



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



PSEUDO NULL EĞRİLER TARAFINDAN
ÜRETİLEN BAZI YÜZEYLER

Mehmet ÇAĞLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Mehmet ÇAĞLAN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PSEUDO NULL EĞRİLER TARAFINDAN ÜRETİLEN BAZI YÜZEYLER

Mehmet ÇAĞLAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

2023, ix+56 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Bu tezde, pseudo null eğriler ve pseudo null eğriler tarafından üretilen bazı yüzeyler incelenmiştir. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde kaynak araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde konu ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Dördüncü bölümde pseudo null eğriler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde pseudo null eğri örnekleri verilmiştir. Verilen bu örnekler şekillerle desteklenmiştir. Beşinci bölümde pseudo null eğriler tarafından üretilen bazı yüzeyler incelenmiştir. Bu bölümde pseudo null eğriler tarafından üretilen yüzeylerle ilgili örnekler verilmiştir. Verilen bu örnekler şekillerle desteklenmiştir. Altıncı ve son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dağılma Parametresi, Null Eğri, Pseudo Null Eğri, Singüler Yüzey, Striksiyon Eğrisi.

ABSTRACT

MS THESIS

SURFACES GENERATED BY PSEUDO NULL CURVES

Mehmet AĐLAN

**The Graduate School of Natural And Applied Science of Necmettin Erbakan
University**

The Degree of Master of Science in Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2023, ix+ 56 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

In this thesis, pseudo null curves and some surfaces generated by pseudo null curves are examined. This thesis consists of six sections. In the first section, general information about the subject is given. In the second section, resource research is done. In the third section, the basic concepts related to the subject are discussed. In the fourth section, pseudo null curves are examined. Also in this section, examples of pseudo null curves are given. These examples are supported by figures. In the fifth section, some surfaces generated by pseudo null curves are examined. In this section, examples of surfaces generated by pseudo null curves are given. These examples are also supported by figures. In the sixth and last section, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Distribution Parameter, Null Curve, Pseudo Null Curve, Singular Surface, Striction Curve.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, gelecekte mesleki hayatımda da bana verdiği bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren kıymetli Doç. Dr. Melek ERDOĞDU hocama teşekkürü bir borç bilir ve şükranlarımı sunarım. Diğer üniversite hocalarımdan da bana 2 yıllık yüksek lisans hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren, benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mehmet ÇAĞLAN
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	ii
TEZ BİLDİRİMİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER.....	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
4. PSEUDO NULL EĞRİ	11
5. CARTAN ÇATI ALANLARIYLA AYNI YÖNLÜ DOĞRULARIN ÜRETTİĞİ YÜZEYLER	26
5.1. Teğet Yönüyle Üretilen Yüzeyler.....	27
5.2. Asli Normal Yönüyle Üretilen Yüzeyler	37
5.3. Binormal Yönüyle Üretilen Yüzeyler.....	43
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
6.1 Sonuçlar	54
6.2 Öneriler	54
KAYNAKLAR	55

SİMGELER

\mathbb{E}^2	:	Öklid düzlemi
α	:	Regüler eğri
\mathbb{R}	:	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	:	n-boyutlu standart reel vektör uzayı
\mathbb{E}^n	:	n-boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{E}_1^3	:	3-boyutlu Minkowski uzayı
T	:	α eğrisinin teğet vektör alanı
N	:	α eğrisinin asli normal vektör alanı
B	:	α eğrisinin binormal vektör alanı
κ	:	α eğrisinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	α eğrisinin burulma fonksiyonu
\langle , \rangle_L	:	Lorentz çarpımı
$\ \cdot \ $:	Vektörün normu
\times_L	:	Lorentz vektörel çarpım
α^*	:	α eğrisinin Bertrand eşi
$\lambda_{1,2,3}$:	Diferensiyellenebilir fonksiyon
σ	:	Striksiyon (boğaz) çizgisi (eğrisi)
ρ	:	Distribüsyon (dağılma) parametresi

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1. Dayanak Eğrisi Pseudo Null Eğri Olan Yüzeyler.....	2
--	---

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Pseudo Null Çember.....	15
Şekil 2. Pseudo Null Helis.....	18
Şekil 3. Pseudo Null Düzlemsel Eğri	21
Şekil 4. Pseudo Null Helis.....	25
Şekil 5. $M = M(s, t)$ Yüzeyi.....	36
Şekil 6. $M = M(s, t)$ Yüzeyinin Striksiyon Çizgisi.....	37
Şekil 7. $\alpha(s)$ Eğrisi (Siyah), $M = M(s, t)$ Yüzeyi (Sarı) ve $M = M(s, t)$ Yüzeyinin Striksiyon Çizgisi (Kırmızı).....	37
Şekil 8. $\omega = \omega(s, t)$ Yüzeyi.....	42
Şekil 9. $\alpha(s)$ Eğrisi (Siyah) ve $\omega = \omega(s, t)$ Yüzeyi (Sarı).....	43
Şekil 10. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi	52
Şekil 11. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi.....	52
Şekil 12. $\alpha(s)$ eğrisi (siyah), $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi (sarı), $\varphi = \varphi(s, t)$ Yüzeyinin Striksiyon Çizgisi (Kırmızı).....	53

1. GİRİŞ

Günlük hayatta eğrilerde ve yüzeylerde karşılaşılan birçok farklı durum olduğu bilinmektedir. Bu durumlar çeşitli bilim dallarında değişik yorumlanabilir. Örneğin, eğriler doğal olarak ortaya çıkar fakat fizikçiler için eğri, t zamanında bir parçacığın hareketi sonucunda ortaya çıkar (Yavuz ve ark; 2022).

Eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi için iki farklı bakış açısı vardır. Birincisi, hesabın temellerine dayanır ve klasik diferensiyel geometri olarak adlandırılır. Genel olarak, klasik diferensiyel geometri, eğrilerin ve yüzeylerin yerel özellikleri üzerine kuruludur. Yerel özellikler ile kastedilen, aslında bir noktanın komşuluğundaki eğrinin veya yüzeyin davranışdır. İkincisi ise global diferensiyel geometridir. Burada, yerel özelliklerin davranışının tüm eğri veya yüzeyleri ne ölçüde etkilediği araştırılır. Her iki açıdan da önemli sonuçlar ortaya çıkarılmış ve diğer bilim dallarına da ışık tutmuştur. Bu çalışmada; her iki bakış açısı bir arada yer alacak ve belirli bir pseudo null Cartan eğrisinin Cartan çatısı yardımıyla elde edilen bazı yüzeylerin diferensiyel geometrisi incelenecektir (Yavuz ve ark; 2022).

Öklid uzayında eğriler teorisinde, involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri ve eğrilerin başka karakterizasyonları da incelenmiştir. Son yıllarda Lorentz (Minkowski) ve semi-Riemann manifoldlarının çalışması diferensiyel geometriye farklı bakış açıları katmıştır. Diferensiyel geometrinin diğer bilim dallarıyla bağlantısını kuran ve uygulama alanlarının oluşturan bir alan ise Semi-Riemann geometridir. Semi-Riemann uzayında iç çarpımın farklı olması, geometrik yapıların değişmesine ve önemli sonuçlar ortaya çıkmasına olanak sağlamaktadır. Özellikle bu uzaylarda eğrinin karakteri Öklid uzayından farklıdır. Timelike, spacelike ve null eğri olarak sınıflandırılan bu eğriler Öklid uzayındaki eğriler ile benzer ve farklı yönlere sahiptirler. Bazı araştırmacılar timelike eğriler için involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri ve karakterizasyonlarını çalışırken, bazıları ise benzer çalışmaları spacelike eğrilere uyarlamışlardır. Fakat null eğriler farklı bir yapıya sahip olduğundan bunlar için bazı karakterizasyonları elde etmek kolay olmamıştır. Buna rağmen bazı özel durumlar altında çok özel teoriler ifade ve ispat edilmiştir (Kumsal; 2017).

Pseudo null eğriler ivme vektörleri null olan fakat teğeti null olmayan eğrilerdir. Pseudo null eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine matematikte birçok başarılı sonuç elde edilmiştir. Bu eğrilere pseudo null helis, pseudo null Mannheim eğrisi ve pseudo null çember örnek olarak verilebilir (Kumsal, 2017).

$a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ bazı diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir pseudo null eğri olmak üzere aşağıdaki gibi verilen yüzeyler incelenebilir.

$$M(s, t) = \alpha(s) + t(a(s)\mathbf{T}(s) + b(s)\mathbf{N}(s) + c(s)\mathbf{B}(s))$$

Üreteç doğruları Cartan çatı alanlarının bir lineer kombinasyonu olup sabit olmayan vektör alanlarıdır. Aşağıdaki tabloda özetlenen bazı özel durumlar incelenecektir.

Üreteç Doğruları	Yüzeyin Parametrizasyonu
$X_1(s) = \lambda_1(s)\mathbf{T}(s)$	$M^1(s, t) = \alpha(s) + t\lambda_1(s)\mathbf{T}(s)$
$X_2(s) = \lambda_2(s)\mathbf{N}(s)$	$M^2(s, t) = \alpha(s) + t\lambda_2(s)\mathbf{N}(s)$
$X_3(s) = \lambda_3(s)\mathbf{B}(s)$	$M^3(s, t) = \alpha(s) + t\lambda_3(s)\mathbf{B}(s)$

Tablo 1. Dayanak Eğrisi Pseudo Null Eğri Olan Yüzeyler

Bu tez çalışmasının amacı; pseudo null eğri ve bu eğrinin sabitten farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlar ile Cartan çatı alanlarının lineer kombinasyonu üreteç olan yüzeyleri incelemektir. Bu özel yüzeyler ailesinin karşılık geldiği durumlar mevcuttur. İlk olarak; üreteç doğrularının sırasıyla \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} Cartan çatı alanlarıyla aynı doğrultuda olduğu durumlar için yüzeyler incelenmiştir.

Özel bir durum olarak; üretilen yüzeylerin karakterleri, silindirik olup olmama durumuna göre striksiyon çizgisi ve son olarak dağılma parametresi incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

(Turgut ve ark; 1998) çalışmasında, Minkowski 3-uzayındaki timelike bir regle yüzeyin striksiyon çizgisi ve dağılma parametresi ele alınmış ve bu yüzeylerin yapılarıyla ilgili bazı teoremler elde edilmiştir.

(Yaylı; 2000) çalışmasında, bir spacelike eğri boyunca hareket eden Frenet üçlüsünün timelike doğrusu tarafından üretilen timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi elde edilmiştir.

(Kim ve ark; 2004) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında; ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği cinsinden regle yüzeylerin sınıflandırılmasına yer verilmiştir.

(Kim ve ark; 2007) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında; ortalama eğrilik ve Gauss eğriliğinin bazı cebirsel denklemleri sağladığı durumlar için regle yüzeyler incelenmiştir.

(İlarslan ve ark; 2008) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında null, pseudo null ve kısmen null eğrileri eğrilik açısından karakterize edilmiştir. Ayrıca null, pseudo null ve kısmen null eğrilerin bazı açık denklemleri verilmiştir.

(Grbovic ve ark; 2013) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında non-null Mannheim eğrilerinin var olduğu kanıtlanmıştır

(Nešović ve ark; 2016) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında pseudo null taban eğrisine sahip regle yüzeyler spacelike, timelike ve lightlike (null) yüzeyler olarak sınıflandırılmış ve dağılma parametresi elde edilmiştir.

(Grbović ve Nešović; 2016) çalışmasında, bir pseudo null helisi bir başka pseudo null helise taşıyan bir Backlund dönüşümü tanıtılmıştır.

(Öztürk ve ark; 2016) çalışmasında, Minkowski 3-uzayındaki pseudo null ve null Cartan Darboux helis kavramlarının tanımları yapılmıştır. Pseudo null eğrilerin Darboux

vektörlerini, Darboux helisleri cinsinden null Cartan eğrileri ve doğrultman eğrileri karakterize edilmiştir.

(Öztürk; 2017) çalışmasında, Minkowski 3-uzayındaki eğrinin Frenet çatısı kullanılarak belirli bir pseudo null eğrisinden bir parametrik yüzeyler ailesi oluşturma sorunu incelenmiştir. Verilen pseudo null eğrinin, elde edilen parametrik yüzey ailesinin ortak bir jeodezik eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Bu yüzey ailesinde özel bir durum olarak pseudo null doğrultmanlı bir regle yüzey olarak ele alınmış ve bu regle yüzey üzerindeki bazı sonuçlar verilmiştir.

(Del Amor ve ark; 2017) çalışmasında, 3 boyutlu Lorentz uzay formunda pseudo-null eğri hareketlerinin integrallenebilirlik özelliklerini incelemek için cebirsel bir yapı geliştirilmiştir. Bir uygulama olarak, Burgers denklemi ile pseudo null vortex filament denklemi arasındaki ilişki araştırılmıştır.

(Nolasco ve Pacheco; 2017) çalışmasında, null eğrilerin geometrisi açıklananmış Cartan çatısı, pseudo yay uzunluğu parametresi, pseudo burulması, eğri çiftleri gibi kavramlar ifade edilmiştir.

(Özdemir; 2019) çalışmasında, pseudo null eğrilerinin değişmezleri ile yarı Riemann manifoldlarının değişken vektör alanları arasındaki ilişki tanıtılmıştır.

(Ünlütürk ve ark; 2020) çalışmasında $k \in \{0,1,2\}$ olmak üzere Bishop çatısı yardımıyla k -tipi pseudo null eğimli helisler incelenmiştir. Bir pseudo null eğrisinin Bishop çatısının iki farklı durumu olduğu sonucuna ulaşılmış. Bu iki duruma dayanarak, Minkowski 3-uzayındaki Bishop çatısına göre her pseudo null eğrisinin bir k -tipi pseudo null eğrisi olduğu elde edilmiştir.

