



**T.C.**  
**NECMETTİN ERBAKAN**  
**ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**CHARLIER POLİNOMLARINI İÇEREN**  
**GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ**  
**OPERATÖRLERİNİN KANTROVİCH TİPİ**  
**GENELLEŞTİRİLMESİ**

**Adem AYIK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2018**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Adem AYIK tarafından hazırlanan “Charlier Polinomlarını İçeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantrovich Tipi Genelleştirilmesi” adlı tez çalışması 09/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Bünyamin AYDIN

#### Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK

#### Üye

Doç. Dr. Erdiñ DÜNDAR

### İmza

.....

.....

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Adem AYIK

Tarih : 09/02/2018

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### CHARLIER POLİNOMLARINI İÇEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ OPERATÖRLERİNİN KANTROVICH TİPİ GENELLEŞTİRİLMESİ

Adem AYIK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK

2018, 41 Sayfa

Jüri

Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK  
Prof. Dr. Bünyamin AYDIN  
Doç. Dr. Erdiç DÜNDAR

Bu tezde Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantrovich tipi genelleştirilmesi tanımlanarak bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yaklaşım teorisi hakkında bilgiler verilip, bu teori hakkında literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde lineer pozitif operatörler tanıtılmış ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantrovich tipi genelleştirilmesi tanımlanarak bazı yaklaşım özellikleri incelenmiş ve tanımladığımız operatörün merkezi momentleri hesaplanmıştır. Ayrıca operatörün süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilmiştir.

Dördüncü bölümde tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra tanımladığımız operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplanmıştır. Son olarak tanımladığımız operatörler için Voronovskaja tipi teorem verilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Korovkin teoremi, Charlier polinomları, Walczak teoremi, Lineer pozitif operatörler, Lipschitz sınıfı, Peetre-K fonksiyoneli, Süreklilik modülü, Szasz-Charlier operatörleri, Charlier Polinomlarını İçeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantrovich tipi genelleştirilmesi, Voronovskaja teoremi.

## ABSTRACT

### MS THESIS

# KANTOROVICH VARIANT GENERALIZED OF CHARLIER POLINOMIALS INCLUDING GENERALIZED SZASZ OPERATORS

Adem AYIK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK

2018, 41 Pages

Jury

Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK  
Prof. Dr. Bünyamin AYDIN  
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

In this thesis, the approximation properties were studied by defining Kantorovich variant of modified Szasz-Charlier operators.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, informations were given about the approximation theory, literature scan was done about this theory.

In the second part, linear positive operators were introduced and main properties which are supplied by linear positive operators were studied. Also, some definitions were given which are used in further sections.

In the third part, the approximation properties were studied by defining Kantorovich Variant Of Modified Szasz-Charlier Operators and central moments of the operator that we defined were calculated. Besides, speed of approximation of these operators was estimated with the help of modulus of continuity and the function in the Lipschitz class.

In the fourth part, approximation properties to continuous functions in weighted space of this operator that we defined were studied. After that, speed of approximation in a weighted space of the operator that we defined was calculated by the help of both weighted modulus of continuity and Peetre-K functional. At last, Voronovskaja type theorem was given for operators that we defined.

Finally, in the fifth part, results were given.

**Keywords:** Korovkin theorem, Charlier Polinomları, Walczak theorem, Positive linear operators, Lipschitz class, Peetre's K-functionals, Szasz-Charlier operators, Kantorovic Variant of Modified Szasz-Charlier Operators Modulus of continuity, The Voronovskaja theorem,

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı tez çalışması olarak sunulmuştur. Bu çalışmada yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK'a teşekkür ederim.

Adem AYIK  
KONYA-2018



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
3. CHARLIER POLİNOMLARINI İÇEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ OPERATÖRLERİNİN KANTROVICH TİPİ GENELLEŞTİRİLMESİ .....	12
4. OPERATÖRÜN AĞIRLIKLIL UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ..	25
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	37
KAYNAKLAR .....	39
ÖZGEÇMİŞ .....	41

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$C[a, b]$	Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$\ f\ _{C[a, b]}$	$C[a, b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm.
$f_n(x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n(x) \Rightarrow f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$\omega(f; \delta)$	$f$ fonksiyonun süreklilik modülü.
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar.
$B_n(f; x)$	Bernstein Polinomları.
$S_n(f; x)$	Szasz operatörleri.
$A_n(f; x)$	Szasz-Charlier operatörleri
$S_n^*(f; x)$	Charlier polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç tipi genelleşmesi.
$C_{x^2}^*[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında tanımlı $\lim_{ x  \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı.
$K_2(f, \delta)$	Peetre-K fonksiyoneli.
$\Omega(f; \delta)$	$f$ fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü.

## 1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi sadece matematik de değil matematiği içeren diğer bilim dallarında da aktif rol oynamaktadır. Özellikle fizikte bilgisayar destekli geometrik dizaynda mühendislik bilimlerinde model oluşturma gibi alanlarda uygulamaları vardır. Yaklaşımlar teorisi matematiğin birçok dalıyla yakından ilgilidir. Yaklaşımlar teorisi herhangi bir fonksiyonu daha basit, kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmeyi amaçlar. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında daha kolay bilgi edinmemizi sağlar. 1885 yılında Weierstarss kapalı bir  $[a, b]$  aralığında sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan polinomların varlığını göstermiştir. Daha sonra Bernstein 1912 yılında Weierstarss'ın bu ifadesinin ispatı olarak  $[0, 1]$  aralığında bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomları aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

### P.P. Korovkin Teoremi (1953)

$f \in C[a, b]$  ve tüm reel ekseninde  $|f(x)| \leq M_f$  olsun.

Eğer  $L_n(f)$  lineer pozitif operatör dizisi, her  $x \in [a, b]$  ve  $e_i = t^i$  olmak üzere  $i = 0, 1, 2$  için

$$L_n(e_i; x) \rightarrow x^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda  $[a, b]$  aralığında

$$L_n(f; x) \rightarrow f(x)$$

dir.

Korovkin bu teoremiyle sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın gerçekleşmesi için sadece üç şartın incelenmesinin yeterli olacağını ifade etmiş ve bunun sayesinde Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer and Hahn operatörleri gibi operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelemiştir. Bu teorem yardımıyla sonlu aralıktaki lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenebilmiştir. Oysa Szasz operatörleri gibi birçok operatör sınırsız aralıklarda tanımlandığından bunların ancak ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenebilmektedir.

1950 yılında, Szasz (Szasz, 1950) Bernstein operatörünü sonlu aralıktan sonsuz aralığa genişleterek aşağıdaki şekilde operatörü tanımlamıştır;

$x \in [0, \infty)$  ve  $f \in C[0, \infty)$  için  $S_n : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}.$$

Szasz operatörü bu şekilde tanımlandıktan sonra literatürde bu operatörün yaklaşım özellikleri ve operatörlerin çeşitli genelleşmeleri incelenmiştir. (Büyükyazıcı ve arkadaşları 2014, Atakut ve Büyükyazıcı, 2010, Jakimovski ve Leviatan 1969, Ciupa 2008, İspir ve Atakut 2002)

Charlier Polinomu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(a)}(u) \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < a,$$

$$C_k^{(a)}(u) = \sum_{r=0}^k f\left(\frac{k}{r}\right) (-u)_r \left(\frac{1}{a}\right)^r \left(\frac{1}{a}\right)^r \quad \text{ve}$$

$$(m)_0 = 1, \quad (m)_j = m(m+1)\dots(m+j-1).$$

S.Varman ve F.Taşdelen (Varman ve Taşdelen 2012) Charlier polinomlarını kullanarak Szasz operatörlerini genelleştirerek aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$$L_n(f; x, a) = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(-(a-1)nx)}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Daha sonra Walczak (Walczak 2000) Szasz Operatörlerini aşağıdaki şekilde genelleştirir.  $x \geq 0$  olmak üzere;

$$S_n(f; x) = e^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Burada  $N=(1,2,3,\dots)$  ve  $(a_n), (b_n)$  dizileri azalan ve sınırlı diziler olmak üzere aşağıdaki şartı sağlar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0, \quad \frac{a_n}{b_n} = 1 + o\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

Bu çalışmada, Charlier polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin Kantorovich tipi aşağıdaki gibi

$$S_n^*(f, x, a) = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(-(a-1)\beta_n x)}{k!} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds, \quad a \geq 1$$

şeklinde tanımlayacağız.

