şekil 3.1. Normal düzlem, Öskülatör düzlem ve Rektifiyan düzlem gösterimi.

Tanım 3.1.8 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet - Serret vektör alanları $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ olmak üzere,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. Ayrıca,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} \Rightarrow \mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\| \mathbf{N}$$

olduğundan,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

şeklinde de tanımlanır. Buna göre, \mathbb{E}^3 uzayında bir eğrinin eğrilik fonksiyonu negatif olamaz. Diğer yandan,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona da α eğrisinin burulma fonksiyonu denir (Özdemir, 2020).

Örnek 3.1.4 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} s \right)$$

eğrisi verilsin. Hız vektörü

$$\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

olmak üzere, eğrinin birim hızlı olup olmadığına bakılır.

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^2 s + \sin^2 s) + \frac{1}{2}} = 1$$

olup birim hızlı bulunur. Teğet vektör alanı:

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

olur. Buradan

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0 \right)$$

olduğundan,

$$\|\alpha''(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sin^2 s + \cos^2 s)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğundan, normal vektör alanı da

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\sin s, -\cos s, 0)$$

elde edilir. Binormal vektör alanı da $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$ eşitliğinden,

$$\mathbf{B}(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sin s & -\cos s & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak bulunur. Eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan

$$\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$$

olduğundan,

$$\mathbf{N}'(s) = (-\cos s, \sin s, 0)$$

eşitliği yardımıyla burulma fonksiyonu

$$\tau(s) = \langle (-\cos s, \sin s, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

elde edilir. $A = (x, y, z)$ istenen düzlemin üzerinde keyfi bir nokta nokta olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{\alpha(s)A} = (x, y, z) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, y - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, z - \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)$$

olarak bulunur. Oskülatör düzlemin denklemi $\langle \overrightarrow{\alpha(s)A}, \mathbf{B}(s) \rangle = 0$ eşitliği ile bulunur. O halde oskülatör düzlemin denklemi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x \cos s - \frac{\sqrt{2}}{2}y \sin s - \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{s}{2} = 0$$

olarak bulunur. Normal düzlemin denklemi ise $\langle \overrightarrow{\alpha(s)A}, \mathbf{T}(s) \rangle = 0$ eşitliği yardımıyla

$$x \cos s - y \sin s + z - \frac{s}{\sqrt{2}} = 0$$

şeklinde elde edilir. Son olarak rektifiyan düzlemin denklemi için, $\langle \overrightarrow{\alpha(s)A}, \mathbf{N}(s) \rangle = 0$ eşitliği kullanılır ve

$$x \sin s + y \cos s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

rektifiyan düzlemin denklemidir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.1.4 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, α birim hızlı eğrisinin Frenet - Serret çatası, κ eğrilik fonksiyonu ve τ burulma fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N},$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklere **Frenet - Serret formülleri** denir. Bu eşitlik, matrislerle

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir (Özdemir, 2020).

İspat: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}$ olarak ifade edilmişti. Eğrilik fonksiyonunun tanımına göre,

$$\|\mathbf{T}'\| = \|\alpha''\| = \kappa$$

olduğundan, bu eşitliği

$$\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$$

şeklinde yazabiliriz. \mathbf{N}' vektörü $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ vektörleri cinsinden yazılabilir. Burada

$$\mathbf{N}' = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$$

olduğunu kabul edilirse $b = 0$ olacağı görülür.

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$$

eşitliğinin, her iki tarafının türevi alınır, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}' \rangle = 0$ olur. Bu \mathbf{N}' vektörünün \mathbf{N} 'ye dik olması demektir. Yani, \mathbf{N}' vektörünün \mathbf{N} bileşeni yoktur ve $b = 0$ 'dır. O halde,

$$\mathbf{N}' = a\mathbf{T} + c\mathbf{B}$$

formunda olacaktır. Bu vektörün \mathbf{T} vektörüyle iç çarpımı alınır. Buradan, $\mathbf{T} \perp \mathbf{B}$ ve $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ olduğundan,

$$\langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle = a$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}' \rangle$$

olacağından, $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$ olduğu kullanılırsa,

$$a = \langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle = -\kappa$$

elde edilir. c 'yi bulmak için de benzer düşünceyle $\mathbf{N}' = a\mathbf{T} + c\mathbf{B}$ vektörünün, \mathbf{B} ile iç çarpımı alınır. Burulma fonksiyonunun tanımı göz önüne alınır,

$$c = \langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle = \tau$$

bulunur. Böylece,

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

elde edilir. Son olarak da \mathbf{B}' ifadesi için,

$$\mathbf{B}' = x\mathbf{T} + y\mathbf{N} + z\mathbf{B}$$

olsun. $\langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle = 0$ olduğundan, $z = 0$ 'dır. $\mathbf{B}' = x\mathbf{T} + y\mathbf{N}$ formundadır. Bu vektörün \mathbf{T} ile iç çarpımı alınırsa, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle = 0$ olduğundan,

$$x = \langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \mathbf{T}' \rangle = -\langle \mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} \rangle = 0$$

elde edilir. O halde, $\mathbf{B}' = y\mathbf{N}$ biçiminde olacaktır. Bu vektörün de \mathbf{N} ile iç çarpımı alınırsa, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0$ olduğundan,

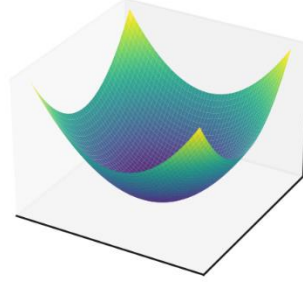
$$y = \langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \mathbf{N}' \rangle = -\langle \mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \rangle = -\tau$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$ olur.

3.2. Öklid Uzayında Yüzeyler

Tanım 3.2.1 $U \subset \mathbb{E}^2$ bir bağlantılı açık kümesi için, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ biçiminde tanımlanan φ dönüşümü, diferansiyellenebilir ve homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine **yama**, **lokal yüzey** veya **basit yüzey** denir. φ dönüşümüne de **parametrizasyon** denir. Eğer, φ dönüşümü üçüncü bir şart olan regüler dönüşüm şartını da sağlarsa $\varphi(U)$ 'ya regüler lokal yüzey (regüler yama) ve φ dönüşümüne de regüler parametrizasyon, $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ dönüşümüne de $\varphi(U)$ basit yüzeyi için bir **yerel koordinat sistemi** denir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.2 \mathbb{M}, \mathbb{E}^3 uzayının bir alt kümesi olsun. \mathbb{M} 'nin her bir p noktası için, $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset \mathbb{M}$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ regüler yüzeyi (yaması) bulunabilirse, \mathbb{M} kümesine **regüler yüzey** denir. Yani bir yüzeyin regüler yüzey olabilmesi için, her noktasını içine alan regüler bir lokal yüzeyin bulunması gerekir. Demek o ki, yüzeyin her noktası yamalarla örtülebilmelidir. Başka bir deyişle her $p \in \mathbb{M}$ için, $U \subset \mathbb{E}^2$ açık kümesini $V \cap \mathbb{M} \subset \mathbb{E}^3$ kümesine götüren ve aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir $\varphi: U \rightarrow V \cap \mathbb{M}$ dönüşümü ve \mathbb{E}^3 'ün bir V açık komşuluğu varsa $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}^3$ altkümesine bir **regüler yüzey** denir. \mathbb{M} yüzeyi, $u, v \in U$ için $\varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ parametrizasyonu ile verilsin.



Şekil 3.2. $z = x^2 + y^2$ kartezyen denklemi ile verilen regüler yüzey

- i. **φ diferansiyellenebilir.** (Yani, $f_i(u, v)$ fonksiyonları her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli)
- ii. **φ homeomorfizm.** φ sürekli olduğundan, $\varphi^{-1} : V \cap \mathbb{M} \rightarrow U$ dönüşümü de sürekli dir. (Burada, φ 'nin tersinin olması için her şeyden önce φ , bire bir olmalıdır. Bu bire birlik yüzeyin kendisini kesmesini engel olur.)
- iii. **Regülerlik koşulu.** Yani her $q \in U$ için, $d\varphi_q = \varphi_{*q} : T_q(\mathbb{E}^2) \rightarrow T_{\varphi(q)}(\mathbb{E}^3)$ türev dönüşümü bire birdir. (Bu koşul yüzeyin her noktasında bir tanjant dönüşümü olmasını garanti eder.)

Ayrıca, φ dönüşümüne **regüler yüzeyin bir parametrizasyonu** veya yüzeyin p noktası komşuluğundaki bir **yerel koordinat sistemi** denir. p 'nin $V \cap \mathbb{M}$ komşuluğuna da \mathbb{M} 'nin **koordinat komşuluğu** denir ve burada; f_1, f_2, f_3 her biri $U \rightarrow \mathbb{E}$ olacak şekilde dönüşüm vardır (Özdemir, 2020).

3.2.1. Yüzeyin Teğet Düzlemi

Tanım 3.2.1.1 \mathbb{M} yüzeyi, $u, v \in U$ için $\varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu durumda, $q = (u_0, v_0)$ için,

$$\alpha(u) = \varphi(u, v_0)$$

ve

$$\beta(v) = \varphi(u_0, v)$$

eğrileri yüzey üzerinde birer eğri belirtir. Bu eğrilere sırasıyla, $\varphi(q) = p$ noktasındaki yüzeyin u ve v **parametre eğrileri** denir. Buna göre

$$\alpha(u) = \varphi(u, v_0) = (f_1(u, v_0), f_2(u, v_0), f_3(u, v_0))$$

$$\beta(u) = \varphi(u_0, v) = (f_1(u_0, v), f_2(u_0, v), f_3(u_0, v))$$

şeklinde ifade edilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.1.2 $\alpha(u_0) = \varphi(q) = p$ ve $\beta(v_0) = \varphi(q) = p$ olduğundan,

$$\alpha'(u) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right) \Rightarrow \alpha(u_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_q, \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_q, \frac{\partial f_3}{\partial u} \Big|_q \right) = \varphi_u(q)$$

$$\beta'(v) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) \Rightarrow \beta(v_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \Big|_q, \frac{\partial f_2}{\partial v} \Big|_q, \frac{\partial f_3}{\partial v} \Big|_q \right) = \varphi_v(q)$$

elde edilir. Kısaca $\varphi_u(q)$ ve $\varphi_v(q)$ vektörleri, yüzeyin p noktasından geçen u ve v parametre eğrilerinin hız vektörleri olarak tanımlanır. Bu vektörlerin her ikisi de yüzeye teğet iki vektördür (Özdemir, 2020).

Teorem 3.2.1.1 $\varphi(U)$, \mathbb{M} yüzeyi içinde bir regüler yama ve $T_q(\mathbb{E}^2)$ uzayının standart tabanı

$\varepsilon_q(\mathbb{E}^2) = \left\{ \mathbf{E}_{1q} = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_q, \mathbf{E}_{2q} = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_q \right\}$ olsun. Buna göre, her $q \in U$ için, $\varphi_{*q} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \varphi_u(q)$ ve $\varphi_{*q} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \varphi_v(q)$ yazılabilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.1.3 \mathbb{M} bir regüler yüzey olmak üzere, $p \in \mathbb{M}$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{E}^3)$ olsun. v_p vektörü, \mathbb{M} üzerinde bulunan en az bir eğrinin hız vektörü ise, v_p vektörüne \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki bir **tanjant vektörü** denir. $v_p \in T_p(\mathbb{M})$ ile gösterilir. $T_p(\mathbb{M})$ ile yüzeyin p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesini gösteririr. φ parametrizasyonu ile verilen bir \mathbb{M} yüzeyi için, $\varphi_u(q)$ ve $\varphi_v(q)$ vektörleri yüzeyin $\varphi(q) = p$ noktasındaki iki tanjant vektördür. Yüzeyin herhangi bir noktasındaki normali, yani yüzeye dik olan vektör \mathbb{E}^3 uzayının bir tanjant vektördür, fakat yüzeyin tanjant vektörü değildir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.1.4 $\varphi(U) = \mathbb{M}$ regüler bir yüzey olsun. Bu durumda $\varphi_u(q)$ ve $\varphi_v(q)$ vektörleri, yüzeye $\varphi(q) = p$ noktasında teğet olan bir düzlemi gererler. Bu düzleme, yüzeyin p noktasındaki **teğet düzlemi** veya **tanjant uzayı** denir. Bu düzlem $T_p(\mathbb{M})$ uzayıdır. Buna göre, $\text{Ger}\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\} = T_p(\mathbb{M})$ yazılabilir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.2.1.2 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ parametrizasyonu ile $\varphi(U) = \mathbb{M}$ regüler yüzeyi verilsin. $\varphi(q) = p$ olmak üzere, \mathbb{E}^3 uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü $v_p \in T_p(\mathbb{E}^3)$ olsun. v_p vektörünün yüzeye teğet olması için gerek ve yeter şart v_p vektörünün $\varphi_u(q)$ ve $\varphi_v(q)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilesidir. Kısaca

$$v_p \in T_p(\mathbb{M}) \Leftrightarrow v_p \in \mathbf{Ger}\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$$

olarak ifade edilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.1.5 \mathbb{E}^3 uzayında verilen bir \mathbf{Y}_n vektör alanı, her p için, \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemine dik ise, yani her $p \in \mathbb{M}$ için, $\mathbf{Y}_n(p) \in T_p(\mathbb{M})$ ise, \mathbf{Y}_n vektör alanına yüzeyin **normal vektör alanı** denir. Yüzeye dik tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^\perp(\mathbb{M})$ ile gösterilir. \mathbf{Y}_n normal vektör alanını, normunu alırsak **birim vektör alanı** olur ve

$$N = \frac{\mathbf{Y}_n}{\|\mathbf{Y}_n\|}$$

ile gösterilir. $N \in \mathcal{X}_\mathbb{M}(\mathbb{E}^3)$ veya özel olarak $N \in \mathcal{X}^\perp(\mathbb{M})$ biçiminde gösterilir. Yüzeyin tanjant düzlemini bulurken, sadece \mathbf{Y}_n normal vektör alanının bulunması yeterlidir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.2.1.3 $\mathbb{M} = \varphi(U)$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. \mathbb{M} yüzeyinin, $p = \varphi(q)$ noktasındaki birim normal vektörü,

$$N_p = \frac{(\varphi_u \times \varphi_v)(q)}{\|(\varphi_u \times \varphi_v)(q)\|}$$

eşitliğiyle belirlenir (Özdemir, 2020).

3.2.2. Şekil Operatörü

Teorem 3.2.2.1 \mathbb{M} bir yüzey, $p \in \mathbb{M}$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{M})$ olsun. \mathbb{M} yüzeyi içinde, $c \in I$ için, $\alpha(c) = p$ ve $\alpha'(c) = v_p$ olacak biçimde bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{M}$ eğrisi verilsin. $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{E}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise,

$$v_p[f] = (f \circ \alpha)'(c)$$

eşitliği sağlanır (Özdemir, 2020).

İspat: α eğrisini elde edebilmek için, \mathbb{M} yüzeyinde, $\varphi(q) = p$ noktasını içeren $\varphi(U)$ yüzeyi $\varphi^{-1} \circ \alpha, U$ açık kümesinde bir eğri belirtir. Bu eğriyi γ ile gösterecek olursak, $\gamma = \varphi^{-1} \circ \alpha$ ise $\alpha = \varphi \circ \gamma$ olur ve $\alpha(c) = p$ olması için, $\gamma(c) = q$ olmalıdır. Böylece türevin dönüşüm özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} v_p &= \alpha'(c) = \alpha_* \left(\frac{d}{dt} \right) (t = c) = (\varphi \circ \gamma)_* \left(\frac{d}{dt} \right) (t = c) \\ &= \varphi_{*\gamma(c)} \left(\varphi_* \left(\frac{d}{dt} \right) (t = c) \right) = \varphi_{*q}(\gamma'(c)) \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\varphi_{*q}(h_q)[f] = h_q[f \circ \varphi]$ eşitliği de göz önüne alınırsa,

$$v_p[f] = \varphi_{*q}(\gamma'(c))[f] = \gamma'(c)[f \circ \varphi]$$

olacaktır. Sonuç olarak,

$$\gamma'(c)[f \circ \varphi] = (f \circ \varphi \circ \gamma)'(c) = (f \circ (\varphi \circ \gamma))'(c) = (f \circ \alpha)'(c)$$

elde edilir (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.2.1 \mathbb{M}, \mathbb{E}^3 uzayında regüler bir yüzey; \mathbf{W} ise \mathbb{M} yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olsun. $\{y_1, y_2, y_3\}, \mathbb{E}^3$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial}{\partial y_i} \in \mathcal{X}_{\mathbb{M}}(\mathbb{E}^3)$$

yazılabilir. Buna göre $p \in \mathbb{M}$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{M})$ için,

$$D_{v_p} \mathbf{W} = \sum_{i=1}^3 v_p[w_i] \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p = (v_p[w_1], v_p[w_2], v_p[w_3])_p$$

ile tanımlanan $D_{v_p} \mathbf{W}$ vektörüne, \mathbf{W} vektör alanının v_p **tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi** denir. $D_{v_p} \mathbf{W}$ vektörü yüzeye teğet olmak zorunda değildir. Yani, $D_{v_p} \mathbf{W} \in T_p(\mathbb{M})$ yazılması doğru değildir. $D_{v_p} \mathbf{W} \in T_p(\mathbb{E}^3)$ olacaktır. D diferansiyel operatörü $D : T_p(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}_{\mathbb{M}}(\mathbb{E}^3) \rightarrow T_p(\mathbb{E}^3)$ biçiminde tanımlanır (Özdemir, 2020).

Teorem 3.2.2.2 \mathbb{M}, \mathbb{E}^3 uzayında bir yüzey, $p \in \mathbb{M}$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{M})$ olmak üzere, \mathbb{M} yüzeyi üzerinde $\alpha(c) = p$ ve $\alpha'(c) = v_p$ olacak şekilde her $\alpha: I \rightarrow \mathbb{M}$ eğrisi için,

$$D_{v_p} \mathbf{W} = (\mathbf{W} \circ \alpha)'(c)$$

eşitliği sağlanır (Özdemir, 2020).

İspat: Teorem 3.2.4'te $v_p[w_i] = (w_i \circ \alpha)'(c)$ olduğunu gösterilmişti. Buna göre

$$\begin{aligned} D_{v_p} \mathbf{W} &= \sum_{i=1}^3 v_p[w_i] \frac{\partial}{\partial y_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^3 (w_i \circ \alpha)'(c) \frac{\partial}{\partial y_i}(\alpha(c)) \\ &= (\mathbf{W} \circ \alpha)'(c) \end{aligned}$$

olur (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.2.2 \mathbb{M}, \mathbb{E}^3 uzayında regüler bir yüzey; \mathbf{W} ise \mathbb{M} yüzeyi üzerinde bir vektör alanı olsun. $y_1, y_2, y_3, \mathbb{E}^3$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial}{\partial y_i} \in \mathcal{X}_{\mathbb{M}}(\mathbb{E}^3)$$

vektör alanının, bir $\mathbf{V} \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ **tanjant vektör alanı** boyunca kovaryant türevi,

$$D_{\mathbf{V}} \mathbf{W} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}(w_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big| = (\mathbf{V}[w_1], \mathbf{V}[w_2], \mathbf{V}[w_3])$$

biçiminde tanımlanır. $D_{\mathbf{V}} \mathbf{W}$ vektör alanı teğet vektör alanı olmayabilir. Yani, $\mathbf{V} \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ yüzeyinin tanjant vektör alanı ise, $D_{\mathbf{V}} \mathbf{W} \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ olmak zorunda değildir. Buna göre, D diferansiyel operatörü

$$D : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}_{\mathbb{M}}(\mathbb{E}^3) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{E}^3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, tanımlanan $D_{\mathbf{V}} \mathbf{W}$ vektörüne \mathbf{W} vektör alanının \mathbf{V} tanjant vektör alanı yönündeki **kovaryant türevi** denir. Bu türevler \mathbb{E}^3 uzayında alınan türevlerdir. Kısaca, burada tanımlanan D operatörü ile gösterilen kovaryant türev, \mathbb{E}^3 uzayının bir konneksiyonudur (Özdemir, 2020).