(Qian ve ark; 2020) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında pseudo null eğrilerin gösterim formülü, tanımlanan yapı fonksiyonları ve k -tipi pseudo null helisler tartışılmıştır.

(Kaymanlı; 2020) çalışmasında, Öklid 3-uzayında B-Darboux çatısı ile silindirik olmayan regle yüzeylerin global ofseti tanımlanmıştır.

(Lopez ve ark; 2021) çalışmasında, Lorentz Minkowski 3-uzayındaki pseudo-null eğriler analiz edilmiştir.

(Nešović ve ark; 2021) çalışmasında, Minkowski 3-uzayında dejenere olmayan yüzey üzerinde yatan pseudo null izofotik (isophotic) eğrileri tanımlanmış ve karakterize edilmiştir.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda Lorentz (Minkowski) 3-uzayına dair temel bilgilere değinilecektir. Bu kısım oluşturulurken (Walrave; 1995, Sabuncuoğlu; 2010, Yüce; 2017, Nešović ve ark; 2021) kaynaklarından faydalanılmıştır.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (3.1)$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı ve bu çarpım ile donatılmış \mathbb{R}^3 uzayına 3 boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı denir ve \mathbb{E}_1^3 ile gösterilir. Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım \mathbb{E}_1^3 deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

- i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$ veya $(\vec{u} = 0)$ ise \vec{u} vektörüne **spacelike** vektör,
- ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$ ise \vec{u} vektörüne **timelike** vektör,
- iii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$ ise \vec{u} vektörüne **lightlike (null)** vektör

adı verilir.

Her $\vec{u} \in \mathbb{E}_1^3$ için \vec{u} vektörünün normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$ olarak tanımlanır. Eğer $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = 0$ ise \vec{u} ve \vec{v} vektörleri diktir denir (Walrave; 1995).

Tanım 3.1. Her $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$ için,

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye \vec{u} ve \vec{v} vektörlerinin **Lorentz vektörel çarpımı** denir (Walrave; 1995).

Tanım 3.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$ ise α eğrisine null eğri adı verilir. α bir null eğri olmak üzere, $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 1$ ise α' ya

pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri veya null Cartan eğri denir (Walrave; 1995).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir null Cartan eğri olsun. Bu durumda;

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \quad (3.3)$$

vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür. α eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}(s) = \alpha''(s) \quad (3.4)$$

olup spacelike vektördür. \mathbf{B} binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında \mathbf{N} 'ye dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = 1 \quad (3.5)$$

dir. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$ ' dir. Ayrıca α eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L$ ' dir (Walrave; 1995).

Tanım 3.3. $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ null Cartan eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Cartan vektörleri denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Cartan çatısı adı verilir. $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektör alanlarına α eğrisi üstünde Cartan vektör alanları denir (Walrave; 1995).

Teorem 3.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir null Cartan eğri, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ Cartan vektör alanları olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\tau(s) & 0 & \kappa(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Burada

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L = \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L = \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = 0, \quad (3.7)$$

$$\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L = 1, \quad \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -1, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{T}(s) \times_L \mathbf{N}(s) = -\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{N}(s) \times_L \mathbf{B}(s) = -\mathbf{B}(s), \quad \mathbf{B}(s) \times_L \mathbf{T}(s) = \mathbf{N}(s), \quad (3.9)$$

$$\mathbf{T}(s) \times_L \mathbf{T}(s) = 0, \quad \mathbf{N}(s) \times_L \mathbf{N}(s) = 0, \quad \mathbf{B}(s) \times_L \mathbf{B}(s) = 0, \quad (3.10)$$

eşitlikleri sağlanır (Walrave; 1995). Burada $\kappa(s)$ α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\tau(s)$ ise burulma fonksiyonudur. Bundan sonraki kısımlarda verilen $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ null Cartan eğrisinin düz bir doğru olmadığı yani α eğrisinin eğriliğinin 1 olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda; bir yay uzunluğu parametresi ile verilmiş $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ null Cartan eğrisinin karakterizasyonu burulma fonksiyonu τ cinsinden incelenecektir.

Tanım 3.4. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ null Cartan eğrisi ve α ile aynı tanım kümesine sahip $\alpha^*: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi verilsin. Eğer $\alpha^*(s)$ ve $\alpha(s)$ noktalarını birleştiren doğru α ve α^* 'in her ikisinin asli normal vektörlerini kapsarsa α eğrisine α^* eğrisiyle birlikte Bertrand eğri çifti oluşturur denir (Erdoğan ve Yavuz; 2019).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresiyle verilmiş bir null Cartan eğrisi olsun. Eğer α^* eğrisi α ile bir Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa α^* eğrisi aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{N}(s). \quad (3.11)$$

Burada λ sıfırdan farklı bir reel sabittir. (3.11) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds} \alpha^*(s) = \alpha'(s) + \lambda(s) \mathbf{N}'(s) \quad (3.12)$$

olduğu görülür. $\alpha'(s) = \mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{N}'(s) = \tau(s) \mathbf{T}(s) - \kappa(s) \mathbf{B}(s)$ eşitlikleri (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \alpha^*(s) = (1 + \lambda(s)\tau(s)) \mathbf{T}(s) - \lambda(s)\kappa(s) \mathbf{B}(s) \quad (3.13)$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{ds} \alpha^*(s), \frac{d}{ds} \alpha^*(s) \right\rangle_L &= \left\langle (1 + \lambda(s)\tau(s)) \mathbf{T}(s) - \lambda(s)\kappa(s) \mathbf{B}(s), (1 + \lambda(s)\tau(s)) \mathbf{T}(s) - \lambda(s)\kappa(s) \mathbf{B}(s) \right\rangle_L \\ &= (1 + \lambda(s)\tau(s))^2 \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L - 2(1 + \lambda(s)\tau(s))\lambda(s)\kappa(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &\quad + (-\lambda(s)\kappa(s))^2 \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{d}{ds} \alpha^*(s), \frac{d}{ds} \alpha^*(s) \right\rangle_L = -2\lambda(s)(1 + \lambda(s)\tau(s)) \quad (3.14)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak α^* eğrisinin üç farklı karakteri olabileceği $\tau(s)$ değerine bağlı olarak görülebilir.

Teorem 3.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null Cartan eğri olsun. Eğer α eğrisinin Bertrand eğrisi α^* bir timelike eğri ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\mathbf{T}^*(s) = \frac{1+\lambda\tau(s)}{\sqrt{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{T}(s) - \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{B}(s), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{N}^*(s) = \text{sign}(1 + 2\lambda\tau(s)) \mathbf{N}(s), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B}^*(s) = \frac{1+\lambda\tau(s)}{\sqrt{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{T}(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{B}(s), \quad (3.17)$$

$$\kappa^*(s) = \frac{|1+2\lambda\tau(s)|}{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}, \quad (3.18)$$

$$\tau^*(s) = -\frac{\text{sign}(1+2\lambda\tau(s))}{2\lambda(1+\lambda\tau(s))}. \quad (3.19)$$

Burada $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*\}$ sırasıyla α eğrisinin pseudo ortonormal çatısı ve α^* timelike eğrisinin Frenet çatısıdır (Erdoğan ve Yavuz; 2019).

Teorem 3.3. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null Cartan eğri olsun. Eğer α eğrisinin Bertrand eğrisi α^* bir spacelike eğri ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\mathbf{T}^*(s) = \frac{1+\lambda\tau(s)}{\sqrt{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{T}(s) - \frac{\lambda}{\sqrt{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{B}(s), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{N}^*(s) = \text{sign}(1 + 2\lambda\tau(s)) \mathbf{N}(s), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{B}^*(s) = \frac{1+\lambda\tau(s)}{\sqrt{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{T}(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}} \mathbf{B}(s), \quad (3.22)$$

$$\kappa^*(s) = \frac{|1+2\lambda\tau(s)|}{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}, \quad (3.23)$$

$$\tau^*(s) = \frac{\text{sign}(1+2\lambda\tau(s))}{-2\lambda(1+\lambda\tau(s))}. \quad (3.24)$$

Burada $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*\}$ sırasıyla α eğrisinin pseudo ortonormal çatısı ve α^* spacelike eğrisinin Frenet çatısıdır (Erdoğan ve Yavuz; 2019).

Sonuç 3.1. Sabit eğrilik fonksiyonlarına sahip bir null Cartan eğrisinin her karakterden Bertrand çifti (timelike, spacelike, null Cartan) de sabit eğriliklere sahiptir (Erdoğan ve Yavuz; 2019).



4. PSEUDO NULL EĞRİ

Bu bölümde Minkowski (Lorentz) 3-uzayındaki pseudo null eğriler incelenmiştir.

Tanım 4.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ öyle bir eğri olsun ki; α eğrisinin hız vektörü α' spacelike vektör olmak üzere, α eğrisinin asli normal vektörü N ve binormal vektörü B birer lineer bağımsız null vektör ise α spacelike eğrisine **pseudo null eğri** denir (Nešović ve ark; 2021).

Cartan vektörleri $\{T, N, B\}$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Walrave; 1995):

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle N(s), B(s) \rangle_L = 1, \quad (4.1)$$

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle B(s), B(s) \rangle_L = 0, \quad (4.2)$$

$$\langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B(s) \rangle_L = 0, \quad (4.3)$$

$$T(s) \times_L N(s) = N(s), \quad N(s) \times_L B(s) = T(s), \quad B(s) \times_L T(s) = B(s). \quad (4.4)$$

(Walrave, 1995) çalışmasında Cartan formülleri ise aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Burada s yay uzunluğu parametresidir. $\kappa(s) = 1$ eğrilik fonksiyonudur. $\tau(s)$ ise α eğrisinin burulma fonksiyonudur.

Öte yandan $\kappa(s) = 1$ ve $\tau(s) \neq 0$ ise α eğrisine **pseudo null helis** denir. $\kappa(s) = 1$ ve $\tau(s) = 0$ ise α eğrisine **pseudo null çember** denir.

Eğer $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α pseudo null eğrisine **birim hızlı** denir.

Tanım 4.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo null eğri, $\alpha(s)$ pseudo null eğrisinin asli normal vektörü $N(s)$ ve binormal vektörü $B(s)$ olmak üzere; $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L$ fonksiyonuna **pseudo torsiyonu (burulma)** adı verilir (Lopez ve ark; 2021).

Teorem 4.1. Her pseudo null düzlemsel eğri, null düzlemde yatar (Lopez ve ark; 2021).

Örnek 4.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s\right) \quad (4.6)$$

eğrisi verilsin (Nešović ve ark; 2021). Verilen bu eğrinin birim hızlı pseudo null eğri olduğu aşağıda gösterilmiştir.

Öncelikle $\alpha(s)$ eğrisinin karakterini (spacelike, timelike veya null (lightlike)) belirlemek için $\alpha'(s)$ vektörü bulunur.

$$\alpha'(s) = \mathbf{T}(s) = (s, s, 1) \quad (4.7)$$

olarak bulunur. (4.7)'de bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı yapılarak çıkan sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin karakteri belirlenir. Buna göre

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -s^2 + s^2 + 1 = 1 \quad (4.8)$$

dir. (4.8) eşitliğine göre $\alpha(s)$ eğrisinin **teğet vektörü birim spacelike vektördür.**

Verilen eğrinin pseudo null eğri olması için asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ ve binormal vektörü $\mathbf{B}(s)$ 'nin lineer bağımsız null vektörler olması gereklidir.

$\alpha(s)$ eğrisinin ikinci türevi

$$\alpha''(s) = \mathbf{N}(s) = (1, 1, 0) \quad (4.9)$$

olarak bulunur. (4.9)'da bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınırsa, $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü olan $\mathbf{N}(s)$ 'nin karakteri belirlenir.

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = -1^2 + 1^2 + 0 = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. O halde $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ 'nin null vektör olduğu görülür.

$\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörünün

$$\mathbf{B}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (4.11)$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve (4.1), (4.2) ve (4.3)'deki eşitlikler kullanılırsa

$$\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s) + y(s) = 1, \quad (4.12)$$

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)s + y(s)s + z(s) = 0, \quad (4.13)$$

$$\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.12), (4.13) ve (4.14) denklemleri çözümlendiğinde

$$x(s) = \frac{-s^2-1}{2}, \quad (4.15)$$

$$y(s) = \frac{1-s^2}{2}, \quad (4.16)$$

$$z(s) = -s \quad (4.17)$$

olarak bulunur. (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri (4.11)'de yerine yazılırsa, $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{-s^2-1}{2}, \frac{1-s^2}{2}, -s \right) \quad (4.18)$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{B}(s)$ vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınır

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= -\left(\frac{-s^2-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-s^2}{2} \right)^2 + (-s)^2 \\ &= -\frac{1-2s^2+s^4}{4} + \frac{1-2s^2+s^4}{4} + s^2 \\ &= \frac{-s^4-2s^2-1+1-2s^2+s^4}{4} + s^2 \\ &= \frac{-4s^2}{4} + s^2 \\ &= -s^2 + s^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak bulunur. (4.19)'daki bulduğumuz sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü $\mathbf{B}(s)$ 'nin null vektör olduğu görülür.

(4.9) ve (4.18) eşitliklerinden $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektör alanlarının lineer bağımsız oldukları da kolayca görülür. O halde $\alpha(s)$ eğrisi **birim hızlı pseudo null eğridir**.