$\gamma_n \geq 1, \beta_n \geq 1$  için  $\gamma_n$  ve  $\beta_n$  azalan ve sınırsız diziler olmak koşuluyla aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0, \quad \frac{\beta_n}{\gamma_n} = 1 + o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right).$$

Bu tezde yaklaşımlar teorisi hakkında literatür taraması yapılacak, lineer pozitif operatörler tanıtılarak bu operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Daha sonra çalışmamızda kullanılacak olan bazı temel tanımlar verilecektir. İlerleyen bölümlerde Charlier polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin Kantoroviç tipi genelleşmesi tanımlanıp bu operatörün kapalı aralıkta Korovkin teoremi yardımıyla yakınsama özellikleri incelenecektir. Ayrıca süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar tanımlanıp bunlar yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Daha sonra ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları incelenip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenecektir. Ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Bununla birlikte son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilecektir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda lineer pozitif operatörler tanımı ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir.

### 2.1. Lineer Pozitif Operatörler

**Tanım 2.1.1**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olsun.  $X$  kümesinden  $Y$  kümesine olan bir  $L$  dönüşümüne operatör denir. Buna göre,  $X$  uzayında tanımlı her  $f$  fonksiyonuna  $Y$  uzayında bir  $Lf$  fonksiyonu karşılık gelir. Bu  $Lf$  fonksiyonunun  $x$  noktasında aldığı değer  $L(f;x)$  ile gösterilir (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.1.2**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L: X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörünü göz önüne alalım. Eğer  $L$  operatörü her  $f, g \in X$  ve her  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  için

$$L(a_1f + a_2g) = a_1L(f) + a_2L(g)$$

koşulunu sağlıyorsa,  $L$  operatörüne *lineer operatör* denir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**Tanım 2.1.3**  $L: X \rightarrow Y$  bir operatör ve  $f \in X$  olsun. Eğer

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f;x) \geq 0$$

oluyorsa  $L$  operatörüne pozitif operatör denir (Korovkin 1960).

Hem lineerlik hem de pozitiflik koşullarını sağlayan  $L$  operatörüne lineer pozitif operatörler denir.

### Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Aşağıdaki yardımcı teoremler lineer pozitif operatörlerin literatürde var olan özellikleridir.

**Yardımcı Teorem 2.1.1**  $L: X \rightarrow Y$  bir lineer pozitif operatör olsun.  $f, g \in X$  olmak üzere  $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$  eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**İspat:**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L: X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Kabul edelim ki  $f, g \in X$  için  $f \leq g$  olsun. Bu durumda,  $g - f \geq 0$  olacağından ve  $L$  operatörü pozitif olduğundan  $L(g - f) \geq 0$  elde edilir. Diğer

tarafından  $L$  operatörü lineer olduğundan  $L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0$  elde edilir. Böylece  $L(f) - L(g) \leq 0$  olur ki ispat tamamlanır..

**Yardımcı Teorem 2.1.2**  $L: X \rightarrow Y$  bir lineer pozitif operatör ise o takdirde  $|L(f)| \leq L(|f|)$  eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**İspat:**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L: X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Her hangi bir  $f$  fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \quad (2.1.1)$$

dir.  $L$  operatörü lineer pozitif olduğu için Yardımcı Teorem 2.1.1 den dolayı monoton artan olduğu için (2.1.1)'den

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \quad (2.1.2) \quad \text{elde}$$

edilir.  $L$  operatörü lineer olduğundan

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

dir. Bunun (1.1.2)'de kullanılmasıyla;

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 2.1.4**  $A \subseteq R$  ve  $f: A \rightarrow IR$  bir fonksiyon olsun. Her  $n \in IN$  için  $f_n(x)$  e bir fonksiyon dizisi denir ve  $(f_n)$  ile gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**Tanım 2.1.5**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L: X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörü ve her  $n \in IN$  için  $L_n(f; x)$ 'e bir operatör dizisi denir ve  $(L_n)$  ile gösterilir.  $L_n(f; x)$ ,  $L_n$  operatörünün  $f$  ' e uygulandığını ve sonucun  $x$  ' e bağlı olduğunu gösterir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**Tanım 2.1.6** Kapalı bir  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bütün reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye  $C[a, b]$  fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a < x < b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**Tanım 2.1.7** Bir  $(f_n)$  fonksiyon dizisinin  $f$  fonksiyonuna  $C[a, b]$  normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her  $x \in [a, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

ya da daha açık olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Düzgün yakınsama  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  şeklinde gösterilir (Musayev ve ark. 2003).

Korovkin, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

**Teorem 2.1.1**  $f \in C[a, b]$  ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \quad (2.1.3)$$

olsun. Eğer  $L_n(f)$  lineer pozitif operatör dizisi,  $\forall x \in [a, b]$  ve  $e_i = t^i$  olmak üzere  $i = 0, 1, 2$  için

$$L_n(e_i; x) \rightarrow x^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda  $[a, b]$  aralığında

$$L_n(f; x) \rightarrow f(x)$$

dir (Korovkin 1953).

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in C[a, b]$  olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı her  $\varepsilon > 0$

için  $|t - x| \leq \delta$  olduğunda  $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı  $\delta > 0$  reel sayısı vardır.

$|t - x| > \delta$  olduğunda ise (2.1.3)'ten ve üçgen eşitsizliğinden dolayı:

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.1.4)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer;  $|t - x| > \delta$  ise  $\frac{|t - x|}{\delta} > 1$  olacağından;

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.1.5)$$

sağlanır. (2.1.4) ve (2.1.5)'ten

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılır. O halde,

$$|t-x| \leq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t-x| > \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla, her  $t \in \mathbb{R}$  ve her  $x \in [a, b]$  için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.1.6)$$

dir. Şimdi  $i = 0, 1, 2$  koşullarını sağlayan  $(L_n)$  operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterelim.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(f(x); x) - 1)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t) - f(x)) \leq |f(t) - f(x)|$$

Olduğundan,

$$|L_n((f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

elde edilir. Operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(x)| \geq 0$$

Olduğundan,

$$|L_n(|f(t) - f(x)|; x)| = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. Böylece,

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |(L_n(1, x) - 1)|$$

olduğu gösterilir. (2.1.3)'ten

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |(L_n(1, x) - 1)|$$

elde edilir. ( $L_n$ ) monoton artan olduğundan (2.1.6)'nın kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M_f |(L_n(1, x) - 1)| \quad (2.1.7)$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \left[ \begin{aligned} &L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) \\ &+ x^2 L_n(1; x) \end{aligned} \right] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \left[ \begin{aligned} &L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) \\ &+ x^2 L_n(1; x) - x^2 \end{aligned} \right] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \left[ \begin{aligned} &(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) \\ &+ x^2 (L_n(1; x) - 1) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son bulduğumuz ifadenin (2.1.7)'de kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \left[ \begin{aligned} &(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) \\ &+ x^2 (L_n(1; x) - 1) \end{aligned} \right] \\ &+ M_f |(L_n(1, x) - 1)| \end{aligned}$$

elde edilir.  $i = 0, 1, 2$  koşullarının son eşitsizlikte kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

bulunur. O halde;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 2.1.8**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L: X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörü ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(L_n)$  operatör dizisi verilsin.

$$L_n\left((t-x)^k; x\right), \{k=0,1,2,\dots\}$$

ile tanımlanan ifadelerle  $(L_n)$  operatör dizisinin  $k$ . *merkezi momenti* denir (Lorentz 1953).

**Tanım 2.1.9**  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n \leq \beta_n$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $\alpha_n \rightarrow 0$  ve  $\beta_n \rightarrow 0$  koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda  $(\alpha_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\beta_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızından daha *hızlıdır* denir.

Teorem 2.1.1' de lineer pozitif bir  $(L_n(f; x))$  operatör dizisinin belirli şartlar altında  $f(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermiştik. Bu durumda  $\|L_n(f) - f\|$  ifadesini sıfıra yakınsayan bir dizi olarak düşünebiliriz. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için  $\beta_n \rightarrow 0$  olmak üzere; eğer

$$\|L_n(f) - f\| \leq M \beta_n$$

olacak şekilde bir  $(\beta_n)$  dizisi bulabilirsek,  $(\beta_n)$ 'nin sıfıra yaklaşım hızı  $L_n(f; x)$ 'in  $f(x)$ 'e yaklaşma hızını değerlendirmemize yardımcı olur. Bu değerlendirmeyi yapmak için birçok yöntem vardır. Şimdi bu yöntemleri açıklayalım.