Tanım 3.2.2.3 M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere,

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M),$$

$$w_p \rightarrow S_p(w_p) = -D_{w_p}N$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, yüzeyin p noktasındaki **şekil operatörü** denir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.2.2.3 Şekil operatörü lineer bir dönüşümdür (Özdemir, 2020).

İspat: $a, b \in \mathbb{E}$ ve $u_p, v_p \in T_p(M)$ olmak üzere,

$$S_p(au_p + bv_p) = aS_p(u_p) + bS_p(v_p)$$

olduğundan kovaryant türevin özelliklerinden,

$$S_p(au_p + bv_p) = -D_{au_p + bv_p}N = -aD_{u_p}N - bD_{v_p}N = aS_p(u_p) + bS_p(v_p)$$

olduğu görülür (Özdemir, 2020).

3.2.3. Gauss ve Ortalama Eğrilik

Tanım 3.2.3.1 M bir yüzey ve S yüzeyin şekil operatörü matrisi olsun. S matrisinin determinantına, M yüzeyinin **Gauss eğriliği fonksiyonu** denir ve K ile gösterilir. $K = \det S$ tanımına göre, yüzeyin tanjant uzayının $\mathcal{B} = \{\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\}$ tabanına göre verilmiş şekil operatörü matrisi

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

ise $K = ad - bc$ olacaktır. Özel olarak, şekil operatörü matrisi asal eğrilikler cinsinden biliniyorsa, yani şekil operatörü yüzeyin asli vektörlerinden oluşan ε tabanına göre verilmişse,

$$[S]_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Burada $K = k_1k_2$ olacaktır (Özdemir, 2020)

Tanım 3.2.3.2 M bir yüzey ve S şekil operatörü matrisi olsun. S matrisinin izinin yarısına, M yüzeyinin **ortalama eğrilik fonksiyonu** denir ve H ile gösterilir. $H = \frac{izS}{2}$ tanımına göre,

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{a+d}{2}$$

$$[S]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{k_1+k_2}{2}$$

olur. Buna göre, yüzeyin bir p noktasındaki ortalama eğriliği

$$H(p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$$

ile bulunur (Özdemir, 2020).

3.3. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayının temel geometrik kavramları ele alınmaktadır. Minkowski uzayı, özellikle relativistik fizik ve Lorentz geometrisi bağlamında önem taşıyan bir yapıdır ve diferansiyel geometri açısından da özgün özellikler barındırmaktadır. Bu kapsamda öncelikle Lorentz iç çarpımı, vektörlerin timelike, spacelike ve lightlike olarak sınıflandırılması ve norm tanımları gibi temel tanımlar verilmektedir. Ardından, Minkowski uzayında eğrilerin ve yüzeylerin parametrik temsilleri ile bu yapıların geometrik nitelikleri açıklanmaktadır. Bu bilgiler, tezde ele alınan Backlund dönüşümlerinin Minkowski uzayındaki uygulanabilirliğini kavramak açısından teorik bir zemin oluşturmaktadır.

Tanım 3.3.1 $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{E}^3$ ve $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

şeklinde tanımlı $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ işleme **Lorentz çarpımı** ve bu metrikle donatılmış \mathbb{E}^3 uzayına ise, **Lorentz uzayı** veya **Minkowski uzayı** adı verilir ve \mathbb{E}_1^3 şeklinde gösterilir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.2 $v \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

i) Eğer $\langle v, v \rangle_L > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörü, **spacelike vektör**,

ii) Eğer $\langle v, v \rangle_L < 0$ ise v vektörü, **timelike vektör**,

iii) Eğer $\langle v, v \rangle_L = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörü, **lightlike vektör** adı verilir.

Ayrıca, $v \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere v vektörünün normu,

$$\|v\|_L = \sqrt{|\langle v, v \rangle_L|}$$

şeklinde tanımlanır. $\|v\|_L = 1$ ise v vektörüne **birim vektör** denir. $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ için

$$\langle u, v \rangle_L = 0$$

olması durumunda ise u ve v vektörleri **diktir** denir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.3 $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ vektörleri için **Lorentz vektörel çarpımı**

$$u \times_L v = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-u_2v_3 + u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

şeklinde tanımlanır (Lopez, 2014).

Tanım 3.3. 4 Lorentz uzayında

$$C_T = \{v \in \mathbb{E}_1^3 \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle_L < 0\}$$

şeklinde tanımlı kümeye **zaman konisi (timecone)** adı verilir. Burada $\langle v, v \rangle_L < 0$ koşulu, vektörün timelike olduğunu gösterir. $v = (v_1, v_2, v_3)$ timelike vektörü için;

Eğer $v_1 > 0$ ise **gelecek yönlendirilmiş** (future-pointing) **zaman konisi**,

Eğer $v_1 < 0$ ise **geçmiş yönlendirilmiş** (past-pointing) **zaman konisi**

olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Teorem 3.3.1 $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere, u, v iki timelike vektör olsun. O halde

$$|\langle u, v \rangle_L| \geq -\|u\|_L \|v\|_L$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıyla sağlanır. Eğer u ve v her ikisi birden gelecek yönlendirilmiş veya geçmiş yönlendirilmiş ise,

$$\langle u, v \rangle_L = \|u\|_L \|v\|_L \cosh \gamma$$

olacak şekilde tek bir $\gamma \geq 0$ sayısı vardır. Buradaki γ değeri, u ve v timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı olarak tanımlanır (Lopez, 2014).

İspat: Minkowski uzayında timelike vektörlerin kendileri ile Lorentz çarpımı negatiftir:

$$\langle u, u \rangle_L < 0, \quad \langle v, v \rangle_L < 0$$

buradan normlar,

$$\|u\|_L = \sqrt{-\langle u, u \rangle_L}, \quad \|v\|_L = \sqrt{-\langle v, v \rangle_L}$$

olarak ifade edilir. u ve v timelike vektörleri lineer bağımsız olsun. Dolayısıyla,

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle_L = \langle u, u \rangle_L + 2\lambda \langle u, v \rangle_L + \lambda^2 \langle v, v \rangle_L = 0$$

denkleminin çözümü olan en az iki λ değeri bulunur. Bu durumda, denklemin diskriminant değeri pozitif olacaktır ve

$$(\langle u, v \rangle_L)^2 > \langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer u ve v timelike vektörleri orantılı, yani lineer bağımlı olursa da eşitliğin sağlandığı görülür. O halde u ve v lineer bağımsız timelike vektörleri için

$$\frac{(\langle u, v \rangle_L)^2}{(\|u\|_L \|v\|_L)^2} > 1$$

elde edilir. Ayrıca u ve v vektörlerinin her ikisi de gelecek veya geçmiş yönlendirilmiş ise $\langle u, v \rangle_L < 0$ olacağından

$$-\frac{\langle u, v \rangle_L}{\|u\|_L \|v\|_L} \geq 1$$

elde edilir. $\cosh: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu birebir olduğundan,

$$\cosh \gamma = -\frac{\langle u, v \rangle_L}{\|u\|_L \|v\|_L}$$

şeklinde bir $\gamma \in [0, \infty)$ vardır (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.5 $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ iki spacelike vektör olmak üzere, eğer bu vektörler tarafından oluşturulan altuzay (yani $\mathbf{Ger} \{u, v\}$) bir timelike altuzay ise,

$$|\langle u, v \rangle_L| \geq \|u\|_L \|v\|_L$$

ve bu eşitlik,

$$\langle u, v \rangle_L = \|u\|_L \|v\|_L \cosh \gamma$$

olarak ifade edilir. Burada $\gamma \geq 0$ olacak şekilde tek bir değer vardır. Bu değere spacelike vektörler arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.6 $u \in \mathbb{E}_1^3$ bir spacelike vektör ve $v \in \mathbb{E}_1^3$ bir timelike vektör olsun. Bu durumda $\langle u, v \rangle_L = \|u\|_L \|v\|_L \sinh \gamma$

olacak şekilde tek bir negatif olmayan $\gamma \in \mathbb{R}$ vardır. Bu değere spacelike ve timelike vektörler arasındaki **Lorentzian timelike açı** adı verilir (Lopez, 2014).

3.3.1. Minkowski Uzayında Eğriler

Tanım 3.3.1.1 $I \subset \mathbb{E}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olarak ifade edilen diferansiyellenebilir dönüşüme bir **düzgün eğri** denir. Aynı zamanda parametrik eğri de denilebilir. Her $s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise, α eğrisine ayrıca **regüler eğri** adı verilir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.1.2 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir regüler eğri olmak üzere,

i) Eğer $\alpha'(s)$ spacelike vektör ise α eğrisi bir **spacelike eğri** denir.

ii) Eğer $\alpha'(s)$ timelike vektör ise α eğrisi bir **timelike eğri** denir.

iii) Eğer $\alpha'(s)$ lightlike vektör ise α eğrisi bir **lightlike eğri** denir (Lopez, 2014).

Örnek 3.3.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\cosh s, \frac{s^2}{2}, \sinh s \right)$$

eğrisi verilsin. Bu eğrinin hız vektörü

$$\alpha'(s) = (\sinh s, s, \cosh s)$$

olduğundan α bir regüler eğridir. Lorentz çarpımı ile

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = s^2 - 1$$

elde edilir. Bu durumda α eğrisi $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ aralığında spacelike eğridir, $(-1, 1)$ aralığında ise bir timelike eğridir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.1.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ yay uzunluğu parametresiyle ifade edilen regüler bir eğri olsun.

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$$

vektörüne s noktasındaki **birim teğet vektör alanı** denir. $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L \neq 0$ olduğundan,

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_L = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda $\mathbf{T}(s)$ vektörü $\mathbf{T}'(s)$ vektörüne diktir (Lopez, 2014).

3.3.1.1. Eğrinin Timelike Olması Durumu

Tanım 3.3.1.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere her $s \in I$ için

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$$

eşitliği sağlanıyorsa, α eğrisi bir **birim hızlı timelike eğri** olarak adlandırılır (Walrave, 1995). $\mathbf{T}(s) \perp \mathbf{T}'(s)$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda, $\mathbf{T}'(s) = \alpha''(s)$ spacelike bir vektör olur. $\kappa(s) \geq 0$ olup, α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** ise

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|_L$$

olarak tanımlanır. Eğrinin **normal vektörü** olan $\mathbf{N}(s)$,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

şeklinde ifade edilir ve spacelike vektördür. Böylece,

$$\kappa(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L$$

eşitliği sağlanır. Eğrinin **binormal vektörü** olan $\mathbf{B}(s)$ vektörü ise,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times_L \mathbf{N}(s)$$

şeklinde tanımlı spacelike vektördür. Son olarak α eğrisinin **burulma fonksiyonu** ise

$$\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L$$

olarak tanımlanır. Birim hızlı timelike bir eğri için Frenet - Serret denklemleri:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Lopez, 2014).

3.3.1.2. Eğrinin Spacelike Olması Durumu

Tanım 3.3.1.2.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere her $s \in I$ için

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa, α eğrisi bir **birim hızlı spacelike eğri** olarak adlandırılır (Walrave, 1995). $\mathbf{T}(s) \perp \mathbf{T}'(s)$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda, $\mathbf{T}'(s) = \alpha''(s)$ vektörü spacelike veya timelike olabilir.

1.Durum: $\mathbf{T}'(s)$ vektörü spacelike olsun. Bu durumda **eğrilik fonksiyonu**

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|_L$$

olarak tanımlıdır. **Normal vektör alanı** ise,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

olup, spacelike vektördür. **Binormal vektör alanı** ise,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times_L \mathbf{N}(s)$$

şeklinde tanımlanır ve bu durumda $\mathbf{B}(s)$ timelike vektördür. Bu durumda Frenet - Serret denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Buradan α eğrisinin **burulma fonksiyonu**,

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L$$

şeklinde ifade edilir.

2.Durum: $\mathbf{T}'(s)$ vektörü timelike olsun. Bu durumda **eğrilik fonksiyonu**

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|_L$$

olarak tanımlanır. **Normal vektör alanı**

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

şeklinde verilir ve timelike olur. **Binormal vektör alanı** ise,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times_L \mathbf{N}(s)$$

olarak tanımlanır. Normal vektörün timelike olması durumunda spacelike bir vektördür. Bu durumda burulma değeri,

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L$$

şeklinde tanımlanır. Frenet - Serret denklemleri ise,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

olarak yazılır (Lopez, 2014).

3.3.2. Minkowski Uzayında Yüzeyler

Tanım 3.3.2.1 $U \subset \mathbb{E}^2$ bir bağlantılı açık kümesi olmak üzere

$$\varphi: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{E}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

regüler parametrizasyonla elde edilen \mathbb{M} yüzeyine \mathbb{E}_1^3 üç boyutlu Minkowski uzayında bir **yüzey**, $\varphi(u, v)$ 'ye ise \mathbb{M} **yüzeyinin parametrelendirmesi** denir. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, f_i birer diferansiyellenebilir fonksiyondur. Bu yüzeyin **birim normal vektör alanı**,

$$N = \frac{\varphi_u \times_L \varphi_v}{\|\varphi_u \times_L \varphi_v\|_L}$$

olarak tanımlanır. \mathbb{M} yüzeyinin N birim normal vektörü için,

i) N timelike ise \mathbb{M} **spacelike yüzey**,

ii) N spacelike ise \mathbb{M} **timelike yüzey** denir (Kühnel, 2015).

Tanım 3.3.2.2 \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{M}$ olsun. $(u, v), \mathbb{E}^2$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L,$$

fonksiyonlarına **birinci temel form katsayıları** denir (Kühnel, 2015).

Teorem 3.3.2.1 \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{M}$ olsun. Yüzey üzerindeki

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{M}, \alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$$

eğrisinin, $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ arasındaki yay uzunluğu,

$$s = \int_a^b \sqrt{\left| E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right|} ds$$

integrali ile hesaplanır (Lopez, 2014).

İspat: $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ eğrisinin yay uzunluğu hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \| \alpha'(s) \|_L ds \\ &= \int_a^b \sqrt{\left| \left\langle \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\varphi}{ds} \right\rangle_L \right|} ds \\ &= \int_a^b \sqrt{\left| \left\langle \varphi_u \frac{du}{ds} + \varphi_v \frac{dv}{ds}, \varphi_u \frac{du}{ds} + \varphi_v \frac{dv}{ds} \right\rangle_L \right|} ds \\ &= \int_a^b \sqrt{\left| \left\langle \varphi_u, \varphi_u \right\rangle_L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left\langle \varphi_u, \varphi_v \right\rangle_L \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left\langle \varphi_v, \varphi_v \right\rangle_L \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right|} ds \\ &= \int_a^b \sqrt{\left| E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right|} ds \end{aligned}$$

elde edilir (Lopez, 2014).

Tanım 3.3.2.3 \mathbb{E}_1^3 uzayında tanımlı \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{M}$ olsun. Yüzey üzerindeki

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{M}, \alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$$

eğrisi verilsin. Bu durumda

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

ifadesine yüzeyin **birinci temel formu** veya **yüzeyin yay elementi** adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.3.2.4 \mathbb{E}_1^3 uzayında tanımlı \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{M}$ olsun. N bu yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere,

$$II = l du^2 + m du dv + n dv^2$$

şeklindeki ifadeye **ikinci temel form** adı verilir ve burada **ikinci temel form katsayıları**,

$$l = \langle \varphi_{uu}, N \rangle_L,$$

$$m = \langle \varphi_{uv}, N \rangle_L,$$

$$n = \langle \varphi_{vv}, N \rangle_L,$$

olarak tanımlanır (Lopez, 2014).

Teorem 3.3.2.1 \mathbb{E}_1^3 uzayında tanımlı \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{M}$ olsun.

Birinci temel form katsayıları:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L$$

İkinci temel form katsayıları:

$$l = \langle \varphi_{uu}, N \rangle_L, m = \langle \varphi_{uv}, N \rangle_L, n = \langle \varphi_{vv}, N \rangle_L$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında tanımlı olan Gauss eğriliği:

$$K = \varepsilon \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

şeklinde verilir. Yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \varepsilon \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

şeklinde ifade edilir. Eğrilik ifadelerinin işaretleri yüzeyin spacelike ya da timelike olmasına yani $\varepsilon = \langle N, N \rangle_L$ değerine göre değişir (Lopez, 2014).

4. ÖKLİD UZAYINDA BACKLUND DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında diferansiyel geometri çerçevesinde tanımlanan Backlund dönüşümü ele alınmaktadır. Backlund dönüşümleri, klasik diferansiyel geometri içerisinde özellikle eğri ve yüzey teorilerinde önemli uygulamalara sahiptir ve genellikle belirli diferansiyel sistemlere ait çözümler arasında ilişki kurmak için kullanılır. Bu dönüşümler, hem geometrik yapıların lokal özelliklerini koruyan hem de yeni yapıların inşasına olanak tanıyan önemli araçlardır.

Bu bölüm iki alt başlık halinde yapılandırılmıştır: İlk kısımda, üç boyutlu Öklid uzayında tanımlı eğriler üzerinde gerçekleştirilen Backlund dönüşümüne ilişkin teorik sonuçlar ve literatürdeki önemli çalışmalar ele alınmaktadır. İkinci kısımda ise, yüzeyler üzerindeki Backlund dönüşümleri incelenmekte ve bu dönüşümlerin yarı-küresel yüzeyler üzerindeki etkileri detaylandırılmaktadır. Özellikle Backlund dönüşümünün, belirli bir yüzey ailesinden başlayarak başka bir yüzey ailesine geçişi sağlayan bir geometrik mekanizma olarak nasıl işlediği örneklerle açıklanmaktadır. Böylece, bu dönüşümün üç boyutlu Öklid geometrisindeki yeri ve önemi hem teorik hem de uygulamalı yönleriyle tartışılmış olacaktır.

4.1. Öklid Uzayında Eğrilerin Backlund Dönüşümü

Teorem 4.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı ve τ sabit burulmaya sahip bir eğri olsun. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, α eğrisinin Frenet - Serret çatısı ve $\kappa(s)$ ise α eğrisinin eğriliği olsun. Sabit bir C değeri için:

$$\phi = \phi(s, \kappa(s), C)$$

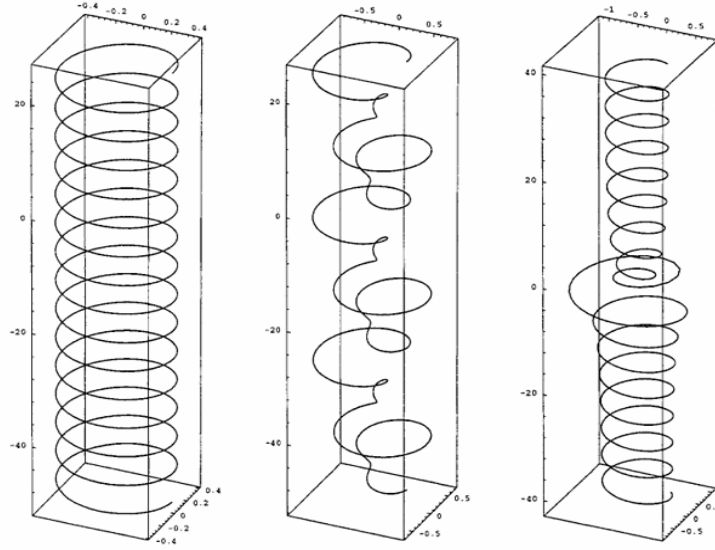
fonksiyonu

$$\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\mathbf{T} \cos \phi + \mathbf{N} \sin \phi)$$

eğrisi de birim hızlı bir eğri olup burulması $\tilde{\tau} = \tau$ 'dur (Calini & Ivey, 1998).