(4.9)'deki $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü ve (4.5)'de verilen Cartan vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa

$$(1,1,0) = \kappa(s)(1,1,0) \quad (4.20)$$

eşitliği elde edilir. O halde $\kappa(s) = 1$ ' dir. (4.9)'da bulunan $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörünün türevi

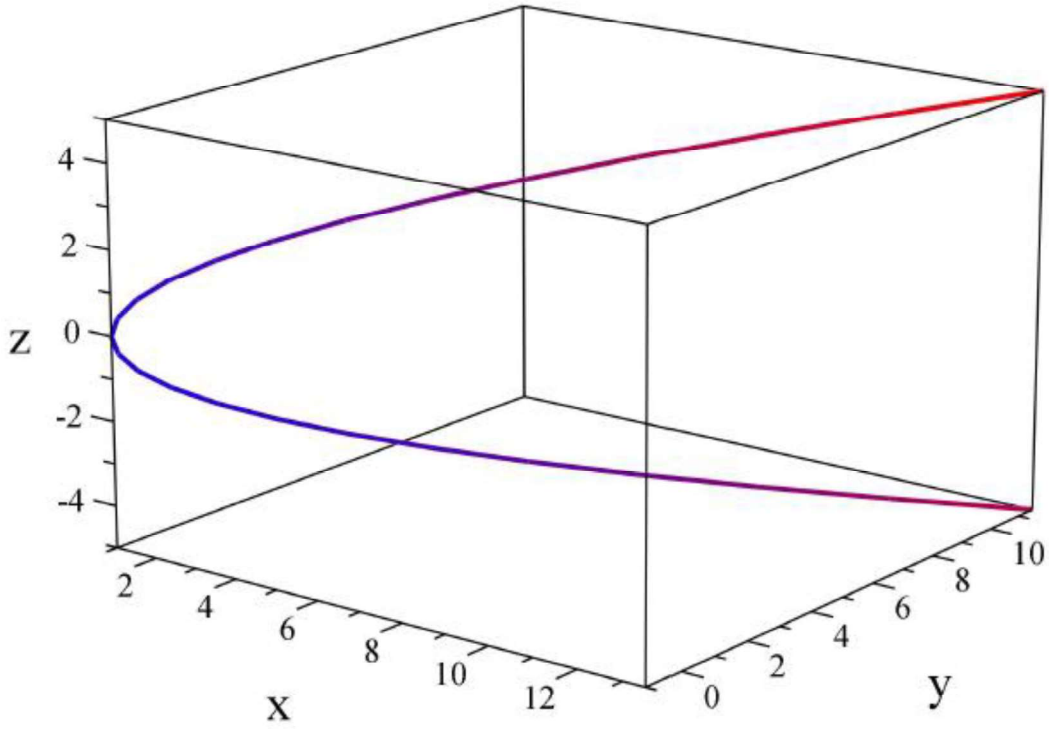
$$\mathbf{N}'(s) = (0,0,0) \quad (4.21)$$

olarak bulunur. (4.5)'de verilen Cartan verilen Cartan vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa

$$(0,0,0) = \tau(s)(1,1,0) \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22)'deki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $\tau(s) = 0$ olmasıdır.

$\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) = 1$ ve burulma fonksiyonu $\tau(s) = 0$ olduğu için $\alpha(s)$ eğrisi bir **pseudo null çemberdir**.



Şekil 1. Pseudo Null Çember

Örnek 4.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere;

$$\alpha(s) = (e^s, e^s, s) \quad (4.23)$$

eğrisi verilsin. Öncelikle $\alpha(s)$ eğrisinin karakterini (spacelike, timelike veya null (lightlike)) belirlemek için $\alpha'(s)$ vektörü

$$\alpha'(s) = \mathbf{T}(s) = (e^s, e^s, 1) \quad (4.24)$$

olarak bulunur. (4.24) eşitliği ile verilen vektörünün kendisiyle Lorentz çarpımı alınırsa çıkan sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin karakteri belirlenir. Buna göre

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -e^{2s} + e^{2s} + 1 = 1 \quad (4.25)$$

dir. (4.25) eşitliğine göre $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörü birim spacelike vektördür.

Verilen eğrinin pseudo null eğri olması için asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ ve binormal vektörü $\mathbf{B}(s)$ lineer bağımsız null vektörler olmalıdır. $\alpha(s)$ eğrisinin ikinci türevi

$$\alpha''(s) = \mathbf{N}(s) = (e^s, e^s, 0) \quad (4.26)$$

olarak bulunur. (4.26)'de bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = -e^{2s} + e^{2s} + 0 = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. Buradan $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ 'nin null vektör olduğu görülür.

$\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörünün

$$\mathbf{B}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (4.28)$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s) + y(s) = 1, \quad (4.29)$$

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)s + y(s)s + z(s) = 0, \quad (4.30)$$

$$\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 0 \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.29), (4.30) ve (4.31) denklemleri çözümlenirse

$$x(s) = \frac{-e^{2s}-1}{2e^s}, \quad (4.32)$$

$$y(s) = \frac{1-e^{2s}}{2e^s}, \quad (4.33)$$

$$z(s) = -1 \quad (4.34)$$

olarak bulunur. (4.32), (4.33) ve (4.34) eşitlikleri (4.28)'de yerine yazılırsa, $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s}, \frac{1-e^{2s}}{2e^s}, -1 \right) \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. (4.35)'de bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınır

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= -\left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right)^2 + \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right)^2 + (-1)^2 \\ &= -\left(\frac{e^{4s} + 2e^{2s} + 1}{4e^{2s}} \right) + \left(\frac{1 - 2e^{2s} + e^{4s}}{4e^{2s}} \right) + 1 \\ &= \left(\frac{-e^{4s} - 2e^{2s} - 1 + 1 - 2e^{2s} + e^{4s}}{4e^{2s}} \right) + 1 \\ &= \left(\frac{-4e^{2s}}{4e^{2s}} \right) + 1 \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir.

(4.36)'daki elde edilen sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin binormal $\mathbf{B}(s)$ vektörünün de null vektör olduğu görülür. (4.26) ve (4.35) eşitliklerinden $N(s)$ ve $B(s)$ vektör alanlarının lineer bağımsız oldukları da kolayca görülür.

O halde, $\alpha(s)$ eğrisi **birim hızlı pseudo null eğridir**.

(4.26)'daki $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü ve (4.5)'deki Cartan vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa

$$(e^s, e^s, 0) = \kappa(s)(e^s, e^s, 0) \quad (4.37)$$

elde edilir. Bu durumda $\kappa(s) = 1$ olduğu açık bir şekilde görülür.

(4.26)'da bulunan $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörünün türevi

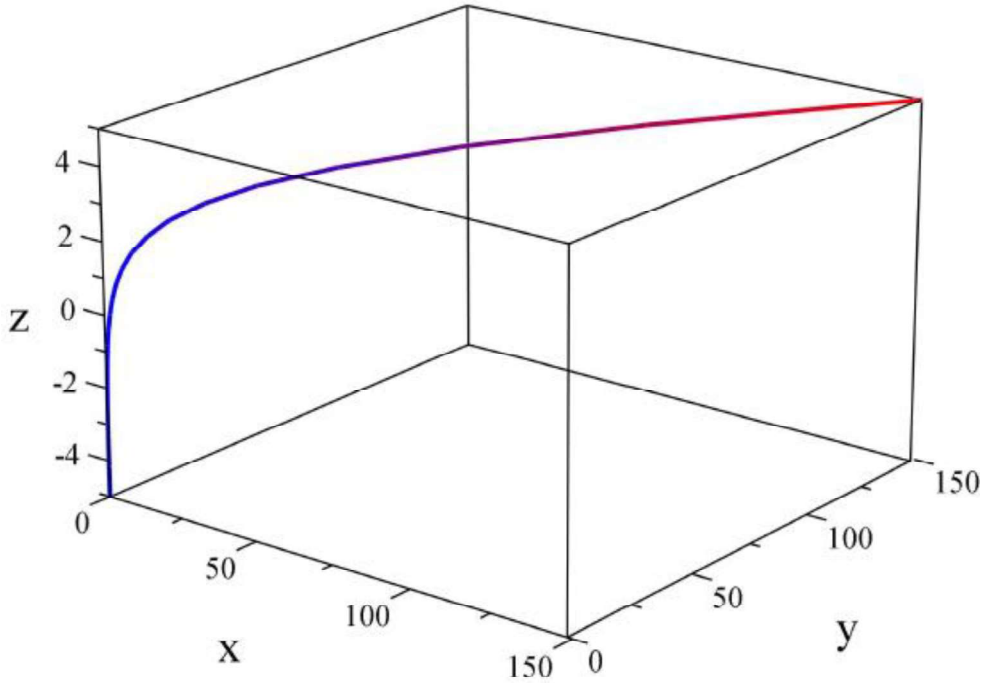
$$N'(s) = (e^s, e^s, 0) \quad (4.38)$$

dır. (4.26), (4.38) eşitlikleri ve (4.5)'deki Cartan vektörlerinin türev formüllerinde yerine yazılırsa

$$(e^s, e^s, 0) = \tau(s)(e^s, e^s, 0) \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39)'deki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $\tau(s) = 1$ olmasıdır.

$\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) = 1$ ve burulma fonksiyonu $\tau(s) \neq 0$ olduğu için $\alpha(s)$ eğrisi bir **pseudo null helis**dir.



Şekil 2. Pseudo Null Helis

Örnek 4.3. Birim hızlı pseudo null

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, -s, \frac{s^2}{2}\right) \quad (4.40)$$

eğrisi verilsin (Lopez ve ark; 2021). $\alpha(s)$ eğrisinin türevi

$$\alpha'(s) = (s, -1, s) \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Bu vektörünün kendisiyle Lorentz çarpımı

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -s^2 + 1 + s^2 = 1 \quad (4.42)$$

olduğundan $\alpha'(s)$ birim spacelike vektördür. O halde

$$\mathbf{T}(s) = (s, -1, s) \quad (4.43)$$

olarak elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisinin pseudo null eğri olması için asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ ve binormal $\mathbf{B}(s)$ vektörünün lineer bağımsız null vektörler olması gerekir. (4.41) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\alpha''(s) = (1, 0, 1) \quad (4.44)$$

olarak bulunur. (4.44)'de bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = -1 + 0 + 1 = 0 \quad (4.45)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathbf{N}(s) = (1, 0, 1) \quad (4.46)$$

olduğu görülür. (4.46) eşitliğine göre $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ bir null vektördür. $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörünün

$$\mathbf{B}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (4.47)$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve (4.1), (4.2) ve (4.3)'deki eşitlikler kullanılırsa

$$\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s) + z(s) = 1, \quad (4.48)$$

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)s - y(s) + z(s)s = 0, \quad (4.49)$$

$$\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 0 \quad (4.50)$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan (4.48), (4.49) ve (4.50) denklemleri çözümlenirse;

$$x(s) = \frac{-s^2-1}{2}, \quad (4.51)$$

$$y(s) = s, \quad (4.52)$$

$$z(s) = \frac{1-s^2}{2} \quad (4.53)$$

olarak bulunur. (4.51), (4.52) ve (4.53)'da bulunan eşitlikler (4.47)'de yerine yazılırsa, $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{-s^2-1}{2}, s, \frac{1-s^2}{2} \right) \quad (4.54)$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= - \left(\frac{-s^2-1}{2} \right)^2 + (s)^2 + \left(\frac{1-s^2}{2} \right)^2 \\ &= - \left(\frac{s^4+2s^2+1}{4} \right) + (s)^2 + \left(\frac{1-2s^2+s^4}{4} \right) \\ &= \left(\frac{-s^4-2s^2-1+1-2s^2+s^4}{4} \right) + s^2 \\ &= \left(\frac{-4s^2}{4} \right) + s^2 \\ &= -s^2 + s^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

dir. (4.55)'de elde edilen sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin binormal $\mathbf{B}(s)$ vektörünün de null vektör olduğu görülür.

(4.46) ve (4.54) denklemlerinden, bulunan $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektörlerinin lineer bağımsız da olduğu açıkça görülür. Sonuç olarak $\alpha(s)$ eğrisi **birim hızlı pseudo null eğridir**.

Tanım 4.2'de verilenlere göre; $\alpha(s)$ birim hızlı pseudo null eğrisinin pseudo torsiyonunu bulmak için; (4.46)'deki $\alpha(s)$ birim hızlı pseudo null eğrisinin asli normali

vektörünün türevi bulunmalıdır. $\alpha(s)$ birim hızlı pseudo null eğrisinin asli normal vektörünün türevi

$$\mathbf{N}'(s) = (0,0,0) \quad (4.56)$$

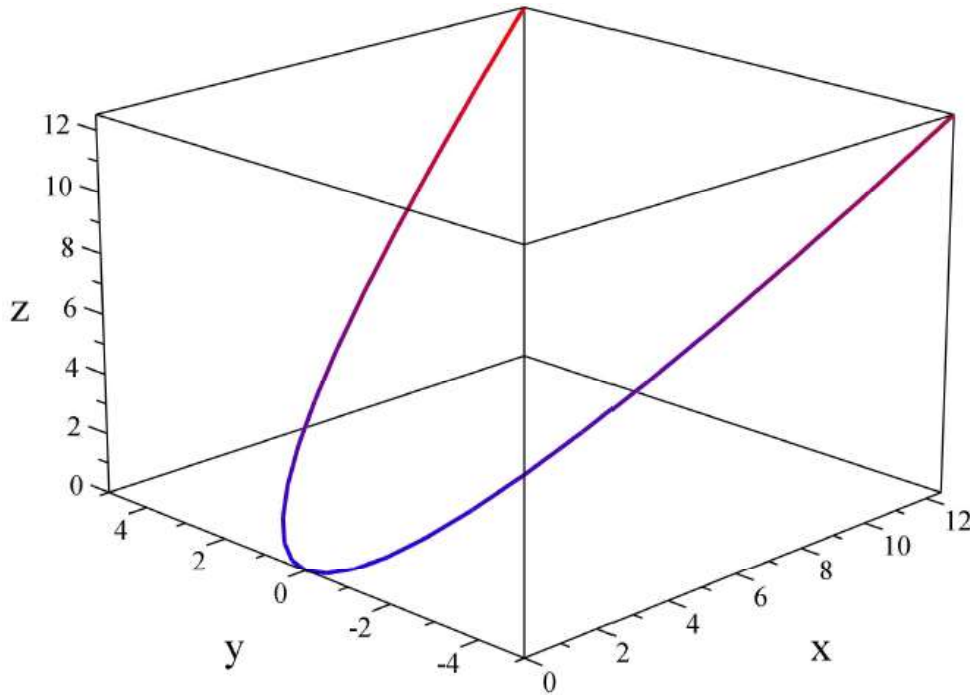
olarak bulunur.