**Tanım 2.1.10**  $f \in C[a, b]$  olsun.  $\forall \delta > 0$  için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan  $\omega(f; \delta)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun *Süreklilik Modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

### Süreklilik Modülünün Özellikleri

- i.  $\omega(f; \delta) \geq 0$
- ii.  $\delta_1 \leq \delta_2$  ise  $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- iii.  $\omega(f + g; \delta) \leq \omega(f; \delta) + \omega(g; \delta)$
- iv.  $m \in \mathbb{N}$  için  $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
- v.  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  için  $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$
- vi.  $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

$$\text{vii. } |f(t) - f(x)| \leq \left( \frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

$$\text{viii. } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

dir (Altomare ve Campiti 1994).

**Tanım 2.1.11**  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $|f(t) - f(x)| \leq M |t-x|^\alpha$  koşulunu sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfındandır denir.  $M$  'ye de Lipschitz sabiti denir ve  $f \in Lip_M(\alpha)$  ile gösterilir. (Ersan 2008)

**Tanım 2.1.12**  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı  $M_f$ ,  $f'$  ye bağlı sabit olmak üzere  $|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$  koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan kümeye  $B_{x^2}[0, \infty)$  ağırlıklı fonksiyon uzayı denir.  $B_{x^2}[0, \infty)$  uzayının sürekli fonksiyonlardan oluşan alt uzayına  $C_{x^2}[0, \infty)$  ağırlıklı fonksiyon uzayı denir.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$  ile sınırlı ve sürekli fonksiyonlardan oluşan  $C_{x^2}[0, \infty)$  uzayının alt uzayına  $C_{x^2}^*[0, \infty)$  ağırlıklı fonksiyon uzayı denir.  $C_{x^2}^*[0, \infty)$  uzayındaki norm

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

**Tanım 2.1.13**  $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  olsun. Herhangi bir  $\delta > 0$  için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{x \in [0, \infty), h \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı olan  $\Omega(f; \delta)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir (Atakut, Ispir 2002).

### Ağırlıklı Süreklilik Modülünün Özellikleri

$f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Ashieser 1956 ve Ispir 2001).

$$\text{i. } \Omega(f; \delta) \geq 0$$

$$\text{ii. } \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$$

iii.  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(f; \delta) = 0$

iv.  $m \in \mathbb{N}$  için  $\Omega(f; m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$

v. Herhangi  $\delta > 0$  için  $\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$

vi.  $|f(t) - f(x)| \leq (1 + x^2)(1 + (t - x)^2)\Omega(f; |t - x|)$

vii.  $|f(t) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2)\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right)(1 + (t - x)^2)\Omega(f; \lambda\delta)$

**Tanım 2.1.14**  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli  $f$  fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye  $C_B[0, \infty)$  ağırlıklı fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm  $\|f\| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$  şeklinde tanımlıdır.  $\forall \delta > 0$  için Peetre- $K$  fonksiyoneli

$$K_2(f, \delta) = \inf_{x \in C_B^2[0, \infty)} \{\|f - h\| + \delta \|h''\|\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$C_B^2[0, \infty) = \{h \in C_B[0, \infty) : h', h'' \in C_B[0, \infty)\}$$
 'dir.

$\exists C > 0$  öyle ki  $K_2(f, \delta) \leq C\omega_2(f, \delta)$  burada  $\omega_2(f, \delta)$  ikinci dereceden süreklilik modülü olmak üzere

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 < p < \sqrt{\delta}} \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x + 2p) - 2f(x + p) + f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Lorentz 1953). Ayrıca  $\omega(f, \delta)$ ,  $f \in C_B[0, \infty)$ 'nin genel süreklilik modülüdür.

**Tanım 2.1.15**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  ise  $(\alpha_n)$  dizisine sonsuz küçülendir denir.  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$  dizileri sonsuz küçülen diziler olsun. Buna göre

i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$  ise  $(\alpha_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\beta_n)$  dizisinden *daha hızlıdır* denir.

ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$  ise  $(\beta_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\alpha_n)$  dizisinden *daha hızlıdır* denir.

iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$  ise  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$  dizilerinin sıfıra yaklaşma hızı *aynıdır* denir.

iv.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c$  ise  $c$  ye asimptotik değer,  $(\beta_n)$  dizisine de  $(\alpha_n)$  dizisinin asimptotik hızı denir.

Yani  $(\alpha_n)$ 'nin sıfıra yaklaşım hızı  $(\beta_n)$ 'nin sıfıra yaklaşım hızıyla belirlenir. Çünkü  $c$ ,  $n$ 'ye bağlı olmayan bir sabittir. Operatörlerde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_n(f; x) - f(x)|}{\beta_n} = A(n, x)$$

ise  $A(n, x)$  fonksiyonu asimptotik değer,  $(\beta_n)$  dizisi de

$$|L_n(f; x) - f(x)| \text{ 'in}$$

asimptotik hızıdır.



### 3. CHARLIER POLİNOMLARINI İÇEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ TİPİ OPERATÖRLERİ VE BUNLARIN KANTROVIÇ TİPİ GENELLEŞMESİ

Bu bölümde Charlier polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç tipi Genelleştirilmesini tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini inceleyip tanımladığımız operatörün merkezi momentlerini hesaplayacağız. Ayrıca süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenecektir.

#### 3.1. Operatörün Oluşturulması ve Yaklaşım Özellikleri

$\gamma_n \geq 1$ ,  $\beta_n \geq 1$  için Charlier Polinomlarını içeren Szasz Tipi operatörleri ve bunların Kantorovich Tipi genelleşmesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_n^*(f, x, a) = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)^{\frac{\gamma_n}{k}}}{k!} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds \quad (3.1.1)$$

$(\gamma_n)$  ve  $(\beta_n)$  sınırsız ve pozitif artan dizilerde,  $(\gamma_n) \geq 1$   $(\beta_n) \geq 1$  şeklinde tanımlanır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0, \quad \frac{\beta_n}{\gamma_n} = 1 + o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right).$$

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier operatörünün yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

#### Yardımcı Teorem 3.1.1 (Varman ve Taşdelen 2012)

$n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\forall x \in [0, \infty)$  için

$$S_n(1; x) = 1,$$

$$S_n(t; x) = \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{1}{\gamma_n} \text{ ve}$$

$$S_n(t^2; x) = \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(3 + \frac{1}{a-1}\right) x + \frac{2}{\gamma_n^2}$$

eşitlikleri sağlanır.

Aşağıdaki yardımcı teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörünün Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

### Yardımcı Teorem 3.1.2

$n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\forall x \in [0, \infty)$  için,

$$S_n^*(1; x) = 1,$$

$$S_n^*(e_1; x, a) = \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n},$$

$$S_n^*(e_2; x, a) = \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2},$$

$$S_n^*(e_3; x, a) = \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^3} x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^3} \left( \frac{15}{2} + \frac{3}{a-1} \right) x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^3} \left( \frac{31}{2} + \frac{20}{3(a-1)} + \frac{2}{(a-1)^2} \right) x + \frac{37}{4\gamma_n^3} \text{ ve}$$

$$S_n^*(e_4; x, a) = \frac{\beta_n^4}{\gamma_n^4} x^4 + \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^4} \left( 12 + \frac{6}{a-1} \right) x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^4} \left( 45 + \frac{36}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2} \right) x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^4} \left( 51 + \frac{38}{a-1} + \frac{22}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^3} \right) x + \frac{151}{5\gamma_n^4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

**İspat:** İspata geçmeden önce operatörümüzün integral hesabını aşağıdaki gibi yaparız.

$$\int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds = \frac{1}{\gamma_n}, \quad f(s) = 1,$$

$$\int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds = \frac{k}{\gamma_n^2} + \frac{1}{2\gamma_n^2}, \quad f(s) = s,$$

$$\int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds = \frac{k^2}{\gamma_n^3} + \frac{k}{\gamma_n^3} + \frac{1}{3\gamma_n^3}, \quad f(s) = s^2,$$

$$\int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds = \frac{k^3}{\gamma_n^4} + \frac{3k^2}{2\gamma_n^4} + \frac{k}{\gamma_n^4} + \frac{1}{4\gamma_n^4}, \quad f(s) = s^3,$$

$$\int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(s) ds = \frac{k^4}{\gamma_n^5} + \frac{2k^3}{\gamma_n^5} + \frac{2k^2}{\gamma_n^5} + \frac{k}{\gamma_n^5} + \frac{1}{5\gamma_n^5}, \quad f(s) = s^4,$$