Şekil 4.1. Helis eğrisi ve Backlund dönüşümü olan eğriler

Nemeth bu teoremin tersini aşağıdaki şekilde ifade etmiş ve kanıtlanmıştır.

Teorem 4.1.2 $s, \alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere \mathbb{E}^3 uzayındaki α ve $\tilde{\alpha}$ eğrileri arasında bir ν dönüşümü

$$\tilde{\alpha}(s) = \nu(\alpha(s))$$

$\nu(\alpha(s))$ dönüşümü şeklinde olsun. Öyle ki karşılıklı noktalar için aşağıdakiler sağlansın.

i) $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin oskülatör düzlemlerinin kesişimi eğriler üzerindeki noktaları birleştiren doğru olup $[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası r sabit uzunluğa sahiptir.

ii) $\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)$ vektörü ile eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açı ϕ ve aynı olup $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

iii) Eğrilerin binormalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$ sabit olsun.

Bu durumda α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin burulması $\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{r}$ sabit değerine eşittir. (Németh, 1998).

İspat: α eğrisinin Frenet - Serret çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet - Serret çatısı da $\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$ olsun. $F_1(s)$ ile $\alpha(s)$ ile $\tilde{\alpha}(s)$ karşılıklı noktalarını birleştiren doğrunun birim doğrultusunu gösterelim. (ii) gereği $F_1(s)$ ile $\mathbf{T}(s)$ ve $\tilde{\mathbf{T}}(s)$ vektörleri arasındaki açı ϕ olur. Bu durumda (F_1, F_2, \mathbf{B}) ve $(F_1, \tilde{F}_2, \tilde{\mathbf{B}})$ şeklinde iki pozitif yönlendirilmiş çatı kurulabilir. F_1 vektörü (i)'den dolayı hem $\alpha(s)$ eğrisinin hem de $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin oskülatör düzleminindedir.

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, F_1$ ve F_2 vektörleri aynı düzlemindedir. $\mathbf{T}, \mathbf{N}, F_1$ ve F_2 vektörleri hepsi birden binormal vektörüne dik olduğu için aynı düzlemde yer alırlar. Benzer şekilde $F_1, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}$ ve \tilde{F}_2 aynı düzlemindedir. Bu durumda F_1 ile \mathbf{T} ve $\tilde{\mathbf{T}}$ arasındaki açı ϕ olduğundan aşağıdakiler elde edilir.

$$F_1 = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N} \quad (4.1.1)$$

$$F_2 = -\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N} \quad (4.1.2)$$

$$F_3 = \mathbf{B} \quad (4.1.3)$$

ve

$$F_1 = \cos \phi \tilde{\mathbf{T}} + \sin \phi \tilde{\mathbf{N}} \quad (4.1.4)$$

$$\tilde{F}_2 = -\sin \phi \tilde{\mathbf{T}} + \cos \phi \tilde{\mathbf{N}} \quad (4.1.5)$$

$$\tilde{F}_3 = \tilde{\mathbf{B}}$$

olur. F_2, F_3, \tilde{F}_2 ve \tilde{F}_3 ; F_1 'e dik olduğundan,

$$\tilde{F}_2 = \cos \theta F_2 - \sin \theta \mathbf{B} \quad (4.1.6)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta F_2 + \cos \theta \mathbf{B} \quad (4.1.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.6) ve (4.1.7) eşitliklerinde (4.1.2) yerine konulduğunda,

$$\tilde{F}_2 = \cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}$$

olduğu görülür. (4.1.4) ve (4.1.5) eşitliklerini matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

olarak ifade ederiz. Buradan

$$\tilde{\mathbf{T}} = \cos \phi F_1 - \sin \phi \tilde{F}_2$$

$$= \cos \phi (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}) - \sin \phi [\cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}]$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{T}} &= \cos^2 \phi \mathbf{T} + \cos \phi \sin \phi \mathbf{N} - \sin \phi \cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) \\
&\quad + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B} + \sin^2 \phi \mathbf{T} - \sin^2 \phi \mathbf{T} \\
&= \mathbf{T} - \sin^2 \phi \mathbf{T} + \cos \phi \sin \phi \mathbf{N} - \sin \phi \cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B} \\
&= \mathbf{T} + \sin \phi (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \sin \phi \cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) \\
&\quad + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B} \\
\tilde{\mathbf{T}} &= \mathbf{T} + (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N})(\sin \phi - \sin \phi \cos \theta) + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B} \\
&= \mathbf{T} + (1 - \cos \theta) \sin \phi (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B} \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde $\tilde{\mathbf{N}}$ için hesaplama yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}} &= \sin \phi F_1 + \cos \phi \tilde{F}_2 \\
\tilde{\mathbf{N}} &= \sin \phi (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}) + \cos \phi [\cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}] \\
&= \sin^2 \phi \mathbf{N} + \cos \phi \sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi [\cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N})] \\
&\quad - \cos \phi \sin \theta \mathbf{B} + \cos^2 \phi - \cos^2 \phi \\
&= \mathbf{N} - \cos^2 \phi + \cos \phi \sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi (\cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N})) - \cos \phi \sin \theta \mathbf{B} \\
&= \mathbf{N} - \cos \phi (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \cos \phi (\cos \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N})) \\
&\quad - \cos \phi \sin \theta \mathbf{B} \\
\tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{N} - (1 - \cos \theta) \cos \phi (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) - \cos \phi \sin \theta \mathbf{B} \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Öte yandan (4.1.7) denkleminde $\tilde{\mathbf{B}}$ için F_2 yerine konursa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= \sin \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \cos \theta \mathbf{B} \\
&= -\sin \theta \sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{N} + \cos \theta \mathbf{B} \\
&= \cos \theta \mathbf{B} + \sin \theta (\cos \phi \mathbf{N} - \sin \phi \mathbf{T}) \tag{4.1.10}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ arasındaki doğru parçasının birim doğrultusu

$$F_1 = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}$$

olarak ifade edilir. $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ arasındaki doğru parçasının uzunluğu r sabit değerine eşit olduğundan

$$\tilde{\alpha} = \alpha + r(\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{\alpha} - \alpha \rangle = \langle r \cos \phi \mathbf{T} + r \sin \phi \mathbf{N}, r \cos \phi \mathbf{T} + r \sin \phi \mathbf{N} \rangle = r^2$$

ifadesinin her iki tarafın türevinden,

$$2\langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{\alpha}' - \alpha' \rangle = 0 \quad (4.1.11)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\tilde{\alpha} - \alpha$ yerine $r(\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$, $\alpha'(s)$ yerine \mathbf{T} ve $\tilde{\alpha}'$ yerine $\tilde{\mathbf{T}} \|\tilde{\alpha}'\|$ yazılırsa,

$$\langle \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}, \|\tilde{\alpha}'\|(\mathbf{T} + (1 \cos \theta) \sin \phi (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \sin \theta \sin \phi) - \mathbf{T} \rangle = 0$$

elde edilir. O halde

$$2r\langle (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}), (\|\tilde{\alpha}(s)\|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\cos \phi (\|\tilde{\alpha}'\|(1 - (1 - \cos \theta) \sin^2 \phi) - 1) + \sin \phi \|\tilde{\alpha}'\|((1 - \cos \theta) \cos \phi \sin \phi) = 0$$

ve

$$\cos \phi \|\tilde{\alpha}'\| - \cos \phi = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\|\tilde{\alpha}'\| = 1$ olduğu yani $\tilde{\alpha}$ eğrisinin de birim hızlı olduğu görülür. Frenet - Serret formüllerini kullanarak $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları bulunacaktır. (4.1.10) denkleminde türev alınırsa,

$$\tilde{\mathbf{B}}' = \cos \theta (-\tau \tilde{\mathbf{N}})$$

$$+ \sin \theta \left(-\cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} - \sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} - \sin \phi (\kappa \mathbf{N}) + \cos \phi (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \right)$$

$$= -\tau \tilde{\mathbf{N}}$$

elde edilir. Bu ifadeye $\tilde{\mathbf{N}}$ yerine yazılırsa,

$$\tilde{\mathbf{B}}' = \left(-\tau \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \sin \theta \sin \phi \kappa \right) \mathbf{N}$$

$$+ \left(-\sin \theta \cos \phi \frac{d\phi}{ds} - \kappa \cos \phi \sin \theta \right) \mathbf{T} + \tau \cos \phi \sin \theta \mathbf{B}$$

olduğu görülür. O halde

$$-\tau \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \sin \theta \sin \phi \kappa = -\tilde{\tau} + \tilde{\tau}(1 - \cos \theta) \cos^2 \phi$$

$$-\sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \kappa \cos \phi \sin \theta = -\tilde{\tau}(1 - \cos \theta) \cos \phi \sin \phi$$

$$\tau \cos \phi \sin \theta = \tilde{\tau} \cos \phi \sin \theta$$

elde edilir. Buradan

$$-\tau \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \sin \theta \sin \phi \kappa = -\tilde{\tau} + \tilde{\tau}(1 - \cos \theta) \cos^2 \phi$$

ifadesiyle

$$\frac{d\phi}{ds} + \kappa = \tau \tan \frac{\theta}{2} \sin \phi$$

ve

$$\tau = \tilde{\tau}$$

elde edilir. $C = \tau \tan \frac{\theta}{2}$ denilirse $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$ bulunur. Benzer şekilde, (4.1.8) denkleminde türev alındığında,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}' &= \kappa \mathbf{N} + (1 - \cos \theta) \cos \phi \frac{d\phi}{ds} (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) \\ &+ (1 - \cos \theta) \sin \phi \left(-\cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} - \sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} - \sin \phi \kappa \mathbf{N} + \cos \phi (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \right) \\ &+ \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \sin \theta \mathbf{B} + \sin \theta \sin \phi (-\tau \mathbf{N}) = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. O halde,

$$\kappa + (1 - \cos \theta) \frac{d\phi}{ds} \sin 2\phi - (1 - \cos \theta) \sin^2 \phi \kappa - \sin \theta \sin \phi \tau = \tilde{\kappa} (1 - (1 - \cos \theta) \cos^2 \phi)$$

$$-2(1 - \cos \theta) \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \sin \phi - (1 - \cos \theta) \sin \phi \cos \phi \kappa = \tilde{\kappa} (1 - \cos \theta) \sin \phi \cos \phi$$

$$(1 - \cos \theta) \sin \phi \cos \phi \tau + \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \sin \theta = -\tilde{\kappa} \cos \phi \sin \theta$$

olmalıdır. Böylece,

$$\kappa(1 - (1 - \cos \theta) \sin^2 \phi) + (1 - \cos \theta) \frac{d\phi}{ds} \sin 2\phi - \sin \theta \sin \phi \tau = \tilde{\kappa}(1 - (1 - \cos \theta) \cos^2 \phi)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$-2 \frac{d\phi}{ds} - \kappa = \tilde{\kappa} \quad (4.1.12)$$

$$(1 - \cos \theta) \sin \phi \tau + \frac{d\phi}{ds} \sin \theta = -\tilde{\kappa} \sin \theta \quad (4.1.13)$$

elde edilir. (4.1.12) eşitliğinde $\tau \tan \frac{\theta}{2} = C$ yerine yazılırsa

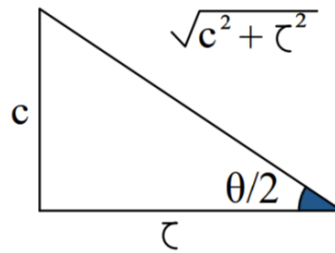
$$\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa \quad (4.1.14)$$

bulunur. (4.1.13) denkleminde, (4.1.14) eşitliği kullanılarak,

$$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$$

bulunur. Burada $C = \tau \tan \frac{\theta}{2}$ eşitliğinden $\tau = \frac{\sin \theta}{r}$ ve $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{C}{\tau}$ denklemleri elde edilir.

Aşağıdaki üçgenle ifade edilen ilişkileri ve trigonometrik bağıntıları kullanırız.



Şekil 4.2. $\tan \frac{\theta}{2}$ açısının dik üçgende gösterimi.

Buradan

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \tau^2}},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\tau}{\sqrt{c^2 + \tau^2}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tau = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{r} = \frac{2C\tau}{C^2 + \tau^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$r = \frac{2C}{C^2 + \tau^2}$$

olarak bulunur ve ispat biter (Németh, 1998).

Örnek 4.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere $\alpha(s) = \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$ eğrisi verilsin. Eğrinin hız vektörü

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} \left(\left(\sin \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\cos \frac{s}{5}\right)^2\right) + \frac{16}{25}} = 1$$

olduğundan α birim hızlı bir eğridir. α eğrisinin teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{3}{25} \cos \frac{s}{5}, -\frac{3}{25} \sin \frac{s}{5}, 0\right)$$

elde edilir ve $\|\alpha''(s)\| = \frac{3}{25}$ olduğu görülür. α eğrisinin normal vektör alanı da

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0\right)$$

olarak elde edilir. Binormal vektör alanı ise,

$$\mathbf{B}(s) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 \sin \frac{s}{5} & 3 \cos \frac{s}{5} & 4 \\ -\cos \frac{s}{5} & -\sin \frac{s}{5} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

olarak bulunur. α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ise

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{3}{25}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\mathbf{N}'(s) = \left(\frac{1}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{1}{5} \cos \frac{s}{5}, 0\right)$$

eşitliği yardımıyla α eğrisinin burulma fonksiyonu

$$\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle = \frac{4}{25}$$

şeklinde bulunur. r , $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ değerlerini bulmak için $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi tekrar aşağıdaki gibi yazılır:

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + r(\cos \phi \mathbf{T}(s) + \sin \phi \mathbf{N}(s)).$$

$\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin türevi alındığında,

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \alpha' + r \left(-\sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} + \cos \phi \kappa \mathbf{N} + \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} + \sin \phi (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \right)$$

eşitliği elde edilir. Eğrilik ve burulma değerleri yerine konulduğunda,

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \mathbf{T} + r \left(-\sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} + \cos \phi \frac{3}{25} \mathbf{N} + \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} - \frac{3}{25} \sin \phi \mathbf{T} + \sin \phi \frac{4}{25} \mathbf{B} \right)$$

elde edilir. r sabiti denkleme dağıldığında,

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \mathbf{T} - r \sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} + r \frac{3}{25} \cos \phi \mathbf{N} + r \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} - r \frac{3}{25} \sin \phi \mathbf{T} + r \sin \phi \frac{4}{25} \mathbf{B}$$

bulunur. Eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \left(1 - r \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \frac{3r}{25} \sin \phi \right) \mathbf{T} + \left(\frac{3r}{25} \cos \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \right) \mathbf{N} + r \sin \phi \frac{4}{25} \mathbf{B} \quad (4.1.15)$$

elde edilir. Buradan

$$\tilde{\alpha} - \alpha = r \cos \phi \mathbf{T} + r \sin \phi \mathbf{N} \quad (4.1.16)$$

ve $\|\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)\| = r$ olduğu görülür. $\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)$ ile $\mathbf{T}(s)$ arasındaki açı ϕ olsun. Bu durumda, $\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)$ ile $\tilde{\mathbf{T}}(s)$ arasındaki açı da ϕ olmalıdır. O halde

$$\cos \phi = \frac{\langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{\mathbf{T}}(s) \rangle}{r}$$

eşitliği yazılabilir. (4.1.15) ve (4.1.16) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{\alpha}' \rangle &= r \cos \phi \left(1 - r \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \frac{3r}{25} \sin \phi \right) + r \sin \phi \left(\frac{3r}{25} \cos \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \right) \\ &= r \cos \phi - r^2 \cos \phi \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \frac{3r^2}{25} \cos \phi \sin \phi \\ &\quad + \frac{3r^2}{25} \cos \phi \sin \phi + r^2 \cos \phi \sin \phi \frac{d\phi}{ds} \\ &= r \cos \phi \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.14) eşitliği kullanılarak, $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \frac{3}{25}$ ve $C = \tau \tan \frac{\theta}{2}$ olarak bulunur.

Dolayısıyla,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{4}{25} \tan \frac{\theta}{2} \sin \phi - \frac{3}{25}$$

elde edilir. Ayrıca $\tan \frac{\theta}{2} \sin \phi = \frac{3}{4}$ olduğundan, $\tan \frac{\theta}{2} = 1$, $\sin \phi = \frac{3}{4}$ ve $\cos \phi = \frac{\sqrt{7}}{4}$ bulunur. $C = \tau \tan \frac{\theta}{2}$ ise, $C = \frac{4}{25}$ şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak

$$r = \frac{2C}{C^2 + \tau^2} = \frac{25}{4}$$

elde edilir. Bu durumda α eğrisinin Backlund dönüşümü

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + r(\cos \phi \mathbf{T}(s) + \sin \phi \mathbf{N}(s))$$

denkleminde bulunan r , $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ değerleri yerine yazıldığında,

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \frac{25}{4} \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{T}(s) + \frac{3}{4} \mathbf{N}(s) \right)$$

bulunur. Bulunan denklemin türevi alınır,

$$\tilde{\alpha}'(s) = \mathbf{T}(s) + \frac{25\sqrt{7}}{16} \mathbf{T}'(s) + \frac{75}{16} \mathbf{N}'(s)$$

eşitliği yazılır. Eşitlikte Frenet - Serret formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(s) &= \mathbf{T}(s) + \frac{25\sqrt{7}}{16} \frac{3}{25} \mathbf{N}(s) - \frac{75}{16} \frac{3}{25} \mathbf{T}(s) + \frac{75}{16} \frac{4}{25} \mathbf{B}(s) \\ &= \mathbf{T}(s) + \frac{3\sqrt{7}}{16} \mathbf{N}(s) - \frac{9}{16} \mathbf{T}(s) + \frac{3}{4} \mathbf{B}(s) \\ &= \frac{7}{16} \mathbf{T}(s) + \frac{3\sqrt{7}}{16} \mathbf{N}(s) + \frac{3}{4} \mathbf{B}(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan bir kere daha $\tilde{\alpha}$ eğrisinin de birim hızlı olduğu

$$\langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}'(s) \rangle = \left(\frac{7}{16} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{16} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 1$$

eşitliği ile görülmüş olur. **Teorem 4.1.2.**'deki $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) &= \alpha(s) + \frac{25}{4} \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{T}(s) + \frac{3}{4} \mathbf{N}(s) \right) \\ &= \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4s}{5} \right) + \frac{25\sqrt{7}}{16} \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right) + \frac{75}{16} \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\ &= \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4s}{5} \right) + \left(-\frac{15\sqrt{7}}{16} \sin \frac{s}{5}, \frac{15\sqrt{7}}{16} \cos \frac{s}{5}, \frac{5\sqrt{7}}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{75}{16} \cos \frac{s}{5}, -\frac{75}{16} \sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\
& = \left(-\frac{27}{16} \cos \frac{s}{5} - \frac{15\sqrt{7}}{16} \sin \frac{s}{5}, -\frac{27}{16} \sin \frac{s}{5} + \frac{15\sqrt{7}}{16} \cos \frac{s}{5}, \frac{4s}{5} + \frac{5\sqrt{7}}{4} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin hız vektörü,

$$\tilde{\alpha}'(s) = \left(\frac{27}{80} \sin \frac{s}{5} - \frac{15\sqrt{7}}{80} \cos \frac{s}{5}, -\frac{27}{80} \cos \frac{s}{5} - \frac{15\sqrt{7}}{80} \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

bulunur. $\tilde{\alpha}'(s)$ hız vektörünün tekrar türevi alınırsa,

$$\tilde{\alpha}''(s) = \left(\frac{27}{400} \cos \frac{s}{5} + \frac{15\sqrt{7}}{400} \sin \frac{s}{5}, \frac{27}{400} \sin \frac{s}{5} - \frac{15\sqrt{7}}{400} \cos \frac{s}{5}, 0 \right)$$

bulunur. Buradan

$$\|\tilde{\alpha}''(s)\| = \sqrt{\left(\frac{27}{400}\right)^2 + \left(-\frac{15\sqrt{7}}{400}\right)^2} = \frac{3}{25}$$

olduğu görülür. **Teorem 4.1.2.** in ispatındaki $F_1, F_2, F_3, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}$ ve $\tilde{\mathbf{B}}$ vektör olanları aşağıdaki şekilde bulunur. $F_1(s) = \cos \phi \mathbf{T}(s) + \sin \phi \mathbf{N}(s)$ ifadesinde bilinen $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_1(s) &= \frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right) + \frac{3}{4} \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\
&= \left(-\frac{3\sqrt{7}}{20} \sin \frac{s}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{20} \cos \frac{s}{5}, \frac{4\sqrt{7}}{20} \right) + \left(-\frac{3}{4} \cos \frac{s}{5}, -\frac{3}{4} \sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\
&= \left(-\frac{3\sqrt{7}}{20} \sin \frac{s}{5} - \frac{3}{4} \cos \frac{s}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{20} \cos \frac{s}{5} - \frac{3}{4} \sin \frac{s}{5}, \frac{4\sqrt{7}}{20} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan

$$F_2(s) = -\sin \phi \mathbf{T}(s) + \cos \phi \mathbf{N}(s)$$

ifadesinde bilinen $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= -\frac{3}{4} \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right) + \frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\
&= \left(\frac{9}{20} \sin \frac{s}{5}, -\frac{9}{20} \cos \frac{s}{5}, -\frac{12}{20} \right) + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \cos \frac{s}{5}, -\frac{\sqrt{7}}{4} \sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\
&= \left(\frac{9}{20} \sin \frac{s}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cos \frac{s}{5}, -\frac{9}{20} \cos \frac{s}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \sin \frac{s}{5}, -\frac{12}{20} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $F_3(s) = \mathbf{B}(s)$ eşitliğinden

$$F_3(s) = \left(\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{F}_2 = \cos \theta F_2 - \sin \theta \mathbf{B}(s) = \mathbf{B}(s) = \left(\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

bulunur.