Tanım 4.2 göz önüne alınırsa, (4.56)'da bulunan $\alpha(s)$ birim hızlı pseudo null eğrisinin asli normal vektörünün türevi ile (4.54)'de bulunan binormal vektörünün Lorentz çarpımı sonucu

$$\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = \langle (0,0,0), \left(\frac{-s^2-1}{2}, s, \frac{1-s^2}{2} \right) \rangle_L = 0 \quad (4.57)$$

olarak bulunur.

Ayrıca (Lopez ve ark; 2021) çalışmasında bu eğrinin $x = z$ null düzleminde yatan ve pseudo torsiyonu $\tau(s) = 0$ olan tek eğri olduğu da ifade edilmiştir.



Şekil 3. Pseudo Null Düzlemsel Eğri

Örnek 4.4. Birim hızlı pseudo null

$$\alpha(s) = \frac{1}{\tau^2} (e^{s\tau}, s\tau^2, e^{s\tau}) \quad (4.58)$$

eğrisi verilsin (Lopez ve ark; 2021). $\alpha(s)$ eğrisinin türevi

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\tau^2} (\tau e^{s\tau}, \tau^2, \tau e^{s\tau}) = \left(\frac{e^{s\tau}}{\tau}, 1, \frac{e^{s\tau}}{\tau} \right) \quad (4.59)$$

olarak bulunur. (4.59) da bulunan türev vektörünün kendisiyle Lorentz çarpımı

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = - \left(\frac{e^{s\tau}}{\tau} \right)^2 + 1 + \left(\frac{e^{s\tau}}{\tau} \right)^2 = 1 \quad (4.60)$$

olarak bulunur. O halde $\alpha'(s)$ vektörü birim spacelike vektördür. Bu durumda

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{e^{s\tau}}{\tau}, 1, \frac{e^{s\tau}}{\tau} \right) \quad (4.61)$$

olarak bulunur.

Verilen eğrinin pseudo null eğri olması için asli normal vektörü $\mathbf{N}(s)$ ve binormal $\mathbf{B}(s)$ vektörünün birer lineer bağımsız null vektör olması gerekir. (4.59) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\alpha''(s) = \left(\frac{\tau e^{s\tau}}{\tau}, 0, \frac{\tau e^{s\tau}}{\tau} \right) = (e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \quad (4.62)$$

olarak bulunur. (4.52)'de bulunan vektörün kendisiyle Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = -(e^{s\tau})^2 + 0 + (e^{s\tau})^2 = 0 \quad (4.63)$$

elde edilir. $\alpha''(s)$ vektörünün null vektör olduğu elde edilir. Bu durumda

$$\mathbf{N}(s) = (e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \quad (4.64)$$

olarak elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörünün

$$\mathbf{B}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (4.65)$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)e^{s\tau} + z(s)e^{s\tau} = 1, \quad (4.66)$$

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)\frac{e^{s\tau}}{\tau} + y(s) + z(s)\frac{e^{s\tau}}{\tau} = 0, \quad (4.67)$$

$$\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L = -x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 0 \quad (4.68)$$

elde edilir. Bulunan (4.66), (4.67) ve (4.68) denklemler çözümlenirse

$$x(s) = \frac{-e^{2s\tau} - \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}}, \quad (4.69)$$

$$y(s) = \frac{-1}{\tau}, \quad (4.70)$$

$$z(s) = \frac{-e^{2s\tau} + \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}} \quad (4.71)$$

olarak bulunur. (4.69), (4.70) ve (4.71)'de bulunan eşitlikler (4.65)'de yerine yazılarak, $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{-e^{2s\tau} - \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}}, \frac{-1}{\tau}, \frac{-e^{2s\tau} + \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}} \right) \quad (4.72)$$

olarak bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= -\left(\frac{-e^{2s\tau} - \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}} \right)^2 + \left(\frac{-1}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{-e^{2s\tau} + \tau^2}{2\tau^2 e^{s\tau}} \right)^2 \\ &= -\frac{e^{4s\tau} + 2e^{2s\tau}\tau^2 + \tau^4}{4(\tau^2 e^{s\tau})^2} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{e^{4s\tau} - 2e^{2s\tau}\tau(s)^2 + \tau^4}{4(\tau^2 e^{s\tau})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L &= \frac{-e^{4s\tau} - 2e^{2s\tau}\tau^2 - \tau(s)^4 + e^{4s\tau} - 2e^{2s\tau}\tau^2 + \tau^4}{4(\tau^2 e^{s\tau})^2} + \frac{1}{\tau^2} \\
&= \frac{-4e^{2s\tau}\tau^2}{4(\tau^2 e^{s\tau})^2} + \frac{1}{\tau^2} \\
&= -\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

dir. (4.73)'de elde edilen sonuca göre $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörünün bir null vektör olduğu görülür.

(4.64) ve (4.72) denklemlerinden, bulunan $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektörlerinin lineer bağımsız da olduğu açıkça görülür. Sonuç olarak $\alpha(s)$ eğrisi **birim hızlı pseudo null eğridir**.

(4.61) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{T}'(s) = (e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \tag{4.74}$$

olarak bulunur. (4.64)'de verilen $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü ve (4.5)'de ifade edilen Cartan vektörlerinin türev formüllerinde yerine yazılırsa

$$(e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) = \kappa(s)(e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \tag{4.75}$$

elde edilir. (4.75) eşitliğine göre $\kappa(s) = 1$ 'dir.

(4.5)'de verilen Cartan vektörlerinin türev formüllerinden

$$\mathbf{N}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s) \tag{4.76}$$

olduğunu biliniz. (4.64) eşitliğinin türevi

$$\mathbf{N}'(s) = (\tau e^{s\tau}, 0, \tau e^{s\tau}) = \tau(e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \tag{4.77}$$

olarak elde edilir. (4.77) eşitliği (4.76) da yerine yazılırsa

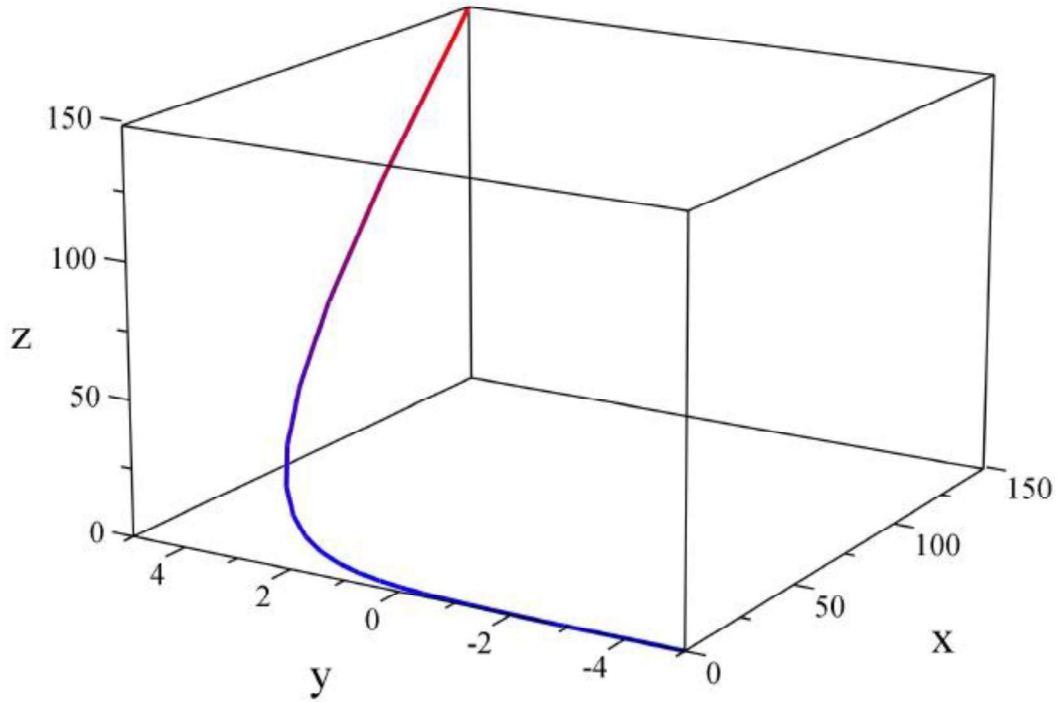
$$\tau(e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) = \tau(s)(e^{s\tau}, 0, e^{s\tau}) \quad (4.71)$$

elde edilir. Buradan $\tau(s) = \tau$ olduğu görülür.

$\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) = 1$ ve burulma fonksiyonu $\tau(s) = \tau$ olduğu için $\alpha(s)$ eğrisine pseudo null helis veya pseudo null çember olması τ değerine bağlıdır.

Ayrıca (Lopez ve ark; 2021) çalışmasında bu eğrinin $x = z$ null düzleminde yatan ve pseudo torsiyonu sıfırdan farklı sabit τ olan tek eğri olduğu da ifade edilmiştir.

$\tau(s) = 1$ için $\alpha(s)$ pseudo null helis eğrisinin şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. Pseudo Null Helis

5. CARTAN ÇATI ALANLARIYLA AYNI YÖNLÜ DOĞRULARIN ÜRETTİĞİ YÜZEYLER

Bu bölümde; üreteç doğruları pseudo null taban eğrisine sahip yüzeyler incelenecektir. Aynı yönlü Cartan çatı alanları sırasıyla T, N ve B 'dir. Bunlar Tablo 1'de verilen durumlardır ve bu üç durum sırasıyla incelenecektir.

Tanım 5.1. $\phi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $s \in I$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi(s, t)$ yüzeyi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\phi(s, t) = \alpha(s) + te(s). \quad (5.1)$$

$\phi(s, t)$ yüzeyi \mathbb{E}_1^3 'de regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ regüler bir eğri ve $e: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, α eğrisi boyunca bir vektör alanıdır (Nešović ve ark; 2016). Burada;

$$e(s) \times_L e'(s) = \vec{0} \quad (5.2)$$

ise bu yüzeye silindirik yüzey denir. Ayrıca

$$e(s) \times_L e'(s) \neq \vec{0} \quad (5.3)$$

ise bu yüzeye silindirik olmayan yüzey denir (Nešović ve ark; 2016).

Teorem 5.1. $\phi = \phi(s, t)$ silindirik olmayan bir regle yüzey olsun $\forall s \in I$ için $\langle \sigma'(s), e(s) \rangle_L = 0$ ve $\langle e(s), e(s) \rangle_L \neq 0$ olacak şekilde öyle bir σ eğrisi bulunabilir ki $\phi(s, t)$ yüzeyi tekrar parametrize edilerek

$$M(s, t) = \sigma(s) + te(s) \quad (5.4)$$

olarak yazılır. Burada

$$\sigma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), e'(s) \rangle_L}{\|e'(s)\|^2} e(s) \quad (5.5)$$

eğrisine M yüzeyinin **striksiyon (boğaz) çizgisi (eğrisi)** denir (Hacısalıhoğlu; 1998, Nešović ve ark; 2016).

Teorem 5.2. $\phi = \phi(s, t)$, dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olan silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. O halde $\phi = \phi(s, t)$ regle yüzeyinin **distribüsyon (dağılma) parametresi**

$$\rho(s) = \frac{\langle \sigma'(s) \times_L e(s), e'(s) \rangle_L}{\langle e'(s), e'(s) \rangle_L} \quad (5.6)$$

ile tanımlı fonksiyondur (Nešović ve ark; 2016).

Teorem 5.3. $\phi = \phi(s, t)$ bir regle yüzey olsun. Bu regle yüzeyin distribüsyon (dağılma) parametresi $\rho(s)$ olmak üzere, $\phi = \phi(s, t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği $K(s, t)$ daima negatif veya sıfırdır; yani yüzey üzerinde herhangi bir p noktası için $K(p) \leq 0$ 'dır. Yüzeyin regüler noktalarında

$$K(s, t) = - \frac{(\rho(s))^2}{((\rho(s))^2 + t^2)^2} \quad (5.7)$$

dır. Bir regle yüzeyin tüm regüler noktalarında $K = 0$ ise bu regle yüzeye açılabilir yüzey denir (Jeritslev; 2011, Salur; 2019).

Teorem 5.4. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu; 2000, Salur; 2019).

5.1. Teğet Yönüyle Üretilen Yüzeyler

Bu alt bölümde taban (dayanak) eğrisi $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo null eğrisi olan ve ureteç doğruları ise α pseudo null eğrisinin teğet vektör alanı T ile aynı yönlü olan regle yüzeyler incelenmiştir. Bu durumda $\lambda_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere bu yüzey;

$$M^1(s, t) = \alpha(s) + t \lambda_1(s) \mathbf{T}(s) \quad (5.8)$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir.

Teorem 5.5. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyi singüler bir yüzeydir.