Yardımcı Teorem 3.1.1 ve  $S_n^*(f; x)$  tanımından,

i)

$$S_n^*(1, x, a) = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{1}{\gamma_n},$$

$$S_n^*(1, x, a) = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!},$$

$$S_n(1, x, a) = 1$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} S_n^*(e_1; x, a) &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \left(\frac{k}{\gamma_n^2} + \frac{1}{2\gamma_n^2}\right) \\ &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k}{\gamma_n^2} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{1}{2\gamma_n^2} \\ &= \frac{1}{\gamma_n} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot k + \frac{1}{2\gamma_n} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \\ &= S(t, x) + \frac{1}{2\gamma_n} S(1, x) \\ &= \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{2\gamma_n} \\ &= \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii)

$$\begin{aligned}
S_n^*(e_2; x, a) &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \left(\frac{k^2}{\gamma_n^3} + \frac{k}{\gamma_n^3} + \frac{1}{3\gamma_n^3}\right) \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k^2}{\gamma_n^3} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k}{\gamma_n^3} + \\
&e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{1}{3\gamma_n^3} \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x) k^2}{k! \gamma_n^2} + \frac{1}{\gamma_n} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x) k}{k! \gamma_n} + \\
&\frac{1}{3\gamma_n^2} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \\
&= S(t^2, x) + \frac{1}{\gamma_n} S(t, x) + \frac{1}{3\gamma_n^2} S(1, x) \\
&= \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv)

$$\begin{aligned}
S_n^*(e_3; x, a) &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \left(\frac{k^3}{\gamma_n^4} + \frac{3k^2}{2\gamma_n^4} + \frac{k}{\gamma_n^4} + \frac{1}{4\gamma_n^4}\right) \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k^3}{\gamma_n^4} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{3k^2}{2\gamma_n^4} + \\
&e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k}{4\gamma_n^4} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{1}{4\gamma_n^4} \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x) k^3}{k! \gamma_n^3} + \frac{3}{2\gamma_n} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x) k^2}{k! \gamma_n^2} + \\
&\frac{1}{4\gamma_n^2} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x) k}{k! \gamma_n} + \frac{1}{4\gamma_n^3} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \\
&= S(t^3, x) + \frac{3}{2\gamma_n} S(t^2, x) + \frac{1}{4\gamma_n^2} S(t, x) + \frac{1}{4\gamma_n^3} S(1, x) \\
&= \left(\frac{\beta_n}{\gamma_n}\right)^3 x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^3} \left(\frac{15}{2} + \frac{3}{a-1}\right) x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{31}{2} + \frac{20}{3(a-1)} + \frac{2}{(a-1)^2}\right) x + \frac{37}{4\gamma_n^3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v)

$$\begin{aligned}
S_n^*(e_4; x, a) &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \left(\frac{k^4}{\gamma_n^5} + \frac{2k^3}{\gamma_n^5} + \frac{2k^2}{\gamma_n^5} + \frac{k}{\gamma_n^5} + \frac{1}{5\gamma_n^5}\right) \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k^4}{\gamma_n^5} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{2k^3}{\gamma_n^5} \\
&+ e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{2k^2}{\gamma_n^5} + e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{k}{\gamma_n^5} \\
&+ e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{1}{\gamma_n^5} \\
&= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \frac{k^4}{\gamma_n^4} + \frac{2}{\gamma_n} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \frac{k^3}{\gamma_n^3} \\
&+ \frac{2}{\gamma_n^2} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \frac{k^2}{\gamma_n^2} + \frac{1}{\gamma_n^3} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \frac{k}{\gamma_n} \\
&+ \frac{1}{\gamma_n^4} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \\
&= S(t^4, x) + \frac{2}{\gamma_n} S(t^3, x) + \frac{2}{\gamma_n^2} S(t^2, x) + \frac{1}{\gamma_n^3} S(t, x) + \frac{1}{\gamma_n^4} S(1, x) \\
&= \left(\frac{\beta_n}{\gamma_n}\right)^4 x^4 + \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^4} \left(12 + \frac{6}{a-1}\right) x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^3} \left(45 + \frac{36}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2}\right) x^2 \\
&+ \frac{\beta_n}{\gamma_n^4} \left(51 + \frac{38}{a-1} + \frac{22}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^3}\right) x + \frac{151}{5\gamma_n^4}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem Charlier polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç tipi Genelleştirilmesinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

**Teorem 3.1.1**  $A \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere (3.1.2) ile verilen  $S_n^*(f; x, a)$  operatörü  $f$  fonksiyonuna  $[0, A]$  aralığında düzgün yakınsar. Yani;

$$S_n^*(f; x, a) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [0, A].$$

**İspat:** Korovkin teoreminin gereğince  $i = 0, 1, 2$  için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|S_n^*(t^i; x, a) - x^i\|_{C[0, A]} = 0$$

olduğu gösterilmek yeterli olacaktır.

$i=0$  için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |S_n^*(1; x, a) - 1| = 0$$

olduğu açıktır.

$i=1$  için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |S_n^*(t; x, a) - x| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} \left| \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n} - x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} \left| \frac{\beta_n x - \gamma_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} \left| \frac{2(\beta_n x - \gamma_n x) + 3}{2\gamma_n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2A(\beta_n - \gamma_n) + 3}{2\gamma_n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$i=2$  için yardımcı teorem 3.2.2 den ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |S_n^*(t^2; x, a) - x^2| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} \left| \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 5 + \frac{1}{a-1} \right) x + \frac{14}{3\gamma_n^2} - x^2 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} \left| \frac{1}{\gamma_n^2} \left\{ \beta_n^2 x^2 + \left( 5 + \frac{1}{a-1} \right) \beta_n x + \frac{14}{3} \right\} - x^2 \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \left\{ \max_{0 \leq x \leq A} (|\beta_n^2 - \gamma_n^2|) x^2 + \left| 5 + \frac{1}{a-1} \right| \beta_n x + \frac{14}{3} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \left\{ \max_{0 \leq x \leq A} (\beta_n^2 - \gamma_n^2) x^2 + \left( 5 + \frac{1}{a-1} \right) \beta_n x + \frac{14}{3} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \left\{ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) A^2 + \left( 5 + \frac{1}{a-1} \right) A \beta_n + \frac{14}{3} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminden (Altomare ve Campiti 1994)  $[0, A]$  aralığında sürekli

her  $f$  fonksiyonu için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f; x) - f\|_{C[0, A]} = 0$  sağlanır ki böylece  $S_n^*(f; x)$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu gösterilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesi Tanım 1.1.8 ile verilen merkezi momentleri ile ilgilidir.

**Yardımcı Teorem 3.1.3** (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f; x)$  operatörlerinin Tanım 2.1.8 ile verilen merkezi momentlerinin bazılarının eşitleri,

$$S_n^*((t-x)^0; x) = 1,$$

$$S_n^*((t-x)^1; x) = x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right) + \frac{3}{2\gamma_n},$$

$$S_n^*((t-x)^2; x) = x^2 \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 + x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) + \frac{10}{3\gamma_n^2},$$

$$\begin{aligned} S_n^*((t-x)^4; x) &= x^4 \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1 \right)^4 \\ &+ x^3 \left( \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^3} \left( 12 + \frac{6}{a-1} \right) - \frac{4\beta_n^2}{\gamma_n^3} \left( \frac{15}{2} + \frac{3}{a-1} \right) + \frac{6\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{6}{\gamma_n} \right) \\ &+ x^2 \left( \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left( 45 + \frac{36}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2} \right) - \frac{4\beta_n}{\gamma_n^3} \left( \frac{31}{2} + \frac{20}{3(a-1)} + \frac{2}{(a-1)^2} \right) + \frac{20}{\gamma_n^2} \right) \\ &+ x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^3} \left( 51 + \frac{38}{a-1} + \frac{22}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^4} \right) - \frac{37}{\gamma_n^3} \right) + \frac{151}{5\gamma_n^4} \end{aligned}$$

şeklindedir.