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(s) + (1 - \cos \theta) \sin \phi \left(-\sin \phi \mathbf{T}(s) + \cos \phi \mathbf{N}(s) \right) + \sin \theta \sin \phi \mathbf{B}(s)$$

eşitliğinde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}(s) + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{4} \mathbf{T}(s) + \frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{N}(s) \right) + \frac{3}{4} \mathbf{B}(s) \\ &= \mathbf{T}(s) + \left(-\frac{9}{16} \mathbf{T}(s) + \frac{3\sqrt{7}}{16} \mathbf{N}(s) \right) + \frac{3}{4} \mathbf{B}(s) \\ &= \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right) + \left(\frac{27}{80} \sin \frac{s}{5}, -\frac{27}{80} \cos \frac{s}{5}, -\frac{36}{80} \right) \\ &\quad + \left(-\frac{3\sqrt{7}}{16} \cos \frac{s}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{16} \sin \frac{s}{5}, 0 \right) + \left(\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{9}{20} \right) \\ &= \left(\frac{27}{80} \sin \frac{s}{5} - \frac{3\sqrt{7}}{16} \cos \frac{s}{5}, -\frac{27}{80} \cos \frac{s}{5} - \frac{3\sqrt{7}}{16} \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}(s) - (1 - \cos \theta) \cos \phi \left(-\sin \phi \mathbf{T}(s) + \cos \phi \mathbf{N}(s) \right) - \cos \phi \sin \theta \mathbf{B}(s)$$

bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{N}(s) - \frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\frac{3}{4} \mathbf{T}(s) + \frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{N}(s) \right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{B}(s) \\ &= \mathbf{N}(s) + \left(\frac{3\sqrt{7}}{16} \mathbf{T}(s) - \frac{7}{16} \mathbf{N}(s) \right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{B}(s) \\ &= \mathbf{N}(s) + \frac{3\sqrt{7}}{16} \mathbf{T}(s) - \frac{7}{16} \mathbf{N}(s) - \frac{\sqrt{7}}{4} \mathbf{B}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektör alanları yerine koyulduğunda,

$$\tilde{\mathbf{N}} = \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right) + \frac{3\sqrt{7}}{16} \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7}{16}\left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}\left(\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}, -\frac{4}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right) \\
&= \left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right) + \left(-\frac{9\sqrt{7}}{80}\sin\frac{s}{5}, \frac{9\sqrt{7}}{80}\cos\frac{s}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{20}\right) \\
&\quad + \left(\frac{7}{16}\cos\frac{s}{5}, \frac{7}{16}\sin\frac{s}{5}, 0\right) + \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{\sqrt{7}}{5}\cos\frac{s}{5}, -\frac{3\sqrt{7}}{20}\right) \\
&= \left(-\frac{9}{16}\cos\frac{s}{5} - \frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{s}{5}, -\frac{9}{16}\sin\frac{s}{5} + \frac{5\sqrt{7}}{16}\cos\frac{s}{5}, 0\right)
\end{aligned}$$

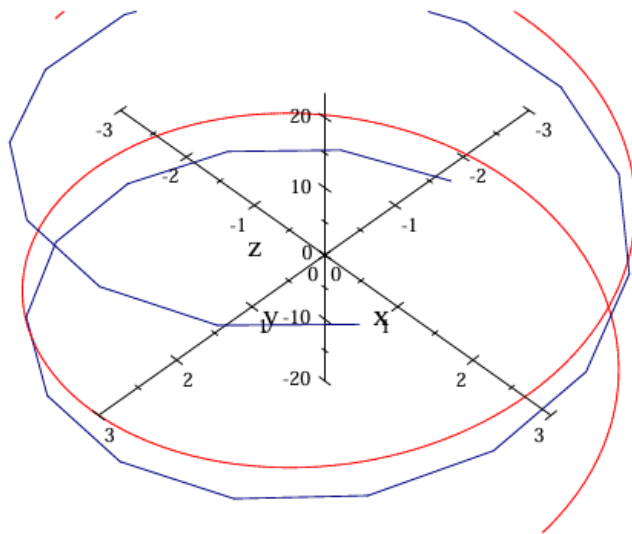
elde edilir. Son olarak

$$\tilde{\mathbf{B}} = \cos\theta \mathbf{B}(s) + \sin\theta (\cos\phi \mathbf{N}(s) - \sin\phi \mathbf{T}(s))$$

eşitliğinde $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{T}(s)$ vektör alanları ve bulunan $\cos\phi$ ve $\sin\phi$ değerlerini yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right) - \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\cos\frac{s}{5}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\sin\frac{s}{5}, 0\right) + \left(\frac{9}{20}\sin\frac{s}{5}, -\frac{9}{20}\cos\frac{s}{5}, -\frac{12}{20}\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\cos\frac{s}{5} + \frac{9}{20}\sin\frac{s}{5}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\sin\frac{s}{5} - \frac{9}{20}\cos\frac{s}{5}, -\frac{12}{20}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 4.3. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere $I = (-25, 25)$ alınarak çizilmiş $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin grafiği

4.2. Öklid Uzayında Yüzeylerin Backlund Dönüşümü

Tanım 4.2.1 Bir doğru kongruansı $x(u, v)$ 'den geçen ve $w(u, v)$ 'ye paralel iki parametrelili,

$$f(u, v) = x(u, v) + \lambda w(u, v), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

doğrular ailesidir. $t(u, v)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi(u, v) = x(u, v) + t(u, v) w(u, v)$$

ile verilen \mathbb{M} yüzeyi için, her (u, v) için, $f(u, v)$, \mathbb{M} yüzeyine $\varphi(u, v)$ noktasında teğet ise \mathbb{M} yüzeyine doğru kongruansının fokal yüzeyi denilir. Bir başka deyişle;

$$\varphi(u, v) = x(u, v) + t(u, v) w(u, v)$$

ifadesinin kısmi türevleri,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u} w + t \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial v} w + t \frac{\partial w}{\partial v}$$

olarak bulunur ve $w(u, v)$ vektörü, bu vektörler tarafından gerilen düzlemin içinde yer alır.

Yani $w, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ vektörleri lineer bağımlıdır. O halde

$$\det \left(w, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0$$

olmalıdır. Kısalık için,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_v, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial t}{\partial u} = t_u, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = w_v$$

olarak gösterilirse,

$$\det(w, x_u + t_u w + t w_u, x_v + t_v w + t w_v) = 0$$

$$\begin{aligned} \det(w, x_u, x_v + t_v w + t w_v) + \det(w, t_u w, x_v + t_v w + t w_v) \\ + \det(w, t w_u, x_v + t_v w + t w_v) = 0 \end{aligned}$$

$$\det(w, x_u, x_v) + \det(w, x_u, t_v w) + \det(w, x_u, t w_v)$$

$$+ \det(w, t_u w, x_v) + \det(w, t_u w, t_v w) + \det(w, t_u w, t w_v)$$

$$+ \det(w, t w_u, x_v) + \det(w, t w_u, t_v w) + \det(w, t w_u, t w_v) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$t^2 \det(w, w_u, w_v) + t(\det(w, x_u, w_v) + \det(w, w_u, x_v)) + \det(w, x_u, x_v) = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Genel olarak bu denklemin, iki farklı kökü vardır. O halde, her doğru kongruansı iki fokal yüzeye sahiptir. Yani, doğru kongruansları, ortak teğet doğruları olan yüzeylere fokal yüzey denir. Buna göre \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeyleri arasındaki bir doğru kongruansı $p \in \mathbb{M}$ ve $p^* \in \mathbb{M}^*$ ile p ve p^* noktalarını birleştiren doğru \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerine teğet olmak üzere, $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$, $p^* = f(p)$ diffeomorfizmi ile gösterilebilir (Tereng, 2003).

Tanım 4.2.2 f bir doğru kongruansı olmak üzere, $\|pp^*\| = r$ sabit ve \mathbb{M} ile \mathbb{M}^* yüzeylerinin p ve p^* noktalarındaki normalleri arasındaki θ açısı sabit ise, f kongruansına **yarı küresel doğru kongruansı** denir (Shepherd, 1999).

Tanım 4.2.3 Sabit ve negatif Gauss eğriliğine sahip yüzeylere **yarı-küresel yüzeyler** denir. Diğer bir tanımla, f doğru kongruansları yarı-küresel olan yüzeylerdir (Shepherd, 1999).

Tanım 4.2.4 \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* üç boyutlu Öklid uzayında iki yüzey olsunlar. $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ diffeomorfizmi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise, f 'ye **Backlund dönüşümü** denir.

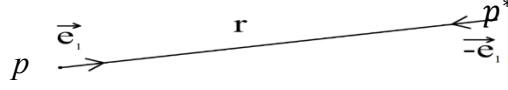
i) p ve $p^* = f(p)$ noktalarını birleştiren doğru, \mathbb{M} ye p ve \mathbb{M}^* yüzeyine de p^* noktasında teğet,

ii) p ve p^* arasındaki uzaklık sabit

iii) \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki N_p normali ile, \mathbb{M}^* yüzeyinin p^* noktasındaki N_{p^*} normali arasındaki açı sabit olmalıdır (Tereng, 2003).

Teorem 4.2.1 \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* üç boyutlu Öklid uzayında iki yüzey olsunlar. $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ ise Backlund dönüşümü ve \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki N_p normali ile \mathbb{M}^* yüzeyinin p^* noktasındaki N_{p^*} normali arasındaki açı θ olsun. Bu durumda, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin Gauss eğriliği eşit olup $-\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ olur (Tenenblat & Tereng, 1980).

İspat:

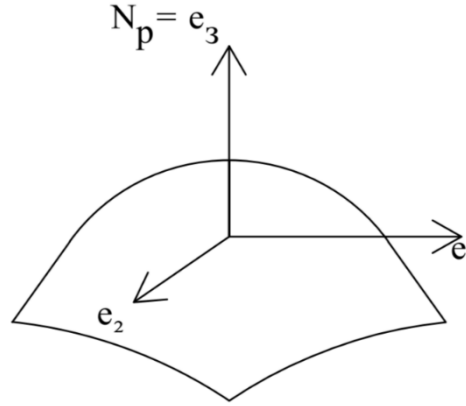


Şekil 4.4. p ve p^* noktalarını birleştiren r uzunluğunda bir doğru.

\mathbb{M} ve \mathbb{M}^* üç boyutlu Öklid uzayında iki yüzey olsunlar. $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ ise Backlund dönüşümü ve \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki N_p normali ile \mathbb{M}^* yüzeyinin p^* noktasındaki N_{p^*} normalini arasındaki açı θ olsun. \mathbb{M} yüzeyi üzerindeki her $p \in \mathbb{M}$ için

$$p^* = p + r e_1(p) \quad (4.2.1)$$

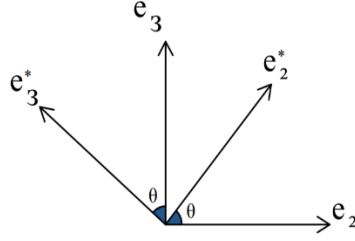
olacak şekilde e_1 birim vektör alanı olsun. e_2 vektör alanı ise $e_3 = N_p$ olmak üzere, $\{e_1, e_2, e_3\}$ bir birim dik çatı olacak şekilde seçilmiş bir vektör olsun.



Şekil 4.5. $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortogonal çatısının yüzey üzerinde gösterimi.

Benzer şekilde $e_3^* = N_{p^*}$ \mathbb{M}^* yüzeyin normalini göstermektedir. \mathbb{M}^* yüzeyinde $e_1^* = -e_1$ olarak alalım e_2^* vektörünü de $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ bir birim dik çatı olacak şekilde seçilir. e_1^* ve e_1 birbirine paralel olduğundan ve e_3 ve e_3^* arasındaki açı; teoremin kabulü gereği θ olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{bmatrix} e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$



Şekil 4.6. e_2 ve e_2^* , e_3 ve e_3^* 'ün yaptığı θ açısının gösterimi.

Bir başka deyişle $\{e_2, e_3\}$ vektörleri, θ kadar döndürülürse $\{e_2^*, e_3^*\}$ vektörleri elde edilecektir. Buradan

$$e_1^* = -e_1$$

$$e_2^* = \cos \theta e_2 + \sin \theta e_3$$

$$e_3^* = -\sin \theta e_2 + \cos \theta e_3$$

elde edilir. Ayrıca $e_3 = N_p$ ve $e_3^* = N_{p^*}$ olduğundan

$$\frac{\langle N_p, N_{p^*} \rangle}{\|N_p\| \|N_{p^*}\|} = \langle e_3^*, e_3 \rangle = \langle -\sin \theta e_2 + \cos \theta e_3, e_3 \rangle = \cos \theta$$

olduğu görülür. Yani \mathbb{M} yüzeyinin p noktasındaki normali ile \mathbb{M}^* yüzeyinin p^* noktasındaki normali arasındaki açı θ olur. $f(p) = p^*$ olduğundan \mathbb{M} yüzeyinin parametrizasyonu, $\varphi = \varphi(u, v)$ ve \mathbb{M}^* yüzeyin parametrizasyonu ise $\varphi^* = \varphi^*(u, v)$ olsun. Bu durumlarda (4.2.1) eşitliği

$$\varphi^*(u, v) = \varphi(u, v) + r e_1(u, v) \quad (4.2.2)$$

şeklilde yazılabilir. Burada

$$f(p) = p - r e_1(p)$$

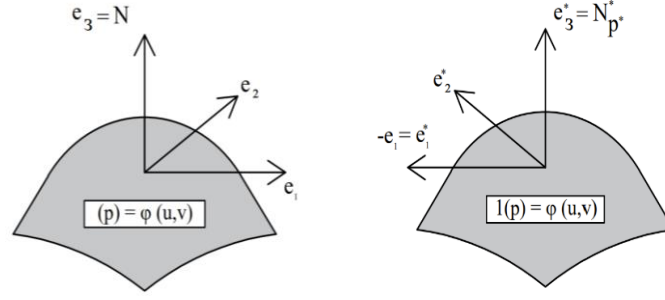
olacak şekilde e_1 birim vektör alınır. $e_1 \perp e_2$ olduğundan

$$e_2 = e_1 \times N$$

olacaktır. Ayrıca $e_1^* = -e_1$ ve $e_2^* \perp e_1^*$ olduğundan $e_2^* \perp e_1$ olduğu görülür. Burada

$$e_3^* = N^*$$

olup $e_2^* \perp e_3^*$ olduğu görülür.



Şekil 4.7. Yüzeyin parametrisasyon gösterimi.