İspat: $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğunu ispatlamak için $EG - F^2 = 0$ olduğunu göstermek gerekir. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları için öncelikle $\frac{\partial M^1}{\partial s}$, $\frac{\partial M^1}{\partial t}$ kısmi türevleri bulunur. Bu kısmi türevler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\partial M^1(s, t)}{\partial s} = (1 + t\lambda_1'(s))\mathbf{T}(s) + t\lambda_1(s)\mathbf{N}(s), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial M^1(s, t)}{\partial t} = \lambda_1(s)\mathbf{T}(s). \quad (5.10)$$

$M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları (5.9) ve (5.10) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial s} \right\rangle_L \\ &= \left\langle (1 + t\lambda_1'(s))\mathbf{T}(s) + t\lambda_1(s)\mathbf{N}(s), (1 + t\lambda_1'(s))\mathbf{T}(s) + t\lambda_1(s)\mathbf{N}(s) \right\rangle_L \\ &= (1 + t\lambda_1'(s))^2 \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + 2(1 + t\lambda_1'(s))t\lambda_1(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &\quad + (t\lambda_1(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= (1 + t\lambda_1'(s))^2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= \left\langle (1 + t\lambda_1'(s))\mathbf{T}(s) + t\lambda_1(s)\mathbf{N}(s), \lambda_1(s)\mathbf{T}(s) \right\rangle_L \\ &= (1 + t\lambda_1'(s))\lambda_1(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + t(\lambda_1(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L \end{aligned}$$

$$= (1 + t\lambda_1'(s))\lambda_1(s), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} G(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial M^1(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= \langle \lambda_1(s)T(s), \lambda_1(s)T(s) \rangle_L \\ &= \lambda_1(s)^2 \langle T(s), T(s) \rangle_L = (\lambda_1(s))^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

olarak bulunur. Bulunan (5.11), (5.12) ve (5.13) eşitlikleri kullanılarak

$$EG - F^2 = (1 + t\lambda_1'(s))^2 (\lambda_1(s))^2 - ((1 + t\lambda_1'(s))\lambda_1(s))^2 = 0 \quad (5.14)$$

olduğu görülür. Buna göre $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyi bir singüler yüzeydir.

Teorem 5.6. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir yüzeydir.

İspat: $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyi (5.1) de verildiği gibi yeniden parametrize edilirse

$$e(s) = \lambda_1(s)T(s) \quad (5.15)$$

olduğu görülür. Buradan

$$e'(s) = \lambda_1'(s)T(s) + \lambda_1(s)N(s) \quad (5.16)$$

bulunur. (5.15) ve (5.16) de verilen vektörlerin Lorentz vektörel çarpımı

$$e(s) \times_L e'(s) = (\lambda_1(s)T(s)) \times_L (\lambda_1'(s)T(s) + \lambda_1(s)N(s)) \quad (5.17)$$

olarak bulunur. (4.4) eşitliklere göre

$$e(s) \times_L e'(s) = \lambda_1(s)\lambda_1'(s)(T(s) \times_L T(s)) + (\lambda_1(s))^2(T(s) \times_L N(s))$$

$$= (\lambda_1(s))^2 N(s) \neq 0 \quad (5.18)$$

elde edilir. Buradan $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir regle yüzey olduğu görülür

Teorem 5.7. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin; $\lambda_1'(s) \neq 0$ olmak üzere striksiyon çizgisi

$$\sigma_1(s) = \alpha(s) - \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \mathbf{T}(s) \quad (5.20)$$

dir.

İspat: $\alpha'(s) = \mathbf{T}(s)$ eşitliği, (5.15) ve (5.16) eşitlikleri (5.5) denkleminde yerine yazılırsa, $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{T}(s), (\lambda_1'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{N}(s)) \rangle_L}{|(\lambda_1'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{N}(s)), (\lambda_1'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{N}(s))\rangle_L|} \lambda_1(s)\mathbf{T}(s) \\ &= \alpha(s) - \frac{\lambda_1'(s)\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + \lambda_1(s)\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L}{(\lambda_1'(s))^2} (\lambda_1(s)\mathbf{T}(s)) \\ &= \alpha(s) - \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \mathbf{T}(s) \end{aligned} \quad (5.21)$$

olarak bulunur.

Teorem 5.8. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon (dağılma) parametresi sıfırdır.

İspat: (5.21) ifadesinin türevi

$$\sigma_1'(s) = \frac{\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{(\lambda_1'(s))^2} \mathbf{T}(s) - \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \mathbf{N}(s) \quad (5.22)$$

olarak bulunur. (5.15), (5.16) ve (5.22) eşitlikleri (5.6) eşitliğinde yerine yazılırsa $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon parametresi

$$\begin{aligned}
\rho_1(s) &= \frac{\langle \frac{\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{(\lambda_1'(s))^2} \mathbf{T}(s) - \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \mathbf{N}(s) \times_L (\lambda_1(s)\mathbf{T}(s)), (\lambda_1'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{N}(s)) \rangle_L}{(\lambda_1'(s))^2 \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + 2\lambda_1'(s)\lambda_1(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L + (\lambda_1(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L} \\
&= \frac{\langle \frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)} \mathbf{N}(s), \lambda_1'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{N}(s) \rangle_L}{(\lambda_1'(s))^2} \\
\rho_1(s) &= \frac{(\lambda_1(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + \frac{(\lambda_1(s))^3}{\lambda_1'(s)} \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L}{(\lambda_1'(s))^2} = 0 \tag{5.23}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.1. $M^1 = M^1(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon (dağılma) parametresi $\rho_1(s) = 0$ olduğu için Teorem 5.4'e göre açılabilir bir yüzeydir.

Örnek 5.1. Örnek 4.1'de verilen, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) \tag{5.24}$$

eğrisinin teğetinin ürettiği yüzey $M = M(s, t)$ ile gösterilsin. $\lambda_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere bu yüzey

$$M(s, t) = \alpha(s) + t \lambda_1(s) \mathbf{T}(s) \tag{5.25}$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir. (5.25) ifadesinde $\alpha(s)$ eğrisi ve bu eğrinin teğet vektörü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M(s, t) &= \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) + t \lambda_1(s) (s, s, 1) \\
&= \left(\frac{s^2}{2} + 1 + st \lambda_1(s), \frac{s^2}{2} - 1 + st \lambda_1(s), s + t \lambda_1(s) \right) \tag{5.26}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (5.26) eşitliğinin kısmi türevleri

$$\frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = \left(s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s), s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s), 1 + t \lambda_1'(s) \right) \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial M(s,t)}{\partial t} = \left(s \lambda_1(s), s \lambda_1(s), \lambda_1(s) \right). \quad (5.28)$$

olarak bulunur. $M = M(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları (5.27) ve (5.28) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial M(s,t)}{\partial s} \right\rangle_L \\ &= - \left(s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s) \right)^2 + \left(s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s) \right)^2 + \left(1 + t \lambda_1'(s) \right)^2 \\ &= \left(1 + t \lambda_1'(s) \right)^2, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial M(s,t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= - \left(s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s) \right) (s \lambda_1(s)) + \left(s + t \lambda_1(s) + st \lambda_1'(s) \right) (s \lambda_1(s)) \\ &\quad + \left(1 + t \lambda_1'(s) \right) (\lambda_1(s)) \\ &= \left(1 + t \lambda_1'(s) \right) (\lambda_1(s)), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} G(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M(s,t)}{\partial t}, \frac{\partial M(s,t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= - (s \lambda_1(s))^2 + (s \lambda_1(s))^2 + (\lambda_1(s))^2 = (\lambda_1(s))^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. Bulunan (5.29), (5.30) ve (5.31) eşitlikleri kullanılarak

$$EG - F^2 = \left(1 + t\lambda_1'(s)\right)^2 (\lambda_1(s))^2 - \left(\left(1 + t\lambda_1'(s)\right)(\lambda_1(s))\right)^2 = 0 \quad (5.32)$$

olarak bulunur. (5.32) eşitliğine göre $M = M(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğu anlaşılır.

(5.15) eşitliğinden

$$e(s) = \lambda_1(s)T(s) = (s\lambda_1(s), s\lambda_1(s), \lambda_1(s)) \quad (5.33)$$

olarak bulunur.

(5.33) eşitliğinin türevi

$$e'(s) = (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1'(s)) \quad (5.34)$$

olarak bulunur. (5.33) ve (5.34) eşitliklerinde verilen vektörlerin Lorentz vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} e(s) \times_L e'(s) &= \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ s\lambda_1(s) & s\lambda_1(s) & \lambda_1(s) \\ \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s) & \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s) & \lambda_1'(s) \end{vmatrix} \\ &= -e_1 \left((s\lambda_1(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))) \right) \\ &\quad - e_2 \left(s\lambda_1(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s)) \right) \\ &\quad + e_3 \left(s\lambda_1(s)(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s)) - s\lambda_1(s)(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s)) \right) \\ &= -e_1 \left(-(\lambda_1(s))^2 \right) - e_2 \left(-(\lambda_1(s))^2 \right) \\ &= e_1(\lambda_1(s))^2 + e_2(\lambda_1(s))^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

olarak elde edilir.

$$e(s) \times_L e'(s) = (\lambda_1(s))^2 (1, 1, 0) \neq \vec{0} \quad (5.36)$$

olduğu için; $M = M(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir yüzeydir.

$M = M(s, t)$ silindirik olmayan bir yüzey olduğu için striksiyon eğrisi vardır. $M = M(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi $\sigma_1(s)$ ile gösterilsin.

(5.33) ve (5.34) vektörleri (5.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) \\ &\quad - \frac{\langle (s, s, 1), (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1'(s)) \rangle_L}{\|e'(s)\|^2} (s\lambda_1(s), s\lambda_1(s), \lambda_1(s)) \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) \\ &\quad - \frac{-(s(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))) + (s(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))) + (\lambda_1'(s))}{\lambda_1'(s)^2} (s\lambda_1(s), s\lambda_1(s), \lambda_1(s)) \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) - \frac{1}{\lambda_1'(s)} (s\lambda_1(s), s\lambda_1(s), \lambda_1(s)) \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + 1, \frac{s^2}{2} - 1, s \right) - \left(\frac{s\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)}, \frac{s\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)}, \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \right) \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + 1 - \frac{s\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)}, \frac{s^2}{2} - 1 - \frac{s\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)}, s - \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1'(s)} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

bulunur.

(5.37)'de bulunan $M = M(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisinin türevi

$$\sigma_1'(s) = \left(s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2}, s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2}, 1 - \frac{\lambda_1'(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) \quad (5.38)$$

olarak bulunur. (5.6) eşitliğinde yerine yazmak için

$$\sigma_1'(s) \times_L e(s) =$$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} -e_1 & e_2 & e_3 \\ s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} & s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} & 1 - \frac{\lambda_1'(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \\ s\lambda_1(s) & s\lambda_1(s) & \lambda_1(s) \end{array} \right| \\ &= -e_1 \left(\left(s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) (\lambda_1(s)) - \left(1 - \frac{\lambda_1'(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) s\lambda_1(s) \right) \\ & \quad - e_2 \left(\left(s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) (\lambda_1(s)) - \left(1 - \frac{\lambda_1'(s)\lambda_1'(s) - \lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) s\lambda_1(s) \right) \\ & \quad + e_3 \left(\left(s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) s\lambda_1(s) - \left(s - \frac{(\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s))\lambda_1'(s) - s\lambda_1(s)\lambda_1''(s)}{\lambda_1'(s)^2} \right) s\lambda_1(s) \right) \\ &= \left(-\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)}, -\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)}, 0 \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

vektörü bulunur.

(5.34) ve (5.39) eşitlikleri (5.6) denkleminde yerine yazılırsa dağılıma parametresi

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \frac{\left\langle \left(-\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)}, -\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)}, 0 \right), (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1'(s)) \right\rangle_L}{\left\langle (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1'(s)), (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1(s) + s\lambda_1'(s), \lambda_1'(s)) \right\rangle_L} \\ &= \frac{-\left(-\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)} \right) (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s)) + \left(-\frac{(\lambda_1(s))^2}{\lambda_1'(s)} \right) (\lambda_1(s) + s\lambda_1'(s)) + 0}{(\lambda_1'(s))^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak $M = M(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon parametresi $\rho_1(s) = 0$ olduğu için açılabilir bir yüzeydir.