**İspat:**

i)

$$S_n^*((t-x)^0; x) = S_n^*(1; x) \text{ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.2 den}$$

$$S_n^*((t-x)^0; x) = 1 \text{ dir.}$$

ii)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^*((t-x)^1; x) = S_n^*(t; x) - xS_n^*(1; x) = \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n} - x = x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right) + \frac{3}{2\gamma_n}$$

dir.

iii)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$\begin{aligned} S_n^* \left( (t-x)^2; x \right) &= S_n^* (t^2; x) - 2xS_n^* (t; x) + x^2S_n^* (1; x) \\ &= \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2} - 2x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n} \right) + x^2 \\ &= x^2 \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 + x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) + \frac{10}{3\gamma_n^2} \end{aligned}$$

dir.

iv)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$\begin{aligned} S_n^* \left( (t-x)^4; x \right) &= S_n^* (t^4; x) - 4xS_n^* (t^3; x) + 6x^2S_n^* (t^2; x) - 4x^3S_n^* (t; x) + x^4S_n^* (1; x) \\ &= \frac{\beta_n^4}{\gamma_n^4} x^4 + \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^3} \left( 12 + \frac{6}{a-1} \right) x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} \left( 45 + \frac{36}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2} \right) x^2 \\ &\quad + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 51 + \frac{38}{a-1} + \frac{22}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^4} \right) x + \frac{151}{5\gamma_n^4} \\ &\quad - 4x \left( \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} \right)^3 x^3 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} \left( \frac{15}{2} + \frac{3}{a-1} \right) x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( \frac{31}{2} + \frac{20}{3(a-1)} + \frac{2}{(a-1)^2} \right) x + \frac{37}{4\gamma_n^3} \right) \\ &\quad + 6x^2 \left( \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right) - 4x^3 \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} x + \frac{3}{2\gamma_n} \right) + x^4 \\ &= x^4 \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1 \right)^4 + x^3 \left( \frac{\beta_n^3}{\gamma_n^3} \left( 12 + \frac{6}{a-1} \right) - \frac{4\beta_n^2}{\gamma_n^2} \left( \frac{15}{2} + \frac{3}{a-1} \right) + \frac{6\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{6}{\gamma_n} \right) \\ &\quad + x^2 \left( \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left( 45 + \frac{36}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2} \right) - \frac{4\beta_n}{\gamma_n^3} \left( \frac{31}{2} + \frac{20}{3(a-1)} + \frac{2}{(a-1)^2} \right) + \frac{20}{\gamma_n^2} \right) \\ &\quad + x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^3} \left( 51 + \frac{38}{a-1} + \frac{22}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^4} \right) - \frac{37}{\gamma_n^3} \right) + \frac{151}{5\gamma_n^4} \end{aligned}$$

dir.

### 3.2. Charlier Polinomlarını İçeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörünün Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin Yaklaşım Hızı

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f;x)$  operatörünün yaklaşım hızını daha önce tanımlarını ve özelliklerini verdiğimiz süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yapacağız.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

**Teorem 3.2.1**  $f \in C[0,\infty) \cap E$  olmak üzere (4.1.1.1) ile verilen  $S_n^*(f;x)$  operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$|S_n^*(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_{n,x})$$

şeklindedir ve ayrıca

$$\delta_{n,x} = \left( x^2 \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 + x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right)$$

dır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} |S_n^*(f;x) - f(x)| &= \left| e^{-1} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(t) dt \right. \\ &\quad \left. - f(x) e^{-1} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)^{(a-1)\beta_n x} \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} e^{-1} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n (f(t) - f(x)) dt \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$e^{-1} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)^{(a-1)\beta_n x} \geq 0, \quad \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \geq 0, \quad f(t) dt \geq 0$$

olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq \int_0^{\frac{\gamma_n}{k}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n |f(t) - f(x)| ds$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii.) özelliğinden ve Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n |f(t) - f(x)| dt \\ & \leq \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) dt \omega(f; \delta) \\ & = \left( \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n f(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \frac{|t-x|}{\delta} dt \right) \omega(f; \delta) \\ & = \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n \frac{|t-x|}{\delta} dt \right\} \\ & = \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} |t-x| \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} f(t) dt \right\} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

elde edilir.

Bu ifade de

$$\begin{aligned} M & = \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} |t-x| \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot \gamma_n e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} f(t) dt \\ & = \int_{\frac{\gamma_n}{k}}^{\frac{\gamma_n}{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(|t-x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \left( \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma_n f(t) dt \end{aligned}$$

olarak düşünülürse

$$M = \int_0^{\frac{k}{\gamma_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma_n dt$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$M \leq \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \gamma_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma_n dt$$

$$= \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \gamma_n \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (S_n(1; x))^{\frac{1}{2}} \gamma_n dt$$

elde edilir ve Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$M \leq \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \gamma_n \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma_n dt$$

elde edilir. Bunun yerine yazılmasıyla

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \cdot e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma_n dt \right\}$$

$$= \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \left[ e^{-1 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1) \beta_n x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1) \beta_n x)}{k!} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(t) (|t-x|^2)^{\frac{1}{2}} dt \right\}$$

$$= \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} (S_n^*((t-x)^2); x)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

elde edilir. Burada  $\delta = \delta_{n,x}$  olarak seçilirse ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta_{n,x})$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

**Teorem 3.2.2**  $f \in Lip_M(\alpha)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f; x)$  operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı  $M \in IR^+$  olmak üzere

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M (\delta_{n,x})^\alpha,$$

şeklindedir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} |S_n^*(f; x) - f(x)| &= \left| e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(t) dt \right. \\ &\quad \left. - f(x) e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} f(t) dt \right| \\ &= \left| e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} (f(t) - f(x)) dt \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} |f(t) - f(x)| dt \quad (3.2.2)$$

olur. Diğer taraftan

$$f \in Lip_M(\alpha) \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha$$

dır. Bu eşitliğin (3.2.2)'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |S_n^*(f; x) - f(x)| &\leq e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} M |t - x|^\alpha dt \\ &= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} |t - x|^\alpha dt \left( e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir.  $p = \frac{2}{\alpha}$  ve  $q = \frac{2}{2-\alpha}$  seçersek  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olur ve (3.2.3)'ten

$$\begin{aligned}
|S_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} M \sum_{k=0}^{\infty} |t-x|^\alpha \left[ \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \left[ \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \gamma_n dt \\
&= M \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \left[ \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \gamma_n dt \\
&= M \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} [S_n(1; x)]^{\frac{2-\alpha}{2}} \gamma_n dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M \left( e^{-1\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \gamma_n \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} M (|t-x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt$$

olur ve buradan

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M (S_n^*(t-x)^2; x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3'ten

$$\delta_{n,x} = \left( x^2 \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 + x \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right)^{1/2}$$

seçimiyle

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M (\delta_{n,x})^\alpha$$

elde edilir böylece ispat tamamlanır.

#### 4. OPERATÖRÜN AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f; x)$  operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir. Daha sonra  $S_n^*(f; x)$  operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre- $K$  fonksiyoneli yardımıyla tahmin edilecektir. Son olarak  $S_n^*(f; x)$  operatörü için Voronovskaja tipi teorem verilecektir.

##### 4.1. Operatörün Ağırlıklı Uzaylarda Düzgün Yakınsaklığı

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f; x)$  operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

**Yardımcı Teorem 4.1.1**  $\rho(x) = 1 + x^2$  ağırlıklı fonksiyon olsun. Eğer  $f \in C_{x^2}[0, \infty)$  ise  $M$  pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\|S_n^*(\rho, x)\|_{x^2} \leq 1 + M$$

dir.

**İspat:** Yardımcı Teorem 3.1.2'den ve lineerlikten

$$S_n^*(p, x) = S_n^*(1 + x^2, x) = S_n^*(1, x) + S_n^*(x^2, x)$$

$$S_n^*(p, x) = 1 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2}$$

yazabiliriz.  $C_{x^2}[0, \infty)$  uzayındaki norma göre

$$\begin{aligned} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \frac{1 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} x^2 + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2}}{1 + x^2} \right\} \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \frac{1}{1 + x^2} + \frac{\beta_n^2 x^2}{\gamma_n^2 (1 + x^2)} + \frac{\beta_n x}{\gamma_n^2 (1 + x^2)} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\|S_n^*(p, x)\|_{x^2} \leq 1 + \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{10}{3\gamma_n^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{3\gamma_n^2} = 0$$

olduğundan buradan pozitif bir  $M$  reel sayısı elde edilir. Dolayısıyla

$$\|S_n^*(p, x)\|_{x^2} \leq 1 + M$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

**Teorem 4.1.1** Her  $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  için (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f; x)$  operatörü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f; x) - f(x)\|_{x^2} = 0$$

eşitliğini sağlar.