\mathbf{e}_3 ve \mathbf{e}_3^* arasındaki açı θ olduğundan

$$\mathbf{e}_1^* = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_2^* = \cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_3^* = -\sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3$$

eşitlikleri yazılır. $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1$ eşitliğinin diferansiyelinden $\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_1 \rangle = 0$ elde edilir. O halde $\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ olduğu görülür. Öte yandan,

$$\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = w_{11} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + w_{21} \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + w_{31} \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

olduğundan $w_{11} = 0$ 'dır. Benzer şekilde $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1$ eşitliğinin diferansiyelinden $\langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ elde edilir ve $w_{22} = 0$ olduğunu gösterir. Son olarak, $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$ eşitliğinin diferansiyelinden $w_{33} = 0$ elde edilir. Ayrıca, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ eşitliğinin diferansiyelinden,

$$\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2 \rangle = 0$$

olduğu görülür. O halde,

$$w_{21} + w_{12} = 0$$

olması gerekir. Yani,

$$w_{21} = -w_{12}$$

olur. Özetle

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= -w_{12}\mathbf{e}_2 - w_{13}\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 &= w_{12}\mathbf{e}_1 - w_{23}\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 &= w_{13}\mathbf{e}_1 + w_{23}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{12} & -w_{13} \\ w_{12} & 0 & -w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1^* &= w_{21}^* \mathbf{e}_2^* + w_{31}^* \mathbf{e}_3^* \\ d\mathbf{e}_2^* &= w_{12}^* \mathbf{e}_1^* + w_{32}^* \mathbf{e}_3^* \\ d\mathbf{e}_3^* &= w_{13}^* \mathbf{e}_1^* + w_{23}^* \mathbf{e}_2^* \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} d\mathbf{e}_1^* \\ d\mathbf{e}_2^* \\ d\mathbf{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_{21}^* & w_{31}^* \\ w_{12}^* & 0 & w_{32}^* \\ w_{13}^* & w_{23}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. (4.2.2) eşitliğinden,

$$d\varphi = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2$$

ve

$$d\varphi^* = w_1^* \mathbf{e}_1^* + w_2^* \mathbf{e}_2^*$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= d\varphi + r d\mathbf{e}_1 \Rightarrow w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + r (w_{11} \mathbf{e}_1 + w_{21} \mathbf{e}_2 + w_{31} \mathbf{e}_3) \\ d\varphi^* &= (w_1 + r w_{11}) \mathbf{e}_1 + (w_2 + r w_{21}) \mathbf{e}_2 + r w_{31} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

olarak ifade edilir. Kabul gereği,

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= w_1^* \mathbf{e}_1^* + w_2^* \mathbf{e}_2^* \\ d\varphi^* &= -w_1^* \mathbf{e}_1 + w_2^* (\cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3) \\ d\varphi^* &= -w_1^* \mathbf{e}_1 + w_2^* \cos \theta \mathbf{e}_2 + w_2^* \sin \theta \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.3) ve (4.2.4) eşit olduğundan,

$$w_1 + r w_{11} = -w_1^* \quad (4.2.5)$$

$$w_2^* \cos \theta = w_2 + r w_{21} \quad (4.2.6)$$

$$w_2^* \sin \theta = r w_{31} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.7) eşitliğinden,

$$w_2^* = \frac{r w_{31}}{\sin \theta}$$

elde edilir. Bu ifade (4.2.6) da yerine yazılırsa

$$\frac{r w_{31}}{\sin \theta} \cos \theta = w_2 + r w_{21}$$

$$r w_{31} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - r w_{21} = w_2$$

$$\frac{r w_{31} \cos \theta - \sin \theta r w_{21}}{\sin \theta} = w_2 \Rightarrow \frac{\cos \theta w_{31} - \sin \theta w_{21}}{\sin \theta} = \frac{w_2}{r}$$

elde edilir. Öte yandan, $w_{ij}^* = \langle d\mathbf{e}_j^*, \mathbf{e}_i^* \rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} w_{31}^* &= \langle d\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_3^* \rangle \\ &= \langle -d\mathbf{e}_1^*, -\sin\theta \mathbf{e}_2 + \cos\theta \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= \sin\theta \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - \cos\theta \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = w_{21}$ ve $\langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = w_{31}$ elde edilir. Bu ifade,

$$\cos\theta w_{31} - \sin\theta w_{21} = \frac{\sin\theta w_2}{r}$$

olarak yazılırsa,

$$w_{31}^* = \sin\theta w_{21} - \cos\theta w_{31}$$

$$w_{31}^* = -\frac{\sin\theta w_2}{r}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} w_{32}^* &= \langle d\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^* \rangle \\ &= \langle \cos\theta d\mathbf{e}_2 + \sin\theta d\mathbf{e}_3, -\sin\theta \mathbf{e}_2 + \cos\theta \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= -\cos\theta \sin\theta \langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + \cos\theta \langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \sin^2\theta \langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle + \sin\theta \cos\theta \langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= \cos^2\theta w_{32} - \sin^2\theta w_{23} \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)w_{32} \end{aligned}$$

görüür. $w_{32}^* = w_{32}$ elde edilir. Buradan

$$w_{31} = h_{11}w_1 + h_{12}w_2$$

$$w_{32} = h_{21}w_1 + h_{22}w_2$$

olduğu kabul edilir. K ve K^* ile sırasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin Gauss eğriliği olmak üzere, diferansiyel formların dış çarpımını kullanarak

$$\begin{aligned} K^*w_1^* \wedge w_2^* &= w_{31}^* \wedge w_{32}^* \\ &= -\frac{\sin\theta w_2}{r} \wedge w_{32} \\ &= -\frac{\sin\theta}{r} w_2 \wedge (h_{21}w_1 + h_{22}w_2) \\ &= -\frac{\sin\theta}{r} h_{21}w_2 \wedge w_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \theta h_{21}}{r} w_1 \wedge w_2$$

elde edilir. (4.2.5) ve (4.2.7) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} K^* w_1^* \wedge w_2^* &= -K^* \left(w_1 \wedge \frac{r}{\sin \theta} w_{31} \right) \\ &= -\frac{K^* r}{\sin \theta} w_1 \wedge (h_{11} w_1 + h_{12} w_2) \\ &= -\frac{K^* r}{\sin \theta} h_{12} w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\frac{\sin \theta h_{21}}{r} w_1 \wedge w_2 = -\frac{K^* r}{\sin \theta} h_{12} w_1 \wedge w_2$$

olarak bulunur. O halde karşılıklı terimlerin eşitliği elde edilir. Son olarak,

$$\frac{\sin \theta h_{21}}{r} = -\frac{K^* r}{\sin \theta} h_{12} \quad \Rightarrow \quad K^* = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

olarak bulunur (Tenenblat & Terng, 1980).

5. MINKOWSKI UZAYINDA BACKLUND DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, diferansiyel geometrinin Lorentz uzaylara uygulanması bağlamında önemli bir yer tutan Minkowski uzayında tanımlı eğri ve yüzeyler üzerinde Backlund dönüşümleri detaylı biçimde incelenmektedir. Minkowski uzayı, Lorentz çarpımı ile tanımlanan özel bir yarı-Riemann uzayıdır ve timelike, spacelike ve null olmak üzere üç farklı vektör türüne göre çeşitlilik gösterir. Bu çeşitlilik, geometriye yeni dönüşüm koşulları ve karakteristikler kazandırmaktadır.

Bölümde öncelikle, sabit burulmaya sahip timelike ve spacelike eğriler arasında tanımlanan Backlund dönüşümleri ele alınmış; ardından null olmayan yüzeyler için Backlund dönüşümüne ilişkin koşullar açıklanmıştır. Minkowski uzayında yapılan bu dönüşümlerde, klasik Öklid geometrisinde geçerli olan sabit açı ve sabit mesafe prensiplerinin Lorentzian bağlamda nasıl değişime uğradığı vurgulanmıştır.

Eğriler bağlamında, Minkowski uzayında tanımlanan Frenet - Serret çatıları kullanılarak, dönüşüme tabi tutulacak eğriler arasındaki ilişkiler türetilmiş; özellikle ikinci burulma fonksiyonu gibi Lorentz uzaya özgü diferansiyel nitelikler dikkate alınmıştır. Dönüşüm sonrası elde edilen eğrilerin türleri (timelike, spacelike, null) ve bu eğrilerle ilişkili eğrilik-burulma fonksiyonları karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir.

Yüzeyler için ele alınan dönüşümlerde ise, sabit Gauss eğriliğine sahip spacelike ve timelike yüzeyler arasındaki geçişler incelenmiş; bu geçişlerin sinh-Gordon tipi diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi ortaya konulmuştur. Ayrıca, doğru kongruansları aracılığıyla parametrisasyonu yapılan yüzey çiftleri için normal vektör alanları arasındaki açı koşulları ve bu açıların sabit olması durumu analiz edilmiştir.

Bu bölümün amacı, Minkowski uzayında Backlund dönüşümünün geometrik yapısını anlamaya yönelik kapsamlı bir bakış açısı sunmak ve klasik dönüşüm kuramlarının Lorentzian ortama nasıl genellendiğini açıklamaktır. Böylece, yalnızca matematiksel değil, aynı zamanda fiziksel modeller açısından da bu dönüşümün taşıdığı potansiyel gösterilmektedir.

5.1. Minkowski Uzayında Eğrilerin Backlund Dönüşümü

Teorem 5.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir timelike eğri olsun. O halde,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

dönüşümü ile ifade edilen $\tilde{\alpha}$ eğrisi, sabit burulmaya sahip $\tilde{\tau} = \tau$ ve eğriliği $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$ olan birim hızlı bir timelike eğridir. C bir sabit olup

$$\frac{d\phi}{ds} = C \sinh \phi - \kappa$$

ve

$$\phi(s_0) = \phi_0$$

olacak şekilde belirlenir ve

$$\tau = \tilde{\tau} = \left| C \cot \frac{\theta}{2} \right|$$

olarak verilir. Burada θ açısı, α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin binormal vektör alanları arasındaki sabit açıdır (Özdemir & Çöken, 2009).

İspat: $\tilde{\alpha}$ eğrisinin hız vektörü

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}' &= \alpha' + \frac{d}{ds} \left(\frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}) \right) \\ &= \mathbf{T} + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} \left(\frac{d\phi}{ds} \sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{T}' + \frac{d\phi}{ds} \cosh \phi \mathbf{N} + \sinh \phi \mathbf{N}' \right) \\ &= \mathbf{T} + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} \left(\frac{d\phi}{ds} \sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi (\kappa \mathbf{N}) + \frac{d\phi}{ds} \cosh \phi \mathbf{N} + \sinh \phi (\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \right) \\ &= \left(1 + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} \left(\frac{d\phi}{ds} \sinh \phi + \kappa \sinh \phi \right) \right) \mathbf{T} + \left(\frac{2C}{C^2 + \tau^2} \left(\kappa \cosh \phi + \frac{d\phi}{ds} \cosh \phi \right) \right) \mathbf{N} \\ &\quad + \left(\frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\tau \sinh \phi) \right) \mathbf{B} \\ &= \left(1 + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} \left((C \sinh \phi - \kappa) \sinh \phi + \kappa \sinh \phi \right) \right) \mathbf{T} \\ &\quad + \left(\frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\kappa \cosh \phi + (C \sinh \phi - \kappa) \cosh \phi) \right) \mathbf{N} + \left(\frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\tau \sinh \phi) \right) \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{C^2+\tau^2} (C^2 + \tau^2 + 2C(C \sinh^2 \phi - \kappa \sinh \phi + \kappa \sinh \phi)) \mathbf{T} \\
&+ \frac{1}{C^2+\tau^2} (2C(\kappa \cosh \phi + C \sinh \phi \cosh \phi - \kappa \cosh \phi)) \mathbf{N} + \frac{1}{C^2+\tau^2} (2C(\tau \sinh \phi)) \mathbf{B} \\
&= \frac{(C^2+\tau^2+2C(C \sinh^2 \phi))}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{2C^2 \sinh \phi \cosh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B} \\
&= \frac{C^2+\tau^2+2C^2 \sinh^2 \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{2C^2 \sinh \phi \cosh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B} \\
&= \frac{C^2(1+2 \sinh^2 \phi)+\tau^2}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{C^2 \sinh 2\phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B} \\
&= \frac{C^2(\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi + 2 \sinh^2 \phi)+\tau^2}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{C^2 \sinh 2\phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B} \\
&= \frac{C^2(\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi)+\tau^2}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{C^2 \sinh 2\phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B} \\
\tilde{\alpha}' &= \frac{C^2 \cosh 2\phi + \tau^2}{C^2+\tau^2} \mathbf{T} + \frac{C^2 \sinh 2\phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{N} + \frac{2C\tau \sinh \phi}{C^2+\tau^2} \mathbf{B}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Teoremde bahsedilen $\tilde{\alpha}$ eğrisinin birim hızlı timelike bir eğri olduğu göstermek için $\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_L$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_L &= \left(\frac{1}{C^2 + \tau^2} \right)^2 \left(-(\tau^2 + C^2 \cosh 2\phi)^2 + (C^2 \sinh 2\phi)^2 + (2C\tau \sinh \phi)^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{C^2 + \tau^2} \right)^2 \left(-(\tau^4 + C^4 \cosh^2 2\phi + 2C^2\tau^2 \cosh 2\phi) + (C^4 \sinh^2 2\phi) \right. \\
&\quad \left. + (4C^2\tau^2 \sinh^2 \phi) \right) \\
&= \frac{1}{C^4 + \tau^4 + 2C^2\tau^2} \left(-\tau^4 - C^4 \cosh^2 2\phi - 2C^2\tau^2 \cosh 2\phi + C^4 \sinh^2 2\phi \right. \\
&\quad \left. + 4C^2\tau^2 \sinh^2 \phi \right) \\
&= \frac{1}{C^4 + \tau^4 + 2C^2\tau^2} \left(-\tau^4 - C^4(\cosh^2 2\phi - \sinh^2 2\phi) \right. \\
&\quad \left. - 2C^2\tau^2(\cosh 2\phi - 2 \sinh^2 \phi) \right) \\
&= \frac{1}{C^4 + \tau^4 + 2C^2\tau^2} (-\tau^4 - C^4 - 2C^2\tau^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eğrinin Frenet - Serret vektörlerini hesaplarırken kısalık için

$$\rho = \frac{2C}{C^2 + \tau^2}, \quad X = \cosh \phi, \quad Y = \sinh \phi$$

gösterimleri kullanılacaktır. Bu durumda $\tilde{\alpha}$ eğrisinin teğet vektörü

$$\tilde{\mathbf{T}} = (1 + \rho CY^2) \mathbf{T} + (C\rho XY) \mathbf{N} + (\rho Y\tau) \mathbf{B}$$

olarak ifade edilir. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin teğet vektörünün türevi

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{T}}' &= (2\rho CXY) \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T} + (1 + \rho CY^2) \mathbf{T}' + C\rho(YY + XX) \frac{d\phi}{ds} \mathbf{N} \\
&\quad + (C\rho XY) \mathbf{N}' + \rho\tau X \frac{d\phi}{ds} \mathbf{B} + (\rho Y\tau) \mathbf{B}' \\
&= (2\rho CXY)(CY - \kappa) \mathbf{T} + (1 + \rho CY^2) \kappa \mathbf{N} + C\rho(YY + XX)(CY - \kappa) \mathbf{N} \\
&\quad + (C\rho XY) \kappa \mathbf{T} + (C\rho XY) \tau \mathbf{B} + \rho\tau X(CY - \kappa) \mathbf{B} - (\rho Y\tau) \tau \mathbf{N} \\
&= (2\rho C^2 XY^2) \mathbf{T} - (2\kappa\rho CXY) \mathbf{T} + \kappa \mathbf{N} + C\rho(2X^2 - 1)(CY - \kappa) \mathbf{N} \\
&\quad + (\kappa C\rho XY) \mathbf{T} + \tau(C\rho XY) \mathbf{B} + (\tau\rho CXY) \mathbf{B} - (\kappa\tau\rho X) \mathbf{B} - (\tau^2\rho Y^2) \mathbf{N} \\
&= [(2\rho C^2 XY^2) - (2\kappa\rho CXY) + (\kappa C\rho XY)] \mathbf{T} \\
&\quad + [\kappa + (2\rho C^2 X^2 Y) - (\rho C^2 Y) - (2\kappa\rho CX^2) - (\kappa\rho C) - (\tau^2\rho Y^2)] \mathbf{N} \\
&\quad + [(\tau\rho CXY) + (\tau\rho CXY) - (\kappa\tau\rho X)] \mathbf{B} \\
&= [(2\rho C^2 XY^2) - (\kappa C\rho XY)] \mathbf{T} \\
&\quad + [\kappa + (2\rho C^2 X^2 Y) - (2\kappa\rho CX^2) - (\kappa\rho C) - \rho(C^2 + \tau^2)] \mathbf{N} \\
&\quad + [(2\tau\rho CXY) - (\kappa\tau\rho X)] \mathbf{B} \\
&= [\rho CXY(2CY - \kappa)] \mathbf{T} + [\kappa + \kappa\rho C(Y^2 - 2X^2 + 1) + (2\rho C^2 X^2 Y) - 2CY] \mathbf{N} \\
&\quad - [\tau\rho X(2CY - \kappa)] \mathbf{B} \\
&= [\rho CXY(2CY - \kappa)] \mathbf{T} + [\kappa + \kappa\rho C(Y^2 - 2X^2 + (X^2 - Y^2)) + (2\rho C^2 X^2 Y) - 2CY] \mathbf{N} \\
&\quad - [\tau\rho X(2CY - \kappa)] \mathbf{B} \\
&= [\rho CXY(2CY - \kappa)] \mathbf{T} + [\kappa - \kappa\rho CX^2 + (2\rho C^2 X^2 Y) - 2CY] \mathbf{N} - [\tau\rho X(2CY - \kappa)] \mathbf{B} \\
&= [\rho CXY(2CY - \kappa)] \mathbf{T} + [\kappa - \rho CX^2(\kappa - 2CY) - 2CY] \mathbf{N} - [\tau\rho X(2CY - \kappa)] \mathbf{B} \\
&= [\rho CXY(2CY - \kappa)] \mathbf{T} + [(\rho CX^2 - 1)(2CY - \kappa)] \mathbf{N} - [\tau\rho X(2CY - \kappa)] \mathbf{B} \\
&= (\kappa - 2CY)[(-C\rho XY) \mathbf{T} + (1 - \rho CX^2) \mathbf{N} + (\tau\rho X) \mathbf{B}]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\tilde{\mathbf{T}}' = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{N}}$ olduğundan

$$\tilde{\kappa} = \|\tilde{\mathbf{T}}'\|_L = \kappa - 2CY = \kappa - 2C \sinh \phi$$

elde edilir. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin normal vektör alanı

$$\tilde{\mathbf{N}} = (-C\rho XY)\mathbf{T} + (1 - \rho CX^2)\mathbf{N} + (\tau\rho X)\mathbf{B}$$

olarak bulunur. Binormal vektör alanı ise, $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{T}} \times_L \tilde{\mathbf{N}}$ eşitliğinden

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ 1 + \rho CY^2 & C\rho XY & \rho Y\tau \\ -C\rho XY & 1 - \rho CX^2 & \tau\rho X \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = (-2C\rho^2\tau X^2 Y + \rho Y\tau)\mathbf{T} + (2C\rho^2\tau XY^2 + \tau\rho X)\mathbf{N} + (1 + \rho CY^2 - \rho CX^2)\mathbf{B}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \sinh^2 \phi (1 - \cos \theta)\mathbf{T} + \sinh \phi \cosh \phi (1 - \cos \theta)\mathbf{N} + \sinh \phi \sin \theta \mathbf{B},$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \sinh \phi \cosh \phi (1 - \cos \beta)\mathbf{T} - \cosh^2 \phi (1 - \cos \theta)\mathbf{N} - \cosh \phi \sin \theta \mathbf{B},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) + \cos \theta \mathbf{B}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan $\tau = \tilde{\tau}$ olduğu görülür (Özdemir & Çöken, 2009).

Teorem 5.1.2 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir timelike eğri olmak üzere, α ve $\tilde{\alpha}$ eğrileri arasında bir u dönüşümü

$$\tilde{\alpha}(s) = u(\alpha(s))$$

şeklinde olsun. α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları için aşağıdakiler sağlansın.

i) $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin oskütör düzlemlerinin kesişimi; eğriler üzerindeki noktaları birleştiren doğru olup $[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası ρ sabit uzunluğa sahiptir.

ii) $\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)$ vektörü ile eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açı ϕ ve aynı olup $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

iii) Eğrilerin binormalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$ sabit olsun.

Bu durumda α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin burulması $\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{\rho}$ sabitine eşittir. Bununla birlikte

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

şeklindedir (Özdemir & Çöken, 2009).

İspat: $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet - Serret çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet - Serret çatısı da $\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarını birleştiren doğru parçasının birim doğrultusu

$$F_1 = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N} \quad (5.1.1)$$

olarak gösterelim.

$$F_2 = \sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N} \quad (5.1.2)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$F_1 = \cosh \phi \tilde{\mathbf{T}} + \sinh \phi \tilde{\mathbf{N}} \quad (5.1.3)$$

$$\tilde{F}_2 = \sinh \phi \tilde{\mathbf{T}} + \cosh \phi \tilde{\mathbf{N}} \quad (5.1.4)$$

olarak yazılabilir. Tüm vektörler F_1 vektörüne dik olduğundan,

$$\tilde{F}_2 = \cos \theta F_2 - \sin \theta \mathbf{B} \quad (5.1.5)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta F_2 + \cos \theta \mathbf{B} \quad (5.1.6)$$

eşitlikleri vardır. (5.1.5) ve (5.1.6) denklemlerde F_2 yerine (5.1.2) denklem yazıldığında,

$$\tilde{F}_2 = \cos \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B}$$

elde edilir. Buradan matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix}$$

ifade edilir. O halde

$$\tilde{\mathbf{T}} = \cosh \phi F_1 + \sinh \phi \tilde{F}_2$$

$$= \cosh \phi (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}) - \sinh \phi (\cos \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B})$$

$$= \cosh^2 \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \cosh \phi \mathbf{N} - \sinh \phi \cos \theta \sinh \phi \mathbf{T} - \sinh \phi \cos \theta \cosh \phi \mathbf{N}$$

$$+ \sinh \phi \sin \theta \mathbf{B} + \sinh^2 \phi \mathbf{T} - \sinh^2 \phi \mathbf{T}$$

$$= \mathbf{T} + \sinh^2 \phi (1 - \cos \theta) \mathbf{T} + \sinh \phi \cosh \phi (1 - \cos \theta) \mathbf{N} + (\sinh \phi \sin \theta) \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = -\sinh \phi F_1 + \cosh \phi \tilde{F}_2$$

$$= -\sinh \phi (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}) + \cosh \phi (\cos \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) - \sin \theta \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned}
&= -\sinh \phi \cosh \phi \mathbf{T} - \sinh^2 \phi \mathbf{N} + \cosh \phi \cos \beta \sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \cos \theta \cosh \phi \mathbf{N} \\
&\quad - \cosh \phi \sin \theta \mathbf{B} + \cosh^2 \phi \mathbf{N} - \cosh^2 \phi \mathbf{N} \\
&= \mathbf{N} - \sinh \phi \cosh \phi (1 - \cos \theta) \mathbf{T} - \cosh^2 \phi (1 - \cos \theta) - \cosh \phi \sin \theta \mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sin \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) + \cos \theta \mathbf{B}$$

olarak Frenet - Serret çatisı bulunur. $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin arasında kalan doğrunun birim doğrultusu (5.1.1) denkleminde verilmişti. Bu durumda

$$\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s) = \rho(\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

ve

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho(\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

elde edilir. O halde

$$\langle \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s), \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s) \rangle_L = \langle \rho \cosh \phi \mathbf{T} + \rho \sinh \phi \mathbf{N}, \rho \cosh \phi \mathbf{T} + \rho \sinh \phi \mathbf{N} \rangle_L$$

olarak bulunur. Bu Lorentz çarpımında iki lineerlik olduğu için

$$\langle \rho \cosh \phi \mathbf{T}, \rho \cosh \phi \mathbf{T} \rangle_L = \rho^2 \cosh^2 \phi \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle_L = -\rho^2 \cosh^2 \phi \quad (5.1.7)$$

$$\langle \rho \sinh \phi \mathbf{N}, \rho \sinh \phi \mathbf{N} \rangle_L = \rho^2 \sinh^2 \phi \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L = \rho^2 \sinh^2 \phi \quad (5.1.8)$$

eşitlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\langle \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s), \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s) \rangle_L = -\rho^2 \cosh^2 \phi + \rho^2 \sinh^2 \phi = -\rho^2$$

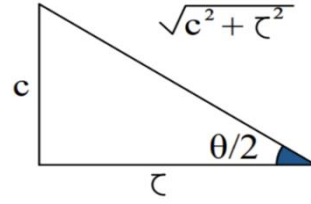
elde edilir. Her iki tarafında türevinden,

$$2\langle \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s), \tilde{\alpha}'(s) - \alpha'(s) \rangle_L = 0$$

sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumda $\tilde{\alpha}$ eğrisinin birim hızlı bir timelike eğri olduğu görülmüştür. Frenet - Serret formülleri kullanılarak eğrilik önceki teoreme benzer şekildedir. Eğrilerin burulması,

$$\tau = \tilde{\tau} = \left| C \cot \frac{\theta}{2} \right|$$

şeklinde olup, burada θ açısı, α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin binormalleri arasında kalan açıya eşittir. Bu açıyı aşağıdaki şekilde ifade edelim.



Şekil 5.1. $\cot \frac{\theta}{2}$ açısının dik üçgende gösterimi.

$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{\tau}{c}$ olduğundan $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{\sqrt{\tau^2 + c^2}}$ ve $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + c^2}}$ olarak bulunur. Yarım açı formüllerinden

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \frac{c}{\sqrt{\tau^2 + c^2}} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + c^2}} = \frac{2c\tau}{\tau^2 + c^2}$$

elde edilir. O halde $\sin \theta = \rho\tau$ olduğundan

$$\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{\rho}$$

olarak eğrinin burulması elde edilir. Bu dönüşüm

$$\tilde{\alpha} = u(\alpha) = \alpha + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

şeklinde ifade edilir ve ispat biter (Özdemir & Çöken, 2009).

Teorem 5.1.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun öyle ki binormal vektörü ise timelike olsun. Bu durumda

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$$

eğrisi de sabit burulma değerine $\tau = \tilde{\tau}$ ve eğrilik değerine $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$ sahip, timelike binormal vektörü olan yeni bir birim hızlı spacelike eğridir. Burada C , sabit bir değeri

$$\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$$

denklemini sağlar ve başlangıç şartı $\phi(t_0) = \phi_0$ olarak verilmiştir. Ayrıca, eğrilerin burulması,

$$\tau = \tilde{\tau} = \left| C \coth \frac{\theta}{2} \right|$$

şeklinde olup, θ açısı, eğrilerin binormalleri arasındaki sabit açıdır. (Özdemir & Çöken, 2009).

İspat: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun öyle ki binormal vektörü timelike olsun. $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$ eşitliğini kullanarak, $\tilde{\alpha}$ eğrisinin hız vektörü

$$\tilde{\alpha}' = \left(\frac{C^2 \cos 2\phi - \tau^2}{C^2 - \tau^2} \right) \mathbf{T} + \left(\frac{C^2 \sin 2\phi}{C^2 - \tau^2} \right) \mathbf{N} + \left(\frac{2C\tau \sin \phi}{C^2 - \tau^2} \right) \mathbf{B}$$

olarak bulunur. Böylece, $\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_L = 1$ olduğundan, $\tilde{\alpha}$ eğrisinin birim hızlı spacelike eğri olduğu görülür. İfadeleri kısaltmak için

$$\rho = \frac{2C}{C^2 - \tau^2}, X = \cosh \phi, Y = \sinh \phi$$

olarak gösterelim. Bu durumda $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet - Serret vektörleri,

$$\tilde{\mathbf{T}} = (1 - \rho C Y^2) \mathbf{T} + (C \rho X Y) \mathbf{N} + (\rho Y \tau) \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = (C \rho X Y) \mathbf{T} + (1 - \rho C X^2) \mathbf{N} - (\tau \rho X) \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{N}} \times_L \tilde{\mathbf{T}} = (\rho Y \tau) \mathbf{T} - (\tau \rho X) \mathbf{N} + (1 - \rho C) \mathbf{B}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$, $\rho = \frac{2C}{C^2 + \tau^2}$ eşitlikleri kullanılarak, $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$ ve $\tau = \tilde{\tau}$ bulunmuştur. Ayrıca, \mathbf{B} ve $\tilde{\mathbf{B}}$ arasındaki açı θ olduğundan, $\cosh \theta = 1 - \rho C$ ve $\tau = \frac{\sinh \theta}{\rho} = -C \coth \frac{\theta}{2}$ ifadeleri elde edilmiştir. Frenet - Serret vektörlerinde bulunan değerler yerine yazıldığında,

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \sin^2 \phi (1 - \cosh \theta) \mathbf{T} + \cos \phi \sin \phi (1 - \cosh \theta) \mathbf{N} - \sin \phi \sinh \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} + \sin \phi \cos \phi (1 - \cosh \theta) \mathbf{T} - \cos^2 \phi (1 - \cosh \theta) \mathbf{N} + \cos \phi \sinh \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sinh \theta (-\sin \phi \mathbf{T} + \cos \phi \mathbf{N}) + \cosh \theta \mathbf{B}$$

olarak elde edilmiştir (Özdemir & Çöken, 2009).

Teorem 5.1.4 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun öyle ki normal vektörü ise timelike olsun. Bu durumda

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

eğrisi de sabit burulma değerine $\tau = \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$ eğrilik değerine sahip, timelike normal vektörü olan birim hızlı spacelike eğridir. Burada C , sabit bir değeri

$$\frac{d\phi}{ds} = C \sinh \phi - \kappa$$

eşitliğini sağlar ve başlangıç koşulu $\phi(t_0) = \phi_0$ olarak verilmiştir. Ayrıca, eğrilerin burulması

$$\tau = \tilde{\tau} = C \tanh \frac{\theta}{2}$$

şeklinde olup, θ açısı, eğrilerin binormalleri arasındaki sabit açıdır (Özdemir & Çöken, 2009).

İspat: Önceki teoremin ispatına benzer şekilde $\tau = \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$ elde edilebilir. Ayrıca, $\cosh \theta = -1 + \rho C$ eşitliği kullanılarak

$$\tau = \frac{\sinh \theta}{\rho} = C \tanh \frac{\theta}{2}$$

bulunur. Bununla birlikte, $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet - Serret vektörleri

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \sinh^2 \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{T} + \sinh \phi \cosh \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{N} + \sinh \phi \sin \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \sinh \phi \cosh \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{T} - \cosh^2 \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{N} - \cosh \phi \sin \theta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\sin \theta (\sinh \phi \mathbf{T} + \cosh \phi \mathbf{N}) - \cosh \theta \mathbf{B}$$

olarak bulunur (Özdemir & Çöken, 2009).

Teorem 5.1.5 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sabit κ eğriliğine ve sabit τ burulmaya sahip birim hızlı bir spacelike eğri olmak üzere, α ve $\tilde{\alpha}$ eğrileri arasında bir u dönüşümü

$$\tilde{\alpha}(s) = u(\alpha(s))$$

şeklinde olsun. Öyle ki α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları için aşağıdakiler sağlansın.

i) $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin oskülatör düzlemlerinin kesişimi eğriler üzerindeki noktaları birleştiren doğrular olup, $[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası sabit ve ρ uzunluktadır.

ii) $\tilde{\alpha}(s) - \alpha(s)$ vektörü ile eğrinin teğet vektörleri arasındaki açı aynı olup $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ 'dir.

iii) $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrilerinin binormalleri arasındaki $\theta \neq 0$ olmak üzere sabit açı olup, eğrilerin burulmaları aynı sabit değere eşittir ve bu değer $\frac{\sinh \theta}{\rho}$ 'dir.

Eğer α eğrisinin binormal vektörü timelike ise, bu dönüşüm

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer α eğrisinin normal vektörü timelike ise, bu dönüşüm

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

şeklinde ifade edilir (Özdemir & Çöken, 2009).

İspat: Eğer α eğrisinin binormal vektörü timelike ise aşağıdaki vektör eşitlikleri sağlanır:

$$F_1 = \cos \theta \mathbf{T} + \sin \theta \mathbf{N}$$

$$F_2 = -\sin \theta \mathbf{T} + \cos \theta \mathbf{N}$$

$$F_1 = \cos \theta \tilde{\mathbf{T}} + \sin \theta \tilde{\mathbf{N}}$$

$$\tilde{F}_2 = -\sin \theta \tilde{\mathbf{T}} + \cos \theta \tilde{\mathbf{N}}$$

ve

$$\tilde{F}_2 = \cosh \phi F_2 - \sinh \phi \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sinh \phi F_2 + \cosh \phi \mathbf{B}.$$

Bu eşitlikleri kullanarak eğrilerin burulmasının $\frac{\sinh \theta}{\rho}$ değerine eşit olduğu ve Backlund dönüşümünün ise,

$$\tilde{\alpha} = u(\alpha) = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$$

olduğu görülür. Eğer α eğrisinin normal vektörü timelike ise, aşağıdaki vektör eşitlikleri sağlanır:

$$F_1 = \cosh \theta \mathbf{T} + \sinh \theta \mathbf{N}$$

$$F_2 = -\sinh \theta \mathbf{T} + \cosh \theta \mathbf{N}$$

$$F_1 = \cosh \theta \tilde{\mathbf{T}} + \sinh \theta \tilde{\mathbf{N}}$$

$$\tilde{F}_2 = \sinh \theta \tilde{\mathbf{T}} + \cosh \theta \tilde{\mathbf{N}}$$

ve

$$\tilde{F}_2 = \cosh \phi F_2 - \sinh \phi \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sinh \phi F_2 + \cosh \phi \mathbf{B}.$$

Bu eşitlikleri kullanarak eğrilerin burulmasının $\frac{\sinh \theta}{\rho}$ değerine eşit olduğu ve Backlund dönüşümünün ise,

$$\tilde{\alpha} = u(\alpha) = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

olduğu görülür (Özdemir & Çöken, 2009).

Sonuç 5.1.1 Aynı negatif Gauss eğrilik değerlerine sahip iki yüzeyin Backlund dönüşümü, bir yüzeyin asimptotik doğrusunu diğer yüzeyin asimptotik doğrusuna dönüştürür. Bu nedenle, Backlund dönüşümü sabit burulma değerine sahip eğriler için kısıtlanabilir. 3-boyutlu Minkowski uzayındaki null olmayan eğriler için Backlund dönüşümü ifade edilmiştir (Özdemir & Çöken, 2009).

Tablo 5.1. E_1^3 uzayında eğrilerinin Backlund dönüşümleri sınıflandırması

i) Timelike eğriler için Backlund dönüşümü,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 + \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

ii) Timelike normal vektöre sahip spacelike eğriler için Backlund dönüşümü,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$$

iii) Timelike binormal vektöre sahip spacelike eğriler için Backlund dönüşümü,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2C}{C^2 - \tau^2} (\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$$

5.2. Minkowski Uzayında Null Olmayan Yüzeylerin Backlund Dönüşümü

Bu alt bölümde, Minkowski uzayında yer alan ve null olmayan yüzey çiftleri arasındaki Backlund dönüşümü incelenmektedir. Backlund dönüşümleri, diferansiyel geometri bağlamında yüzeyler arası karşılıklı ilişkileri tanımlayan güçlü araçlardan biridir. Özellikle sabit negatif Gauss eğriliğine sahip yüzeyler arasında tanımlanan bu dönüşümler, Lorentz-metrikli uzayda Öklid uzayına kıyasla farklı biçimlerde gerçekleşmektedir. \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* ile gösterilen iki yüzeyin, belirli bir mesafe r ve sabit normal açı θ ile birbirine bağlı olduğu varsayımı altında, bu yüzeyler arasında bir yarı-küresel doğru kongruansı tanımlanabilmektedir. Bu kongruans, her bir noktada tanımlı doğruların ortak geometrik ve analitik özellikler taşımasına olanak tanır. Bu bağlamda, yüzeylerin her birinin sabit ve negatif Gauss eğriliğine sahip olması, bu dönüşümün temel bir sonucudur (Abdel-Baky, 2005).

Minkowski uzayındaki bu tür dönüşümler, yalnızca klasik diferansiyel geometrik yöntemlerle değil, aynı zamanda soliton teorisi ve integrallenebilir sistemlerle de güçlü bağlar kurmakta, böylece hem teorik hem de uygulamalı fizik açısından önemli çıkarımlara imkân tanımaktadır. Bu bölümde sunulan teoremler, Backlund dönüşümlerinin geometrik doğasına ışık tutmakta ve Lorentz yapısı altında bu dönüşümlerin nasıl inşa edileceğini analitik olarak açıklamaktadır.

\mathbb{M} , bir spacelike yüzey olsun. $p \in \mathbb{M}$ noktası seçildiğinde, bu noktadaki teğet düzleme ait bir birim vektör etrafında tanımlanan ortonormal bir hareketli çatı kurulmuştur. Bu çatı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ şeklinde tanımlanır ve bu vektörlere karşılık gelen dual formlar $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ile ifade edilir. Bu tanımlamalarla birlikte, klasik Cartan yapı denklemleri şu şekilde yazılır:

$$dp = \sum_i \omega_i \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \sum_j \omega_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (5.2.1)$$

Buradaki indisler için $1 \leq i, j, k \leq 3$ ve $1 \leq l, m, n \leq 2$ koşulları geçerlidir. Ayrıca, aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır:

$$\omega_{12} + \omega_{21} = 0, \quad \omega_{31} = \omega_{13}, \quad \omega_{32} = \omega_{23} . \quad (5.2.2)$$

Minkowski uzayının diferansiyel yapı denklemleri ise şu şekilde ifade edilir:

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad (5.2.3)$$

yüzey üzerindeki hareketli çatı, normal vektörün e_3 olarak seçildiği biçimde tanımlandığında, bu vektör teğet düzleme dik olduğundan,

$$\omega_3 = 0 \quad (5.2.4)$$

koşulu elde edilir. Bu durumda,

$$0 = d\omega_3 = \sum_l \omega_l \wedge \omega_{l3} \quad (5.2.5)$$

elde edilir. Buradan hareketle ω_{l3} formları ikinci temel form bileşenleri olan h_{lm} ile şu şekilde ifade edilir:

$$\omega_{l3} = \sum_m h_{lm} \omega_m, \quad h_{lm} = h_{ml}. \quad (5.2.6)$$

Ayrıca, (5.2.3)'ün ilk bileşeni kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$d\omega_l = \sum_m \omega_m \wedge \omega_{ml}. \quad (5.2.7)$$

Burada ω_{12} bağlantı formu, (4.2.3) ve (4.2.7) denklemleri kullanılarak belirlenmiştir ve \mathbb{M} üzerinde Levi-Civita bağlantısı altında tanımlanmıştır. Gauss denklemi ise şu şekilde verilir:

$$d\omega_{lm} = \sum_n \omega_{ln} \wedge \omega_{nl} + \Omega_{lm}. \quad (5.2.8)$$

Buradan,

$$\Omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = \omega_{13} \wedge \omega_{23} = K\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (5.2.9)$$

elde edilir. Bu bağlamda K , \mathbb{M} yüzeyinin Gauss eğriliğini olup

$$K = -\det(h_{lm})$$

biçiminde tanımlanır. Son olarak, ikinci temel formla ilişkili diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$d\omega_{l3} = \sum_m \omega_{lm} \wedge \omega_{m3}. \quad (5.2.10)$$

Yukarıda verilen yapı denklemleri aracılığıyla, Backlund teoreminin Minkowski uzayı içerisinde detaylı bir şekilde incelenecektir (Abdel-Baky, 2005).

Teorem 5.2.1. \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* iki spacelike fokal yüzey olmak üzere, bir yarı küresel doğru kongruansı (f) tanımlansın. Bu doğrultuda, kongruansın karşılık gelen noktaları arasındaki mesafe r , normaller arasındaki açı ise θ olmak üzere sabit kabul edilsin. Bu durumda hem

\mathbb{M} hem de \mathbb{M}^* sabit negatif Gauss eğriliğine sahiptir. Bu eğrilik yüzeylerin normalleri arasındaki açığa bağlı olarak

$$K = -\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$$

biçiminde ifade edilir (Abdel-Baky, 2005).