Özel olarak $\lambda_1(s) = s$ alınırsa, $M = M(s, t)$ yüzeyi

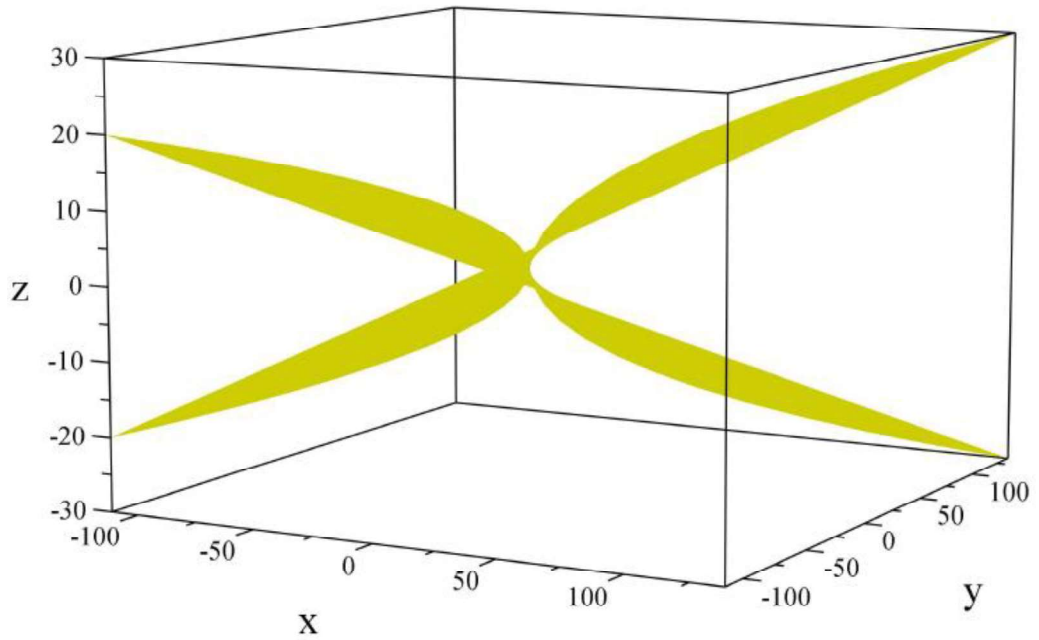
$$M(s, t) = \left(\frac{s^2}{2} + 1 + ts^2, \frac{s^2}{2} - 1 + ts^2, s + ts \right) \quad (5.41)$$

şeklinde ifade edilir. Bu yüzeyin striksiyon çizgisi ise

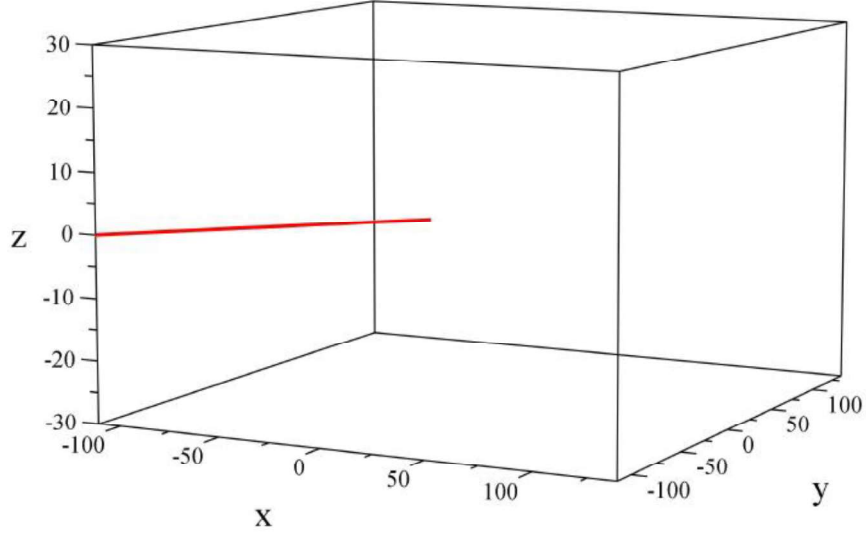
$$\sigma_1(s) = \left(1 - \frac{s^2}{2}, -1 - \frac{s^2}{2}, 0 \right) \quad (5.42)$$

olarak bulunur.

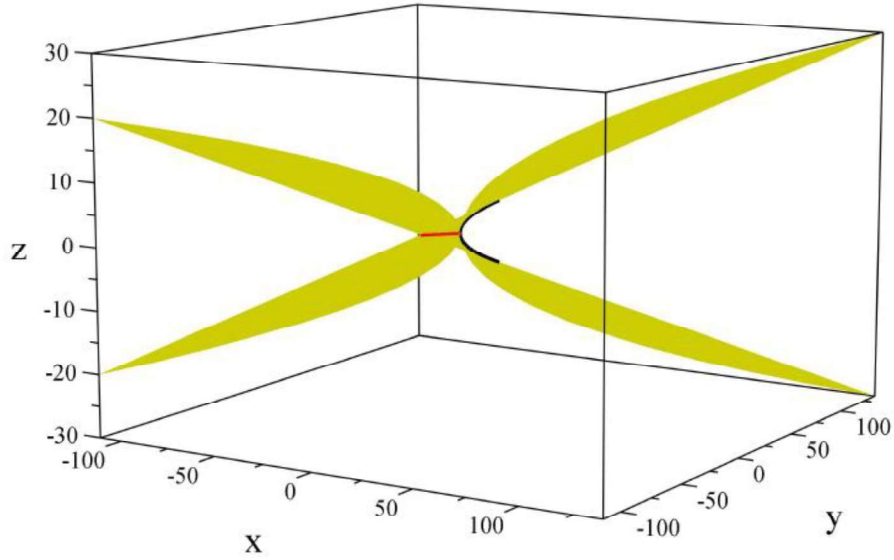
$M = M(s, t)$ yüzeyi, bu yüzeyin striksiyon çizgisi olan $\sigma_1(s)$ eğrisi ve dayanak eğrisi $\alpha(s)$ ' nin grafikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 5. $M = M(s, t)$ Yüzeyi



Şekil 6. $M = M(s, t)$ Yüzeyinin Striksion Çizgisi



Şekil 7. $\alpha(s)$ Eğrisi (Siyah), $M = M(s, t)$ Yüzeyi (Sarı) ve $M = M(s, t)$ Yüzeyinin Striksion Çizgisi (Kırmızı)

5.2. Asli Normal Yönüyle Üretilen Yüzeyler

Bu alt bölümde taban (üreteç) eğrisi $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo null eğrisi olan ve üreteç doğruları ise α pseudo null eğrisinin asli normal vektör alanı \mathbf{N} ile aynı yönlü olan regle yüzeyler incelenmiştir. Bu durumda $\lambda_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere bu yüzey;

$$M^2(s, t) = \alpha(s) + t\lambda_2(s)\mathbf{N}(s) \quad (5.43)$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir.

Teorem 5.9. $M^2(s, t)$ yüzeyi singüler bir yüzeydir.

İspat: $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları için öncelikle $\frac{\partial M^2}{\partial s}$, $\frac{\partial M^2}{\partial t}$ kısmı türevleri bulunur. Bu kısmı türevler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\partial M^2(s, t)}{\partial s} = \mathbf{T}(s) + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\mathbf{N}(s), \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial M^2(s, t)}{\partial t} = \lambda_2(s)\mathbf{N}(s). \quad (5.45)$$

(5.44) ve (5.45) eşitlikleri kullanılarak $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial s} \right\rangle_L \\ &= \langle \mathbf{T}(s) + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &\quad + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= 1, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= \langle \mathbf{T}(s) + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\mathbf{N}(s), \lambda_2(s)\mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= (\lambda_2(s))\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L + (t\lambda'_2(s) + t\lambda_2(s)\tau(s))\lambda_2(s)\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned}
G(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial M^2(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\
&= \langle \lambda_2(s) \mathbf{N}(s), \lambda_2(s) \mathbf{N}(s) \rangle_L \\
&= (\lambda_2(s))^2 \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_L \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.48}$$

olarak bulunur.

(5.46), (5.47) ve (5.48) eşitliklerinden

$$EG - F^2 = 0 \tag{5.49}$$

olduğu görülür. (5.49) eşitliğine göre $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğu görülür.

Teorem 5.10. $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyi silindirik bir yüzeydir.

İspat: $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyi (5.1) eşitliğine göre yeniden parametrize edilirse

$$e(s) = \lambda_2(s) \mathbf{N}(s) \tag{5.50}$$

$$e'(s) = \lambda_2'(s) \mathbf{N}(s) + \lambda_2(s) \tau(s) \mathbf{N}(s) \tag{5.51}$$

bulunur. (5.50) ve (5.51) vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}
e(s) \times_L e'(s) &= (\lambda_2(s) \mathbf{N}(s)) \times_L (\lambda_2'(s) \mathbf{N}(s) + \lambda_2(s) \tau(s) \mathbf{N}(s)) \\
&= (s) \lambda_2'(s) (\mathbf{N}(s) \times_L \mathbf{N}(s)) + (\lambda_2(s))^2 \tau(s) (\mathbf{N}(s) \times_L \mathbf{N}(s)) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

olarak bulunur. (5.52) eşitliğinden $M^2 = M^2(s, t)$ yüzeyi silindirik bir yüzey olduğu görülür.

Örnek 5.2. Örnek 4.3'te verilen $\alpha(s)$ eğrisinin asli normalinin ürettiği yüzey $\omega = \omega(s, t)$ ile gösterilsin. $\lambda_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\omega(s, t) = \alpha(s) + t \lambda_2(s) \mathbf{N}(s) \quad (5.53)$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir. Bu parametrik gösterimde $\alpha(s)$ eğrisi ve bu eğrinin asli normal vektörü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \omega(s, t) &= \left(\frac{s^2}{2}, -s, \frac{s^2}{2} \right) + t \lambda_2(s) (1, 0, 1) \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + t \lambda_2(s), -s, \frac{s^2}{2} + t \lambda_2(s) \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

elde edilir. $\omega = \omega(s, t)$ yüzeyinin kısmi türev vektörleri

$$\frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s} = \left(s + t \lambda_2'(s), -1, s + t \lambda_2'(s) \right), \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial \omega(s, t)}{\partial t} = \left(\lambda_2(s), 0, \lambda_2(s) \right). \quad (5.56)$$

olarak bulunur. (5.55) ve (5.56) eşitlikleri yardımıyla 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s} \right\rangle_L \\ &= - \left(s + t \lambda_2'(s) \right)^2 + (-1)^2 + \left(s + t \lambda_2'(s) \right)^2 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$F(s, t) = \left\langle \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(s + t \lambda_2'(s)\right)(\lambda_2(s)) + (-1)(0) + \left(s + t \lambda_2'(s)\right)(\lambda_2(s)) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
G(s, t) &= \left\langle \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\
&= -(\lambda_2(s))^2 + (0)^2 + (\lambda_2(s))^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.59}$$

olarak bulunur. Bulunan (5.57), (5.58) ve (5.59) eşitlikleri kullanılarak

$$EG - F^2 = 0 \tag{5.60}$$

olarak bulunur.

(5.60) eşitliğinden göre $\omega = \omega(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğu anlaşılır.

(5.50) eşitliğinden

$$e(s) = (\lambda_2(s), 0, \lambda_2(s)) \tag{5.61}$$

olarak bulunur. (5.61) vektörün türevi

$$e'(s) = (\lambda_2'(s), 0, \lambda_2'(s)) \tag{5.62}$$

olarak bulunur.

(5.61) ve (5.62) de bulunan vektörlerin Lorentz vektörel çarpımı

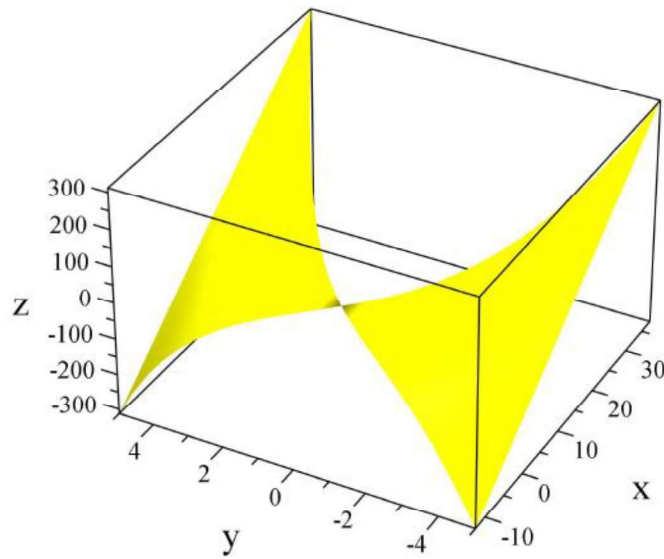
$$\begin{aligned}
e(s) \times_L e'(s) &= \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda_2(s) & 0 & \lambda_2(s) \\ \lambda_2'(s) & 0 & \lambda_2'(s) \end{vmatrix} \\
&= -e_1 \left((0)(\lambda_2'(s)) - (\lambda_2(s))(0) \right) \\
&\quad -e_2 \left((\lambda_2(s))(\lambda_2'(s)) - (\lambda_2(s))(\lambda_2'(s)) \right) \\
&\quad +e_3 \left((\lambda_2(s))(0) - (0)(\lambda_2'(s)) \right) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

elde edilir. Buradan $\omega = \omega(s, t)$ yüzeyi silindirik olan bir yüzey olduğu görülür.

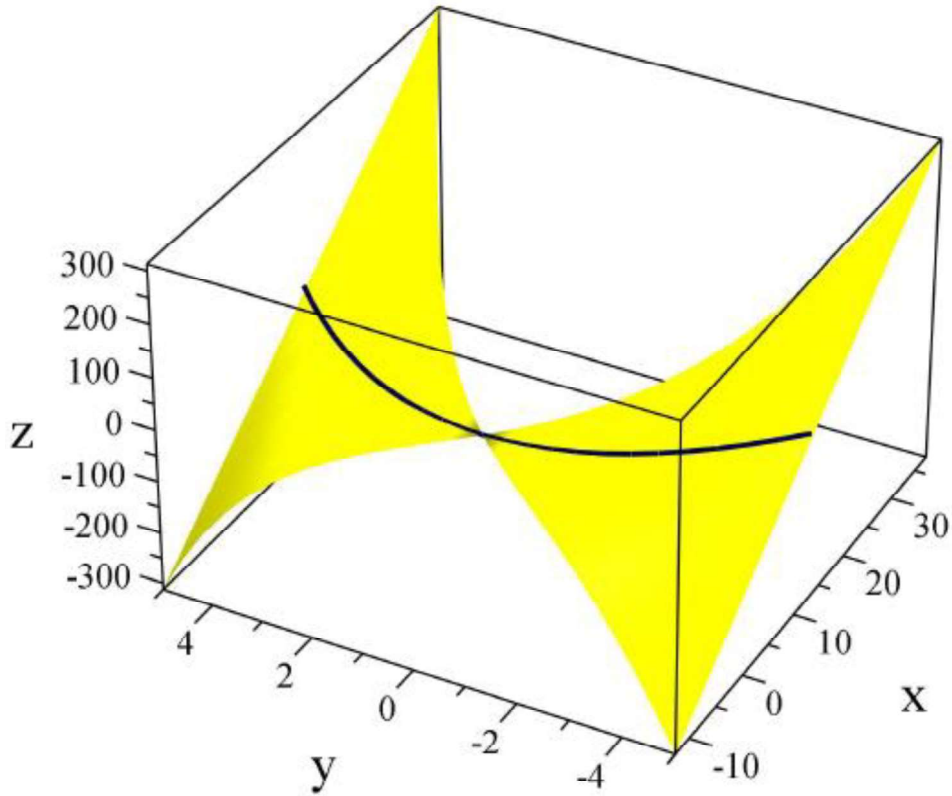
$\omega = \omega(s, t)$ yüzeyi silindirik bir yüzey olduğu için; bu yüzeyin striksiyon çizgisi ve dağılma parametresi yoktur. Özel olarak $\lambda_2(s) = s$ alınırsa $\omega = \omega(s, t)$ yüzeyi

$$\omega(s, t) = \left(\frac{s^2}{2} + t s, -s, \frac{s^2}{2} + t s \right) \tag{5.64}$$

olarak bulunur. $\omega = \omega(s, t)$ yüzeyi ve bu yüzeyin dayanak eğrisi $\alpha(s)$ ' nin grafikleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 8. $\omega = \omega(s, t)$ Yüzeyi



Şekil 9. $\alpha(s)$ Eğrisi (Siyah) ve $\omega = \omega(s, t)$ Yüzeyi (Sarı)

5.3. Binormal Yönüyle Üretilen Yüzeyler

Bu alt bölümde taban eğrisi $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ pseudo null eğri olan ve üreteç doğruları ise α pseudo null eğrisinin binormal vektör alanı \mathbf{B} ile aynı yönlü olan regle yüzeyler incelenmiştir. Bu durumda $\lambda_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere bu yüzey

$$M^3(s, t) = \alpha(s) + t\lambda_3(s)\mathbf{B}(s) \quad (5.65)$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir.