**İspat:** Gadzhiev tarafından verilen ağırlıklı Korovkin teoremi gereğince (Gadzhiev 1974)  $\nu = 0, 1, 2$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_\nu; x) - e_\nu(x)\|_{x^2} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

**i)**  $\nu = 0$  için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\|S_n^*(1; x) - 1\|_{x^2} = 0$$

yazabiliriz.

**ii)**  $\nu = 1$  için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\|S_n^*(e_1; x) - e_1(x)\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{\beta_n x}{\gamma_n (1+x^2)} + \frac{3}{2\gamma_n (1+x^2)} \right| \leq \frac{\beta_n}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n}$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_1; x) - e_1(x)\|_{x^2} = 0$$

elde edilir.

iii)  $\nu = 2$  için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\begin{aligned} \|S_n^*(e_2; x) - e_2(x)\|_{x^2} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{x^2 \beta_n^2}{(1+x^2)\gamma_n^2} + \frac{x\beta_n}{(1+x^2)\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{10}{3(1+x^2)\gamma_n^2} \right| \\ &\leq \frac{\beta_n^2}{\gamma_n^2} + \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(4 + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{10}{3\gamma_n^2} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_2; x) - e_2(x)\|_{x^2} = 0$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz bu bağıntılardan  $\nu = 0, 1, 2$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_\nu; x) - e_\nu(x)\|_{x^2} = 0$$

şartları sağlanır böylece ispat tamamlanır.

## 4.2. Operatörün Ağırlıklı Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızı

Bu kısımda  $S_n^*(f; x)$  operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla tahmin edilecektir.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

**Teorem 4.2.1**  $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  ve  $C_1$   $n$ 'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|S_n^*(f; x) - f(x)|}{(1+x^2)^3} \leq C_1 \Omega\left(f; \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat:** Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülünün vii. özelliğinde

$$|f(t) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) (1 + (t-x)^2) \Omega(f; \lambda\delta)$$

idi.

Böylece

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq \gamma_n e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)^{\frac{\gamma_n}{k}}}{k!} \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} |f(t) - f(x)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)\Omega(f;\delta) \\
&\left\{ \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \gamma_n \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) \left(1+(t-x)^2\right) dt \right\} \\
&\left\{ \int_{\frac{k}{\gamma_n}}^{\frac{k+1}{\gamma_n}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right. \right. \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} (t-x)^2 \\
&\quad + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} |t-x| \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} |t-x|(t-x)^2 \right) \gamma_n dt \right\}
\end{aligned}$$

Elde edilir. Burada,

$$A = \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} |t-x| \text{ ve}$$

$$B = \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} |t-x|(t-x)^2 \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} |t-x| \left( e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left( e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
A &\leq \frac{1}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (t-x)^2 e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (t-x)^2 e^{-1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} (S_n^*(1;x))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olup Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$A \leq \frac{1}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (t-x)^2 e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B = \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} |t-x| \left( e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} (t-x)^2$$

$$\left( e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$B \leq \frac{1}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (t-x)^2 e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} (t-x)^4 e^{-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{C_k^{(a)}(- (a-1)\beta_n x)}{k!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilen bu A ve B eşitsizliklerinin yerine yazılmasıyla

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2)\Omega(f; \delta)$$

$$\left( 1 + S_n^*((t-x)^2; x) + \frac{1}{\delta} \sqrt{S_n^*((t-x)^2; x)} + \frac{1}{\delta} \sqrt{S_n^*((t-x)^2; x) S_n^*((t-x)^4; x)} \right)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$S_n^*((t-x)^2; x) = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^2 + x + 1) \text{ ve}$$

$$S_n^*((t-x)^4; x) = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

eşitsizliklerini elde edip bunların yerine yazılmasıyla

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2)\Omega(f; \delta)$$

$$\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\delta} \sqrt{O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^2 + x + 1)}$$

$$+ \frac{1}{\delta} \sqrt{\left( O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^2+x+1) \right) \left( O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)(x^4+x^3+x^2+x+1) \right) \Bigg\}}$$

eşitsizliğinde  $\delta = \sqrt{O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)}$  seçilip her iki taraf  $(1+x^2)^3$  e bölünüp her iki tarafın  $x \geq 0$  üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|S_n^*(f;x) - f(x)|}{(1+x^2)^3} \leq C_1 \Omega\left(f; \sqrt{\frac{1}{\gamma_n}}\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

### 4.3. Operatörün Voronovskaja Asimptotik Yaklaşımı

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen  $S_n^*(f;x)$  operatörü için Voronovskaja tipi teoremi verilecektir.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin Voronovskaja tipi teoremi ile ilgilidir.

**Teorem 4.3.1**  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında sınırlı ve  $x \in [0, \infty)$  noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow \infty} \gamma_n (S_n^*(f;x) - f(x)) = \frac{3}{2} f'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-a}\right) x f''(x)$$

eşitliği sağlar.

**İspat:**  $f$  fonksiyonunun sabit bir  $x$  noktası için Taylor formülü

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \varepsilon(t,x)(t-x)^2$$

şeklindedir. Burada  $g(\cdot, x)$   $x$  noktasında sürekli ve  $\lim_{t \rightarrow x} g(t, x) = 0$  dır.

Taylor formülünün her iki tarafına  $S_n^*(f;x)$  operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} S_n^*(f;x) &= f(x) + f'(x) S_n^*((t-x); x) + \frac{1}{2} f''(x) S_n^*((t-x)^2; x) \\ &\quad + S_n^*(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\begin{aligned}
S_n^*(f; x) - f(x) &= f'(x) \left( \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right) x + \frac{3}{2\gamma_n} \right) \\
&+ \frac{1}{2} f''(x) \left( \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right) \\
&+ S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\gamma_n [S_n^*(f; x) - f(x)] &= f'(x) \left( \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right) x + \frac{3}{2\gamma_n} \right) \\
&+ \gamma_n \left[ \frac{1}{2} f''(x) \left( \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{3}{\gamma_n} \right) x + \frac{10}{3\gamma_n^2} \right) \right] \\
&+ \gamma_n S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n (S_n^*(f; x) - f(x)) &= f'(x) \left( (\beta_n - \gamma_n) x + \frac{3}{2} \right) \\
&+ \left( \frac{\beta_n^2 - 2\beta_n + \gamma_n}{\gamma_n} x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - 3 \right) x + \frac{10}{3\gamma_n} \right) f''(x) + \lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x) = 0$$

olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x) \leq \left( S_n^*((t-x)^4; x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( S_n^*(\varepsilon^2(t, x); x) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varepsilon^2(x, x) = 0$  ve  $\varepsilon(\cdot, x) \in C_2^\phi[0, \infty)$  olduğundan 3.1.1 gereğince

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} S_n^*(\varepsilon^2(t, x); x) = \varepsilon^2(x, x) = 0 \quad (4.3.2)$$

$[0, A]$  aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (4.3.1), (4.3.2) ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n S_n^*(\varepsilon(t, x)(t-x)^2; x) = 0$$

elde edilir ki buradan istenilen sonuca ulaşılır. Böylece

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n (S_n^*(f; x) - f(x)) = \left( (\beta_n - \gamma_n)x + \frac{3}{2} \right) f'(x) + \left( \frac{\beta_n^2 - 2\beta_n + \gamma_n}{\gamma_n} x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - 3 \right) x + \frac{10}{3\gamma_n} \right) f''(x)$$

elde edilir.

Burada

$$\left( (\beta_n - \gamma_n)x + \frac{3}{2} \right) f'(x) + \left( \frac{\beta_n^2 - 2\beta_n + \gamma_n}{\gamma_n} x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - 3 \right) x + \frac{10}{3\gamma_n} \right) f''(x)$$

asimptotik değer,  $\frac{1}{\gamma_n}$  asimptotik hızdır.

#### 4.4. Operatörün Peetre-K Fonksiyoneli Yaklaşım Hızı

Bu kısımda  $S_n^*$  operatörü ile ilgili Tanım 2.1.14 ile verilen Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Bunun için önce  $f \in C_B[0, \infty)$ ,  $x \geq 0$  olmak üzere  $S_n^*$  yardımcı operatörünü

$$S_n^*(f; x) = S_n^*(f; x) - f\left(\frac{nx + \alpha}{n + \beta}\right) + f(x)$$

şeklinde tanımlayıp daha sonra aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Aşağıdaki yardımcı teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

**Yardımcı Teorem 4.4.1**  $h \in C_B^2[0, \infty)$  olmak üzere,  $\forall x \geq 0$  için

$$\left| S_n^*(f; x) - h(x) \right| \leq \phi_n(x) \|h''\|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\phi_n(x) = \left( \frac{2\beta_n}{\gamma_n} - 1 \right)^2 x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left( 7 + \frac{1}{a-1} \right) - \frac{6}{\gamma_n} \right) x + \frac{67}{12\gamma_n^2}$$

şeklinde dir.