İspat: \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeyleri arasında yarı küresel bir doğru kongruansı bulunduğu varsayalım. $p \in \mathbb{M}$ ve $p^* \in \mathbb{M}^*$ noktası için, bu iki noktayı birleştiren doğru, ilgili yüzeylerde sırasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerine teğet olacak şekilde tanımlansın. Bu ilişki, $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$, $p^* = f(p)$ biçiminde bir difeomorfizm ile gösterilebilir. \mathbb{M} yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ve \mathbb{M}^* yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ çatıları tanımlansın. Bu durumda,

$$\mathbf{e}_1^* = \cos \gamma \mathbf{e}_1 + \sin \gamma \mathbf{e}_2 \quad (5.2.11)$$

şeklinde ifade edilir. Spacelike bir yüzey üzerinde çalışıldığından, \mathbf{e}_3^* ve \mathbf{e}_3 vektörleri timelike vektör olup, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin normal vektörlerdir. Ayrıca,

$$\langle \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_3 \rangle_L = \cosh \theta, \quad \langle \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_3^* \rangle_L = -1 \quad (5.2.12)$$

olduğu bilinir. Burada kullanılan γ ve θ açıları sabittir. Bu durumda \mathbb{M}^* yüzeyinin normal vektörü aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\mathbf{e}_3^* = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 - \cosh \theta \mathbf{e}_3. \quad (5.2.13)$$

Lorentz uzayında hareketli çatının dönme matrisleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ 0 & -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

eşitliği ifade edilir. Burada, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektörleri, \mathbf{e}_3 vektörü doğrultusunda γ ve \mathbf{e}_1 vektörü doğrultusunda θ sabit açıları kadar döndürüldüğünde $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ vektörleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma \cosh \theta & -\cos \gamma \cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sin \gamma \sinh \theta & -\cos \gamma \sinh \theta & -\cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.2.14)$$

$\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ vektörlerinin açılımları yazıldığında,

$$\mathbf{e}_1^* = \cos \gamma \mathbf{e}_1 + \sin \gamma \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2^* = \sin \gamma \cosh \theta \mathbf{e}_1 - \cos \gamma \cosh \theta \mathbf{e}_2 - \sinh \theta \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_3^* = \sin \gamma \sinh \theta \mathbf{e}_1 - \cos \gamma \sinh \theta \mathbf{e}_2 - \cosh \theta \mathbf{e}_3$$

olduğundan, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$x_1 = \sin \gamma \sinh \theta, x_2 = -\cos \gamma \sinh \theta, x_3 = -\cosh \theta. \quad (5.2.15)$$

p , \mathbb{M} yüzeyi üzerinde bir nokta olmak üzere, $p: U \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ şeklinde bir immersion ile verilmiş olsun. Burada U , düzleminin açık bir alt kümesidir. Yani yüzeyin üzerindeki her bir nokta immersion ile ifade edilebilir olup her (u, v) için bir p noktası vardır. Bu durumda \mathbb{M}^* yüzeyi üzerindeki p^* noktası şöyle ifade edilir:

$$p^* = p + r\mathbf{e}_1^*. \quad (5.2.16)$$

Bu eşitliğin diferansiyeli alınırsa,

$$dp^* = dp + r d\mathbf{e}_1^* \quad (5.2.17)$$

elde edilecektir. (5.2.1) ifadesi kullanılarak,

$$dp = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.2.18)$$

elde edilir. Ayrıca

$$dp^* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 + r[d(\cos \gamma \mathbf{e}_1 + \sin \gamma \mathbf{e}_2)]$$

$$dp^* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 + r[-\sin \gamma \mathbf{e}_1 + \cos \gamma d\mathbf{e}_1 + \cos \gamma \mathbf{e}_2 + \sin \gamma d\mathbf{e}_2]$$

elde edilir. (5.2.1) ifadesi kullanılarak,

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_{11} \mathbf{e}_1 + \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3 \quad (5.2.19)$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{22} \mathbf{e}_2 + \omega_{23} \mathbf{e}_3 \quad (5.2.20)$$

olduğu görülür. (4.2.18), (4.2.19) ve (4.2.20) ifadesindeki denklemler (4.2.17)'de yerine yazıldığında, $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$, $\omega_3 = 0$ ve γ açısı sabit bir açı olduğundan,

$$\begin{aligned} dp^* &= (\omega_1 + r\omega_{21} \sin \gamma) \mathbf{e}_1 + (\omega_2 + r\omega_{12} \cos \gamma) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + r(\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

elde edilir. Ayrıca, $\langle dp^*, \mathbf{e}_3^* \rangle_L = 0$ olduğundan bulunan (5.2.21) ifadesinde bulunan denklemde her terim \mathbf{e}_3^* ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} \langle dp^*, \mathbf{e}_3^* \rangle_L &= (\omega_1 + r\omega_{21} \sin \gamma) \sin \gamma \sinh \theta \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_L \\ &\quad - (\omega_2 + r\omega_{12} \cos \gamma) \cos \gamma \sinh \theta \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle_L \\ &\quad - r(\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma) \cosh \theta \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle_L \end{aligned}$$

$$\langle dp^*, e_3^* \rangle_L = (\omega_1 + r\omega_{21} \sin \gamma) \sin \gamma \sinh \theta - (\omega_2 + r\omega_{12} \cos \gamma) \cos \gamma \sinh \theta \\ + r(\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma) \cosh \theta$$

$$\langle dp^*, e_3^* \rangle_L = \omega_1 \sin \gamma \sinh \theta - r\omega_{12} \sin^2 \gamma \sinh \theta - \omega_2 \cos \gamma \sinh \theta - r\omega_{12} \cos^2 \gamma \sinh \theta \\ + r\omega_{13} \cos \gamma \cosh \theta + r\omega_{23} \sin \gamma \cosh \theta$$

elde edilir. Buradan

$$r\omega_{12} = \omega_1 \sin \gamma - \omega_2 \cos \gamma + r \coth \theta (\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma) \quad (5.2.22)$$

olduğu görülür. Elde edilen (5.2.22) ifadesinin diferansiyeli alındığında, r sabit olmak üzere ω_{12} için (5.2.8) numaralı yapı denklemi ve yerine yazıldığında gelen Ω_{12} için de (5.2.9) ifadesi kullanılacaktır. ω_1 ve ω_2 dual formlarının diferansiyeli için (5.2.8) denklemine yerine yazılacaktır. Tüm ifadeler yerine yazılıp sadeleştirildiğinde,

$$r\omega_{13} \wedge \omega_{23} = \omega_{12} \wedge (\omega_1 \cos \gamma + \omega_2 \sin \gamma + r \coth \theta (\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma)) \quad (5.2.23)$$

elde edilir. (5.2.23) ifadesi r ile çarpılıp (5.2.22)'den $r\omega_{12}$ değeri yerine yazıldığında,

$$r^2\omega_{13} \wedge \omega_{23} = (\omega_1 \sin \gamma + \omega_2 \cos \gamma + r \coth \theta (\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma)) \\ \wedge (\omega_1 \cos \gamma + \omega_2 \sin \gamma + r \coth \theta (\omega_{13} \cos \gamma + \omega_{23} \sin \gamma)) \quad (5.2.24)$$

elde edilmiştir. (5.2.7) ve (5.2.10) ifadeleri aracılığıyla,

$$(1 + r^2 K \coth^2 \theta) \omega_1 \wedge \omega_2 = r^2 K \omega_1 \wedge \omega_2 \quad (5.2.25)$$

elde edilir. Böylece, $K = -\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$ elde edilir. (5.2.7) bulunanan denklem aynı zamanda

$$p = p^* + r(-e_1^*)$$

şeklinde de yazılabildiğinden, yani $-e_1^*$ doğrultusunda aynı hesaplamalar \mathbb{M}^* yüzeyi için yapıldığında yine aynı sonuçlar elde edilecektir.

Şu ana kadar spacelike yüzeyler için, negatif Gauss eğriliğinin yarı küresel bir doğru kongransının normal vektörünün timelike olduğu durum incelenmiştir. Şimdi, \mathbb{M} , \mathbb{E}_1^3 içerisinde bir timelike yüzey olsun. \mathbb{M} yüzeyinin bir noktası olan p için, \mathbb{M} üzerinde ve p noktasına teğet olan bir ortonormal çatı seçilsin. Bu durumda normal vektör e_3 spacelike iken diğer vektörler e_1, e_2 ise timelike olacaktır. Seçilen vektörlerden dolayı (5.2.1)-(5.2.11) arasındaki yapı denklemleri aynı şekilde kalır. Ancak bu durumda (5.2.2) yapı denklemi aşağıdaki şekilde güncellenir:

$$\omega_{12} = \omega_{21}, \quad \omega_{31} = \omega_{13}, \quad \omega_{32} + \omega_{23} = 0. \quad (5.2.26)$$

Gauss eğriliği $K = \det(h_{lm})$ olarak hesaplanır.

Teorem 5.2.2 \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* iki timelike fokal yüzey olmak üzere bir yarı küresel doğru kongruansı (f) tanımlansın. Bu doğrultuda, kongruansın karşılık gelen noktaları arasındaki mesafe r ve karşılık gelen normal vektörler arasındaki açı θ olup sabittir.

1.Durum: Eğer $\langle pp^*, pp^* \rangle_L = -r^2$, yani doğru kongruansı timelike ise ve $\langle e_3^*, e_3 \rangle_L = \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$ olmak üzere, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerin Gauss eğriliği $K = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ olup, sabit ve pozitiftir.

2.Durum: Eğer $\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$, yani doğru kongruansı spacelike ise ve $\langle e_3^*, e_3 \rangle_L = \cosh \theta$, $\theta \neq 0$ olmak üzere, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerin Gauss eğriliği $K = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$ olup, sabit ve pozitiftir (Abdel-Baky, 2005).

İspat: 1.Durum: \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* timelike fokal yüzeylerine sahip bir yarı küresel doğru kongruansı (f) ve $p \in \mathbb{M}$, $p^* \in \mathbb{M}^*$ ile ifade edilsin. Karşılık gelen noktaları birleştiren doğru timelike olduğundan, p noktasının bir komşuluğu olan U açık kümesinde, \mathbb{M} yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve \mathbb{M}^* yüzeyi üzerinde $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ çatıları tanımlansın. Bu durumda, e_1 vektörü pp^* doğrultusunda yer alır ve timelike vektördür.

$$e_1^* = \cosh \gamma e_1 + \sinh \gamma e_2 \quad (5.2.27)$$

ifade edilir. \mathbb{M}^* yüzeyinin normal vektörü olan e_3^* vektörü,

$$\langle e_3^*, e_3 \rangle_L = \cos \theta, \langle e_3^*, e_3^* \rangle_L = 1 \quad (5.2.28)$$

olduğu bilinir. Timelike bir yüzey üzerinde çalışıldığından, e_3^* ve e_3 vektörleri spacelike vektör olup, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin normal vektörlerdir. Ayrıca,

$$e_3^* = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cos \theta e_3 \quad (5.2.29)$$

şeklinde ifade edilir. Hareketli çatılar arasındaki bağıntı matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma & 0 \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir, Burada matris çarpımından,

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma & 0 \\ \sinh \gamma \cos \theta & \cosh \gamma \cos \theta & \sin \theta \\ -\sinh \gamma \sin \theta & -\cosh \gamma \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.30)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$e_1^* = \cosh \gamma e_1 + \sinh \gamma e_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^* &= \cos \theta (\sinh \gamma \mathbf{e}_1 + \cosh \gamma \mathbf{e}_2) + \sin \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2^* &= \sinh \gamma \cos \theta \mathbf{e}_1 + \cosh \gamma \cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^* &= -\sin \theta (\sinh \gamma \mathbf{e}_1 + \cosh \gamma \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^* &= -\sinh \gamma \sin \theta \mathbf{e}_1 - \cosh \gamma \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$x_1 = -\sinh \gamma \sin \theta, x_2 = -\cosh \gamma \sin \theta, x_3 = \cos \theta \quad (5.2.33)$$

olarak elde edilmiştir. p , \mathbb{M} yüzeyi üzerinde bir nokta olsun ve \mathbb{M} , $p: U \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ immersionu ile tanımlansın. Burada U , (u, v) düzleminin açık bir alt kümesidir. \mathbb{M}^* yüzeyi, \mathbb{M} yüzeyi ile karşılıklı noktalar arasındaki mesafe r olacak şekilde tanımlanır ve p^* noktası,

$$p^* = p + r\mathbf{e}_1^* \quad (5.2.34)$$

eşitliği ile verilmiştir. Önceki teoreme benzer şekilde

$$dp^* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 + r[\sinh \gamma \mathbf{e}_1 + \cosh \gamma d\mathbf{e}_1 + \cosh \gamma \mathbf{e}_2 + \sinh \gamma d\mathbf{e}_2]$$

olarak bulunur. (5.2.19) ve (5.2.20) yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} dp^* &= (\omega_1 + r\omega_{21} \sinh \gamma) \mathbf{e}_1 + (\omega_2 + r\omega_{21} \cosh \gamma) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + r(\omega_{13} \cosh \gamma + \omega_{23} \sinh \gamma) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

elde edilmiştir ve (5.2.32) eşitliği ile (5.2.35) eşitliği, $\langle dp^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = 0$ olacak şekilde düzenlendiğinde,

$$r\omega_{21} = \omega_1 \sinh \gamma - \omega_2 \cosh \gamma + r \coth \theta (\omega_{13} \cosh \gamma + \omega_{23} \sinh \gamma) \quad (5.2.36)$$

elde edilir. Tekrar (5.2.36) denkleminin diferansiyeli alındığında, (5.2.8) ve (5.2.9) ifadelerini kullanılıp işlemler yerine yazılmıştır. Bu durumda denklemin son hali,

$$r\omega_{23} \wedge \omega_{31} = \omega_{12} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 \cosh \gamma + \omega_2 \sinh \gamma \\ +r \cot \theta (\omega_{13} \cosh \gamma + \omega_{23} \sinh \gamma) \end{pmatrix} \quad (5.2.37)$$

şeklinde elde edilir. (5.2.37) eşitliğinin her iki tarafı r ile çarpılıp elde edilen sonuç (5.2.36)'daki $r\omega_{12}$ değerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} r^2 \omega_{23} \wedge \omega_{31} &= (-\omega_2 \cosh \gamma + \omega_1 \sinh \gamma + r \cot \theta (\omega_{13} \cosh \gamma + \omega_{23} \sinh \gamma)) \wedge \\ &\quad (\omega_1 \cosh \gamma + \omega_2 \sinh \gamma + r \cot \theta (\omega_{23} \cosh \gamma + \omega_{13} \sinh \gamma)) \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirken (5.2.7) ve (5.2.10) ve (5.2.26)'daki yapı denklemleri kullanılacaktır. Son bulunan eşitlik,

$$(1 - r^2 K \cot^2 \theta) \omega_1 \wedge \omega_2 = r^2 K \omega_1 \wedge \omega_2$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$K = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

şeklinde bulunmuştur. Ayrıca M^* yüzeyi içinde,

$$K^* = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

sonucu elde edilmiştir.

2.Durum: Bu durumda karşılıklı noktaları birleştiren doğru kongruansı spacelike olup, p noktasının bir komşuluğu olan U açık kümesinde, M yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve M^* yüzeyi üzerinde $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ çatıları tanımlansın. Bu durumda, e_2 vektörü pp^* doğrultusunda yer alır. Seçilen e_i ve e_i^* çatıları M ve M^* yüzeyleri arasındaki yarı küresel bir doğru kongruansı, $U \subset M$ üzerinde e_i ve e_i^* olacak şekilde ortonormal bir çatı $e_i = e_i^*$ olacak şekilde \mathbb{E}_1^3 uzayında tanımlanmıştır ve,

$$e_3^* = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cosh \theta e_3 \quad (5.2.39)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Birinci durumda olduğu gibi matris gösterimi yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma & 0 \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen matrislerin çarpımından,

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta \cosh \gamma & \cosh \theta \sinh \gamma & \sinh \theta \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma & 0 \\ \cosh \gamma \sinh \theta & \sinh \gamma \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.40)$$

elde edilir. Buradan

$$e_1^* = \cosh \theta \cosh \gamma e_1 + \cosh \theta \sinh \gamma e_2 + \sinh \theta e_3$$

$$e_2^* = \sinh \gamma e_1 + \cosh \gamma e_2$$

$$e_3^* = \cosh \gamma \sinh \theta e_1 + \sinh \gamma \sinh \theta e_2 + \cosh \theta e_3 \quad (5.2.41)$$

olarak bulunur. O halde

$$x_1 = \cosh \gamma \sinh \theta$$

$$x_2 = \sinh \gamma \sinh \theta$$

olarak bulunur. p noktasının diferansiyeli alındığında (5.2.1) yapı denkleminde (5.2.18) sonucuna ulaşılabacaktır. Bu ifade de (5.2.19) ve (5.2.20) yerine koyulduğunda,

$$dp^* = (\omega_1 + r\omega_{21} \cosh \gamma)e_1 + (\omega_2 + r\omega_{12} \sinh \gamma)e_2 + r(\omega_{13} \sinh \gamma + \omega_{23} \cosh \gamma)e_3 \quad (5.2.42)$$

elde edilir. (5.2.41) ve (5.2.42) $\langle dp^*, e_3^* \rangle_L = 0$ olacak şekilde yazılırsa,

$$r\omega_{21} = \omega_2 \sinh \gamma - \omega_1 \cosh \gamma + r \coth \theta (\omega_{23} \cosh \gamma + \omega_{13} \sinh \gamma) \quad (5.2.43)$$

sonucuna ulaşılır. Birinci durumla benzer şekilde (5.2.7), (5.2.10) ve (5.2.26) yapı denklemlerinin de yardımıyla,

$$K = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$$

sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca M^* yüzeyi içinde,

$$K^* = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$$

elde edilmiş olup, ispat tamamlanmıştır (Abdel-Baky, 2005).

6. SONUÇLAR

Bu bölümde, tez kapsamında eğriler ve yüzeyler üzerinde gerçekleştirilen Backlund dönüşümlerine ilişkin elde edilen temel bulgular ve bunların geometrik anlamları sistematik bir biçimde özetlenmiştir. Çalışmanın temel amacı, Öklid ve Minkowski uzaylarında tanımlanan Backlund dönüşümlerinin diferansiyel geometri çerçevesinde incelenmesi ve bu dönüşümlerin eğri ve yüzey yapıları üzerindeki etkilerinin karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesidir.

Öncelikle, sabit burulmalı eğriler ve sabit Gauss eğrilğine sahip yüzeyler için tanımlanan klasik Backlund dönüşümlerinin geometrik ve analitik koşulları ele alınmış, ardından bu dönüşümlerin Minkowski uzayındaki karşılıkları detaylandırılmıştır. Minkowski uzayının Lorentz-metrikli yapısı nedeniyle ortaya çıkan timelike ve spacelike ayrımı, dönüşüm yapılarında önemli farklar meydana getirmekte olup, bu farklar çalışmanın ilerleyen kısımlarında tablolar yardımıyla açıklığa kavuşturulmuştur.

Elde edilen sonuçlar, Backlund dönüşümünün yalnızca yeni geometrik yapıların inşasına olanak tanımakla kalmadığını, aynı zamanda sabit eğrilik ve burulma gibi niteliklerin korunması veya dönüşüme nasıl yansıdığını da göstermektedir. Bu çerçevede, çalışmanın teorik sonuçları hem klasik diferansiyel geometri hem de Lorentz geometrisi bağlamında değerlendirilmeye uygun bir temel sunmaktadır.

Bu bölümde sunulan analizler, çalışmanın özgün katkılarını ve farklı uzaylarda Backlund dönüşümünün yapısal etkilerini bir bütünlük içinde ortaya koymayı amaçlamaktadır.

6.1. Öklid Uzayındaki Sonuçlar

Németh, (1998) çalışmasında, üç boyutlu Öklid uzayında tanımlı birim hızlı eğriler üzerinde gerçekleştirilen Bäcklund dönüşümlerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Bu kapsamda, başlangıç eğrisi $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ile Backlund dönüşüm eğrisi $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ arasındaki ilişki açık bir biçimde ortaya konulmuştur. Eğri üzerindeki karşılık gelen noktalar $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ arasındaki doğrultuyu gösteren birim vektör:

$$F_1(s) = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}$$

şeklinde tanımlanmış. Binormal vektörler arasındaki açı sabit olup

$$\langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle = \cos \theta$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $F_1(s)$ vektörünün her iki eğrinin teğet vektörleriyle yaptığı açı ϕ olarak ifade edilir. Başlangıç eğrisinden yeni bir eğri oluşturulabilmektedir. Bu eğrinin eğriliği $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$ ve burulması $\tilde{\tau} = \tau = \frac{\sin \theta}{r}$ olarak bulunur. Bu bilgiler aşağıda verilen **Tablo 6.1.** ile desteklenmiştir.