Teorem 5.11. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyi singüler bir yüzeydir.

İspat: $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğunu ispatlamak için $EG - F^2 = 0$ olduğunu göstermek gerekir. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin kısmi türev vektörleri

$$\frac{\partial M^3(s, t)}{\partial s} = (1 - t\lambda_3(s))\mathbf{T}(s) + (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))\mathbf{B}(s), \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial M^3(s, t)}{\partial t} = \lambda_3(s)\mathbf{B}(s) \quad (5.67)$$

olarak bulunur. (5.66) ve (5.67) eşitlikleri yardımıyla $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin 1.temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial s} \right\rangle_L \\ &= \langle (1 - t\lambda_3(s))\mathbf{T}(s) + (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))\mathbf{B}(s), (1 - t\lambda_3(s))\mathbf{T}(s) + \\ &\quad (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))\mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &= (1 - t\lambda_3(s))^2 \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + 2(1 - t\lambda_3(s))(t\lambda_3'(s) - \\ &\quad t\lambda_3(s)\tau(s)) \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_L + (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))^2 \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &= (1 - t\lambda_3(s))^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \left\langle \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\ &= \langle (1 - t\lambda_3(s))\mathbf{T}(s) + (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))\mathbf{B}(s), \lambda_3(s)\mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &= (1 - t\lambda_3(s))\lambda_3(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L + (t\lambda_3'(s) - t\lambda_3(s)\tau(s))\lambda_3(s) \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$G(s, t) = \left\langle \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial M^3(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \lambda_3(s)\mathbf{B}(s), \lambda_3(s)\mathbf{B}(s) \rangle_L \\
&= (\lambda_3(s))^2 \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_L \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.70}$$

olarak bulunur. (5.68), (5.69) ve (5.70) eşitlikleri kullanılarak

$$EG - F^2 = 0 \tag{5.71}$$

olduğu görülür. (5.71) eşitliğine göre $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğu görülür.

Teorem 5.12. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir yüzeydir.

İspat: $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyi (5.1) eşitliğine göre yeniden parametrize edilirse

$$e(s) = \lambda_3(s)\mathbf{B}(s) \tag{5.72}$$

$$e'(s) = \lambda_3'(s)\mathbf{B}(s) - \lambda_3(s)\mathbf{T}(s) - \lambda_3(s)\tau(s)\mathbf{B}(s) \tag{5.73}$$

bulunur. (5.72) ve (5.73) de bulunan vektörlerin Lorentz vektörel olarak çarpımı

$$e(s) \times_L e'(s) = (\lambda_3(s)\mathbf{B}(s)) \times_L (\lambda_3'(s)\mathbf{B}(s) - \lambda_3(s)\mathbf{T}(s) - \lambda_3(s)\tau(s)\mathbf{B}(s))$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_3(s)\lambda_3'(s)(\mathbf{B}(s) \times_L \mathbf{B}(s)) - (\lambda_3(s))^2(\mathbf{B}(s) \times_L \mathbf{T}(s)) \\
&\quad - (\lambda_3(s))^2(\mathbf{B}(s) \times_L \mathbf{B}(s))
\end{aligned}$$

$$= -(\lambda_3(s))^2 \mathbf{B}(s) \tag{5.74}$$

olarak bulunur. $e(s) \times_L e'(s) \neq \vec{0}$ olduğu için $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir yüzeydir.

Teorem 5.13. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi

$$\sigma_3(s) = \alpha(s) + B(s) \quad (5.75)$$

dir.

İspat: (5.72) ve (5.73) vektörleri (5.5)'de yerine yazılırsa $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned} \sigma_3(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle T(s), (\lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s)) \rangle_L \lambda_3(s)B(s)}{|\langle \lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s), \lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s) \rangle_L|} \\ &= \alpha(s) + \frac{\lambda_3(s)}{(\lambda_3(s))^2} \lambda_3(s)B(s) \\ &= \alpha(s) + B(s) \end{aligned} \quad (5.76)$$

olarak bulunur.

Teorem 5.14. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon parametresi sıfırdır.

İspat: (5.75) eşitliğinin türevi

$$\sigma_3'(s) = -\tau(s)B(s) \quad (5.77)$$

olarak bulunur. (5.75) ve (5.77) eşitlikleri (5.5)'de yerine yazılırsa $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon parametresi

$$\begin{aligned} \rho_3(s) &= \frac{\langle (-\tau(s)B(s)) \times_L \lambda_3(s)B(s), (\lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s)) \rangle_L}{\langle \lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s), \lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s) \rangle_L} \\ &= \frac{\langle (-\tau(s)\lambda_3(s)\langle B(s), B(s) \rangle_L), (\lambda_3'(s)B(s) - \lambda_3(s)T(s) - \lambda_3(s)\tau(s)B(s)) \rangle_L}{(\lambda_3(s))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle \vec{0}, (\lambda_3'(s)\mathbf{B}(s) - \lambda_3(s)\mathbf{T}(s) - \lambda_3(s)\tau(s)\mathbf{B}(s)) \rangle_L}{(\lambda_3'(s))^2} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.78}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.2. $M^3 = M^3(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon (dağılma) parametresi $\rho_3(s) = 0$ olduğu için Teorem 5.4'e göre açılabilir bir yüzeydir.

Örnek 5.3. Örnek 4.2'de verilen $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü ile ürettiği yüzeye $\varphi = \varphi(s, t)$ ile gösterilsin. $\lambda_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere bu yüzey

$$\varphi(s, t) = \alpha(s) + t \lambda_3(s) \mathbf{B}(s) \tag{5.79}$$

parametrik gösterimi ile ifade edilir. Bu parametrik gösterimde $\alpha(s)$ eğrisi ve bu eğrinin binormal vektörü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi(s, t) &= (e^s, e^s, s) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s} - 1}{2e^s}, \frac{1 - e^{2s}}{2e^s}, -1 \right) \\
&= \left(e^s + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s} - 1}{2e^s} \right), e^s + t \lambda_3(s) \left(\frac{1 - e^{2s}}{2e^s} \right), -t \lambda_3(s) \right)
\end{aligned} \tag{5.80}$$

olarak bulunur. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin kısmi türev vektörleri

$$\frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} = \left(e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{-e^{2s} - 1}{2e^s} \right) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s} + 1}{2e^s} \right), e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{1 - e^{2s}}{2e^s} \right) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s} - 1}{2e^s} \right), -t \lambda_3'(s) \right) \tag{5.81}$$

$$\frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} = \left(\lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s} - 1}{2e^s} \right), \lambda_3(s) \left(\frac{1 - e^{2s}}{2e^s} \right), -\lambda_3(s) \right) \tag{5.82}$$

olarak bulunur.

(5.81) ve (5.82) eşitlikleri yardımıyla $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 E(s, t) &= \left\langle \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} \right\rangle_L \\
 &= - \left(e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}+1}{2e^s} \right) \right)^2 + \left(e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) + \right. \\
 &\quad \left. t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right)^2 + (-t \lambda_3'(s))^2 \\
 &= (1 - t\lambda(s))^2, \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(s, t) &= \left\langle \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\
 &= - \left(e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}+1}{2e^s} \right) \right) \left(\lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right) \\
 &\quad + \left(e^s + t \lambda_3'(s) \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) + t \lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right) \left(\lambda_3(s) \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) \right) \\
 &\quad + (-t \lambda_3'(s)) (-\lambda_3(s)) \\
 &= 0, \tag{5.84}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(s, t) &= \left\langle \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} \right\rangle_L \\
 &= - \left(\lambda_3(s) \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right)^2 + \left(\lambda_3(s) \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) \right)^2 + (-\lambda_3(s))^2 \\
 &= 0 \tag{5.85}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (5.83), (5.84) ve (5.85) eşitliklerinden

$$EG - F^2 = 0 \tag{5.86}$$

olarak bulunur. (5.86) eşitliğine göre $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin singüler bir yüzey olduğu anlaşılır.

(5.1) eşitliğinden

$$e(s) = \left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s}, \lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s}, -\lambda_3(s) \right) \quad (5.87)$$

olarak bulunur. (5.87) vektörün türevi

$$e'(s) = \left(\lambda_3'(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}+1}{2e^s}, \lambda_3'(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-1-e^{2s}}{2e^s}, -\lambda_3'(s) \right) \quad (5.88)$$

olarak bulunur. (5.87) ve (5.88) vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} e(s) \times_L e'(s) &= \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} & \lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} & -\lambda_3(s) \\ \lambda_3'(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}+1}{2e^s} & \lambda_3'(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-1-e^{2s}}{2e^s} & -\lambda_3'(s) \end{vmatrix} \\ &= -e_1 \left(\lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} (-\lambda_3'(s)) - (-\lambda_3(s)) \left(\lambda_3'(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-1-e^{2s}}{2e^s} \right) \right) \\ &\quad - e_2 \left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} (-\lambda_3'(s)) - (-\lambda_3(s)) \left(\lambda_3'(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}+1}{2e^s} \right) \right) \\ &\quad + e_3 \left(\left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \left(\lambda_3'(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-1-e^{2s}}{2e^s} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) \left(\lambda_3'(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}+1}{2e^s} \right) \right) \\ &= -e_1 \left((\lambda_3(s))^2 \frac{-1-e^{2s}}{2e^s} \right) - e_2 \left((\lambda_3(s))^2 \frac{-e^{2s}+1}{2e^s} \right) + e_3 \left((\lambda_3(s))^2 \right) \\ &= -(\lambda_3(s))^2 \left(\frac{-1-e^{2s}}{2e^s}, \frac{-e^{2s}+1}{2e^s}, -1 \right) \end{aligned} \quad (5.89)$$

olarak elde edilir. $e(s) \times_L e'(s) \neq \vec{0}$ olduğu için; $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi silindirik olmayan bir yüzeydir.

$\varphi = \varphi(s, t)$ silindirik olmayan bir yüzey olduğu için striksiyon eğrisi vardır. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi $\sigma_3(s)$ ile gösterilsin.

(5.87) ve (5.88) vektörleri (5.5) denkleminde yerine yazılarak $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\begin{aligned} \sigma_3(s) &= (e^s, e^s, 1) - \frac{\langle (e^s, e^s, 1), \left(\lambda_3'(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}+1}{2e^s}, \lambda_3'(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s) \frac{-1-e^{2s}}{2e^s}, -\lambda_3'(s) \right) \rangle_L}{\|e'(s)\|^2} (e(s)) \\ &= (e^s, e^s, 1) - \frac{-\lambda_3(s) \left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s}, \lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s}, -\lambda_3(s) \right)}{(\lambda_3(s))^2} \\ &= (e^s, e^s, 1) + \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s}, \frac{1-e^{2s}}{2e^s}, -1 \right) = \left(\frac{e^{2s}-1}{2e^s}, \frac{1+e^{2s}}{2e^s}, 0 \right) \end{aligned} \quad (5.90)$$

olarak bulunur. (5.90) eşitliğinin türevi

$$\sigma_3'(s) = \left(\frac{e^{2s}+1}{2e^s}, \frac{-1+e^{2s}}{2e^s}, 0 \right) \quad (5.91)$$

olarak bulunur. Distribüsyon parametresinin formülünde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma_3'(s) \times_L e(s) &= \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{e^{2s}+1}{2e^s} & \frac{-1+e^{2s}}{2e^s} & 0 \\ \lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} & \lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} & -\lambda_3(s) \end{vmatrix} \\ &= -e_1 \left(\left(\frac{-1+e^{2s}}{2e^s} \right) (-\lambda_3(s)) - (0) \left(\lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) \right) \\ &\quad - e_2 \left(\left(\frac{e^{2s}+1}{2e^s} \right) (-\lambda_3(s)) - (0) \left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right) \\ &\quad + e_3 \left(\left(\frac{e^{2s}+1}{2e^s} \right) \left(\lambda_3(s) \frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right) - \left(\frac{-1+e^{2s}}{2e^s} \right) \left(\lambda_3(s) \frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right) \right) \\ &= \left(-(\lambda_3(s)) \left(\frac{-1+e^{2s}}{2e^s} \right), -(\lambda_3(s)) \left(\frac{e^{2s}+1}{2e^s} \right), 0 \right) \end{aligned} \quad (5.92)$$

olarak bulunur. Bulunan değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \rho_3(s) &= \frac{\langle (-\lambda_3(s))\left(\frac{-1+e^{2s}}{2e^s}\right), -(\lambda_3(s))\left(\frac{e^{2s}+1}{2e^s}\right), 0, \left(\lambda_3'(s)\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} + \lambda_3(s)\frac{-e^{2s}+1}{2e^s}, \lambda_3'(s)\frac{1-e^{2s}}{2e^s} + \lambda_3(s)\frac{-1-e^{2s}}{2e^s}, -\lambda_3'(s)\right) \rangle_L}{\langle e'(s), e'(s) \rangle_L} \\ &= \frac{0}{(\lambda_3(s))^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.93)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin distribüsyon parametresi $\rho_3(s) = 0$ olduğu için Teorem 5.4'e göre açılabilir bir yüzeydir.

Özel olarak $\lambda_3(s) = s$ alınırsa $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi

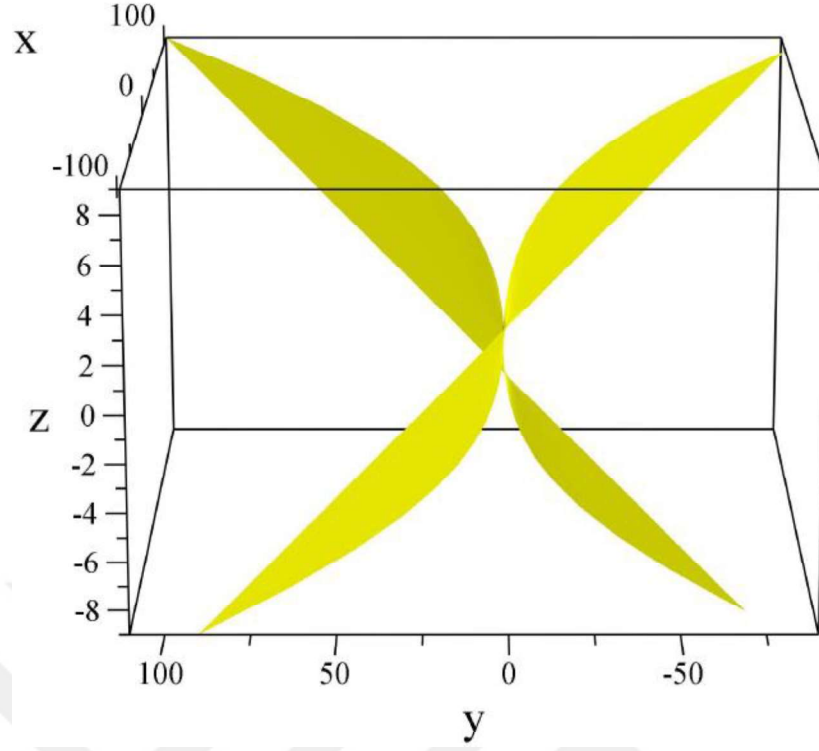
$$\varphi(s, t) = \left(e^s + t s \left(\frac{-e^{2s}-1}{2e^s} \right), e^s + t s \left(\frac{1-e^{2s}}{2e^s} \right), -t s \right) \quad (5.94)$$

olarak bulunur. Striksiyon çizgisi ise

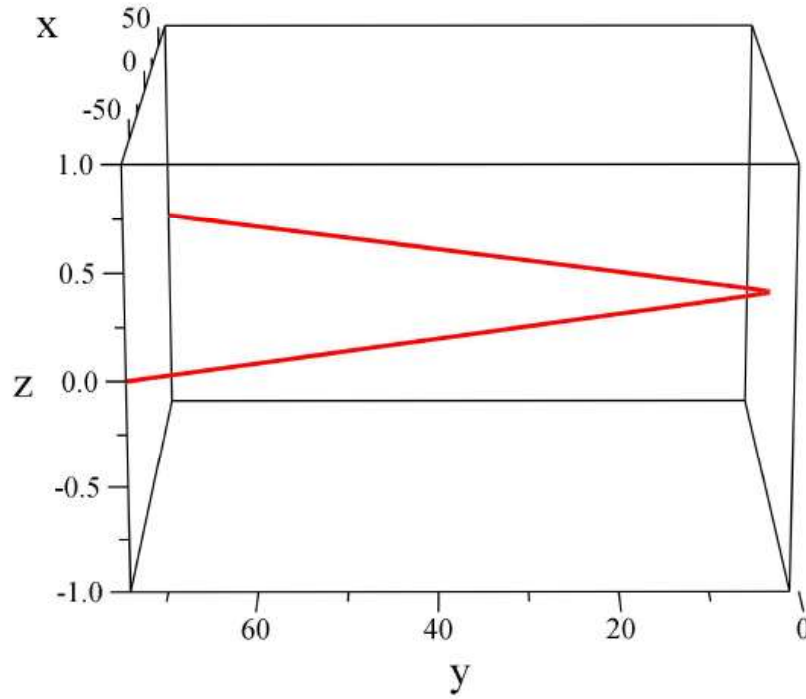
$$\sigma_3(s) = \left(\frac{e^{2s}-1}{2e^s}, \frac{1+e^{2s}}{2e^s}, 0 \right) \quad (5.95)$$

şeklindedir.

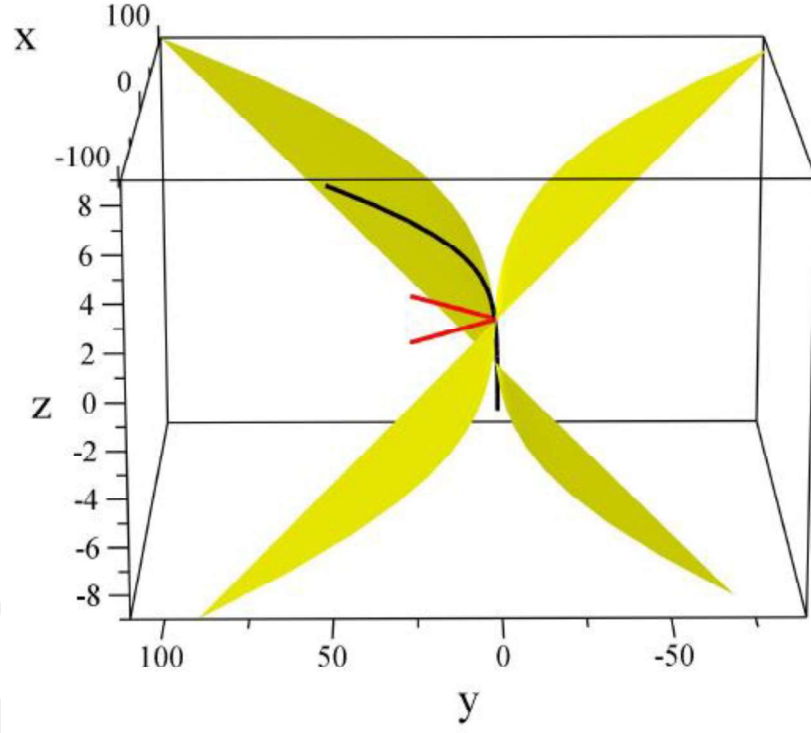
$\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi ve bu yüzeyin striksiyon çizgisi $\sigma_3(s)$ ile dayanak eğrisi $\alpha(s)$ eğrisinin grafikleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 10. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi



Şekil 11. $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyinin striksiyon çizgisi



Şekil 12. $\alpha(s)$ eğrisi (siyah), $\varphi = \varphi(s, t)$ yüzeyi (sarı), $\varphi = \varphi(s, t)$ Yüzeyinin Striksiyon Çizgisi (Kırmızı)

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Pseudo null eğrilerin teğet, asli normal ve binormal yönüyle üretilen yüzeyler singüler yüzeylerdir. Bu yüzeylerin karakterlerinin üreteç doğrularındaki sabitten farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlarının seçimine bağlı olduğu görülmüştür. Pseudo null eğrilerin teğet ve binormal yönüyle üretilen yüzeyler silindirik olmayan yüzeylerdir. Lakin pseudo null eğrilerin asli normal yönüyle üretilen yüzeyler silindirik yüzeylerdir. Pseudo null eğrilerin teğet ve binormal yönüyle üretilen yüzeylerin dağılma parametresi sıfır çıktığı için pseudo null eğrilerin teğet ve binormal yönüyle üretilen yüzeyler açılabilir yüzeylerdir. Ancak pseudo null eğrilerin asli normal yönüyle üretilen yüzeyler silindirik olmadığı için striksiyon ve dağılma parametresi incelenememiştir.

6.2 Öneriler

Pseudo null eğriler ve pseudo null eğrilerin teğet, asli normal ve binormal yönüyle üretilen yüzeyleri incelenmeden önce null eğriler ve null eğrilerin teğet, binormal ve asli normal yönüyle üretilen yüzeyleri incelemek bu konuyu anlamaya ve bu konu üzerinde çalışmaya kolaylık sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Del Amor, J., Giménez, Á. and Lucas, P., 2017, Integrability Aspects of the Vortex Filament Equation for Pseudo-Null Curves, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(06), 1750090.
- Erdoğan, M. ve Yavuz, A., 2019, Minkowski Uzayında Sabit Eğrilikli İvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri için Bazı Karakterizasyonlar . *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 19 (3), 605-614.
- Grbović, M., İlarıslan, K. and Nešović, E., 2013, On Null and Pseudo Null Mannheim Curves in Minkowski 3-Space, *Journal of Geometry*, 105, 177–183 (2013).
- Grbović, M., and Nešović, E., 2016, On Bäcklund Transformation and Vortex Filament Equation For Pseudo Null Curves in Minkowski 3-Space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(06), 1650077.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2000, Diferensiyel Geometri. Fen Fakóltesi, Cilt 1,2, Ankara
- İlarıslan, K. and Nešović, E., 2008, Some Characterizations of Null, Pseudo Null and Partially Null Rectifying Curves in Minkowski Space-Time, *Taiwanese Journal Mathematics* 12 (5), 1035 - 1044.
- Jeritslev, C. P. B., 2011, The Möbius Strip, License Thesis, Technical University of Denmark Department of Applied Mathematics and Computer Science (DTU COMPUTE) Danimarka, 13-14
- Kaymanlı, G. U., 2020, Characterization of The Evolute Offset of Ruled Surfaces With B-Darboux Frame. *Journal of New Theory*, (33), 50-55.
- Kumsal, H., 2017, 4-Boyutlu Yarı-Riemann Uzayında Eğriler, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elâzığ, 1-2
- Kim, Y., H. and Yoon, D. W., 2004, Classification of Ruled Surfaces in Minkowski 3-Spaces, *Journal of Geometry and Physics*, 49(1), 89-100.
- Kim, Y., H. and Yoon, D., W., 2007, On Non-Developable Ruled Surfaces In Lorentz-Minkowski 3-Spaces, *Taiwanese Journal Mathematics* 11 (1), 197 - 214.
- López, R., Milin Šipuš, Ž., Primorac Gajčić, L. and Protrka, I., 2021, Involutes of Pseudo-Null Curves in Lorentz–Minkowski 3-Space, *Mathematics*, 9, 1256.
- Nešović, E., Öztürk, U., Öztürk, E. B. and İlarıslan, K., 2016, On Ruled Surfaces With Pseudo Null Base Curve in Minkowski 3-Space, *International Electronic Journal of Geometry*, 10-14
- Nešović, E., Öztürk, U. and Öztürk, E., B., K., 2021, Some Characterizations of Pseudo Null Isophotic Curves in Minkowski 3-Space, *Journal of Geometry*, 112, 29.

- Nolasco, B. and Pacheco, R., 2017, Evolutes of Plane Curves and Null Curves in Minkowski 3-Space, *Journal of Geometry*, 108(1) 195-214.
- Özdemir, Z., 2019, Pseudo Null Curve Variations for Bishop Frame in 3D Semi-Riemannian Manifold, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(03), 1950043.
- Öztürk, U., 2017, On Surfaces with Common Pseudo Null Geodesic in Minkowski 3-Space, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* , 66 (1) , 229-241.
- Öztürk, U. and Nešović, E., 2016, On Pseudo Null and Null Cartan Darboux Helices in Minkowski 3-Space, *Kuwait Journal of Science*, 43(2).
- Qian, J., Liu, J., Tian, X. and Kim, Y. H., 2020, Structure Functions of Pseudo Null Curves in Minkowski 3-Space. *Mathematics*, 8, 75.
- Sabuncuoğlu, A., 2010, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınevi, Ankara, 1-83.
- Salur Y., 2019, *Rektifiyan Açılabilir Yüzeylerin Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 9-11.
- Aysel T. V., and Hacısalioglu, H. H., 1998, Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space-II, *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 22: No. 1, Article 3.
- Ünlütürk, Y., Körpınar, T. and Çimdiker, M., 2020, On k -type Pseudo Null Slant Helices Due to the Bishop Frame in Minkowski 3-Space E_1^3 , *AIMS Mathematics*, 2019, 5(1): 286-299.
- Walrave, J., 1995, *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, Doctoral Dissertation, K.U. LEUVEN Faculteit Der Wetenschappen, 1-9.
- Yaylı, Y., 2000, On the Motion of the Frenet Vectors and Spacelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space, *Mathematical and Computational Applications*, 5(1), 49-55.
- Yavuz, A., 2022, Some New Properties of Surfaces Generated by Null Cartan Curves, *International Electronic Journal Of Geometry*, 117-126.
- Yüce, S., 2017, *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi, Ankara, 156-302.