**İspat:** Açık bir şekilde görülebilir ki  $S_n^*(e_1 - x; x) = 0$  dir.  $h \in C_B^2[0, \infty)$  olsun.  $h$ ' nin Taylor açılımından

$$h(t) - h(x) = (t-x)h'(x) + \int_x^t (t-u)h''(u)du$$

elde edilir ki burada  $t \in [0, \infty)$  dir. Yukarıdaki denklemin her iki yanına  $S_n^*$  operatörünü uyguladığımızda

$$\begin{aligned} S_n^*(f; x) - h(x) &= h'(x) S_n^*(t-x; x) + S_n^*\left(\int_x^t (t-u) h''(u) du; x\right) \\ &= S_n^*\left(\int_x^t (t-u) h''(u) du; x\right) \\ &= S_n^*\left(\int_x^t (t-u) h''(u) du; x\right) - \int_x^{\frac{\beta_n x + 3}{\gamma_n + 2\gamma_n}} \left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n} - u\right) h''(u) du \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\left| S_n^*(f; x) - h(x) \right| \leq S_n^*\left(\left|\int_x^t (t-u) h''(u) du\right|; x\right) + \left| \int_x^{\frac{\beta_n x + 3}{\gamma_n + 2\gamma_n}} \left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n} - u\right) h''(u) du \right| \quad (4.4.1)$$

yazılır. Buradan da

$$\left| \int_x^t (t-u) h''(u) du \right| \leq (t-x)^2 \|h''\| \quad (4.4.2)$$

olduğundan

$$\left| \int_x^{\frac{\beta_n x + 3}{\gamma_n + 2\gamma_n}} \left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n} - u\right) h''(u) du \right| \leq \left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n}\right)^2 \|h''\| \quad (4.4.3)$$

yazılabilir. (4.4.2) ve (4.4.3) eşitsizliklerinin (4.4.1) de yerine yazılmasıyla

$$\left| S_n^*(f; x) - h(x) \right| \leq \left\{ S_n^*((t-x)^2; x) + \left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n}\right)^2 \right\} \|h''\|$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\left| S_n^*(f; x) - h(x) \right| \leq \left\{ \left(\frac{2\beta_n}{\gamma_n} - 1\right)^2 x^2 + \left(\frac{\beta_n}{\gamma_n^2} \left(7 + \frac{1}{a-1}\right) - \frac{6}{\gamma_n}\right) x + \frac{67}{12\gamma_n^2} \right\} \|h''\|$$

$$= \Phi_n(x) \|h''\|$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

**Teorem 4.4.1**  $f \in C_B[0, \infty)$  olmak üzere  $\forall x \geq 0$  için  $C \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\Phi_n(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{(\beta_n - \gamma_n)}{\gamma_n}x + \frac{3}{2\gamma_n}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca,  $\phi_n(x)$  Yardımcı Teorem 4.4.1'deki gibidir.

**İspat:**  $f \in C_B[0, \infty)$ ,  $h \in C_B^2[0, \infty)$  için  $S_n^*$  tanımından

$$\begin{aligned} |S_n^*(f; x) - f(x)| &\leq |S_n^*(f - h; x)| + |(f - h)(x)| + |S_n^*(h; x) - h(x)| \\ &+ \left|f\left(\frac{\beta_n x}{\gamma_n} + \frac{3}{2\gamma_n}\right) - f(x)\right| \end{aligned}$$

ve

$$|S_n^*(f; x)| \leq \|f\| S_n^*(1; x) + 2\|f\| = 3\|f\|$$

yazılabilir. Böylece

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 4\|f - h\| + |S_n^*(h; x) - h(x)| + \omega\left(f; \frac{(\beta_n - \gamma_n)}{\gamma_n}x + \frac{3}{2\gamma_n}\right)$$

elde edilir. Burada Yardımcı Teorem 4.4.1 kullanılarak

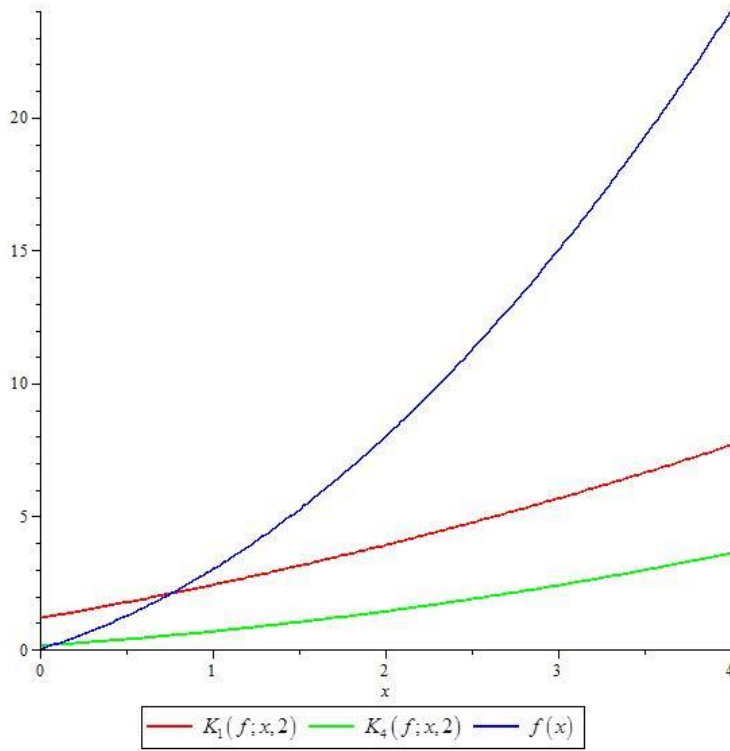
$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 4(\|f - h\| + \Phi_n(x)\|h''\|) + \omega\left(f; \frac{(\beta_n - \gamma_n)}{\gamma_n}x + \frac{3}{2\gamma_n}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafında tüm  $h \in C_B^2[0, \infty)$  için infimumunun alınmasıyla

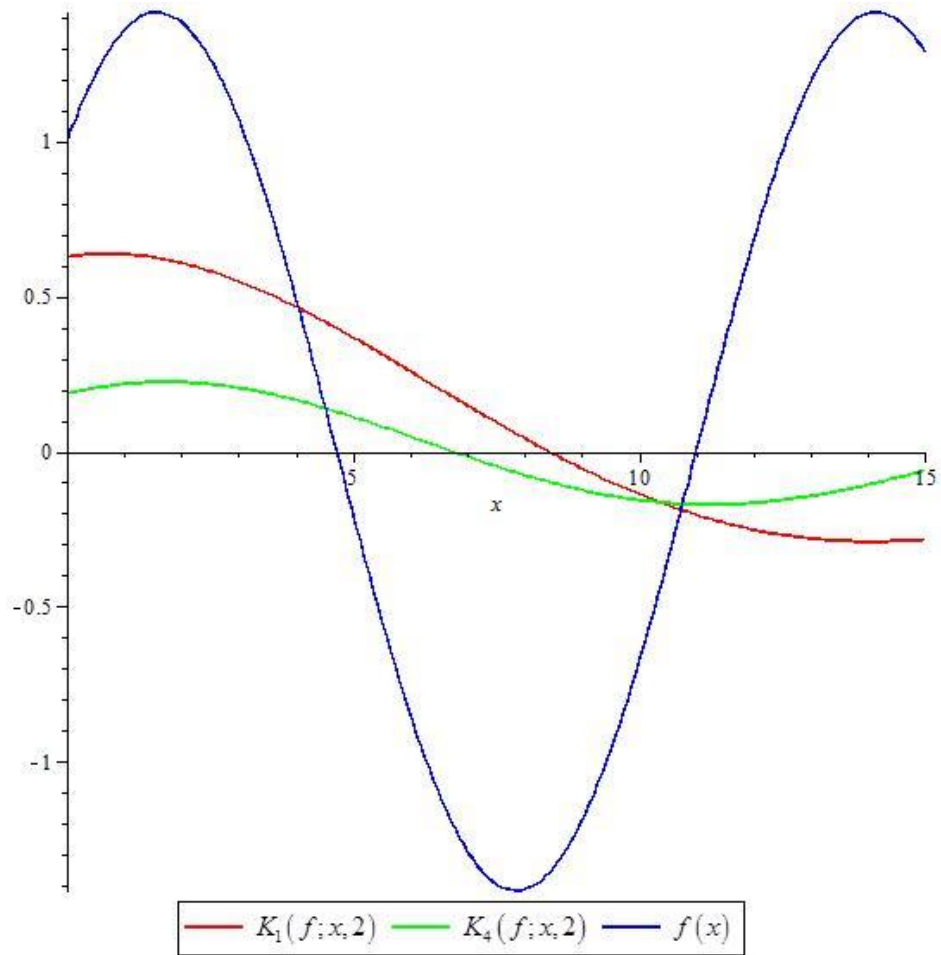
$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\Phi_n(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{(\beta_n - \gamma_n)}{\gamma_n}x + \frac{3}{2\gamma_n}\right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki grafikler tanımladığımız operatörün bazı fonksiyonlara yaklaşım hızını göstermektedir.