Tablo 6.1. \mathbb{E}^3 uzayında eğrilerin Backlund Dönüşümü

\mathbb{E}^3 Uzayında eğri	Verilen Eğri	Backlund Dönüşümü Eğrisi
Eğri temsili	α	$\tilde{\alpha}$
Eğri üzerindeki nokta	$\alpha(s)$	$\tilde{\alpha}(s)$
$[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası	Birim doğrultusu: $F_1 = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}$ Uzunluğu: $\ \alpha(s)\tilde{\alpha}(s)\ = r = \frac{2C}{C^2 + \tau^2}$	
Frenet - Serret çatısı	$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$	$\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$
Binormaller arasındaki bağıntı	$\cos \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle = s b t$	
F_1 ile teğetler arasındaki bağıntı	$\langle F_1, \mathbf{T} \rangle = \langle F_1, \tilde{\mathbf{T}} \rangle = \cos \phi$ ve $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$	
Eğrilik	κ	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$
Burulma	$\tau = \frac{\sin \theta}{r}$	$\tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{r}$
Backlund Dönüşümü	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + r(\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$	

Öklid uzayında tanımlı yarı küresel \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeyleri arasında Backlund dönüşümü $p \in \mathbb{M}$ ve $p^* \in \mathbb{M}^*$ olmak üzere, karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklığın sabit olacak şekilde tanımlanır. Bu durumda

$$\|pp^*\| = r$$

şeklinde olup, her iki yüzeyde karşılık gelen noktalardaki normal vektörler N_p ve N_{p^*} arasındaki açı da sabittir.

$$\langle N_p, N_{p^*} \rangle = \cos \theta$$

eşitliği sağlanmaktadır. Ayrıca, yüzeylerin her ikisinin de Gauss eğriliği sabit $-\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ değerine eşittir. Backlund dönüşümleri sayesinde sabit negatif Gauss eğrilik değerine sahip olan yeni yüzeylerin oluşturulabileceğini ortaya koyulmuştur. Böylece, doğru kongruanslarına dayalı olarak tanımlanan, Öklid uzayındaki yüzeylerin Backlund dönüşümüne özellikleri **Tablo 6.2.** ile verilmiştir.

Tablo 6.2. \mathbb{E}^3 uzayında yüzeylerin Backlund Dönüşümü

\mathbb{E}^3 Uzayında Yüzey	Verilen Yüzey	Backlund Dönüşümü Yüzeyi
Yüzeyin temsili	\mathbb{M}	\mathbb{M}^*
Üzerindeki noktalar	p	p^*
Noktalar arası uzaklık	$\ pp^*\ = r$	
Yüzeylerin verilen noktalardaki normalleri	N_p	N_{p^*}
Normaller arasındaki bağıntı	$\cos \theta = \langle N_p, N_{p^*} \rangle = s b t$	
Gauss eğriliği	$K = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$	$K^* = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$

6.2. Minkowski Uzayındaki Sonuçlar

Bu bölümde (Özdemir & Çöken, 2009) çalışmasındaki, üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında tanımlı olan null olmayan eğriler için Backlund dönüşümleri incelenmiştir.

Birim hızlı timelike $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi ile Backlund dönüşüm eğrisi $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ arasındaki ilişki açık bir biçimde ortaya konulmuştur. Eğri üzerindeki karşılık gelen noktalar $\alpha(s)$ ve $\tilde{\alpha}(s)$ arasındaki doğrultuyu gösteren birim vektör:

$$F_1(s) = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}$$

şeklinde tanımlanmış.

Binormal vektörler arasındaki açı sabit olup

$$\langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L = \cos \theta$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $F_1(s)$ vektörünün her iki eğrinin teğet vektörleriyle yaptığı açı ϕ olarak ifade edilir ve

$$\langle F_1(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L = -\cosh \phi$$

eşitliği sağlanır. Başlangıç eğrisinden yeni bir eğri oluşturulabilmektedir. Bu eğri birim hızlı timelike eğri olup eğriliği $\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$ ve burulması $\frac{\sin \theta}{\rho}$ olarak bulunur. Bu bilgiler aşağıda verilen tablo ile desteklenmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6.3. E_1^3 uzayında timelike eğriler için Backlund dönüşümü

Timelike eğri	Verilen Eğri	Backlund Dönüşümü Eğrisi
Eğri temsili	α	$\tilde{\alpha}$
Eğri üzerindeki nokta	$\alpha(s)$	$\tilde{\alpha}(s)$
$[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası	Birim doğrultusu: $F_1 = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}$ Uzunluğu: $\ \alpha(s)\tilde{\alpha}(s)\ _L = \rho = \frac{2C}{c^2 + \tau^2}$	
Frenet - Serret çatısı	$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$	$\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$
Binormaller arasındaki bağıntı	$\cos \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L = sbt$	
F_1 ile teğetler arasındaki bağıntı	$\langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L = \langle F_1, \tilde{\mathbf{T}} \rangle_L = -\cosh \phi$ ve $\frac{d\phi}{ds} = C \sinh \phi - \kappa$	
Eğrilik	κ	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$
Burulma	$\tau = \frac{\sin \theta}{\rho}$	$\tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{\rho}$
Backlund Dönüşümü	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho(\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$	

Spacelike eğriler için tanımlanan Backlund dönüşümü için iki farklı durum söz konusudur. Her iki durum için ayrı ayrı Backlund dönüşümünün özellikleri aşağıdaki tablolarda ile özetlenmiştir.

Tablo 6.4. Timelike binormal vektöre sahip olan spacelike eğriler için Backlund dönüşümü

Binormali timelike olan spacelike eğri	Verilen Eğri	Backlund Dönüşümü Eğrisi
Eğri temsili	α	$\tilde{\alpha}$
Eğri üzerindeki nokta	$\alpha(s)$	$\tilde{\alpha}(s)$
$[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası	Birim doğrultusu: $F_1 = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}$ Uzunluğu: $\ \alpha(s)\tilde{\alpha}(s)\ _L = \rho = \frac{2C}{c^2 - \tau^2}$	
Frenet - Serret çatısı	$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$	$\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$
Binormaller arasındaki bağıntı	$-\cosh \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L = sbt$	
F_1 ile teğetler arasındaki bağıntı	$\langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L = \langle F_1, \tilde{\mathbf{T}} \rangle_L = -\cos \phi$ ve $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$	
Eğrilik	κ	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$
Burulma	$\tau = \frac{\sinh \theta}{\rho}$	$\tilde{\tau} = \frac{\sinh \theta}{\rho}$
Backlund Dönüşümü	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho(\cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N})$	

Tablo 6.5. \mathbb{E}_1^3 uzayında timelike normal vektöre sahip olan spacelike eğriler için Backlund dönüşümü

Normali timelike olan spacelike eğri	Verilen Eğri	Backlund Dönüşümü Eğrisi
Eğri temsili	α	$\tilde{\alpha}$
Eğri üzerindeki nokta	$\alpha(s)$	$\tilde{\alpha}(s)$
$[\alpha(s)\tilde{\alpha}(s)]$ doğru parçası	Birim doğrultusu: $F_1 = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}$ Uzunluğu: $\ \alpha(s)\tilde{\alpha}(s)\ _L = \rho = \frac{2C}{c^2 - \tau^2}$	
Frenet - Serret çatısı	$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$	$\{\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$
Binormaller arasındaki bağıntı	$-\cosh \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L = sbt$	
F_1 ile teğetler arasındaki bağıntı	$\langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L = \langle F_1, \tilde{\mathbf{T}} \rangle_L = -\cosh \phi$ ve $\frac{d\phi}{ds} = C \sin \phi - \kappa$	
Eğrilik	κ	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$
Burulma	$\tau = \frac{\sinh \theta}{\rho}$	$\tilde{\tau} = \frac{\sinh \theta}{\rho}$
Backlund Dönüşümü	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho(\cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N})$	

Abdel-Baky (2005) çalışmasında, spacelike yüzeyler için gerçekleştirilen Backlund dönüşümü ele alınmıştır. Verilen bir spacelike yüzey \mathbb{M} ve dönüşüm sonrası elde edilen yüzey \mathbb{M}^* arasında, her bir $p \in \mathbb{M}$ noktasına karşılık gelen $p^* \in \mathbb{M}^*$ noktasıyla birleştirilerek oluşturulan doğru parçası, sabit uzunlukta bir yarı küresel doğru kongruansı tanımlar ve bu mesafe:

$$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$$

ile ifade edilir. Her iki yüzeyde tanımlı hareketli çatılar $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ olmak üzere, burada e_3 ve e_3^* vektörleri sırasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin normal vektörlerini temsil etmektedir. Bu normal vektörler arasındaki Lorentz çarpım hiperbolik açıya karşılık gelmekte ve,

$$\langle e_3, e_3^* \rangle_L = \cosh \theta$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu ifade, normallerin sabit bir hiperbolik açıyla ilişkili olduğunu göstermektedir. Dönüşüm öncesi ve sonrası yüzeylerin her ikisinin de sabit negatif Gauss eğriliğine sahip olmasıdır. Bu eğrilik değeri,

$$K^* = -\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$$

olarak ifade edilmiştir. Sonuç olarak, **Tablo 6.6.** aracılığıyla gösterilen bu bağıntılar, spacelike yüzeyler arasında gerçekleştirilen Backlund dönüşümünü kısaca özetler.

Tablo 6.6. Spacelike yüzey için Backlund dönüşümü

Spacelike Yüzey	Verilen Yüzey	Backlund Dönüşümü Yüzeyi
Yüzeyin temsili	\mathbb{M}	\mathbb{M}^*
Üzerindeki noktalar	p	p^*
Noktalar arası uzaklık	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$	
Hareketli Çatı	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$
Yüzeylerin verilen noktalardaki normalleri	e_3	e_3^*
Normaller arasındaki açı	$\langle e_3, e_3^* \rangle_L = \cosh \theta$	
Gauss eğriliği	$K = -\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$	$K^* = -\frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$

Timelike yüzeyler üzerinde tanımlı Backlund dönüşümü iki farklı durumda incelenmiştir. Birinci durumda doğru kongruansı timelike olup, bu duruma dair sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6.7. Doğru kongruansı timelike olan timelike yüzey için Backlund dönüşümü.

Doğru kongruansı timelike olan timelike yüzey	Verilen Yüzey	Backlund Dönüşümü Yüzeyi
Yüzeyin temsili	M	M^*
Üzerindeki noktalar	p	p^*
Noktalar arası uzaklık	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = -r^2$	
Hareketli Çatı	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$
Yüzeylerin verilen noktalardaki normalleri	e_3	e_3^*
Normaller arasındaki açı	$\langle e_3, e_3^* \rangle_L = \cos \theta$	
Gauss eğriliği	$K = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$	$K^* = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$

İkinci durumda ise doğru kongruansı spacelike olup, normaller arasındaki açı bu kez hiperbolik açı olarak tanımlanır. Bu durum için timelike yüzeylerinin Backlund dönüşümlerinin özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6.8. Doğru kongruansı spacelike olan timelike yüzey için Backlund dönüşümü.

Doğru kongruansı spacelike olan timelike yüzey	Verilen Yüzey	Backlund Dönüşümü Yüzeyi
Yüzeyin tipi	Timelike	Timelike
Yüzeyin temsili	M	M^*
Üzerindeki noktalar	p	p^*
Noktalar arası uzaklık	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$	
Hareketli Çatı	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$
Yüzeylerin verilen noktalardaki normalleri	e_3	e_3^*
Normaller arasındaki açı	$\langle e_3, e_3^* \rangle_L = \cosh \theta$	
Gauss eğriliği	$K = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$	$K^* = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$

6.3. Karşılaştırmalı Sonuçlar

\mathbb{E}_1^3 uzayında tanımlı olan birim hızlı eğriler için gerçekleştirilmiş olan Backlund dönüşümleri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Ele alınan üç farklı durumdaki eğrilerin Backlund dönüşümünün özellikleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 6.9. \mathbb{E}_1^3 Uzayındaki eğrilerin karşılaştırılması.

\mathbb{E}_1^3 Uzayında eğri	Timelike eğri	Timelike binormali spacelike eğri	Timelike binormali spacelike eğri
Binormaller arasındaki açı	$\cos \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L$	$-\cosh \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L$	$-\cosh \theta = \langle \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}} \rangle_L$
Karşılıklı noktaların birim doğrultusu	$F_1 = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}$	$F_1 = \cos \phi \mathbf{T} + \sin \phi \mathbf{N}$	$F_1 = \cosh \phi \mathbf{T} + \sinh \phi \mathbf{N}$
Karşılıklı noktalar arası sabit uzaklık	$\rho = \frac{2c}{c^2 + \tau^2}$	$\rho = \frac{2c}{c^2 - \tau^2}$	$\rho = \frac{2c}{c^2 - \tau^2}$
F_1 ile teğetin yaptığı açı	$\cosh \phi = \langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L$	$\cos \phi = \langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L$	$\cosh \phi = \langle F_1, \mathbf{T} \rangle_L$
Burulma	$\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sin \theta}{\rho}$	$\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sinh \theta}{\rho}$	$\tau = \tilde{\tau} = \frac{\sinh \theta}{\rho}$
Eğrilik	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sin \phi$	$\tilde{\kappa} = \kappa - 2C \sinh \phi$
Backlund dönüşümü	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho F_1(s)$	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho F_1(s)$	$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho F_1(s)$

Timelike ve spacelike yüzeyler için verilen Backlund dönüşümlerinin özellikleri aşağıdaki tabloda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Tablo 6.10. \mathbb{E}_1^3 Uzayındaki yüzeylerin karşılaştırılması

Özellik	Timelike yüzey (1. durum)	Timelike yüzey (2. durum)	Spacelike yüzey
Doğru kongruansı tipi	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = -r^2$	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$	$\langle pp^*, pp^* \rangle_L = r^2$
pp^* doğrultusu	Timelike	Spacelike	Spacelike
Normaller arasındaki açı	$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* \rangle_L = \cos \theta$	$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* \rangle_L = \cos \theta$	$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* \rangle_L = \cosh \theta$
Gauss eğriliği	$K = K^* = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$	$K = K^* = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$	$K = K^* = \frac{\sinh^2 \theta}{r^2}$

7. KAYNAKLAR

- Abdel-Baky, R. A., 2005, The Backlund's theorem in Minkowski 3-space \mathbb{R}_1^3 , *Applied mathematics and computation*, 160(1), 41-50.
- Alluhaibi, N., & Abdel-Baky, R. A., 2022, Timelike W-Surfaces in Minkowski 3-Space \mathbb{R}_1^3 and the Sinh-Gordon Equation, *Journal of Applied Mathematics*, 2022(1), 7998748.
- Aminov, Y., & Sym, A., 2000, On Bianchi and Bäcklund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 , *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 3, 75-89.
- Bäcklund, A. V., 1880, Zur theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, *Mathematische Annalen*, 17(3), 285-328.
- Calini, A., & Ivey, T., 1998, Bäcklund transformations and knots of constant torsion, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 7(06), 719-746.
- Chern, S. S., & Terng, C. L., 1980, An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry, *Rocky Mountain J. Math.*, 10(4), 105-124.
- Do Carmo, M. P., 2016, *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications.
- Eisenhart, L. P., 2013, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Courier Corporation.
- Erdoğan, M., & Özdemir, M., 2018, On Bäcklund Transformation Between Timelike Curves in Minkowski Space-Time, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(3), 1143-1150.
- Erdoğan, M., & Yavuz, A., 2022, On Backlund transformation and motion of null Cartan curves, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19(01), 2250014.
- İnalçık, A., 2014, *3-Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Yüzeylerin Gauss Denklemleri* (Doctoral dissertation, Sakarya Üniversitesi (Turkey)).
- Karacan, M. K., & Tunçer, Y., 2012, Bäcklund Transformations According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, In *Siauliai Mathematical Seminar*, 7(15).
- Karacan, M. K., & Tunçer, Y., 2015, Bäcklund transformations according to Bishop frame in \mathbb{E}_1^3 , *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 19(2), 75-85.
- Kelmer, F., & Tenenblat, K., 2024, Superposition Formulae for the Geometric Bäcklund Transformations of the Hyperbolic and Elliptic Sine-Gordon and

- Sinh-Gordon Equations, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 20, 015.
- Kobayashi, S., & Inoguchi, J. I., 2005, Characterizations of Bianchi-Backlund transformations of constant mean curvature surfaces, *International Journal of Mathematics*, 16(2), 101-110.
- Kühnel, W., 2015, *Differential geometry* (Vol. 77), American Mathematical Soc.
- López, R., 2014, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *International electronic journal of geometry*, 7(1), 44-107.
- McNertney, L. V., 1980, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Brown University.
- Nemeth, S., 1998, Backlund transformations of n-dimensional constant torsion curves, *Publicationes Mathematicae*, 53(3-4), 271-279.
- Nemeth, S., 2000, Backlund transformations of constant torsion curves in 3-dimensional constant curvature spaces, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7, 127-138.
- O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics Academic Press, Inc.
- Özdemir, M., 2020, Diferansiyel geometri, *Altın Nokta Basın Yayın*.
- Özdemir, M., & Çöken, A. C., 2009, Bäcklund transformation for non-lightlike curves in Minkowski 3-space, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(4), 2540-2545.
- Özdemir, M., Erdoğan, M., Şimşek, H., & Ergin, A. A., 2014, Bäcklund transformation for spacelike curves in the Minkowski space-time, *Kuwait Journal of Science*, 41(3).
- Palais, R. S., & Terng, C. L., 2006, *Critical point theory and submanifold geometry* (Vol. 1353), Springer.
- Palmer, B., 1990, Bäcklund transformations for surfaces in Minkowski space, *Journal of Mathematical Physics*, 31(12), 2872-2875.
- Per, B., 2015, *Backlund Transformations For Minimal Surfaces*, Linköping University.
- Rogers, C., & Schief, W. K., 2002, *Bäcklund and Darboux transformations: geometry and modern applications in soliton theory* (Vol. 30), Cambridge University Press.
- Shepherd, M. D., 1999, Line congruences as surfaces in the space of lines, *Differential Geometry and its Applications*, 10(1), 1-26.

- Şimşek, H., & Özdemir, M., 2016, Bäcklund's Theorem for n Dimensional Lorentzian Submanifold in the Minkowski Space \mathbb{E}_1^{2n-1} , *Results in Mathematics*, 69, 201-223.
- Tenenblat, K., & Terng, C. L., 1980, Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of \mathbb{R}^{2n-1} *Annals of Mathematics*, 111(3), 477-490.
- Terng, C. L., 2003, Lecture notes on curves and surfaces in \mathbb{R}^3 . *Preliminary Version and in Progress*.
- Tian, C., 1995, *Bäcklund transformation on surfaces with $(k_1 - m)(k_1 - n) = -l^2$* , International Centre for Theoretical Physics.
- Tian, C., 1997, Bäcklund transformation on surfaces with $K = -1$ in $R^{2,1}$, *Journal of Geometry and Physics*, 22(3), 212-218.
- Walrave, J., 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, *Doctoral thesis, KU Leuven, Fac. of Science*.
- Zhou, T. Y., Tian, B., Shen, Y., & Cheng, C. D., 2024, Painlevé analysis, auto-Bäcklund transformations, bilinear form and analytic solutions on some nonzero backgrounds for a (2+ 1)-dimensional generalized nonlinear evolution system in fluid mechanics and plasma physics, *Nonlinear Dynamics*, 112(11), 9355-9365.
- Zuo, D., Chen, Q., & Cheng, Y., 2002, Bäcklund theorems in three-dimensional de Sitter space and anti-de Sitter space, *Journal of Geometry and Physics*, 44(2-3), 279-298.