T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN RİORDAN SIRALARININ DİZİ KARAKTERİZASYONU

Yasemin ALP

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık - 2023

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Yasemin ALP tarafından hazırlanan "*HEMEN HEMEN RİORDAN SIRALARININ DİZİ KARAKTERİZASYONU*" adlı tez çalışması 22/12/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Naim TUĞLU	_______________
Danışman	
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER	_______________
Üye	
Prof. Dr. Miraç ÇETİN KESKİN	_______________
Üye	
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	_______________
Üye	
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU	_______________

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şerife Yurdagül KUMCU

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yasemin ALP

Tarih: 22/12/2023

ÖZET

DOKTORA TEZİ

HEMEN HEMEN RİORDAN SIRALARININ DİZİ KARAKTERİZASYONU

Yasemin ALP

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2023, 62 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Naim TUĞLU
Prof. Dr. Miraç ÇETİN KESKİN
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Riordan sıraları ile ilgili pek çok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmaların bazılarında Riordan sıralarının genelleştirilmeleri ve farklı formları verilmiştir. Bu tezde, Riordan sıralarının farklı formlarından biri olan hemen hemen Riordan sıraları göz önüne alınmıştır. Hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları göz önüne alınarak, hemen hemen Riordan sıralarının dizi karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sırasının tersinin ve iki hemen hemen Riordan sırasının çarpımının dizi karakterizasyonu elde edilmiştir. Tezin son bölümünde ise hemen hemen Riordan sıralarının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları göz önüne alınarak hemen hemen Riordan sıralarının bir diğer karakterizasyonu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen Riordan sıraları, Riordan sıraları, Satır toplamları, $A-$dizisi, $Z-$dizisi, $\omega-$ dizisi

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SEQUENCE CHARACTERIZATION OF ALMOST-RIORDAN ARRAYS

Yasemin ALP

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2023, 62 Pages

Jury
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Naim TUĞLU
Prof. Dr. Miraç ÇETİN KESKİN
Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

A lot of research has been done on Riordan arrays. Some of these studies have given generalizations and different forms of Riordan arrays. In this thesis, almost-Riordan arrays, that are one of the different forms of Riordan arrays, are taken into consideration. Sequence characterizations of almost-Riordan arrays are given by considering the generating functions of A, Z and $\omega-$ sequences of the almost Riordan arrays. In addition, the sequence characterizations of the inverse of the almost-Riordan arrays and product of two almost-Riordan arrays are obtained. In the last part of the thesis, another characterization of almost-Riordan arrays is obtained by considering the generating functions of row sum, alternating row sum and weighted row sum of the almost-Riordan arrays.

Keywords: Almost-Riordan arrays, Riordan arrays, Row sums, $A-$ sequence, $Z-$ sequence, $\omega-$ sequence

ÖNSÖZ

Bu tez, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER'in yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren, bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, desteğini hiç esirgemeyen, her türlü fedakarlığı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Değerli katkılarından ve tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Naim TUĞLU ve Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e, ayrıca görüş ve önerileri ile her zaman destek olan Doç. Dr. Melek ERDOĞDU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca 2211-Yurt İçi Doktora Bursu ile bana sağladığı destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na, teşekkürü bir borç bilirim.

Yasemin ALP
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathcal{R}$	: Riordan grubu
$(g(x), f(x))$	: Riordan sırası
$\overline{f}(x)$	: $f(x)$ fonksiyonunun bileşke tersi
$a\mathcal{R}$	: hemen hemen Riordan grubu
$(a(x)\|g(x), f(x))$	: hemen hemen Riordan sırası
$[x^n]$	: x^n-inci terimin katsayısı
D	: Riordan matrisi
D^{-1}	: Riordan matrisinin tersi
$\overline{D}$	: Riordan matrisinin ilk satırının silinmesiyle oluşan matris
R^+	: D matrisinin satır toplamının üreteç fonksiyonu
R^-	: D matrisinin alterne satır toplamının üreteç fonksiyonu
R^w	: D matrisinin ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonu
S^+	: D^{-1} matrisinin satır toplamının üreteç fonksiyonu
S^-	: D^{-1} matrisinin alterne satır toplamının üreteç fonksiyonu
S^w	: D^{-1} matrisinin ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonu

1. GİRİŞ

Riordan sıraları, Shapiro ve arkadaşları tarafından 1991 yılında tanımlanmıştır. Bu makalede, Riordan sıralarının sonsuz alt üçgen matrisler olduğu ve tanımlanan çarpma işlemine göre Riordan sıralarının kümesinin bir grup teşkil ettiği gösterilmiştir (Shapiro vd., 1991).

Shapiro ve arkadaşları, Riordan sıraları kavramından ilk kez bahsediyor olsa da Riordan sıraları daha önce farklı formlarda literatürde karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmalardan birinde, Shapiro, Pascal matrisine benzer matrisleri Catalan sayıları ile göz önüne almıştır ve özelliklerini incelemiştir. Shapiro, bu makalesinin sonunda bazı açık sorular sormuştur. Bunlardan biri "İlk sütunun üreteç fonksiyonunun basit bir fonksiyonunun, $n-$inci sütununu ürettiği bir aritmetik üçgen teorisi var mıdır?" sorusudur (Shapiro, 1976). Rogers, bu açık probleme "renewal sıralarını" tanımlayarak çözüm getirmiştir (Rogers, 1978).

Riordan sıraları tanımlandığı yıldan beri pek çok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Riordan sıraları, sıklıkla kombinasyonel özdeşliklerin elde edilmesinde kullanılmıştır. Ayrıca, Riordan sıraları Lie grupları ve Lie cebiri ile birlikte ele alınmıştır.

Riordan sırasının kombinasyonel özdeşliklerin elde edilmesinde kullanıldığı çalışmalardan biri Sprugnoli' ye aittir. Sprugnoli, bu çalışmasında Riordan sıralarının temel teoremini göz önüne alarak, Riordan matrisleri için satır, alterne satır, ağırlıklı satır ve köşegen toplamlarını elde etmiştir (Sprugnoli, 1994).

Daha sonraki yıllarda Riordan sıraları üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Riordan sıraları ve Riordan grupları ile ilgili ayrıntılı bilgiye "The Riordan Group and Applications" ve "Riordan Arrays: A Primer" isimli kitaplardan ulaşılabilir (Shapiro vd., 2022; Barry, 2017). Ayrıca, Riordan sıraları ve özellikleri tezin üçüncü bölümünde ayrıntılı olarak incelenecektir.

Riordan sıralarının genelleştirmeleri ve farklı formları da araştırmacılar tarafından çalışılmaktadır. Bunlardan biri Barry tarafından tanımlanan hemen hemen Riordan sıralarıdır. Barry 2016 yılında "On the group of almost-Riordan arrays" adlı makalesinde Riordan sıralarının farklı formlarından biri olan birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıralarını, üçlü kuvvet serileri ile tanımlamıştır. Hemen hemen Riordan sıraları için tanımlanan çarpma işlemine göre hemen hemen Riordan sıralarının kümesinin bir grup teşkil ettiğini göstermiştir. Birinci mertebeden hemen hemen Riordan grubu da Riordan grubuna benzer olarak sonsuz alt üçgen matrislerden oluşmaktadır. $a_0 \neq 0$ olmak üzere, sonsuz hemen hemen Riordan matrisinin $0-$ıncı sütununu üreten üreteç fonksiyonu

$$a(x)$$

ve $k = 1, 2, 3, \ldots$ için $k-$ıncı sütununu üreten üreteç fonksiyonu

$$xg(x)(f(x))^{k-1}$$

dir. Burada $g_0 \neq 0$, $f_0 = 0$ ve $f_1 \neq 0$ olacak şekilde $g(x)$ ve $f(x)$ formal kuvvet serileridir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sıraları $(a(x)|g(x), f(x))$ şeklinde gösterilir (Barry, 2016). Hemen hemen Riordan sıraları ve özellikleri üçüncü bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir.

Bu tezde birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıraları göz önüne alınmıştır. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Tezin ikinci bölümünde, çalışmamızda göz önüne aldığımız kaynaklar hakkında ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, formal kuvvet serileri, üreteç fonksiyonları, Riordan sıraları, hemen hemen Riordan sıraları ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin esas bölümleri dördüncü ve beşinci bölümdür. Dördüncü bölümde, birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları göz önüne alınarak hemen hemen Riordan sıralarının dizi karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sıralarının terslerinin ve iki hemen hemen Riordan sırasının çarpımlarının dizi karakterizasyonları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıraları satır toplamları ile göz önüne alınmıştır. Hemen hemen Riordan sıralarının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları göz önüne alınarak hemen hemen Riordan sıralarının karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sırasının tersi ve iki hemen hemen Riordan sırasının çarpımları da bu toplamlar ile birlikte karakterize edilmiştir. Altıncı bölümde ise, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Yapılan bu tez ile hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizileri tanımlanmış ve bu dizilerin üreteç fonksiyonları dikkate alınarak hemen hemen

Riordan sıralarının karakterizasyonları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Tezin bu kısmı bir makale olarak yayınlanmıştır (Alp ve Kocer, 2023).

Ayrıca, hemen hemen Riordan sıralarının farklı satır toplamları göz önüne alınarak, hemen hemen Riordan sıralarının bir diğer karakterizasyonu elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Riordan sıraları kombinasyonel özdeşliklerin elde edilmesinde güçlü bir araçtır. Birçok araştırmacı Riordan sıraları ve Riordan grupları üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu bölümde, Riordan sıraları üzerine yapılmış olan çalışmalar incelenecektir.

Shapiro ve arkadaşları, Riordan sırası kavramını ilk kez tanımlamışlardır. Riordan çarpımı ile Riordan sıralarının kümesinin bir grup teşkil ettiğini göstermişlerdir. Bu grup Riordan grubu olarak adlandırılmıştır. Ayrıca Pascal matrisinin Riordan gösterimini

$$\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$$

şeklinde elde etmişlerdir (Shapiro vd., 1991).

Riordan sıraları kombinasyonel özdeşliklerin elde edilmesinde sıkça kullanılır. Sprugnoli tarafından $D = (d_{n,k})_{n,k\geq 0} = (g(x), f(x))$ Riordan sırasının satır toplamı

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} = [x^n]\frac{g(x)}{1-f(x)},$$

alterne satır toplamı

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n,k} = [x^n]\frac{g(x)}{1+f(x)},$$

ağırlıklı satır toplamı

$$\sum_{k=0}^{n} k d_{n,k} = [x^n]\frac{g(x)f(x)}{(1-f(x))^2},$$

ve köşegen toplamı

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} = [x^n]\frac{g(x)}{1-xf(x)}$$

şeklinde elde edilmiştir (Sprugnoli, 1994).

Barry, Riordan sıralarının kısmi sütun toplamları üzerinde çalışmıştır. $(g(x), f(x))$ Riordan sırasının kısmi sütun toplamının

$$\left(\frac{g(x)}{1-x}, f(x)\right)$$

şeklinde yine bir Riordan sırası belirttiğini göstermiştir. Kısmi satır toplamının karakterizasyonunu ise

$$(g(x), f(x))\left(\frac{1}{1-x}, x\right)^T$$

şeklinde vermiştir (Barry, 2021).

Mu ve arkadaşları, Riordan satır polinomunu kullanarak satır polinom matrisini tanımlamışlardır. Bu matrisin yine bir Riordan sırası olduğunu göstermişler ve $A, Z-$ dizilerini elde etmişlerdir (Mu vd., 2017).

Merlini ve arkadaşları, Lagrange inversiyon formülünü kullanarak kombinasyonel dizilerin üreteç fonksiyonlarının nasıl bulunacağını ve kombinasyonel toplamların nasıl elde edileceğini göstermişlerdir (Merlini vd., 2006).

Merlini ve arkadaşları, bir diğer çalışmalarında ise katsayı metodunu kullanarak çeşitli kombinasyonel özdeşlikler elde etmişlerdir. Ayrıca, Euler dönüşümünü

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[x^n]f(x)=[x^n]\frac{1}{1-x}f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

şeklinde vermişlerdir (Merlini vd., 2007).

Merlini ve arkadaşları, Riordan sıralarının farklı bir karakterizasyonunu elde etmişlerdir. $D=(d_{n,k})_{n,k\geq 0}=(g(x), f(x))$ Riordan sırası için

$$d_{n+1,0}=z_0d_{n,0}+z_1d_{n,1}+z_2d_{n,2}+\dots$$

eşitliğini sağlayan tek bir $Z=\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ dizisinin olduğunu göstermişlerdir. Bu diziyi Riordan sırasının $Z-$dizisi olarak adlandırmışlardır. Ayrıca

$$g(x)=\frac{d_{0,0}}{1-xZ(f(x))}$$

olarak elde etmişlerdir (Merlini vd., 1997).

He ve Sprugnoli, Riordan sıralarının A ve $Z-$ dizi karakterizasyonlarını göz önüne almışlardır. $A(x)$ ve $Z(x)$, Riordan sırasının A ve $Z-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları ve $y=\frac{x}{A(x)}$ olmak üzere, Riordan sırasının tersinin $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonunu

$$A^*(y)=\frac{1}{A(x)}$$

ve $Z-$ dizisinin üreteç fonksiyonunu

$$Z^*(y)=\frac{-yZ(x)}{x(1-xZ(x))}$$

şeklinde vermişlerdir (He ve Sprugnoli, 2008).

He ve Shapiro, Riordan sıralarının bir başka karaterizasyonunu Riordan sıralarının satır ve alterne satır toplamlarının üreteç fonksiyonlarını kullanarak elde etmişlerdir (He ve Shapiro, 2016).

He, diğer bir çalışmasında Riordan sırasının matris karakterizasyonlarını göz önüne almıştır. Riordan grubunun alt grupları için matris karakterizasyonlarını elde etmiştir. Örneğin, Riordan grubunun Appell alt grubunun matris karakterizasyonunu

$$\begin{pmatrix} z_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde vermiştir (He, 2015).

Shapiro, Riordan grubunun alt gruplarını göz önüne almıştır. Bu alt grupları farklı sayı dizileri ile inceleyerek özelliklerini vermiştir (Shapiro, 2003).

Jean-Louis ve Nkwanta, Riordan grubunun alt gruplarını göz önüne almışlardır ve bu alt grupların özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Riordan grubunun associated, Bell ve derivative alt grupları arasındaki izomorfizmleri elde etmişlerdir (Jean-Louis ve Nkwanta, 2013).

Luzón ve arkadaşları, Riordan alt gruplarının ailesini, r, s reel ya da kompleks sayılar olmak üzere

$$H[r,s] = \left\{ \left(\left(\frac{f(x)}{x} \right)^r (f'(x))^s , f(x) \right) \middle| f_0 = 0, f_1 \neq 0 \right\}$$

şeklinde vermişlerdir (Luzôn vd., 2014).

Barry ve arkadaşları, Luzón ve arkadaşları tarafından verilen Riordan alt gruplarının ailesinin bir genelleştirmesini

$$H[r,s,p] = \left\{ \left(\left(\frac{f(x)}{x} \right)^r (f'(x))^s \left(\frac{f(x)-1}{x-1} \right)^p , f(x) \right) \middle| f_0 = 0, f_1 \neq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlamışlardır (Barry vd., 2021).

Ayrıca farklı kuvvet serileri kullanılarak Riordan sıraları tanımlanmış ve çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarla ilgili ayrıntılı bilgilere (Deutsch ve Shapiro, 2004; Barry, 2007, 2010, 2014; Cheon vd., 2018; He, 2011) çalışmalarından ulaşılabilir.

Wang ve Wang, Riordan sıralarını genelleştirilmiş üreteç fonksiyonlarını kullanarak tanımlamışlardır. Bu çalışmada, genelleştirilmiş Riordan matrisinin $k-$ıncı sütununu üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x)\frac{(f(x))^k}{c_k}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $g_0 \neq 0$, $f_0 = 0$ ve $f_1 \neq 0$ olacak şekilde $g(x)$ ve $f(x)$ genelleştirilmiş kuvvet serileri

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{x^k}{c_k}$$

ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{x^k}{c_k}$$

dir (Wang ve Wang, 2008).

Pascal matrislerinin Riordan gösterimleri kullanılarak yapılan birçok çalışma vardır. Bunlardan biri Barry tarafından yapılmıştır (Barry, 2007). Bir diğeri ise Lee ve Cho tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada genelleştirilmiş Pascal, Fibonacci ve Pell matrislerinin Riordan gösterimleri kullanılarak aşağıda verilen kombinasyonel özdeşlik

$$\binom{n-1}{j-1} = \sum_{k=j}^{n} F_{n-k+1} \left(\binom{k-1}{j-1} - \binom{k-2}{j-1} - \binom{k-3}{j-1} \right)$$

elde edilmiştir (Lee ve Cho, 2008).

Çetin ve arkadaşları, Riordan sıraları için verilen temel teoremi kullanarak harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları için bazı kombinasyonel özdeşlikler elde etmişlerdir (Cetin vd., 2021).

Tuğlu ve arkadaşları, aşağıda verilen elemanlardan oluşan $\mathscr{F}$ kümesini göz önüne almıştır:

$$\frac{tx^m}{(1-x)_F^n} = t \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-m-1}{n-1}_F x^k.$$

Bu küme içinde $*_F : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ ikili işlemini

$$\frac{tx^a}{(1-x)_F^A} *_F \frac{ux^b}{(1-x)_F^B} = \frac{tux^{a+b}}{(1-x)_F^{A+B}}$$

şeklinde tanımlayarak, $(\mathscr{F}, *_F)$ cebirsel yapısının bir monoid olduğunu göstermişlerdir. Bu üreteç fonksiyonunu kullanarak Riordan sırasını tanımlamışlar ve özelliklerini incelemişlerdir (Tuglu vd., 2014).

Tuğlu ve arkadaşları, iki yeni ikili işlem tanımlayarak Riordan sıralarının temel teoreminin $q-$ benzerini vermişlerdir. Ayrıca $q-$ Pascal matrisinin Riordan gösteriminin $q-$ benzerini elde etmişlerdir (Tuglu vd., 2015).

Baran ve Tuğlu, $q-$ Riordan gösterimlerinin teorisini geliştirmişlerdir. Ayrıca, $q-$ matrislerini, $q-$ Riordan gösterimlerini kullanarak elde etmişlerdir (Baran ve Tuglu, 2017).

Peart ve Woan, Hankel matrisin "LDU" ayrışımındaki alt üçgen matrisin ve Riordan matrisinin Stieltjes formunu elde etmişlerdir (Peart ve Woan, 2000).

Deutsch ve arkadaşları, normal ve üstel kuvvet serileri ile tanımlanan Riordan sıralarının üretim matrisini elde etmişlerdir. Bu çalışmada, P sonsuz bir matris, $r_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ şeklinde satır vektörü ve $i \geq 1$ olmak üzere

$$r_i = r_{i-1}P$$

tanımlanmıştır. Buradaki r_i satır vektörlerinin istiflenmesiyle A_P olarak adlandırılan yeni bir matris elde edilmiştir ve P matrisi, A_P matrisinin üretim matrisi olarak adlandırılmıştır (Deutsch vd., 2009).

Bang ve arkadaşları, Riordan sıralarının toplamını göz önüne almışlar ve Riordan sıralarının toplamlarının A ve $Z-$ dizilerini elde etmişlerdir. Ayrıca, Riordan sıraları için

$$Der : (g(x), f(x)) \to (f'(x), xg(x))$$

ve

$$Flip : (g(x), f(x)) \to \left(\frac{f(x)}{x}, xg(x)\right)$$

şeklindeki işlemleri tanımlamışlardır (Bang vd., 2023).

Barry, Riordan sıralarının genelleştirmelerinden biri olan birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıralarını üçlü kuvvet serilerini göz önüne alarak tanımlamıştır (Barry, 2016).

Slowik, hemen hemen Riordan sıralarını göz önüne alarak involüsyonlarını incelemiştir (Slowik, 2021).

Barry ve Pantelidis, hemen hemen Riordan sıraları ile Riordan sıralarının involüsyonlarını ilişkilendirmiştir (Barry ve Pantelidis, 2021).

Cheon ve arkadaşları, Riordan sıralarının ayrışımını göz önüne almışlardır ve Riordan sırasının hemen hemen Riordan sırasına ayrıştırılabileceğini göstermişlerdir (Cheon vd., 2022).

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, kuvvet serileri, üreteç fonksiyonları, katsayı metodu, Riordan sıraları ve birinci mertebeden hemen hemen Riordan sıraları hakkında genel tanım ve teoremler verilecektir.

Teorem 3.1 *R bir halka ve $R[x]$, $R(a_0, a_1, \dots)$ nin elemanlarının dizilerinin bir kümesi olsun. Sonlu sayıdaki i indisleri haricinde bütün $a_i = 0$ olmak üzere $R[x]$ kümesi aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri ile bir halkadır.*

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

ve

$$(a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots).$$

Burada

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$$

şeklindedir. $R[x]$ kümesi polinomlar halkası olarak adlandırılır (Hungerford, 2003).

Teorem 3.2 *R bir halka ve $R[[x]]$, $R(a_0, a_1, \dots)$ nin elemanlarının dizilerinin bir kümesi olsun. $R[[x]]$ kümesi aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri ile bir halkadır.*

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

ve

$$(a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots).$$

Burada

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$$

şeklindedir. $R[[x]]$ kümesi formal kuvvet serilerinin halkası olarak adlandırılır (Hungerford, 2003).

Tanım 3.1 $R(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *nin bir elemanı*

$$x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$$

şeklinde olsun. O zaman

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots) \quad ve \quad x^3 = (0, 0, 0, 1, \ldots)$$

ve

$$x^0 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$$

dır. Bu durumda kuvvet serilerinin diğer bir gösterimi ise

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

şeklindedir (Niven, 1969).

Teorem 3.3 $R[x]$ *polinomlar halkası,* $R[[x]]$ *formal kuvvet serileri halkasının bir alt halkasıdır (Hungerford, 2003).*

Önerme 3.1 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ *formal kuvvet serisinin çarpımsal tersinin olması için gerek ve yeter şart* $f_0 \neq 0$ *olmasıdır (Wilf, 1990).*

Önerme 3.2 $f(x)$ *ve* $g(x)$ *formal kuvvet serileri olsun.* $f(g(x))$ *şeklinde iki formal kuvvet serisinin bileşkesinin tanımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart* $g_0 = 0$ *ya da* $f(x)$ *in bir polinom olmasıdır (Wilf, 1990).*

Önerme 3.3 $f(x)$ *ve* $g(x)$ *formal kuvvet serileri olsun.* $f(g(x)) = x$ *ve* $f_0 = 0$ *ise* $g_0 = 0, f_1 \neq 0$ *ve* $g_1 \neq 0$ *dır (Wilf, 1990).*

Tanım 3.2 x *bir değişken olmak üzere* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

şeklinde bir formal kuvvet serisi ile tanımlanır (Stanley, 2011).

$f(x)$ üreteç fonksiyonunda x^n teriminin katsayısı $[x^n]f(x)$ dir. Yani

$$[x^n]f(x) = f_n \tag{3.1}$$

dir (Graham vd., 1989). Katsayı metodu ile ilgili diğer ifadeler ise

$$[x^n]xf(x) = [x^{n-1}]f(x) \tag{3.2}$$

ve

$$[x^n]f'(x) = (n+1)[x^{n+1}]f(x) \tag{3.3}$$

şeklindedir (Merlini vd., 2007). Ayrıca, $\{f_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n = \frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{3.4}$$

dir (Wilf, 1990).

Şimdi, kuvvet serileri kullanılarak tanımlanan Riordan sıralarının tanımını ve özelliklerini verelim.

Tanım 3.3 *$g_0 \neq 0$, $f_0 = 0$ ve $f_1 \neq 0$ olmak üzere*

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots$$

ve

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$$

kuvvet serileri olsun. $k-$ıncı sütununun üreteç fonksiyonu

$$g(x)(f(x))^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanan matrisler sonsuz boyutlu alt üçgen matrislerdir ve bu matrislere Riordan matrisleri denir. Riordan matrisi kuvvet serilerinin çifti olarak

$$(g(x), f(x))$$

ile gösterilir ve Riordan sırası olarak adlandırılır (Shapiro vd., 1991).

Teorem 3.4 *$(g(x), f(x))$ ve $(h(x), l(x))$ iki Riordan sırası olsun. Riordan sıralarının kümesi*

$$(g(x), f(x))(h(x), l(x)) = (g(x)h(f(x)), l(f(x))) \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir gruptur. Bu grup Riordan grubu olarak adlandırılır ve $\mathcal{R}$ ile gösterilir.

Riordan grubunun birim elemanı

$$I = (1, x) \tag{3.7}$$

dır. $\overline{f}(x)$, $f(x)$'in bileşke tersi olmak üzere $(g(x), f(x))$ Riordan sırasının tersi

$$(g(x), f(x))^{-1} = \left(\frac{1}{g(\overline{f}(x))}, \overline{f}(x)\right) \tag{3.8}$$

dir (Shapiro vd., 1991).

Riordan sıralarının temel teoremi olarak adlandırılan teorem Shapiro ve arkadaşları tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.5 $(g(x), f(x))$ *Riordan sırası ve* $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ *sütun vektörünün üreteç fonksiyonu* $A(x)$ *olsun. O zaman Riordan sırası ile sütun vektörünün çarpımı*

$$(g(x), f(x))A(x) = g(x)A(f(x)) \tag{3.9}$$

dir (Shapiro vd., 1991).

Teorem 3.6 $D = (d_{n,k})_{n,k\geq 0} = (g(x), f(x))$ *Riordan sırası ve* $A(x)$, $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ *dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. O zaman*

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}a_k = [x^n]g(x)A(f(x)) \tag{3.10}$$

dir (Sprugnoli, 1994).

$\mathcal{R}$ Riordan grubunun alt grupları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları kullanılarak, Riordan grubunun bazı önemli alt grupları aşağıdaki tabloda verilmiştir (Barry, 2017; Barry vd., 2021; Jean-Louis ve Nkwanta, 2013; Luzôn vd., 2014; Shapiro, 2003; Shapiro vd., 2022).

Alt grubun ismi	Alt grubun Riordan gösterimi
Appell alt grup	$\{(g(x), x)\}$
$c-$ Appell alt grup	$\{(g(x), cx) \mid c \neq 0\}$
associated alt grup	$\{(1, f(x)\}$
Bell alt grup	$\{(g(x), xg(x))\} = \left\{\left(\frac{f(x)}{x}, f(x)\right)\right\}$
$c-$ Bell alt grup	$\{(g(x), cxg(x)) \mid c \neq 0\} = \left\{\left(\frac{f(x)}{x}, cf(x)\right) \mid c \neq 0\right\}$
power Bell alt grup	$\{(g(x), xg^r(x))\}$
checkerboard alt grup	$\{(g(x), f(x)) \mid g(x) = g(-x), f(x) = -f(-x)\}$
derivative alt grup	$\{(f'(x), f(x))\}$
hitting time alt grup	$\left\{\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}, f(x)\right)\right\}$
stochastic alt grup	$\left\{\left(\frac{f(x)-1}{x-1}, f(x)\right)\right\}$
stabilizer alt grup	$\left\{\left(\frac{h(x)}{h(f(x))}, f(x)\right)\right\}$

Riordan sıralarının ilginç özelliklerinden bir tanesi de Riordan matrisinin herhangi bir elemanının kendinden bir önceki sütundan başlayarak, bir önceki satırın elemanlarının lineer toplamı olarak yazılabilmesidir. Ayrıca, sıfırıncı sütundaki her eleman da yine kendinden bir önceki satırda bulunan elemanların lineer toplamları olarak yazılabilir. Riordan sıralarının bu özelliği Merlini ve Rogers tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.7 *$D = (d_{n,k})_{n,k\geq 0}$ sonsuz alt üçgen matris olsun. D matrisinin Riordan matrisi olması için gerek ve yeter şart*

$$d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1} + a_2 d_{n,k+2} + \dots \tag{3.11}$$

ve

$$d_{n+1,0} = z_0 d_{n,0} + z_1 d_{n,1} + z_2 d_{n,2} + \dots \tag{3.12}$$

olacak şekilde ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ve $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ dizilerinin olmasıdır. Bu dizilere sırasıyla D Riordan sırasının A ve $Z-$ dizileri denir (Merlini vd., 1997; Rogers, 1978).

Teorem 3.8 *$(g(x), f(x))$ Riordan sırasının A ve $Z-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla $A(x)$ ve $Z(x)$ olsun. O zaman*

$$f(x) = xA(f(x)) \tag{3.13}$$

ve

$$g(x) = \frac{g_0}{1 - xZ(f(x))} \tag{3.14}$$

dir (Merlini vd., 1997).

Tanım 3.4 *D Riordan matris olsun. P, üretim matrisi*

$$P = D^{-1}\overline{D} \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlanır. Burada D^{-1} matrisi Riordan matrisinin tersidir ve $\overline{D}$ matrisi ise Riordan matrisinin ilk satırının silinmesiyle elde edilen matristir (Deutsch vd., 2009).

P, üretim matrisi bazı kaynaklarda ise Stieltjes matris olarak da adlandırılmaktadır (Shapiro, 2003; Peart ve Woan, 2000).

Önerme 3.4 *P matrisi üretim matrisi olmak üzere D matrisinin Riordan matrisi olması için gerek ve yeter şart P matrisinin*

$$P = \begin{pmatrix} z_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ z_5 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ z_6 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ve $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ dizileri sırasıyla D Riordan matrisinin A ve $Z-$ dizileridir (Deutsch vd., 2009).

İki Riordan sırasının çarpımı yine bir Riordan sırasıdır. Ancak, iki Riordan sırasının toplamı her zaman bir Riordan sırası değildir. Bang ve arkadaşları tarafından, iki Riordan sırasının toplamının yine bir Riordan sırası olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.9 *$D = (g(x), f(x))$ ve $R = (h(x), l(x))$ iki Riordan sırası olsun. D ve R Riordan sıralarının toplamının bir Riordan sırası olması için gerek ve yeter şart $f(x) = l(x)$ ve $g_0 + h_0 \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda*

$$D + R = (g(x) + h(x), f(x))$$

dir (Bang vd., 2023).

Şimdi, Barry tarafından tanımlanan hemen hemen Riordan sıralarının tanımını ve özelliklerini verelim.

Tanım 3.5 *$a_0 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, $f_0 = 0$ ve $f_1 \neq 0$ olmak üzere*

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots$$

ve

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$$

kuvvet serileri olsun. $k-$ıncı sütununun üreteç fonksiyonu

$$a(x), \qquad k=0 \tag{3.17}$$

ve

$$xg(x)(f(x))^{k-1}, \qquad k=1,2,3,\ldots \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanan matrisler sonsuz alt üçgen matrislerdir ve bu matrislere hemen hemen Riordan matrisleri denir. Hemen hemen Riordan matrisi üçlü kuvvet serileri ile

$$(a(x)|g(x), f(x))$$

şeklinde gösterilir ve bu gösterim hemen hemen Riordan sırası olarak adlandırılır (Barry, 2016).

Teorem 3.10 $(a(x)|g(x), f(x))$ *ve* $(b(x)|h(x), l(x))$ *iki hemen hemen Riordan sırası olsun. Hemen hemen Riordan sıralarının kümesi*

$$(a(x)|g(x), f(x))(b(x)|h(x), l(x)) = ((a(x)|g(x), f(x))b(x)|g(x)h(f(x)), l(f(x))) \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir gruptur. Burada

$$(a(x)|g(x), f(x))b(x) = b_0 a(x) + xg(x)\frac{b(f(x)) - b_0}{f(x)} \tag{3.20}$$

dir. Bu grup hemen hemen Riordan grubu olarak adlandırılır ve $a\mathcal{R}$ ile gösterilir (Barry, 2016).

Hemen hemen Riordan grubunun birim elemanı

$$I = (1|1, x) \tag{3.21}$$

dır. $\overline{f}(x)$, $f(x)$'in bileşke tersi olmak üzere $(a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının tersi

$$(a(x)|g(x), f(x))^{-1} = \left(\frac{1}{a_0}\left(1 - \frac{x}{g(\overline{f}(x))}\frac{a(\overline{f}(x)) - a_0}{\overline{f}(x)}\right)\middle|\frac{1}{g(\overline{f}(x))}, \overline{f}(x)\right) \tag{3.22}$$

dir (Barry, 2016).

Teorem 3.11 $\mathcal{R}$ *Riordan grubu, hemen hemen Riordan grubunun bir alt grubudur (Barry, 2016).*

Teorem 3.12 *$g_0 \neq 0$, $f_0 = 0$ ve $f_1 \neq 0$ olacak şekilde $g(x)$ ve $f(x)$ kuvvet serilerini göz önüne alalım. Hemen hemen Riordan sıralarının*

$$\left(g(x) \middle| g(x)\frac{f(x)}{x}, f(x)\right) \tag{3.23}$$

formundaki alt kümesi bir alt gruptur ve bu alt grup Riordan sıralarının grubuna izomorftur (Barry, 2016).

4. HEMEN HEMEN RİORDAN SIRALARININ DİZİ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, hemen hemen Riordan sıralarının, terslerinin ve çarpımlarının A, Z ve $\omega-$ dizileri verilecektir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sıralarının toplamı tanımlanacak ve bu toplam için A, Z ve $\omega-$ dizileri elde edilecektir. Bu bölümde $a(x)$ üreteç fonksiyonunun dizisi $\{a'_0, a'_1, a'_2, \dots\}$ şeklinde alınacaktır.

Teorem 4.1 *$D = (d_{n,k})_{n,k\geq 0}$ sonsuz alt üçgen matris olsun. Eğer D matrisi hemen hemen Riordan sırası ise*

$$d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1} + a_2 d_{n,k+2} + \dots, \quad k \geq 1, \tag{4.1}$$

$$d_{n+1,1} = z_0 d_{n,0} + z_1 d_{n,1} + z_2 d_{n,2} + \dots \tag{4.2}$$

$$d_{n+1,0} = \omega_0 d_{n,0} + \omega_1 d_{n,1} + \omega_2 d_{n,2} + \dots. \tag{4.3}$$

lineer toplamlarının katsayıları olacak şekilde $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ ve $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ dizileri vardır. Bu diziler $D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının A, Z ve $\omega-$ dizileri olarak adlandırılır (Alp ve Kocer, 2023).

İspat $D = (d_{n,k})_{n,k\geq 0} = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. Ayrıca, $R = (r_{n,k})_{n,k\geq 0} = \left(b(x)|\frac{g(x)f(x)}{x}, f(x)\right)$ ve $(c(x)|A(x), B(x))$ şeklindeki hemen hemen Riordan sıralarını göz önüne alalım. O zaman

$$(c(x)|A(x), B(x)) = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}\left(b(x)\middle|\frac{g(x)f(x)}{x}, f(x)\right)$$

ya da

$$(a(x)|g(x), f(x))(c(x)|A(x), B(x)) = \left(b(x)\middle|\frac{g(x)f(x)}{x}, f(x)\right)$$

dir. Buradan

$$g(x)A(f(x)) = \frac{g(x)f(x)}{x} \quad ve \quad B(f(x)) = f(x)$$

elde edilir. Eğer ifadeler düzenlenirse

$$A(f(x)) = \frac{f(x)}{x} \quad ve \quad B(x) = x$$

olarak bulunur. Yani, $d_{n+1,k+1} = r_{n,k}$ olduğu görülür ve (4.1) ifadesi elde edilir.

(4.2) ifadesinin ispatı için, $z_0 = \frac{d_{1,1}}{d_{0,0}}$ eşitliğini göz önüne alalım. O zaman

$$d_{2,1} = z_0 d_{1,0} + z_1 d_{1,1} \ \ ya \ \ da \ \ z_1 = \frac{d_{2,1}d_{0,0} - d_{1,1}d_{1,0}}{d_{1,1}d_{0,0}}$$

dir. Bu şekilde devam edersek $z_2, z_3, z_4, \ldots$ olarak elde edilir.

(4.3) eşitliğinin ispatı için $\omega_0 = \frac{d_{1,0}}{d_{0,0}}$ olmak üzere

$$d_{2,0} = \omega_0 d_{1,0} + \omega_1 d_{1,1} \ \ ya \ \ da \ \ \omega_1 = \frac{d_{2,0}d_{0,0} - d_{1,0}d_{1,0}}{d_{1,1}d_{0,0}}$$

dir. Benzer olarak $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots$ elde edilir.

Teorem 4.2 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla $A(x)$, $Z(x)$ ve $\omega(x)$ olmak üzere*

$$A(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)} \tag{4.4}$$

$$Z(x) = \frac{x[g(\overline{f}(x)) - z_0 a(\overline{f}(x))]}{\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))} + z_0, \quad z_0 = \frac{g_0}{a_0'} \tag{4.5}$$

$$\omega(x) = \frac{x[a(\overline{f}(x)) - a_0' - \omega_0\overline{f}(x)a(\overline{f}(x))]}{(\overline{f}(x))^2 g(\overline{f}(x))} + \omega_0, \ \ \omega_0 = \frac{a_1'}{a_0'} \tag{4.6}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat İlk olarak $A(x)$ fonksiyonunu elde edelim. Bunun için (4.1) ifadesinde üreteç fonksiyonları kullanılırsa,

$$\frac{xg(x)(f(x))^k}{x} = a_0 xg(x)(f(x))^{k-1} + a_1 xg(x)(f(x))^k + \ldots$$

elde edilir. Buradan

$$g(x)(f(x))^k = xg(x)(f(x))^{k-1}(a_0 + a_1 f(x) + a_2(f(x))^2 \ldots)$$

dir. Son eşitlikten

$$\frac{f(x)}{x} = A(f(x))$$

olup, $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$A(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)}$$

dir.

(4.5) ifadesinin ispatı için (4.2) ifadesinde üreteç fonksiyonları kullanılırsa

$$\frac{xg(x)-0}{x} = z_0a(x) + z_1xg(x) + z_2xg(x)f(x) + z_3xg(x)(f(x))^2 + \dots$$

bulunur. Buradan

$$g(x) = z_0a(x) + xg(x)(z_1 + z_2f(x) + z_3(f(x))^2 + \dots)$$

dir. O halde

$$\frac{g(x)-z_0a(x)}{xg(x)} = \frac{Z(f(x))-z_0}{f(x)}$$

dir. Eğer x yerine $\overline{f}(x)$ alınırsa

$$Z(x) = \frac{x[g(\overline{f}(x)) - z_0a(\overline{f}(x))]}{\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))} + z_0$$

ve sabit terim göz önüne alınırsa

$$z_0 = \frac{g_0}{a_0'}$$

elde edilir.

(4.6) ifadesinin ispatı için (4.3) eşitliğinde üreteç fonksiyonları kullanılırsa

$$\frac{a(x)-a_0'}{x} = \omega_0a(x) + \omega_1xg(x) + \omega_2xg(x)f(x) + \omega_3xg(x)(f(x))^2 + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{a(x)-a_0'}{x} = \omega_0a(x) + xg(x)(\omega_1 + \omega_2f(x) + \omega_3(f(x))^2 + \dots)$$

dir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\frac{a(x)-a_0'-\omega_0xa(x)}{x^2g(x)} = \frac{\omega(f(x))-\omega_0}{f(x)}$$

bulunur. x yerine $\overline{f}(x)$ alınırsa

$$\omega(x) = \frac{x[a(\overline{f}(x)) - a_0' - \omega_0\overline{f}(x)a(\overline{f}(x))]}{(\overline{f}(x))^2g(\overline{f}(x))} + \omega_0$$

ve sabit terim göz önüne alınırsa

$$\omega_0 = \frac{a_1'}{a_0'}$$

elde edilir.

Örnek 4.1 $D = \left(\frac{2-x}{1-x-x^2}|1, x+x^2\right)$ *hemen hemen Riordan sırasını göz önüne alalım. O zaman*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir. D *matrisinin* $0-$*ıncı sütunu Lucas sayılarından oluşmaktadır ve bu matrisin satır toplamları Fibonacci sayılarının iki katıdır.* D *matrisinin* A, Z *ve* $\omega-$ *dizilerini bulalım.* (4.4) *kullanılırsa,* $A-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A(x) = \frac{x}{\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{4x+1}-1}$$

şeklindedir ve $A-$ *dizisinin elemanları*

$$1, 1, -1, 2, -5, 14, -42, 132, -429, 1430, \dots$$

olarak elde edilir.

(4.5) *ifadesi göz önüne alınırsa,* $Z-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2-\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}-\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)^2}\right)}{\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1}{8(x-1)}(\sqrt{4x+1} - 4x - \sqrt{(4x+1)^3} + 4) \end{aligned}$$

dir. $Z-$ *dizisinin elemanları*

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{23}{2}, \frac{61}{2}, \dots$$

şeklindedir.

(4.6) *kullanılırsa,* $\omega-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{x\left(\left(\frac{2-\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}-\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)-2\right)}{\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-4x-1}{2(x-1)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\omega-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

dir.

Örnek 4.2 $D = (d_{n,k}) = (a(x)|g(x), f(x))$ *hemen hemen Riordan sırası olsun.* a *ve* b *sıfırdan farklı iki reel sayı olmak üzere*

$$d_{0,0} = 1, \;\; d_{0,k} = 0, \quad k \geq 1, \;\; d_{n+1,0} = abd_{n,0} \tag{4.7}$$

$$d_{1,1} = 1, \;\; d_{1,k} = 0, \quad k \geq 2, \;\; d_{n+1,1} = d_{n,0} \tag{4.8}$$

$$d_{n+1,k+1} = b^2 d_{n,k} + abd_{n,k+1}, \quad k \geq 1 \tag{4.9}$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Bu ifadeler kullanılırsa

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ ab & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a^2b^2 & ab & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a^3b^3 & a^2b^2 & 2ab^3 & b^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a^4b^4 & a^3b^3 & 3a^2b^4 & 3ab^5 & b^6 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a^5b^5 & a^4b^4 & 4a^3b^5 & 6a^2b^6 & 4ab^7 & b^8 & 0 & 0 & \ldots \\ a^6b^6 & a^5b^5 & 5a^4b^6 & 10a^3b^7 & 10a^2b^8 & 5ab^9 & b^{10} & 0 & \ldots \\ a^7b^7 & a^6b^6 & 6a^5b^7 & 15a^4b^8 & 20a^3b^9 & 15a^2b^{10} & 6ab^{11} & b^{12} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

elde edilir. D *matrisinin, hemen hemen Riordan gösterimini bulalım. O zaman*

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 + abx + a^2b^2x^2 + a^3b^3x^3 + \ldots \\ a(x) &= 1 + abx(1 + abx + a^2b^2x^2 + \ldots) \\ a(x) &= 1 + abxa(x) \\ a(x) &= \frac{1}{1 - abx} \end{aligned}$$

dır. $g(x)$ *üreteç fonksiyonunu*

$$\begin{aligned} xg(x) &= x + abx^2 + a^2b^2x^3 + \ldots \\ xg(x) &= x(1 + abx + a^2b^2x^2 + \ldots) \\ g(x) &= 1 + abx + a^2b^2x^2 + \ldots \\ g(x) &= \frac{1}{1 - abx} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.9) *eşitliği kullanılırsa*

$$\frac{xg(x)(f(x))^k}{x} = b^2xg(x)(f(x))^{k-1} + abxg(x)(f(x))^k$$
$$g(x)(f(x))^k = (b^2 + abf(x))xg(x)(f(x))^{k-1}$$
$$f(x) = \frac{b^2x}{1-abx}$$

dir. O halde D matrisinin hemen hemen Riordan gösterimi

$$D = \left(\frac{1}{1-abx}\middle|\frac{1}{1-abx}, \frac{b^2x}{1-abx}\right)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de hemen hemen Riordan sıralarının tersi için A, Z ve $\omega-$ dizilerini elde edelim.

Teorem 4.3 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası ve $A(x)$, D nin $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ hemen hemen Riordan sırasının $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A^*(x) = \frac{1}{A(f(x))} \tag{4.10}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (3.22) ve (4.4) kullanılırsa

$$A^*(x) = \frac{x}{\overline{(\overline{f}(x))}} = \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{A(f(x))}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.4 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası, $Z(x)$, D hemen hemen Riordan sırasının $Z-$ dizisinin üreteç fonksiyonu ve $A^*(x)$, $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ hemen hemen Riordan sırasının $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. D^{-1} hemen hemen Riordan sırasının $Z-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$Z^*(x) = A^*(x) + g(x)\frac{a_0^{'}}{g_0^2}\left(1 - Z\left(\frac{x}{A^*(x)}\right)A^*(x)\right) \tag{4.11}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (3.22) ve (4.5) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Z^*(\overline{f}(x)) &= \frac{\overline{f}(x)\frac{1}{g(\overline{f}(x))} - \overline{f}(x) z_0^* \frac{1}{a_0^{'}} \left(1 - \frac{xa(\overline{f}(x)) - xa_0^{'}}{g(\overline{f}(x))\overline{f}(x)}\right)}{x\frac{1}{g(\overline{f}(x))}} + z_0^* \\ &= \frac{a_0^{'}\overline{f}(x) - z_0^*\overline{f}(x)g(\overline{f}(x)) + z_0^* xa(\overline{f}(x)) - z_0^* a_0^{'} x}{a_0^{'} x} + z_0^* \end{aligned}$$

dir. x yerine $f(x)$ ve $A^*(x) = \frac{x}{f(x)}$ alınırsa

$$Z^*(x) = A^*(x) + \frac{z_0^*}{a_0^{'}}\left(a(x) - A^*(x)g(x)\right)$$

elde edilir. Ayrıca, $DD^{-1} = I$ ifadesi kullanılırsa

$$z_0^* = \frac{a_0^{'}}{g_0} \tag{4.12}$$

bulunur. (4.5) ifadesinde x yerine $f(x)$ alınırsa

$$a(x) = \frac{xg(x)}{z_0 f(x)}\left(\frac{f(x)}{x} + z_0 - Z(f(x))\right) \tag{4.13}$$

olarak bulunur. Son adımda (4.10), (4.12) and (4.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$Z^*(x) = A^*(x) + g(x)\frac{a_0^{'}}{g_0^2}\left(1 - Z\left(\frac{x}{A^*(x)}\right)A^*(x)\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.5 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası, $\omega(x)$, D nin $\omega-$ dizisinin üreteç fonksiyonu ve $A^*(x)$, $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ in $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. Bu takdirde D^{-1} hemen hemen Riordan sırasının $\omega-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\omega^*(x) = \frac{1}{a_0^{'} - a_1^{'}x}\begin{pmatrix} a_1^{'}g(x)A^*(x)\left(\frac{1}{a_0^{'}}A^*(x) + \frac{1}{g_0}\right) - a_1^{'}A^*(x) \\ -g(x)A^*(x)\omega\left(\frac{x}{A^*(x)}\right)\left(A^*(x) + \frac{a_1^{'}}{g_0}x\right) - \frac{a_0^{'}a_1^{'}}{g_0} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (3.22) ve (4.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\omega^*(\overline{f}(x)) = \frac{\overline{f}(x)\left(\frac{1}{a_0^{'}}\left(1 + \frac{a_0^{'}x - xa(\overline{f}(x))}{\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))}\right)(1 - x\omega_0^*) - \frac{1}{a_0^{'}}\right)}{\frac{x^2}{g(\overline{f}(x))}} + \omega_0^*$$

olarak bulunur. Ayrıca, $DD^{-1} = I$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\omega_0^* = -\frac{a_1^{'}}{g_0}$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned}\omega^*(\overline{f}(x)) = \; & \frac{\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))}{a_0^{'}x^2} - \frac{a(\overline{f}(x))}{a_0^{'}x} + \frac{1}{x} + \frac{a_1^{'}\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))}{a_0^{'}g_0x} \\ - \; & \frac{a_1^{'}a(\overline{f}(x))}{a_0^{'}g_0} + \frac{a_1^{'}}{g_0} - \frac{g(\overline{f}(x))\overline{f}(x)}{a_0^{'}x^2} - \frac{a_1^{'}}{g_0} \\ = \; & \frac{a(\overline{f}(x))}{a_0^{'}}\left(-\frac{1}{x} - \frac{a_1^{'}}{g_0}\right) + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{a_1^{'}\overline{f}(x)g(\overline{f}(x))}{a_0^{'}g_0}\right)\end{aligned}$$

dir. (4.6) eşitliğinde x yerine $f(x)$ alınırsa

$$a(x) = \frac{\frac{x^2g(x)}{f(x)}\left(\omega(f(x)) - \frac{a_1^{'}}{a_0^{'}}\right) + a_0^{'}}{1 - \frac{a_1^{'}}{a_0^{'}}x} \tag{4.15}$$

elde edilir. Son adımda (4.10) ve (4.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\omega^*(x) = \frac{1}{a_0^{'} - a_1^{'}x}\begin{pmatrix} a_1^{'}g(x)A^*(x)\left(\frac{1}{a_0^{'}}A^*(x) + \frac{1}{g_0}\right) - a_1^{'}A^*(x) \\ -g(x)A^*(x)\omega\left(\frac{x}{A^*(x)}\right)\left(A^*(x) + \frac{a_1^{'}}{g_0}x\right) - \frac{a_0^{'}a_1^{'}}{g_0}\end{pmatrix}$$

dir.

Örnek 4.3 $D = \left(\frac{2-x}{1-x-x^2}\middle|\frac{3}{1-x-x^2}, \frac{x}{1-x}\right)$ *hemen hemen Riordan sırasını göz önüne alalım.* D *hemen hemen Riordan matrisi*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 9 & 12 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 11 & 15 & 21 & 21 & 12 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 18 & 24 & 36 & 42 & 33 & 15 & 3 & 0 & \dots \\ 29 & 39 & 60 & 78 & 75 & 48 & 18 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir. D hemen hemen Riordan matrisinin tersi ise

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -2 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -5 & \frac{14}{3} & -2 & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

D hemen hemen Riordan matrisinin A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$A(x) \quad = 1 + x \tag{4.16}$$

$$Z(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \tag{4.17}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x. \tag{4.18}$$

olup, D^{-1} hemen hemen Riordan matrisi için A, Z ve $\omega-$ dizilerini bulalım. (4.10) *ve* (4.16) *eşitlikleri kullanılırsa, $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A^*(x) = 1 - x \tag{4.19}$$

dir. $A-$ dizisinin elemanları ise

$$1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$$

şeklindedir.

(4.11)*,* (4.17) *ve* (4.19) *eşitlikleri kullanılırsa, $Z-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned} Z^*(x) &= 1 - x + \frac{2}{3(1-x-x^2)}\left(1 - (1-x)\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2(1-x)}\right)\right) \\ &= \frac{3x^3 - 4x + 2}{3(1-x-x^2)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu dizinin ilk birkaç terimi ise

$$\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}, 7, \frac{34}{3}, \dots$$

şeklindedir.

(4.14)*,* (4.18) *ve* (4.19) *ifadeleri kullanılırsa,* $\omega-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\omega^*(x) = \frac{1}{2-x}\begin{pmatrix} \frac{3}{1-x-x^2}(1-x)\left(\frac{1}{2}+\frac{5x}{6(1-x)}\right)\left(-1+x-\frac{1}{3}x\right) \\ +\frac{3}{1-x-x^2}(1-x)\left(\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{3}\right)-(1-x)-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\omega^*(x) = \frac{-6x^2+5x+2}{6(x^2+x-1)}$$

olarak bulunur. $\omega-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$-\frac{1}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{13}{6}, -\frac{23}{6}, -6, -\frac{59}{6}, \ldots$$

dir.

Şimdi, iki hemen hemen Riordan sırasının çarpımı için A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonlarını elde edelim.

Teorem 4.6 $D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$*,* $D_2 = (b(x)|h(x), l(x))$ *hemen hemen Riordan sıraları ve* D_1 *ile* D_2 *nin çarpımı,* $D_3 = (c(x)|m(x), n(x))$ *olsun.* D_1, D_2 *ve* D_3 *hemen hemen Riordan sıralarının* $A-$ *dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla* $A_1(x)$*,* $A_2(x)$ *ve* $A_3(x)$ *olmak üzere*

$$A_3(x) = A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)A_2(x) \tag{4.20}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat D_3 hemen hemen Riordan sırasının $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu (4.4) kullanılırsa

$$A_3(x) = \frac{x}{\overline{n}(x)} \tag{4.21}$$

olarak elde edilir. Ayrıca hemen hemen Riordan sıralarının çarpımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} n(x) &= l(f(x)) \\ \bar{l}(n(x)) &= f(x) \\ \overline{f}(\bar{l}(n(x))) &= x \\ \overline{f}(\bar{l}(x)) &= \overline{n}(x) \end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur. (4.4), (4.21), (4.22) ve $A_2(x) = \frac{x}{\bar{l}(x)}$ ifadeleri kullanılırsa

$$A_3(x) = \frac{x}{\overline{f}(\bar{l}(x))} = \frac{x}{\overline{f}\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}$$

olarak elde edilir. $A_1(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)}$ olduğu dikkate alınılırsa

$$A_3(x) = A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)A_2(x)$$

dir.

Teorem 4.7 *$D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$, $D_2 = (b(x)|h(x), l(x))$ hemen hemen Riordan sıraları ve D_1 ile D_2 nin çarpımı $D_3 = (c(x)|m(x), n(x))$ olsun. D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının $A-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla $A_1(x)$, $A_2(x)$ ve $A_3(x)$ ve $Z-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ ve $Z_3(x)$ olmak üzere*

$$Z_3(x) = \frac{h_0}{h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(\frac{A_3(x)}{A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(Z_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) - \frac{g_0}{a_0'}\right) - A_3(x) + \frac{g_0}{a_0'}A_2(x)\right) \quad (4.23)$$

$$+A_3(x) + \frac{g_0}{a_0'}(Z_2(x) - A_2(x))$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (3.19), (3.20) ve (4.5) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= \frac{x\left(m(\overline{n}(x)) - \frac{m_0}{c_0}c(\overline{n}(x))\right)}{\overline{n}(x)m(\overline{n}(x))} + \frac{m_0}{c_0} \\ &= \frac{x}{\overline{n}(x)} + \frac{g_0h_0}{a_0'b_0} - \frac{g_0h_0}{a_0'}\frac{xa(\overline{n}(x))}{\overline{n}(x)g(\overline{n}(x))h(\bar{l}(x))} \\ &+ \frac{g_0h_0}{a_0'}\frac{x}{h(\bar{l}(x))\bar{l}(x)} - \frac{g_0h_0}{a_0'b_0}\frac{xb(\bar{l}(x))}{\bar{l}(x)h(\bar{l}(x)))} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca aşağıda verilen ifadeler

$$\begin{aligned} \frac{b(\bar{l}(x))}{h(\bar{l}(x))} &= \frac{b_0}{h_0A_2(x)}\left(A_2(x) - Z_2(x) + \frac{h_0}{b_0}\right) \\ \frac{a(\overline{n}(x))}{g(\overline{n}(x))} &= \frac{a_0'}{g_0A_1(\bar{l}(x))}\left(A_1(\bar{l}(x)) - Z_1(\bar{l}(x)) + \frac{g_0}{a_0'}\right) \end{aligned}$$

ve $A_1(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)}$, $A_2(x) = \frac{x}{\bar{l}(x)}$, $A_3(x) = \frac{x}{\overline{n}(x)}$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= A_3(x) + \frac{g_0}{a_0'}(Z_2(x) - A_2(x)) \\ &+ \frac{h_0g_0}{a_0'h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(A_2(x) - \frac{A_3(x)}{A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\right) \\ &+ \frac{h_0}{h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(Z_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)\frac{A_3(x)}{A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)} - A_3(x)\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$Z_3(x) = \frac{h_0}{h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(\frac{A_3(x)}{A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(Z_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) - \frac{g_0}{a_0^{'}}\right) - A_3(x) + \frac{g_0}{a_0^{'}}A_2(x)\right)$$

$$+A_3(x) + \frac{g_0}{a_0^{'}}(Z_2(x) - A_2(x))$$

dir.

Teorem 4.8 $D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$, $D_2 = (b(x)|h(x), l(x))$ *hemen hemen Riordan sıraları ve* D_1 *ile* D_2 *nin çarpımı* $D_3 = (c(x)|m(x), n(x))$ *olsun.* D_3 *hemen hemen Riordan sırasının* $\omega-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\omega_3(x) = \frac{1}{h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(\begin{array}{c}\frac{a_0^{'}A_3(x)}{g_0A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) - Z_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) + \frac{g_0}{a_0^{'}}\right)\left(b_0\frac{A_3(x)}{x} - \frac{a_1^{'}b_0+g_0b_1}{a_0^{'}}\right)\\ -A_3(x)\left(b_0\frac{A_2(x)}{x} + a_0^{'}b_0\frac{A_3(x)}{xg\left(\frac{x}{A_3(x)}\right)}\right) + \frac{a_1^{'}b_0+g_0b_1}{a_0^{'}}A_2(x)\end{array}\right) \tag{4.24}$$

$$+\frac{b_0}{h_0}\left(A_2(x) - Z_2(x) + \frac{h_0}{b_0}\right)\left(\frac{1}{x}A_3(x) - \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}\right)$$

$$+\frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (3.19), (3.20) ve (4.6) ifadeleri kullanılırsa

$$\omega_3(x) = \frac{x\left(c(\overline{n}(x))\left(1 - \frac{c_1}{c_0}\overline{n}(x)\right) - c_0\right)}{(\overline{n}(x))^2m(\overline{n}(x))} + \frac{c_1}{c_0}$$

$$= \frac{b_0x\left(a(\overline{n}(x)) - a_0^{'}\right)}{(\overline{n}(x))^2g(\overline{n}(x))h(\bar{l}(x))} - \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}}\frac{xa(\overline{n}(x))}{\overline{n}(x)g(\overline{n}(x))h(\bar{l}(x))}$$

$$+\frac{x\left(b(\bar{l}(x)) - b_0\right)}{\bar{l}(x)\overline{n}(x)h(\bar{l}(x))} + \frac{(a_1^{'}b_0 + g_0b_1)x}{a_0^{'}h(\bar{l}(x))\bar{l}(x)}$$

$$-\frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}\frac{xb(\bar{l}(x))}{\bar{l}(x)h(\bar{l}(x))} + \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}$$

dir. Buradan,

$$\omega_3(x) = \frac{a_0^{'}A_3(x)}{g_0 h(\bar{l}(x))A_1(\bar{l}(x))}\left(A_1(\bar{l}(x)) - Z_1(\bar{l}(x)) + \frac{g_0}{a_0^{'}}\right)\left(\frac{b_0}{\overline{n}(x)} - \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}\right)$$

$$+\frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0} + \frac{1}{h(\bar{l}(x))}\left(\frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}}A_2(x) - A_3(x)\left(\frac{b_0}{\bar{l}(x)} + \frac{a_0^{'}b_0}{\overline{n}(x)g(\overline{n}(x))}\right)\right)$$

$$+\frac{b_0}{h_0A_2(x)}\left(A_2(x) - Z_2(x) + \frac{h_0}{b_0}\right)\left(\frac{A_3(x)}{\bar{l}(x)} - \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}A_2(x)\right)$$

elde edilir. $A_2(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)}$ ve $A_3(x) = \frac{x}{\overline{n}(x)}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\omega_3(x) = \frac{1}{h\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(\begin{array}{c} \frac{a_0^{'}A_3(x)}{g_0A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right)}\left(A_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) - Z_1\left(\frac{x}{A_2(x)}\right) + \frac{g_0}{a_0^{'}}\right)\left(b_0\frac{A_3(x)}{x} - \frac{a_1^{'}b_0+g_0b_1}{a_0^{'}}\right) \\ \\ -A_3(x)\left(b_0\frac{A_2(x)}{x} + a_0^{'}b_0\frac{A_3(x)}{xg\left(\frac{x}{A_3(x)}\right)}\right) + \frac{a_1^{'}b_0+g_0b_1}{a_0^{'}}A_2(x) \end{array}\right)$$

$$+\frac{b_0}{h_0}\left(A_2(x) - Z_2(x) + \frac{h_0}{b_0}\right)\left(\frac{1}{x}A_3(x) - \frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}\right)$$

$$+\frac{a_1^{'}b_0 + g_0b_1}{a_0^{'}b_0}$$

bulunur.

Örnek 4.4 *D_1 ve D_2 aşağıdaki gibi tanımlanan hemen hemen Riordan sıraları olsun:*

$$D_1 = \left(\frac{1-x+x^2}{1-2x+x^3}\middle|\frac{1}{1-x-x^2}, x\right) \quad ve \quad D_2 = \left(1\middle|\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right).$$

(3.19) *ile verilen hemen hemen Riordan sıralarının çarpımından*

$$D_3 = D_1D_2 = \left(\frac{1-x+x^2}{1-2x+x^3}\middle|\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x(1-x-x^2)}, \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)$$

elde edilir. Yani,

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 25 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 41 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 132 & 132 & 90 & 48 & 20 & 6 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
9 & 12 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
15 & 31 & 26 & 14 & 5 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
25 & 85 & 77 & 46 & 20 & 6 & 1 & 0 & \dots \\
41 & 248 & 235 & 150 & 73 & 27 & 7 & 1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

dir. D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$A_1(x) = 1 \tag{4.25}$$

$$Z_1(x) = \frac{1-x-x^2}{1-x} \tag{4.26}$$

$$\omega_1(x) = 1+2x \tag{4.27}$$

ve

$$A_2(x) = \frac{1}{1-x} \tag{4.28}$$

$$Z_2(x) = \frac{1}{1-x} \tag{4.29}$$

$$\omega_2(x) = 0 \tag{4.30}$$

şeklindedir.

D_3 hemen hemen Riordan sırasının $A_3(x)$, $Z_3(x)$ ve $\omega_3(x)$ üreteç fonksiyonlarını bulalım. (4.20), (4.25) *ve* (4.28) *eşitlikleri kullanılırsa D_3 hemen hemen Riordan sırasının $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A_3(x) = \frac{1}{1-x} \tag{4.31}$$

olarak bulunur. Bu dizinin ilk birkaç terimi

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

dir. (4.23), (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) *ve* (4.31) *ifadeleri kullanılırsa D_3 hemen hemen Riordan sırasının $Z-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$
\begin{aligned}
Z_3(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{2x(1-x)}{1-\sqrt{1-4x(1-x))}}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-(x-x^2)-(x-x^2)^2}{1-(x-x^2)} - 1\right) \\
&= \frac{x^5-3x^4+3x^3-x+1}{-x^3+2x^2-2x+1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur ve $Z-$ *dizisinin terimleri ise*

$$1,1,0,2,2,1,0,0,1,2,2,1,\ldots$$

şeklindedir. (4.24), (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) *ve* (4.31) *eşitlikleri kullanılırsa,* D_3 *hemen hemen Riordan sırasının* $\omega-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned}\omega_3(x) = &\frac{2x(1-x)}{1-\sqrt{1-4x(1-x))}}\frac{1}{1-x}\left(2-\frac{1-(x-x^2)-(x-x^2)^2}{1-(x-x^2)}\right)\left(\frac{1}{x(1-x)}-1\right)\\ &-\frac{2x(1-x)}{1-\sqrt{1-4x(1-x))}}\left(\frac{1}{x(1-x)^2}\left(2-(x-x^2)-(x-x^2)^2\right)-\frac{1}{1-x}\right)\\ &+\frac{1}{x(1-x)}\\ &=-2x^2+2x+1\end{aligned}$$

dir. $\omega-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$1,2,-2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots$$

dir.

Şimdi, iki hemen hemen Riordan sırasının toplamının tanımını ve özelliklerini verelim. Ayrıca, bu toplamın A, Z ve $\omega-$ dizilerini ve üreteç fonksiyonlarını elde edelim.

Teorem 4.9 $D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$ *ve* $D_2 = (b(x)|h(x), l(x))$ *hemen hemen Riordan sıraları olsun. O zaman*

$$D_1 + D_2 = (a(x)+b(x)|g(x)+h(x), f(x)) \tag{4.32}$$

toplamının hemen hemen Riordan sırası olması için gerek ve yeter şart $f(x) = l(x)$, $a_0^{'} + b_0 \neq 0$ *ve* $g_0 + h_0 \neq 0$ *olmasıdır (Alp ve Kocer, 2023).*

İspat $D_1 + D_2 = (c(x)|m(x), n(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. $C_i(x)$, $D_1 + D_2$ hemen hemen Riordan matrisinin $i-$inci sütununun üreteç fonksiyonu olsun. O halde

$$C_0(x) = c(x) = a(x) + b(x)$$

dir. $c_0 \neq 0$ olduğundan, $a_0^{'} + b_0 \neq 0$ dır. $i \geq 1$ için matrislerin eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}C_i(x) &= xm(x)(n(x))^{i-1}\\ &= xg(x)(f(x))^{i-1} + xh(x)(l(x))^{i-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $D_1 + D_2$ hemen hemen Riordan sırası olduğu için, $n(x) = f(x) = l(x)$ ve $g_0 + h_0 \neq 0$ eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Tersine $f(x) = l(x)$, $a_0^{'} + b_0 \neq 0$ ve $g_0 + h_0 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $D_1 + D_2$ nin hemen hemen Riordan sırası olduğunu göstermeliyiz.
$C_0(x) = a(x) + b(x)$ ve $a_0^{'} + b_0 \neq 0$ ifadeleri göz önüne alınırsa $c_0 \neq 0$ olduğu görülür. Bu yüzden $D_1 + D_2$ matrisinin ilk sütunu hemen hemen Riordan sırasının şartını sağlar. Ayrıca, $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned} C_i(x) &= xg(x)(f(x))^{i-1} + xh(x)(l(x))^{i-1} \\ &= xg(x)(f(x))^{i-1} + xh(x)(f(x))^{i-1} \\ &= x(g(x) + h(x))(f(x))^{i-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $D_1 + D_2$ hemen hemen Riordan sırasıdır.

Teorem 4.10 *Aşağıda verilen hemen hemen Riordan sıralarının alt kümesini göz önüne alalım:*

$$G_{f(x)} = \{(a_i(x)|g_i(x), f(x)) : a_i(0) + a_j(0) \neq 0, g_i(0) + g_j(0) \neq 0, i, j = 0, 1, \dots\}.$$

O zaman, $G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ *kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir monoiddir (Alp ve Kocer, 2023).*

İspat $D_i = (a_i(x)|g_i(x), f(x))$, $D_j = (a_j(x)|g_j(x), f(x))$ ve $D_k = (a_k(x)|g_k(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sıraları olsun. Her $D_i, D_j \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ için

$$D_i + D_j = (a_i(x) + a_j(x)|g_i(x) + g_j(x), f(x))$$

dır. Burada $a_i(0) + a_j(0) \neq 0$, $g_i(0) + g_j(0) \neq 0$ olup $D_i + D_j \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ dir. Ayrıca, her $D_i, D_j, D_k \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ için

$$\begin{aligned} (D_i + D_j) + D_k &= (a_i(x) + a_j(x)|g_i(x) + g_j(x), f(x)) + (a_k(x)|g_k(x), f(x)) \\ &= ((a_i(x) + a_j(x)) + a_k(x)|(g_i(x) + g_j(x)) + g_k(x), f(x)) \\ &= (a_i(x) + (a_j(x) + a_k(x))|g_i(x) + (g_j(x) + g_k(x)), f(x)) \\ &= (a_i(x)|g_i(x), f(x)) + (a_j(x) + a_k(x)|g_j(x) + g_k(x), f(x)) \\ &= D_i + (D_j + D_k) \end{aligned}$$

dir. Her $D_i \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ ve $I = (a_e(x)|g_e(x), f(x)) \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ için

$$\begin{aligned} (a_i(x)|g_i(x), f(x)) + (a_e(x)|g_e(x), f(x)) &= (a_i(x)|g_i(x), f(x)) \\ (a_i(x) + a_e(x)|g_i(x) + g_e(x), f(x)) &= (a_i(x)|g_i(x), f(x)) \end{aligned}$$

olur. İki tarafın eşitliğinden $I = (0|0, f(x))$ olduğu görülür. Benzer şekilde $I + D_i = D_i$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Her $D_i, D_j \in G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ için

$$\begin{aligned} D_i + D_j &= (a_i(x)|g_i(x), f(x)) + (a_j(x)|g_j(x), f(x)) \\ &= (a_i(x) + a_j(x)|g_i(x) + g_j(x), f(x)) \\ &= (a_j(x) + a_i(x)|g_j(x) + g_i(x), f(x)) \\ &= (a_j(x)|g_j(x), f(x)) + (a_i(x)|g_i(x), f(x)) \\ &= D_j + D_i \end{aligned}$$

olduğundan $G_{f(x)} \cup (0|0, f(x))$ kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir monoiddir.

Şimdi, iki hemen hemen Riordan sırasının toplamının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonlarını bulalım. Bunun için, aşağıdaki teoremlerde $D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$, $D_2 = (b(x)|h(x), f(x))$, $a_0' + b_0 \neq 0, g_0 + h_0 \neq 0$ ve $D_1 + D_2 = D_3$ olarak kabul edelim.

Teorem 4.11 *D_3 hemen hemen Riordan sırasının $A-$ dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A(x) = \frac{x}{\bar{f}(x)} \tag{4.33}$$

dır (Alp ve Kocer, 2023).

İspat (4.4) eşitliğinden sonuç açıktır.

Teorem 4.12 *D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının A ve $Z-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla $A(x)$ ile $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ ve $Z_3(x)$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} Z_3(x) = {} & \frac{g_0 + h_0}{(a_0' + b_0)\left(g\left(\frac{x}{A(x)}\right) + h\left(\frac{x}{A(x)}\right)\right)} \begin{pmatrix} \frac{a_0'}{g_0} Z_1(x) g\left(\frac{x}{A(x)}\right) \\ + \frac{b_0}{h_0} Z_2(x) h\left(\frac{x}{A(x)}\right) \end{pmatrix} \\ & + \frac{(b_0 g_0 - a_0' h_0) A(x) \left(h_0 g\left(\frac{x}{A(x)}\right) - g_0 h\left(\frac{x}{A(x)}\right)\right)}{g_0 h_0 (a_0' + b_0)\left(g\left(\frac{x}{A(x)}\right) + h\left(\frac{x}{A(x)}\right)\right)} \end{aligned} \tag{4.34}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıralarının $0-$ıncı sütunlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla $a(x)$ ve $b(x)$ dir. Ayrıca, $D_1 + D_2$ hemen hemen Riordan sırasının $0-$ıncı sütununun üreteç fonksiyonu ise $c(x) = a(x) + b(x)$ dir. (4.5) eşitliğinde x yerine $f(x)$ alınırsa, $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ üreteç fonksiyonları

$$a(x) = -\frac{a_0^{'}}{g_0} g(x) \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_1(f(x)) - \frac{g_0}{a_0^{'}} \right) - 1 \right)$$
$$b(x) = -\frac{b_0}{h_0} h(x) \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_2(f(x)) - \frac{h_0}{b_0} \right) - 1 \right)$$

ve

$$c(x) = -\frac{a_0^{'} + b_0}{g_0 + h_0} (g(x) + h(x)) \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_3(f(x)) - \frac{g_0 + h_0}{a_0^{'} + b_0} \right) - 1 \right)$$

olarak bulunur. $c(x) = a(x) + b(x)$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$-\frac{(a_0^{'} + b_0)(g(x) + h(x))}{g_0 + h_0} \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_3(f(x)) - \frac{g_0 + h_0}{a_0^{'} + b_0} \right) - 1 \right) = \left(\begin{matrix} -\frac{a_0^{'}}{g_0} g(x) \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_1(f(x)) - \frac{g_0}{a_0^{'}} \right) - 1 \right) \\ -\frac{b_0}{h_0} h(x) \left(\frac{x}{f(x)} \left(Z_2(f(x)) - \frac{h_0}{b_0} \right) - 1 \right) \end{matrix} \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada sol yandaki ifade

$$\frac{x}{f(x)} (g(x) + h(x)) \left(-\frac{a_0^{'} + b_0}{g_0 + h_0} Z_3(f(x)) + 1 \right) + \frac{a_0^{'} + b_0}{g_0 + h_0} (g(x) + h(x))$$

dir. Ayrıca, sağ yandaki ifade

$$\frac{xg(x)}{f(x)} \left(-\frac{a_0^{'}}{g_0} Z_1(f(x)) + 1 \right) + \frac{xh(x)}{f(x)} \left(-\frac{b_0}{h_0} Z_2(f(x)) + 1 \right) + \frac{a_0^{'}}{g_0} g(x) + \frac{b_0}{h_0} h(x)$$

şeklindedir. Sağ ve sol yandaki ifadelerin eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{a_0^{'} + b_0}{g_0 + h_0} \frac{x}{f(x)} (g(x) + h(x)) Z_3(f(x)) = {} & \frac{x}{f(x)} \left(\frac{a_0^{'}}{g_0} g(x) Z_1(f(x)) + \frac{b_0}{h_0} h(x) Z_2(f(x)) \right) \\ & - \frac{(a_0^{'} h_0 - b_0 g_0)(h_0 g(x) - g_0 h(x))}{g_0 h_0 (g_0 + h_0)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} Z_3(f(x)) = {} & \frac{g_0 + h_0}{a_0^{'} + b_0} \frac{1}{g(x) + h(x)} \left(\frac{a_0^{'}}{g_0} g(x) Z_1(f(x)) + \frac{b_0}{h_0} h(x) Z_2(f(x)) \right) \\ & - \frac{(a_0^{'} h_0 - b_0 g_0)(h_0 g(x) - g_0 h(x)) f(x)}{g_0 h_0 (a_0^{'} + b_0) x (g(x) + h(x))} \end{aligned}$$

elde edilir. Son adımda x yerine $\overline{f}(x)$ ifadesi alınır ve $A(x) = \frac{x}{f(x)}$ olduğu göz önünde bulundurulursa, istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.13 *D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının A ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla $A(x)$ ile $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ ve $\omega_3(x)$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \omega_3(x) = {} & \frac{1}{a_0^{'} + b_0} \left(\frac{\left[\left(a\left(\frac{x}{A(x)}\right) + b\left(\frac{x}{A(x)}\right) \right) \left(a_0^{'} + b_0 - (a_1^{'} + b_1) \frac{x}{A(x)} \right) - (a_0^{'} + b_0)^2 \right] (a_0^{'} \omega_1(x) - a_1^{'})(b_0 \omega_2(x) - b_1)}{(b_0 \omega_2(x) - b_1) \left[a\left(\frac{x}{A(x)}\right) \left(a_0^{'} - a_1^{'} \frac{x}{A(x)} \right) - (a_0^{'})^2 \right] + (a_0^{'} \omega_1(x) - a_1^{'}) \left[b\left(\frac{x}{A(x)}\right) \left(b_0 - b_1 \frac{x}{A(x)} \right) - b_0^2 \right]} \right) \\ & + \frac{a_1^{'} + b_1}{a_0^{'} + b_0} \end{aligned} \tag{4.35}$$

dir (Alp ve Kocer, 2023).

İspat $D_3 = D_1 + D_2 = (c(x)|m(x), n(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıralarının $1-$inci sütunlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla $xg(x)$ ve $xh(x)$ dir. Ayrıca, D_3 hemen hemen Riordan sırasının $1-$inci sütununun üreteç fonksiyonu ise $xm(x) = xg(x) + xh(x)$ dir. (4.6) eşitliğinde x yerine $f(x)$ alınırsa, $g(x), h(x)$ ve $m(x)$ üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g(x) = \frac{a(x)\left(1 - \frac{a_1'}{a_0'}x\right) - a_0'}{x^2\left(\omega_1(f(x)) - \frac{a_1'}{a_0'}\right)}$$

$$h(x) = \frac{b(x)\left(1 - \frac{b_1}{b_0}x\right) - b_0}{x^2\left(\omega_2(f(x)) - \frac{b_1}{b_0}\right)}$$

ve

$$m(x) = \frac{(a(x)+b(x))\left(1 - \frac{a_1+b_1}{a_0'+b_0}x\right) - a_0' - b_0}{x^2\left(\omega_3(f(x)) - \frac{a_1'+b_1}{a_0'+b_0}\right)}.$$

$m(x) = g(x) + h(x)$ ifadesinden

$$\frac{(a(x)+b(x))\left(1 - \frac{a_1'+b_1}{a_0'+b_0}x\right) - a_0' - b_0}{x^2\left(\omega_3(f(x)) - \frac{a_1'+b_1}{a_0'+b_0}\right)} = \frac{a(x)\left(1 - \frac{a_1'}{a_0'}x\right) - a_0'}{x^2\left(\omega_1(f(x)) - \frac{a_1'}{a_0'}\right)} + \frac{b(x)\left(1 - \frac{b_1}{b_0}x\right) - b_0}{x^2\left(\omega_2(f(x)) - \frac{b_1}{b_0}\right)}$$

dir. Buradan

$$\frac{(a(x)+b(x))(a_0'+b_0-x(a_1'+b_1)) - (a_0'+b_0)^2}{(a_0'+b_0)\omega_3(f(x)) - a_1' - b_1} = \frac{(b_0\omega_2(f(x)) - b_1)(a(x)(a_0' - a_1'x) - (a_0')^2)}{(a_0'\omega_1(f(x)) - a_1')(b_0\omega_2(f(x)) - b_1)} + \frac{(a_0'\omega_1(f(x)) - a_1')(b(x)(b_0 - b_1x) - b_0^2)}{(a_0'\omega_1(f(x)) - a_1')(b_0\omega_2(f(x)) - b_1)}$$

bulunur. Sol yandaki ifade

$$\left[(a_0'+b_0)\omega_3(f(x)) - a_1' - b_1\right]\left[\begin{array}{c}(b_0\omega_2(f(x)) - b_1)(a_0'a(x) - (a_0')^2 - a_1'xa(x)) \\ +(a_0'\omega_1(f(x)) - a_1')(b_0b(x) - b_0^2 - b_1xb(x))\end{array}\right]$$

dir. Sağ yandaki ifade ise

$$(a(x)+b(x))(a_0'+b_0-(a_1'+b_1)x-(a_0'+b_0)^2)(a_0'\omega_1(f(x))-a_1')(b_0\omega_2(f(x))-b_1)$$

olarak bulunur. Bu iki ifadenin eşitliğinde x yerine $\overline{f}(x)$ ve $A(x) = \frac{x}{\overline{f}(x)}$ alınırsa, (4.35) ifadesi elde edilir.

Örnek 4.5 *D_1 ve D_2 aşağıdaki gibi tanımlanan hemen hemen Riordan sıraları olsun:*

$$D_1 = \left(\frac{1}{1-x-x^2}\middle|\frac{1+x-x^2}{1-2x+x^3}, x\right) \;\; ve \;\; D_2 = \left(\frac{2-x}{1-x-x^2}\middle|\frac{1}{1-x-x^2}, x\right).$$

O zaman

$$D_3 = D_1 + D_2 = \left(\frac{3-x}{1-x-x^2}\middle|\frac{2-x^2}{x^3-2x+1}, x\right)$$

elde edilir. Yani

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 9 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 13 & 25 & 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ 21 & 41 & 25 & 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 11 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 18 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 29 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 12 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & 20 & 12 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 31 & 33 & 20 & 12 & 7 & 4 & 2 & 0 & \dots \\ 50 & 54 & 33 & 20 & 12 & 7 & 4 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca, D_1 ve D_2 için A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$A_1(x) = 1 \tag{4.36}$$

$$Z_1(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x^2-x-1} \tag{4.37}$$

$$\omega_1(x) = \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x-1}. \tag{4.38}$$

ve

$$A_2(x) = 1 \tag{4.39}$$

$$Z_2(x) = \frac{1}{2}(1+x) \tag{4.40}$$

$$\omega_2(x) = \frac{1}{2}(1+5x) \tag{4.41}$$

şeklindedir.

Şimdi D_3 *için* A*,* Z *ve* $\omega-$ *dizilerinin üreteç fonksiyonlarını bulalım. Eğer* (4.33) *eşitliği kullanılırsa,* $A-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$A_3(x) = 1 \tag{4.42}$$

şeklinde elde edilir. $A-$ *dizisinin terimleri*

$$1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

dir. (4.34), (4.37), (4.40) *ve* (4.42) *ifadeleri kullanılırsa,* $Z-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned}
Z_3(x) = {} & \frac{2}{3\left(\frac{1+x-x^2}{1-2x+x^3} + \frac{1}{1-x-x^2}\right)}\left(\frac{2x^2-3x-1}{x^2-x-1}\frac{1+x-x^2}{1-2x+x^3} + (1+x)\frac{1}{1-x-x^2}\right) \\
& + \frac{\left(\frac{1+x-x^2}{1-2x+x^3} - \frac{1}{1-x-x^2}\right)}{3\left(\frac{1+x-x^2}{1-2x+x^3} + \frac{1}{1-x-x^2}\right)} \\
= {} & \frac{7x^2-8x-4}{3(x^2-2)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $Z-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{24}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{48}, \frac{1}{12}, \ldots$$

dir. (4.35), (4.38), (4.41) *ve* (4.42) *ifadelerini kullanırsak,* $\omega-$ *dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned}
\omega_3(x) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{5x\left((3-2x)\frac{3-x}{1-x-x^2} - 9\right)\left(\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x-1} - 1\right)}{5x\left((1-x)\frac{1}{1-x-x^2} - 1\right) + \left(\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x-1} - 1\right)\left(\frac{(2-x)^2}{1-x-x^2} - 4\right)} \\
&= \frac{13x^2-11x-4}{3(x^2-2)}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve $\omega-$ *dizisinin elemanları ise*

$$\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{11}{6}, \frac{11}{12}, -\frac{11}{12}, \frac{11}{24}, -\frac{11}{24}, \frac{11}{48}, -\frac{11}{48}, \ldots$$

dir.

5. HEMEN HEMEN RİORDAN SIRALARININ SATIR TOPLAMLARI İLE KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları kullanılarak hemen hemen Riordan sıraları, hemen hemen Riordan sıralarının tersi ve çarpımları karakterize edilecektir. Ayrıca, hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin de karakterizasyonu bu üreteç fonksiyonları ile verilecektir.

Teorem 5.1 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. D hemen hemen Riordan sırasının satır, alterne satır ve ağırlıklı satır toplamlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla R^+, R^-, ve R^w olmak üzere*

$$a(x) = \frac{2R^w R^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-}{2R^w - R^+ - R^-}, \tag{5.1}$$

$$g(x) = \frac{-4(R^+ - R^-)^2(R^+ - R^w)}{x(2R^w - R^+ - R^-)^2}, \tag{5.2}$$

$$f(x) = \frac{2R^w - 3R^+ + R^-}{2R^w - R^+ - R^-}, \tag{5.3}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat (3.20) ifadesinde $b(x)$ yerine sırasıyla $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ ve $\frac{1}{(1-x)^2}$ alırsak aşağıda verilen üreteç fonksiyonlarını elde ederiz.

$$R^+ = a(x) + \frac{xg(x)}{1 - f(x)}, \tag{5.4}$$

$$R^- = a(x) - \frac{xg(x)}{1 + f(x)}, \tag{5.5}$$

$$R^w = a(x) + \frac{xg(x)(2 - f(x))}{(1 - f(x))^2}. \tag{5.6}$$

(5.4) ve (5.5) eşitliklerinden

$$g(x) = \frac{R^+ - R^-}{2x}(1 - f^2(x)) \tag{5.7}$$

bulunur. Ayrıca (5.4) ve (5.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$a(x) = R^+ - \frac{R^+ - R^-}{2}(1 + f(x)). \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.6), (5.7) ve (5.8) eşitlikleri kullanılırsa, (5.3) eşitliği bulunur. Benzer şekilde, (5.1) ve (5.2) eşitlikleri elde edilir.

Örnek 5.1 $D = (a(x)|g(x), f(x))$ *hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$\begin{aligned} R^+ &= \frac{2x^2+x+1}{1-x-x^2}, \\ R^- &= \frac{-2x^4-3x^3-1}{x^4+2x^3+x^2-1}, \\ R^w &= \frac{-2x^4-3x^3+2x^2+x+1}{(1-x-x^2)^2} \end{aligned}$$

olsun. D *nin hemen hemen Riordan gösterimini bulalım. Teorem 5.1 kullanılırsa*

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{1-x-x^2}, \\ g(x) &= 1+2x, \\ f(x) &= x(1+x) \end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$D = \left(\frac{1}{1-x-x^2}\middle| 1+2x, x(1+x)\right)$$

elde edilir. Buradan D *matrisi*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 13 & 0 & 0 & 2 & 9 & 6 & 1 & 0 & \dots \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 7 & 14 & 7 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi de hemen hemen Riordan sıralarının farklı formlarının karakterizasyonlarını verelim.

$D = (g(x)|g(x), x)$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(R^+(1-x)|R^+(1-x), x\right)$$

şeklindedir. Ayrıca alterne satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\big(R^{-}(1+x)|R^{-}(1+x),x\big)$$

dir. Benzer şekilde ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\big(R^{w}(1-x)^2|R^{w}(1-x)^2,x\big)$$

ile verilir.

$D=(g(x)|g^2(x),xg(x))$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(\frac{R^{+}}{1+xR^{+}}\middle|\left(\frac{R^{+}}{1+xR^{+}}\right)^2,\frac{xR^{+}}{1+xR^{+}}\right)$$

olup, alterne satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu ise

$$\left(\frac{R^{-}}{1-xR^{-}}\middle|\left(\frac{R^{-}}{1-xR^{-}}\right)^2,\frac{xR^{-}}{1-xR^{-}}\right)$$

dir. Ayrıca, ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(\frac{1+2xR^{w}+\sqrt{1+4xR^{w}}}{2x^2R^{w}}\middle|\left(\frac{1+2xR^{w}+\sqrt{1+4xR^{w}}}{2x^2R^{w}}\right)^2,\frac{1+2xR^{w}+\sqrt{1+4xR^{w}}}{2xR^{w}}\right)$$

dir.

$D=(1|1,f(x))$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(1\middle|1,1+\frac{x}{1-R^{+}}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonları sırasıyla

$$\left(1\middle|1,-1+\frac{x}{1-R^{-}}\right)$$

ve

$$\left(1\middle|1,\frac{1}{2-2R^{w}}\left(2-2R^{w}+x+x\sqrt{\frac{1}{x}\left(4R^{w}+x-4\right)}\right)\right)$$

dir.

$D=(1|g(x),x)$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(1\middle|\frac{(R^{+}-1)(1-x)}{x},x\right)$$

şeklindedir. Ayrıca alterne satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(1\middle|\frac{(1-R^-)(1+x)}{x},x\right)$$

dir. Ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(1\middle|\frac{(R^w-1)(1-x)^2}{x(2-x)},x\right)$$

dir.

$D = (1|g(x), xg(x))$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının üreteç fonksiyonu ile karakterizasyonu

$$\left(1\middle|\frac{R^+-1}{xR^+},\frac{R^+-1}{R^+}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonları sırasıyla

$$\left(1\middle|\frac{1-R^-}{xR^-},\frac{1-R^-}{R^-}\right)$$

ve

$$\left(1\middle|\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{R^w}}\right),1-\frac{1}{\sqrt{R^w}}\right)$$

dir.

$D = (a(x)|1, f(x))$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının ve alterne satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu

$$\left(\frac{(R^+-x)\sqrt{R^+-R^-}-R^+\sqrt{R^+-R^--2x}}{\sqrt{R^+-R^-}-\sqrt{R^+-R^--2x}}\middle|1,\frac{\sqrt{R^+-R^--2x}}{\sqrt{R^+-R^-}}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu ise

$$\left(R^+-\sqrt{x(R^w-R^+)}\middle|1,1-\sqrt{\frac{x}{R^w-R^+}}\right)$$

dir.

$D = (a(x)|g(x), x)$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının ve alterne satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu

$$\left(R^-+\frac{(1-x)(R^+-R^-)}{2}\middle|\frac{(1-x^2)(R^+-R^-)}{2x},x\right)$$

şeklindedir. Ayrıca satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu ise

$$\left(R^+-(1-x)(R^w-R^+)\middle|\frac{(1-x)^2(R^w-R^+)}{x},x\right)$$

dir.

$D = (a(x)|g(x), xg(x))$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının ve alterne satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu

$$\left(\frac{R^+ + R^- + 1 + \sqrt{(R^+ - R^-)^2 + 1}}{2}\middle| -\frac{\sqrt{(R^+ - R^-)^2 + 1} + 1}{x(R^+ - R^-)}, -\frac{\sqrt{(R^+ - R^-)^2 + 1} + 1}{(R^+ - R^-)}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu ise

$$\left(\frac{2R^w - R^+ + 1 + (R^+ + 1)\sqrt{4R^w - 4R^+ + 1}}{\sqrt{4R^w - 4R^+ + 1} + 1}\middle| \frac{2R^w - 2R^+ + 1 + \sqrt{4R^w - 4R^+ + 1}}{2x(R^w - R^+)}, \frac{2R^w - 2R^+ + 1 + \sqrt{4R^w - 4R^+ + 1}}{2(R^w - R^+)}\right)$$

dir.

Son olarak, $D = \left(1 \middle| \frac{f'(x)f(x)}{x}, f(x)\right)$ formundaki hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının ve alterne satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu

$$\left(1 \middle| \frac{-2(R^+ - 1)(R^- - 1)}{x(R^+ - R^-)}, \frac{R^+ + R^- - 2}{R^+ - R^-}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile karakterizasyonu ise

$$\left(1 \middle| \frac{-(R^+ - 1)^2}{x(R^+ - R^w)}, \frac{2R^+ - R^w - 1}{R^+ - R^w}\right)$$

dir.

Şimdi, hemen hemen Riordan sırasının tersinin satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonlarını verelim.

Teorem 5.2 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası ve tersi $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ olsun. D^{-1} in satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonsiyonları sırasıyla S^+, S^- ve S^w ,$f(x) = f$ ve*

$$\mathcal{N} = \frac{2R^w - 3R^+ + R^-}{4(R^+ - R^-)^2(R^+ - R^w)}$$

olmak üzere

$$S^+(f) = \mathcal{N}\left(\frac{1}{a_0'}\left(2R^wR^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-\right) - \frac{1}{1-x}(2R^w - R^+ - R^-)\right) + \frac{1}{a_0'} \tag{5.9}$$

$$S^-(f) = \mathcal{N}\left(\frac{1}{a_0'}\left(2R^wR^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-\right) - \frac{1}{1+x}(2R^w - R^+ - R^-)\right) + \frac{1}{a_0'} \tag{5.10}$$

$$S^w(f) = \mathcal{N}\left(\frac{1}{a_0'}\left(2R^wR^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-\right) - \frac{1}{(1-x)^2}(2R^w - R^+ - R^-)\right) + \frac{1}{a_0'} \tag{5.11}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat (3.22) eşitliği kullanılırsa ve (3.20) eşitliğinde $b(x)$ yerine $\frac{1}{1-x}$ alınırsa

$$S^{+} = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{x\left(a(\overline{f}(x)) - a_0'\right)}{g(\overline{f}(x))\overline{f}(x)}\right) + \frac{x}{g(\overline{f}(x))(1-\overline{f}(x))}$$

elde edilir. Buradan

$$S^{+}(f) = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{f(x)(a(x) - a_0')}{xg(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)(1-x)}$$

dir. Teorem 5.1 kullanılırsa, (5.9) eşitliği bulunur. Benzer şekilde, (3.22) eşitliği kullanılırsa ve (3.20) eşitliğinde $b(x)$ yerine $\frac{1}{1+x}$ alınırsa

$$S^{-} = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{x\left(a(\overline{f}(x)) - a_0'\right)}{g(\overline{f}(x))\overline{f}(x)}\right) - \frac{x}{g(\overline{f}(x))(1+\overline{f}(x))}$$

olur. Buradan

$$S^{-}(f) = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{f(x)(a(x) - a_0')}{xg(x)}\right) - \frac{f(x)}{g(x)(1+x)}$$

dir. Teorem 5.1 kullanılırsa, (5.10) eşitliği elde edilir. (3.22) eşitliği kullanılırsa ve (3.20) eşitliğinde $b(x)$ yerine $\frac{1}{(1-x)^2}$ alınırsa

$$S^{w} = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{x\left(a(\overline{f}(x)) - a_0'\right)}{g(\overline{f}(x))\overline{f}(x)}\right) + \frac{x(2-\overline{f}(x))}{g(\overline{f}(x))(1-\overline{f}(x))^2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$S^{w}(f) = \frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{f(x)(a(x) - a_0')}{xg(x)}\right) + \frac{f(x)(2-x)}{g(x)(1-x)^2}$$

dir. Teorem 5.1 den (5.11) eşitliği elde edilir.

Örnek 5.2 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$R^{+} = \frac{3x^3+3x^2-2x-2}{x^2+x-1},$$
$$R^{-} = \frac{3x^3+x^2+2}{-2x^3-3x^2+x+1},$$
$$R^{w} = \frac{3x^4+9x^3+3x^2-5x-2}{x^2+x-1}$$

olsun. D^{-1} in hemen hemen Riordan gösterimini bulalım. Teorem 5.2 kullanılırsa

$$S^{+}(f) = \frac{3x^3-3x^2-5x+3}{6(x^3-2x+1)}, \tag{5.12}$$

$$S^{-}(f) = \frac{3x^3+7x^2+3x-3}{6(x^3+2x^2-1)}, \tag{5.13}$$

$$S^{w}(f) = \frac{3x^4-4x^3+6x-3}{6(x-1)^2(x^2+x-1)} \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.3) *eşitliğinden*

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{f}(x) = \frac{x}{1-x} \tag{5.15}$$

dır. (5.12)-(5.15) *eşitlikleri kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S^{+} &= \frac{2x^3 - 16x^2 + 14x - 3}{12x^3 - 42x^2 + 30x - 6}, \\ S^{-} &= \frac{-2x^3 + 8x^2 - 12x + 3}{6(x^2 - 3x + 1)}, \end{aligned}$$

ve

$$S^{w} = \frac{2x^4 - 26x^3 + 36x^2 - 18x + 3}{6(2x-1)^2(x^2 - 3x + 1)}$$

elde edilir. O zaman D^{-1} *matrisinin hemen hemen Riordan gösterimi*

$$D^{-1} = \left(\frac{2x^2 - 10x + 3}{6x^2 - 18x + 6} \middle| \frac{1}{3(1-x)}, \frac{x}{1-x} \right)$$

olarak bulunur. Ayrıca, D^{-1} *matrisi aşağıdaki gibidir.*

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{11}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{29}{6} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{38}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{199}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ -\frac{521}{6} & \frac{1}{3} & 2 & 5 & \frac{20}{3} & 5 & 2 & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 göz önüne alınırsa, D^{-1} matrisinin hemen hemen Riordan gösterimi, D matrisinin satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları ile aşağıdaki önermedeki gibi verilebilir:

Önerme 5.1 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası ve tersi $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ olsun. Ayrıca*

$$\mathcal{H}_1 = 2R^w(\overline{f}) - 3R^+(\overline{f}) + R^-(\overline{f}) + \frac{1}{a_0'}\left((R^+(\overline{f}))^2 + R^+(\overline{f})R^-(\overline{f}) - 2R^-(\overline{f})R^w(\overline{f})\right)$$

ve

$$\mathcal{H}_2 = (3R^+(\overline{f}) - R^-(\overline{f}))(R^+(\overline{f}) + R^-(\overline{f})) - 4R^w(\overline{f})(2R^+(\overline{f}) - R^w(\overline{f}))$$

olmak üzere D^{-1} matrisinin hemen hemen Riordan gösterimi

$$\left(\mathcal{H}_1\frac{R^+(\overline{f}) + R^-(\overline{f}) - 2R^w(\overline{f})}{4(R^+(\overline{f}) - R^-(\overline{f}))^2(R^+(\overline{f}) - R^w(\overline{f}))}\middle|\mathcal{H}_2\frac{\overline{f}}{4x(R^+(\overline{f}) - R^-(\overline{f}))^2(-R^+(\overline{f}) + R^w(\overline{f}))}, \overline{f}\right) \tag{5.16}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

Örnek 5.3 *$a \neq 0$ olmak üzere $D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$R^+ = \frac{qx^3 + (b+p-q-ap)x^2 + (a-p-1)x + 1}{(x-1)(qx^2+px-1)}$$
$$R^- = \frac{qx^3 + (b+p+q-ap)x^2 + (a+p-1)x - 1}{(x+1)(qx^2+px-1)}$$
$$R^w = \frac{qx^4 + (b+p-2q-ap)x^3 + (a-2b-2p+q+2ap-1)x^2 + (p-2a+2)x - 1}{(x-1)^2(qx^2+px-1)}$$

olsun. D ve D^{-1} matrislerinin hemen hemen Riordan gösterimlerini bulalım. (5.3) *eşitliğinden*

$$f(x) = x$$

dir. Teorem 5.1 ve (5.16) *eşitliği kullanılırsa*

$$D = \left(1\middle|\frac{a + x(b-ap)}{1-px-qx^2}, x\right)$$

ve

$$D^{-1} = \left(1\middle|\frac{1-px-qx^2}{a+x(b-ap)}, x\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca, D ve D^{-1} matrisleri

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & aq+bp & b & a & 0 & \dots \\ 0 & bp^2+aqp+bq & aq+bp & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ve

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{a^3}(qa^2+pab-b^2) & -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

Lemma 5.1 $D = (a(x)|g(x), f(x))$ *hemen hemen Riordan sırası ve tersi* $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ *olsun.* D^{-1} *matrisinin satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla* S^{+}, S^{-} *ve* S^{w} *olmak üzere*

$$\overline{f}(x) = \frac{2S^w - 3S^+ + S^-}{2S^w - S^+ - S^-} \tag{5.17}$$

$$g(\overline{f}(x)) = \frac{x(2S^w - S^+ - S^-)^2}{-4(S^+ - S^-)^2(S^+ - S^w)} \tag{5.18}$$

$$a(\overline{f}(x)) = \frac{(S^+ + S^- - 2S^w)(2S^w - 3S^+ + S^-)}{4(S^+ - S^-)^2(S^+ - S^w)} + \frac{a_0'(S^+ + S^- - 2S^w)((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w))}{4(S^+ - S^-)^2(S^+ - S^w)} \tag{5.19}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat (3.22), (5.2) ve (5.3) ifadeleri göz önüne alınırsa, (5.17) ve (5.18) eşitlikleri elde edilir. (3.22) ve (5.1) kullanılırsa

$$\frac{1}{a_0'}\left(1 - \frac{x}{g(\overline{f}(x))}\frac{a(\overline{f}(x)) - a_0'}{\overline{f}(x)}\right) = \frac{2S^wS^- + (S^+)^2 - 3S^+S^-}{2S^w - S^+ - S^-}$$

dır. Yukarıda verilen eşitlik ve (5.17) ile (5.18) eşitlikleri kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

(5.3) ve (5.17) ifadeleri göz önüne alınırsa, D ve D^{-1} matrislerinin satır toplamları arasındaki ilişki aşağıdaki önermedeki gibi elde edilir.

Önerme 5.2 $D = (a(x)|g(x), f(x))$ *hemen hemen Riordan sırası ve tersi* $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ *olmak üzere*

$$S^w(f)\left(R^+(\overline{f}) - R^-(\overline{f})\right) + S^-(f)\left(R^w(\overline{f}) - R^+(\overline{f})\right) = S^+(f)\left(R^w(\overline{f}) - R^-(\overline{f})\right) \tag{5.20}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

Şimdi, D hemen hemen Riordan sırasının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonlarını, R^{+}, R^{-} ve R^{w} üreteç fonksiyonları ile elde edelim.

Önerme 5.3 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırası olsun. A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları $A(x)$, $Z(x)$, $\omega(x)$ ve $f(x) = f$ olmak üzere*

$$A(f) = \frac{2R^w - 3R^+ + R^-}{x(2R^w - R^+ - R^-)} \tag{5.21}$$

$$Z(f) = \left(\frac{2R^w - 3R^+ + R^-}{a_0'x}\right)\left(\frac{g_0x(2R^wR^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-)}{4(R^+ - R^-)^2(R^+ - R^w)}\right) + \frac{2R^w - 3R^+ + R^-}{x(2R^w - R^+ - R^-)} + \frac{g_0}{a_0'} \tag{5.22}$$

$$\omega(f) = \frac{(2R^w - 3R^+ + R^-)\left(\left(1 - \frac{a_1'}{a_0'}x\right)(2R^wR^- + (R^+)^2 - 3R^+R^-)\right)}{-4x(R^+ - R^-)^2(R^+ - R^w)} - \frac{a_0'(2R^w - 3R^+ + R^-)(2R^w - R^+ - R^-)}{-4x(R^+ - R^-)^2(R^+ - R^w)} + \frac{a_1'}{a_0'} \tag{5.23}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat (4.4), (4.5) ve (4.6) eşitliklerinde verilen $A(x)$, $Z(x)$ ve $\omega(x)$ üreteç fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$A(f(x)) = \frac{f(x)}{x},$$

$$Z(f(x)) = \frac{f(x)\left(g(x) - \frac{g_0}{a_0'}a(x)\right)}{xg(x)} + \frac{g_0}{a_0'},$$

ve

$$\omega(f(x)) = \frac{f(x)\left[a(x) - a_0' - \frac{a_1'}{a_0'}xa(x)\right]}{x^2g(x)} + \frac{a_1'}{a_0'}$$

dir. Teorem 5.1 kullanılır ve $f(x) = f$ alınırsa, istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 5.4 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$R^+ = \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 + x - 1},$$

$$R^- = \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 + x - 1},$$

$$R^w = \frac{3x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{2x^3 + x^2 - 3x + 1}$$

olsun. D hemen hemen Riordan sırasının A, Z, and $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonlarını bulalım. (5.21)-(5.23) *eşitlikleri göz önüne alınırsa*

$$A(f) = \frac{1}{1 - x}, \tag{5.24}$$

$$Z(f) = \frac{-2x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 10x + 1}{3(-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x + 1)}, \tag{5.25}$$

$$\omega(f) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 3x + 1} \tag{5.26}$$

dır. (5.3) *kullanılırsa*

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

ve

$$\overline{f}(x) = \frac{x}{1+x} \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.27) *ve* (5.24) *ifadelerinden*

$$A(x) = x + 1$$

dir. (5.27) *ve* (5.25) *kullanılırsa*

$$Z(x) = \frac{3x^4 - 5x^3 - 17x^2 - 6x + 1}{3x^3 - 6x^2 + 3}$$

dir. $Z-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$\frac{1}{3}, -2, -5, -6, -7, -7, -8, -7, -9, -6, -11, \ldots$$

dir. (5.27) *ve* (5.26) *eşitliklerinden*

$$\omega(x) = \frac{4x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 1}$$

bulunur. $\omega-$ *dizisinin ilk birkaç terimi*

$$1, 3, 6, 9, 9, 12, 9, 15, 6, 21, -3, 36, \ldots$$

şeklinde bulunur. Teorem 5.1 göz önüne alınırsa, D *hemen hemen Riordan sırası*

$$D = \left(\frac{3}{1-x-x^2} \middle| \frac{1-2x}{1-x}, \frac{x}{1-x} \right)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, D *matrisi aşağıdaki gibidir:*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 15 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 24 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 39 & -1 & -3 & -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\ 63 & -1 & -4 & -5 & 0 & 5 & 4 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Teorem 5.3 *$D = (a(x)|g(x), f(x))$ hemen hemen Riordan sırasının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonları $A(x) = A$, $Z(x) = Z$, and $\omega(x) = \omega$ olsun. O zaman*

$$A = \frac{x(2S^w - S^+ - S^-)}{2S^w - 3S^+ + S^-} \tag{5.28}$$

$$Z = \frac{g_0((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w) + x(S^+ + S^- - 2S^w)}{3S^+ - S^- - 2S^w} \tag{5.29}$$

$$\omega = \frac{S^+ + S^- - 2S^w + a_0'((S^+)^2 - 3S^+S^- + 2S^-S^w)}{3S^+ - S^- - 2S^w} + \frac{a_1'((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w)}{3S^+ - S^- - 2S^w} \tag{5.30}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat (4.4) ve (5.17) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{\frac{2S^w - 3S^+ + S^-}{2S^w - S^+ - S^-}} \\ &= \frac{x(2S^w - S^+ - S^-)}{2S^w - 3S^+ + S^-} \end{aligned}$$

dır. (4.5) eşitliği ve Lemma 5.1 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Z &= \frac{a_0'x(2S^w - S^+ - S^-)^2}{a_0'(2S^w - 3S^+ + S^-)(2S^w - S^+ - S^-)} + \frac{g_0}{a_0'} \\ &+ \frac{g_0(S^+ + S^- - 2S^w)(2S^w - 3S^+ + S^- + a_0'((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w))}{a_0'(2S^w - 3S^+ + S^-)(2S^w - S^+ - S^-)} \\ &= \frac{g_0((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w) + x(S^+ + S^- - 2S^w)}{3S^+ - S^- - 2S^w} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, (4.6) ve Lemma 5.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(S^- - 3S^+ + 2S^w + a_0'((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w)))}{(2S^w - 3S^+ + S^-)} \left(\frac{-(S^+ + S^- - 2S^w)}{(2S^w - 3S^+ + S^-)} - \frac{a_1'}{a_0'} \right) \\ &+ a_0'\frac{4(S^+ - S^-)^2(S^+ - S^w)}{(2S^w - 3S^+ + S^-)^2} + \frac{a_1'}{a_0'} \\ &= \frac{S^+ + S^- - 2S^w + a_0'((S^+)^2 - 3S^+S^- + 2S^-S^w) + a_1'((S^+)^2 + S^+S^- - 2S^-S^w)}{3S^+ - S^- - 2S^w} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.5 $D^{-1} = (a(x)|g(x), f(x))^{-1}$ *hemen hemen Riordan sırasının tersinin satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları*

$$S^{+} = \frac{-12x^5 - 4x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{2(x^3 + 4x^2 + 4x + 1)}$$
$$S^{-} = \frac{-28x^4 - 40x^3 - 18x^2 + 1}{2(x^2 + 3x + 1)}$$
$$S^{w} = \frac{12x^6 + 88x^5 + 140x^4 + 96x^3 + 35x^2 + 8x + 1}{2(x+1)^2(x^2 + 3x + 1)}$$

olsun. O halde D hemen hemen Riordan sırasının A, Z ve $\omega-$ dizilerinin üreteç fonksiyonlarını bulalım. (5.28) *ve* (5.29) *kullanılırsa*

$$A(x) = 1 + 2x, \tag{5.31}$$

ve

$$Z(x) = \frac{36x^4 + 68x^3 + 38x^2 + 4x - 1}{-(2x^2 + 6x + 2)} \tag{5.32}$$

dir. $Z-$dizisinin ilk birkaç terimi

$$\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -9, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, 9, \ldots$$

bulunur. (5.30) *eşitliğinden*

$$\omega(x) = \frac{60x^4 + 80x^3 + 36x^2 + 8x + 1}{2x^2 + 6x + 2} \tag{5.33}$$

dir. $\omega-$dizisinin ilk birkaç terimi

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 10, \frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2}, 20, \ldots$$

şeklindedir. $A(x)$, $Z(x)$ ve $\omega(x)$ üreteç fonksiyonları göz önüne alınırsa, D hemen hemen Riordan sırası

$$D = \left(\frac{2-x}{1-x-x^2} \middle| \frac{1-2x}{1+x}, \frac{x}{1-2x} \right)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 7 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 11 & 3 & -1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 18 & -3 & 1 & 5 & 9 & 5 & 1 & 0 & \ldots \\ 29 & 3 & -1 & 11 & 23 & 19 & 7 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dır.

Bu kısımda, hemen hemen Riordan sıralarının çarpımlarını, satır toplamlarının üreteç fonksiyonları ile göz önüne alacağız. $D_1 = (a(x)|g(x), f(x))$ ve $D_2 = (b(x)|h(x), l(x))$ hemen hemen Riordan sıraları ve çarpımları $D_3 = (c(x)|m(x), n(x))$ olsun. Ayrıca, D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının satır toplamlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla R_1^+, R_2^+ ve R_3^+ ve D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının alterne satır toplamlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla R_1^-, R_2^- ve R_3^- olsun. Son olarak, D_1, D_2 ve D_3 hemen hemen Riordan sıralarının ağırlıklı satır toplamlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla R_1^w, R_2^w ve R_3^w olsun.

Hemen hemen Riordan sıralarının çarpımı ve Teorem 5.1 göz önüne alınırsa, aşağıda verilen önerme elde edilir.

Önerme 5.4 *D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıraları ile çarpımları D_3 ü göz önüne alalım. Ayrıca*

$$K = \frac{4(R_1^+ - R_1^-)^2(R_1^+ - R_1^w)}{(f)(2R_1^w - R_1^+ - R_1^-)^2}, \tag{5.34}$$

$$T_1 = b_0 \frac{2R_1^w R_1^- + (R_1^+)^2 - 3R_1^+ R_1^-}{2R_1^w - R_1^+ - R_1^-}, \tag{5.35}$$

ve

$$T_2 = \frac{4(R_1^+ - R_1^-)^2(R_1^+ - R_1^w)}{(2R_1^w - R_1^+ - R_1^-)(2R_1^w - 3R_1^+ + R_1^-)} \left(\frac{2R_2^w(f)R_2^-(f) + (R_2^+(f))^2 - 3R_2^+(f)R_2^-(f)}{2R_2^w(f) - R_2^+(f) - R_2^-(f)} - b_0 \right) \tag{5.36}$$

olmak üzere

$$R_3^+ = T_1 - T_2 + 2K \frac{(R_2^+(f) - R_2^-(f))(R_2^+(f) - R_2^w(f))}{2R_2^w(f) - R_2^+(f) - R_2^-(f)} \tag{5.37}$$

$$R_3^- = T_1 - T_2 + K \frac{(R_2^+(f) - R_2^-(f))^2}{2R_2^w(f) - R_2^+(f) - R_2^-(f)} \tag{5.38}$$

$$R_3^w = T_1 - T_2 + K \frac{(R_2^+(f) - R_2^w(f))(2R_2^w(f) + R_2^+(f) - 3R_2^-(f))}{2R_2^w(f) - R_2^+(f) - R_2^-(f)} \tag{5.39}$$

dır (Alp ve Kocer, 2024).

Teorem 5.1 ve Önerme 5.4 göz önüne alınırsa, iki hemen hemen Riordan sırasının çarpımının gösterimini aşağıdaki önermedeki gibi verebiliriz.

Önerme 5.5 *D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıraları ile çarpımları D_3 olsun. O zaman*

$$D_3 = \left(T_1 - T_2 \middle| K \frac{4(R_2^+(f) - R_2^-(f))^2(R_2^+(f) - R_2^w(f))}{x(R_2^+(f) + R_2^-(f) - 2R_2^w(f))^2}, \frac{2R_2^w(f) - 3R_2^+(f) + R_2^-(f)}{2R_2^w(f) - R_2^+(f) - R_2^-(f)} \right) \tag{5.40}$$

dır.

Örnek 5.6 *D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıralarının satır toplamlarının, alterne satır toplamlarının ve ağırlıklı satır toplamlarının üreteç fonksiyonları*

$$\begin{aligned} R_1^+ &= \frac{x^2+1}{x^3-2x+1} \\ R_1^- &= \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4+x^3-2x^2-x+1} \\ R_1^w &= \frac{x^3-x^2-1}{(x-1)^2(x^2+x-1)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_2^+ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ R_2^- &= \frac{3+\sqrt{1-4x}}{2(x+2)} \\ R_2^w &= \frac{2}{1-2x+\sqrt{1-4x}} \end{aligned}$$

olsun. D_1 ve D_2 hemen hemen Riordan sıralarının çarpımı D_3 matrisinin hemen hemen Riordan gösterimini bulalım. (5.3) *eşitliğinden*

$$f(x) = x \tag{5.41}$$

dir. (5.34)-(5.36) *eşitlikleri kullanılırsa*

$$K = \frac{1}{x^2+x-1}$$

$$T_1 = \frac{1-x+x^2}{1-2x+x^3}$$

ve $T_2 = 0$ elde edilir. O zaman (5.40) *ifadesinden*

$$D_3 = \left(\frac{1-x+x^2}{1-2x+x^3} \middle| \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x(1-x-x^2)}, \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)$$

olarak bulunur. Buradan D_3 matrisi

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 9 & 12 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & 31 & 26 & 14 & 5 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 25 & 85 & 77 & 46 & 20 & 6 & 1 & 0 & \dots \\ 41 & 248 & 235 & 150 & 73 & 27 & 7 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi, hemen hemen Riordan sıralarının farklı satır toplamlarını, hemen hemen Riordan sıralarının satır toplamlarının, alterne satır toplamlarının ve ağırlıklı satır toplamlarının üreteç fonksiyonlarını kullanarak elde edelim.

Teorem 5.4 $D=(d_{n,k})_{n,k\geq 0}$ *hemen hemen Riordan sırası olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k d_{n,k} = [x^n]\frac{2R^wR^- - 3(R^+)^2 + R^+R^-}{2R^w - 5R^+ + 3R^-} \tag{5.42}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) d_{n,k} = [x^n]\frac{(R^+ + R^-)^2 - 4R^wR^-}{4(R^+ - R^w)} \tag{5.43}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 d_{n,k} = [x^n]\frac{(R^+)^2 + 2(R^w)^2 - 2R^+R^w + R^+R^- - 2R^wR^-}{R^+ - R^-} \tag{5.44}$$

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} = [x^n]\frac{x((R^+)^2 + R^+R^- - 2R^-R^w) + ((R^+)^2 - 3R^+R^- + 2R^-R^w)}{(2R^w - R^+ - R^-) - x(2R^w - 3R^+ + R^-)} \tag{5.45}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n-k,k} = [x^n]\frac{x(2R^-R^w - (R^+)^2 - R^+R^-) + ((R^+)^2 - 3R^+R^- + 2R^-R^w)}{(2R^w - R^+ - R^-) + x(2R^w - 3R^+ + R^-)} \tag{5.46}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)^2 d_{n,k} = [x^n]\left(\begin{array}{c}\frac{3(R^+)^3 + (R^-)^3 + (R^+)^2(3R^- - 4R^w)}{8(R^+ - R^w)^2} \\ + \frac{(R^-)^2(R^+ - 4R^w) + 8R^-(R^w)^2 - 8R^+R^-R^w}{8(R^+ - R^w)^2}\end{array}\right) \tag{5.47}$$

dir (Alp ve Kocer, 2024).

İspat İlk olarak D hemen hemen Riordan sırasının köşegen toplamını gösteren (5.45) eşitliğini elde edelim. Hemen hemen Riordan sırasının temel teoremini kullanırsak

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} = [x^n]\left(a(x) + \frac{x^2 g(x)}{1 - xf(x)}\right)$$

bulunur. Teorem 5.1 kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} = [x^n]\frac{x((R^+)^2 + R^+R^- - 2R^-R^w) + ((R^+)^2 - 3R^+R^- + 2R^-R^w)}{(2R^w - R^+ - R^-) - x(2R^w - 3R^+ + R^-)}$$

elde edilir.

D hemen hemen Riordan sırasının (5.46) ile verilen alterne köşegen toplamını bulmak için hemen hemen Riordan sıralarının temel teoremi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n-k,k} = [x^n]\left(a(x) - \frac{x^2 g(x)}{1 + xf(x)}\right)$$

bulunur. Buradan Teorem 5.1 kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n-k,k} = [x^n]\frac{x(2R^-R^w - (R^+)^2 - R^+R^-) + ((R^+)^2 - 3R^+R^- + 2R^-R^w)}{(2R^w - R^+ - R^-) + x(2R^w - 3R^+ + R^-)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, diğer toplamlar da hemen hemen Riordan sırasının temel teoremi kullanılarak bulunur.

Örnek 5.7 $D = (a(x)|g(x), f(x))$ *hemen hemen Riordan sırasının satır toplamının, alterne satır toplamının ve ağırlıklı satır toplamının üreteç fonksiyonları sırasıyla*

$$R^{+} = \frac{-2x-2}{x^2+x-1},$$
$$R^{-} = \frac{-2x^3-4x^2-2}{x^4+2x^3+x^2-1},$$
$$R^{w} = \frac{-2x^3-4x^2+2x+2}{(x^2+x-1)^2}$$

olsun. Teorem 5.1 göz önüne alınırsa, D *matrisinin hemen hemen Riordan gösterimi*

$$D = \left(\frac{2}{1-x-x^2}\middle| 2, x(1+x)\right)$$

olarak bulunur ve D *matrisi*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 10 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 26 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 & 0 & \dots \\ 42 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 10 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, D *matrisinin farklı satır toplamlarını bulalım.* (5.42) *eşitliği kullanılırsa*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^k d_{n,k} &= [x^n]\frac{-4x^3-8x^2+2}{2x^4+4x^3-x^2-3x+1} \\ &= [x^n]\left(\frac{2}{1-x-x^2} + 4\frac{x}{1-2x-2x^2}\right) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k d_{n,k} = 2F_{n+1} + 4a_n$$

elde edilir. F_n, $n-$*inci Fibonacci sayısı ve* $\{a_n\}$ *dizisi ise OEIS de A002605 numaralı dizidir (Sloane, 2020).*

(5.43) *eşitliği kullanılırsa*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)d_{n,k} = [x^n]\frac{2(x^5+3x^4+4x^3+4x^2+1)}{(1-x-x^2)(1+x+x^2)^2}$$
$$= [x^n]\left(\frac{2}{1-x-x^2} - 2\frac{x(2+x+x^2)}{(1+x+x^2)^2}\right)$$

dır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)d_{n,k} = \begin{cases} 2F_{n+1} - 2b_{n+1}, & n \text{ çift} \\ 2F_{n+1} + 2b_{n+1}, & n \ tek \end{cases}$$

elde edilir. F_n, $n-$*inci Fibonacci sayısı ve* $\{b_n\}$ *dizisi OEIS de A099471 numaralı dizidir (Sloane, 2020).*

(5.44) *eşitliğinden*

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 d_{n,k} = [x^n]\frac{-2(x^5+3x^4-4x^2+2x+1)}{(1-x-x^2)^3}$$
$$= [x^n]\left(2\frac{1+x}{1-x-x^2} + 2\frac{x}{(1-x-x^2)^2} + 4\frac{x}{(1-x-x^2)^3}\right)$$

dir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 d_{n,k} = 2F_{n+2} + 2c_{n+1} + 4d_{n-1}$$

elde edilir. F_n, $n-$*inci Fibonacci sayısı,* $\{c_n\}$ *ve* $\{d_n\}$ *dizileri sırasıyla OEIS de A001629 ve A001628 numaralı dizilerdir (Sloane, 2020).*

(5.47) *eşitliği göz önüne alınırsa*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)^2 d_{n,k} = [x^n]\frac{2(x^7+4x^6+8x^5+11x^4+10x^3+7x^2-x+1)}{(1-x-x^2)(1+x+x^2)^3}$$
$$= [x^n]\left(\frac{2}{1-x-x^2} - 2\left(\frac{x(2+x+x^2)}{(1+x+x^2)^2} + 2\frac{x}{(1+x+x^2)^3}\right)\right)$$

dır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)^2 d_{n,k} = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 2F_{n+1} - 2b_{n+1} + 4k_{n-1}, & n \text{ çift} \\ 2F_{n+1} + 2b_{n+1} - 4k_{n-1}, & n \ tek \end{cases}$$

elde edilir. F_n, $n-$*inci Fibonacci sayısı,* $\{b_n\}$ *ve* $\{k_n\}$ *dizileri sırasıyla OEIS de A099471 ve A128504 numaralı dizilerdir (Sloane, 2020).*

Şimdi, D *hemen hemen Riordan sırasının köşegen ve alterne köşegen toplamlarını bulalım.* (5.45) *eşitliği kullanılırsa*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} &= [x^n]\frac{-2x^4-4x^3+2}{x^5+2x^4-2x^2-x+1} \\ &= [x^n]\left(\frac{2}{1-x-x^2}+2\frac{x^2}{1-x^2-x^3}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, D *hemen hemen Riordan sırasının köşegen toplamı*

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k,k} = 2F_{n+1}+2P_{n+1}$$

dır. F_n *ve* P_n*, sırasıyla* $n-$*inci Fibonacci ve Padovan sayılarıdır.*

(5.46) *eşitliği kullanılırsa*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n-k,k} &= [x^n]\frac{-2x^4-4x^3-2}{x^5+2x^4+x-1} \\ &= [x^n]\left(\frac{2}{1-x-x^2}-2\frac{x^2}{1+x^2+x^3}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, D *hemen hemen Riordan sırasının alterne köşegen toplamı*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_{n-k,k} = \begin{cases} 2, & n=0,1 \\ 2F_{n+1}-2l_{n-2}, & n\neq 0 \ \ ve \ \ n\neq 1 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. F_n*,* $n-$*inci Fibonacci sayısı ve* $\{l_n\}$ *dizisi OEIS de A077962 numaralı dizidir (Sloane, 2020).*

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Riordan sıralarının farklı formlarından biri olan hemen hemen Riordan sıraları göz önüne alınmıştır. Hemen hemen Riordan sıralarının A, Z ve $\omega-$ dizileri tanımlanmıştır. Bu diziler kullanılarak hemen hemen Riordan sıralarının dizi karakterizasyonu elde edilmiştir. Daha sonra hemen hemen Riordan sıralarının satır, alterne satır ve ağırlıklı satır toplamlarının üreteç fonksiyonları göz önüne alınarak hemen hemen Riordan sıralarının farklı bir karakterizasyonu verilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda, ikinci ve daha fazla mertebeden hemen hemen Riordan sıraları göz önüne alınarak farklı dizi karakterizasyonları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alp, Y. ve Kocer, E. (2023). Sequence characterization of almost-riordan arrays. *Linear algebra and its applications*, 664:1–23.

Alp, Y. ve Kocer, E. (2024). Characterization of almost-riordan arrays with row sums. *submitted*.

Bang, C., Bell, M., Culver, E., Dickson, J., Dimitrov, S., Perrier, R., ve Sundaram, S. (2023). On sums, derivatives and flips of Riordan arrays. *Journal of integer sequences*, 26.

Baran, F. ve Tuglu, N. (2017). q-Riordan representation. *Linear algebra and its applications*, 525:105–117.

Barry, P. (2007). On a family of generalized Pascal triangles defined by exponential Riordan arrays. *Journal of integer sequences*, 10.

Barry, P. (2010). Exponential Riordan arrays and permutation enumeration. *Journal of integer sequences*, 13.

Barry, P. (2014). Constructing exponential Riordan arrays from their A and Z sequences. *Journal of integer sequences*, 17.

Barry, P. (2016). On the group of almost-Riordan arrays. *arXiv:1606.05077v1*.

Barry, P. (2017). *Riordan Arrays: A Primer*. Logic Press.

Barry, P. (2021). On the partial sums of Riordan arrays. *arXiv:2108.13537v1*.

Barry, P., Hennessy, A., ve Pantelidis, N. (2021). Algebraic properties of Riordan subgroups. *Journal of algebraic combinatorics*, 53:1015–1036.

Barry, P. ve Pantelidis, N. (2021). On pseudo-involutions, involutions and quasi-involutions in the group of almost Riordan arrays. *Journal of algebraic combinatorics*, 54:399–423.

Cetin, M., Kizilates, C., Baran, F., ve Tuglu, N. (2021). Some identities of harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers. *Gazi university journal of science*, 34(2):493–504.

Cheon, G., Cohen, M., ve Pantelidis, N. (2022). Decompositions and eigenvectors of Riordan matrices. *Linear algebra and its applications*, 642(2022):118–138.

Cheon, G., Jung, J., ve Barry, P. (2018). Horizontal and vertical formulas for exponential Riordan matrices and their applications. *Linear algebra and its applications*, 541:266–284.

Deutsch, E., Ferrari, L., ve Rinaldi, S. (2009). Production matrices and Riordan arrays. *Annals of combinatorics*, 13:65–85.

Deutsch, E. ve Shapiro, L. (2004). Exponential Riordan arrays. *http://www.combinatorics.net/ppt2004/Louis%20W.%20Shapiro/shapiro.htm.*

Graham, R. L., Knuth, D. E., ve Patashnik, O. (1989). *Concrete mathematics: A foundation for computer science*. Addison-Wesley Longman Publishing, Boston.

He, T. (2011). Riordan arrays associated with Laurent series and generalized Sheffer type groups. *Linear algebra and its applications*, 435:1241–1256.

He, T. (2015). Matrix characterizations of Riordan arrays. *Linear algebra and its applications*, 465:15–42.

He, T. ve Shapiro, L. (2016). Row sums and alternating row sums of Riordan arrays. *Linear algebra and its applications*, 507:77–95.

He, T. ve Sprugnoli, R. (2008). Sequence characterization of Riordan arrays. *Discrete mathematics*, 309:3962–3974.

Hungerford, T. (2003). *Algebra*. Springer-Verlag, New York.

Jean-Louis, C. ve Nkwanta, A. (2013). Some algebraic structure of the Riordan group. *Linear algebra and its applications*, 438:2018–2035.

Lee, G. ve Cho, S. (2008). The generalized Pascal matrix via the generalized Fibonacci matrix and the generalized Pell matrix. *Journal of the Korean mathematical society*, 45(2):479–491.

Luzôn, A., Merlini, D., Morôn, M., ve Sprugnoli, R. (2014). Complementary Riordan arrays. *Discrete applied mathematics*, 172:75–87.

Merlini, D., Rogers, D., Sprugnoli, R., ve Verri, M. (1997). On some alternative characterizations of Riordan arrays. *Canadian journal of mathematics*, 49(2):301–320.

Merlini, D., Sprugnoli, R., ve Verri, M. (2006). Lagrange inversion: when and how. *Acta applicandae mathematicae*, 94:233–249.

Merlini, D., Sprugnoli, R., ve Verri, M. (2007). The method of coefficients. *The American mathematical monthly*, 114(1):40–57.

Mu, L., Mao, J., ve Wang, Y. (2017). Row polynomial matrices of Riordan arrays. *Linear algebra and its applications*, 522:1–14.

Niven, I. (1969). Formal power series. *The American mathematical monthly*, 76:871–889.

Peart, P. ve Woan, W. (2000). Generating functions via Hankel and Stieltjes matrices. *Journal of integer sequences*, 3.

Rogers, D. (1978). Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays. *Discrete mathematics*, 22:301–310.

Shapiro, L. (1976). A catalan triangle. *Discrete mathematics*, 14:83–90.

Shapiro, L. (2003). Bijections and the Riordan group. *Theoretical computer science*, 307:403–413.

Shapiro, L., Getu, S., Woan, W., ve Woodson, L. (1991). The Riordan group. *Discrete applied mathematics*, 34:229–239.

Shapiro, L., Sprugnoli, R., Barry, P., Cheon, G., He, T., Merlini, D., ve Wang, W. (2022). *The Riordan Group and Applications*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York.

Sloane, N. J. A. (2020). The on-line encyclopedia of integer sequences. *https://oeis.org/?language=english*.

Slowik, R. (2021). More about involutions in the group of almost-Riordan arrays. *Linear algebra and its applications*, 624(2021):247–258.

Sprugnoli, R. (1994). Riordan arrays and combinatorial sums. *Discrete mathematics*, 132:267–290.

Stanley, R. P. (2011). *Enumerative combinatorics*, volume 1. Cambridge university press, Cambridge.

Tuglu, N., Yesil, F., Dziemianczuk, M., ve Kocer, E. (2015). $q-$ Riordan array for $q-$ Pascal matrix and its inverse matrix. *Turkish journal of mathematics*, 40:1038–1048.

Tuglu, N., Yesil, F., Kocer, E., ve Dziemianczuk, M. (2014). The $F-$analogue of Riordan representation Pascal matrices via fibonomial coefficients. *Journal of applied mathematics*, 2014.

Wang, W. ve Wang, T. (2008). Generalized Riordan arrays. *Discrete mathematics*, 308:6466–6500.

Wilf, H. (1990). *Generatingfunctionology*. Academic Press, London.