$$f(x) = x^2 + 2x, \quad \beta_n = n \quad \text{ve} \quad \gamma_n = n + n^{\frac{1}{6}}$$



$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad \beta_n = n, \quad \gamma_n = n + n^{\frac{1}{6}}$$

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 5.1 Sonuçlar

Bu tezde Charlier Polinomlarını içeren Genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantoroviç Tipi Genelleşmesinin  $S_n^*(f; x)$  şeklinde tanımlayıp bu operatörün kapalı aralıkta bazı yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Bununla birlikte ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları verilip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenmiş ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı elde edilmiştir. Son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar şunlardır.

$$1. \quad E = \left\{ f : x \in [0, \infty), \frac{f(x)}{x^2 + 1} \text{ yakınsaktır, } x \rightarrow \infty \right\}, \quad f \in C[0, \infty) \cap E \quad \text{ve} \quad A \in \mathbb{R}^+$$

olmak üzere  $S_n^*(f; x)$  operatörü  $f$  fonksiyonuna  $[0, A]$  aralığında düzgün yakınsaktır.

2.  $f \in C[0, \infty) \cap E$  olmak üzere  $S_n^*(f; x)$  operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_{n,x})$$

şeklindedir.

3.  $f \in Lip_M(\alpha)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $S_n^*(f; x)$  operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı;

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M (\delta_{n,x})^\alpha$$

şeklindedir.

4. Her  $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  için  $S_n^*(f; x)$  operatörü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f; x) - f(x)\|_{x^2} = 0$$

eşitliğini sağlar.

5.  $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$  olmak üzere  $S_n^*(f; x)$  operatörünün ağırlıklı süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|S_n^*(f; x) - f(x)|}{(1+x^2)^3} \leq C_1 \Omega\left(f; \sqrt{\frac{1}{\gamma_n}}\right)$$

şeklindedir.

6.  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında sınırlı ve  $x \in [0, \infty)$  noktasında ikinci mertebeden türevelere sahipse

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_n \rightarrow \infty} \gamma_n (S_n^*(f; x) - f(x)) &= \left( (\beta_n - \gamma_n)x + \frac{3}{2} \right) f'(x) \\ &+ \left( \frac{\beta_n^2 - 2\beta_n + \gamma_n}{\gamma_n} x^2 + \left( \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left( 4 + \frac{1}{a-1} \right) - 3 \right) x + \frac{10}{3\gamma_n} \right) f''(x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. (Voronovskaja tipi teorem.)

7.  $f \in C_B[0, \infty)$  olmak üzere  $\forall x \geq 0$  için

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq C \omega_2\left(f, \sqrt{\Phi_n(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{(\beta_n - \gamma_n)x + \frac{3}{2}}{\gamma_n}\right)$$

olacak şekilde sabit bir  $C > 0$  sayısı vardır. (Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı.)

## KAYNAKLAR

- Acar, T., Gupta, V. and Aral, A. 2011, Rate of convergence for generalized Szasz operators, *Bull. Math. Sci.* 1.1, 99–113.
- Altomare, F., Campiti, M. 1994, Korovkin type approximation theory and its applications. In: *De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17*. Walter de Gruyter Berlin, New York.
- Aral, A. 2014, Inoan, D. and Raşa, I., On the Generalized Szasz–Mirakyan Operators, *Results in Mathematics* 65.3-4, 441–452.
- Ashieser, N.I.1947, Lecture on Approximation Theory, *OGIZ*, Moscow-Leningrand, (in Russian), Theory of approximation (in English). Translated by Hymann, C.J. *Frederick Ungar Publishing Co.*, New York 1956.
- Atakut, C., İ. Büyükyazıcı. 2010, Stancu type generalization of the Favard–Szasz Operators, *Appl. Math. Lett.*, 23, 1479-1482
- Büyükyazıcı, İ., Tanberkan, H., Serenbay, S. K., Atakut, Ç. (2014), Approximation by Chlodowsky type Jakimovski–Leviatan operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259, 153-163.
- Ciupa, A. (2008). Approximation properties of a modified Jakimovski–Leviatan operator. *Automation Computers Applied Mathematics*, 17(3), 401-408.
- Ersan, 2008, İki Değişkenli  $q$ -Bleimann, Butzer ve Hahn Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Gadzhiev, A.D. 1974, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. *Sov. Math. Dokl.* 15(5), 1433–1436.
- Gupta, V., Noor, M. A. and Man Singh Beniwal 2006, Rate of convergence in simultaneous approximation for Szasz–Mirakyan–Durrmeyer operators, *J. Math. Anal. Appl.* 322.2, 964–970.
- Hacıyev, A., Hacısalıhoğlu, H.H. 1995. Linear Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, 1-100 s, Ankara.
- Ispir, N. 2001, On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turk. J. Math.* 26(3), 355–365.
- Ispir, N., Atakut, C. 2002, Approximation by modified Szasz–Mirakjan operators on weighted spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 112 (4), 571–578

- Jakimovski, A., Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, 34, 97-103.
- Kajla, 2015, Approximation properties of Szász type operators based on Charlier polynomials, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Roorkee, Roorkee, India
- Karsli H. Rate of convergence of new gamma type operators for functions with derivatives of bounded variation. *Math Comput Modelling* 2007; 45: 617–624.
- Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S)*, Vol. 90, pp. 961- 964.
- Korovkin, P.P. 1960, Linear Operators and Approximation Theory. *Russian Monographs and Texts on advanced Math.*, III, 1-63p., Gordon&Breach.
- Kreyszig, E. 1978, Introductory Functional Analysis with Applications. 82- 469. Toronto.
- Lorentz, G.G. 1953, Bernstein Polynomials. *University of Toronto Press*, Toronto.
- Mazhar SM, Totik V. Approximation by modified Szasz operators. *Acta Sci Math* 1985; 49: 257–269.
- Musayev, B., Alp, M. ve Mustafayev, N. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 1204 s., Kütahya.
- Stancu, D.D. 1968, Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roum. Math. Pure Appl.* 13, 1173-1194.
- Szasz, O. 1950, Generalization of S. Bernstein polynomials to the infinite interval, *J.Research Nat. Bur. Standards*, 45, 239-245.
- Varma S, Tasdelen F. 2012, Szasz type operators involving Charlier polynomials. *Math Comput Modelling* 56: 118–122.
- Wood, B. 1969, Generalized Szasz operators for approximation in the complex domain, *SIAM J. Appl. Math.* 17 (4), 790–801.
- Yılmaz, 2004, Szasz operatörleri ve bir genelleşmesinin yaklaşım ve diferansiyel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara
- Z. Walczak, 2000, On certain modified Szasz-Mirakyan operators for functions of two variables. *Demonstratio Math.* 33 (1), 91–100

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Adem AYIK  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Gaziantep-20.11.1990  
**Telefon** : 0553 369 06 69  
**e-mail** : aayikadem@gmail.com

### EĞİTİM

<b>Derece</b>	<b>Adı, İlçe, İl</b>	<b>Bitirme Yılı</b>
Lise	: Kahramanmaraş Anadolu Öğretmen Lisesi, Merkez, Kahramanmaraş	2009
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2014
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi(Tezsiz), Meram, Konya	2014

### İŞ DENEYİMLERİ

<b>Yıl</b>	<b>Kurum</b>	<b>Görevi</b>
2014-2015	Gençlik Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2015-	Gençlik Eğitim Kurumları-Gençlik Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni