T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ TİP JAKİMOVSKİ-LEVİATAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2024
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY tarafından hazırlanan "Yeni Tip Jakimovski-Leviatan Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri" adlı tez çalışması 28/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Sedat PAK	…………………..
Danışman	
Dr. Öğrt. Üyesi Ümit KARABIYIK	…………………..
Üye	
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY

Tarih: 24.07.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YENİ TİP JAKİMOVSKİ-LEVİATAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Ümit KARABIYIK

2024, 51 Sayfa

Jüri
Dr. Öğrt. Üyesi Ümit KARABIYIK
Prof. Dr. Sedat PAK
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışmanın temelini oluşturan konu hakkında yapılan çalışmalara dair bilgi verilmiştir. İkinci bölümde kaynak araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde, tezde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, son dönemlerde tanıtılan Jakimovski-Leviatan operatörleri üzerine yapılan çalışmalar belirli koşulları sağlayan fonksiyonlar temelinde genişletilmiş ve elde edilen operatörlerin özellikleri ile yakınsama hızları farklı uzaylarda incelenmiştir. Son bölümde ise, bu yeni operatörlerin yerel yakınsama oranları değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Jakimovski-Leviatan operatörleri, Lineer pozitif operatörler, Ağırlıklı süreklilik modülü, Yakınsama oranı, Voronovskaya teoremi.

ABSTRACT

MS THESIS

APPROXİMATİON PROPERTİES OF NEW TYPE JAKİMOVSKI-LEVIATAN OPERATORS

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Dr. Öğretim Üyesi Ümit KARABIYIK

2024, 51 Pages

Jury
Dr. Öğrt. Üyesi Ümit KARABIYIK
Prof. Dr. Sedat PAK
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, information about the studies on the subject that forms the basis of the study is given. . In the second part, source research was conducted. In the third chapter, the definitions and theorems to be used in the thesis are explained. In the fouth chapter, the recently introduced Jakimovski-Leviatan operators are extended on the basis of functions satisfying certain conditions and the properties and convergence rates of the obtained operators are analysed in different spaces. In the last section, the local convergence rates of these new operators are evaluated.

Keywords: Jakimovski-Leviatan operators, Linear positive operators, Weighted continuity module, Convergence rate, Voronovskaya theorem.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı tez çalışması olarak sunulmuştur. Bu çalışma esnasında kıymetli desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Ümit KARABIYIK'a teşekkür ederim.

Mehmet KÜÇÜKGÜNAY
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$L_n(f;x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$C[a,b]$	Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$\Vert f \Vert_{C[a,b]}$	C$[a,b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm.
$f_n(x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n(x)$ Ã $f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü.
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar.
$B_n(f;x)$	Bernstein Polinomları.
$S_n(f;x)$	Szasz operatörleri.
$A_n(f;x)$	Szasz-Charlier operatörleri
$S_n^*(f;\mathrm{x})$	Charlier polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szasz Operatörlerinin Kantroviç tipi genelleşmesi.
$C_{x^2}^*[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tanımlı $\lim\limits_{\lvert x \rvert \to \infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı.
$K_2(f,\delta)$	Peetre-K fonksiyoneli.
$\Omega(f;\delta)$	f fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi kuramı, matematiğin çeşitli alanlarıyla yakından ilişkilidir ve karmaşık veya kullanımı zor olan fonksiyonların daha basit bir şekilde temsil edilmesini sağlar. Bu sayede, bir fonksiyonu daha anlaşılır ve kullanışlı olan diğer fonksiyon türleriyle ifade etmeyi amaçlar. Bu tür bir temsil, fonksiyon hakkında daha kolay bir anlayış sağlar.

Yaklaşım teorisindeki ilk sonuç, 1885 yılında K. Weierstrass tarafından ortaya konan "Birinci Weierstrass Yaklaşım Teoremi"ne dayanır. Bu teorem, her sürekli fonksiyonun bir polinom tarafından istenilen derecede yakından yaklaşılabileceğini belirtir ve yaklaşım teorisinin temel taşlarından biridir.

Weierstrass'ın çalışmaları, ilerleyen yıllarda diğer matematikçilerin de ilgisini çekmiş ve bu alandaki araştırmaları hızlandırmıştır. 20. yüzyılın başlarında, Stone-Weierstrass teoremi gibi daha genel sonuçlar ortaya konmuştur. Bu teorem, Weierstrass teoreminin genelleştirilmiş bir versiyonudur ve sürekli fonksiyonların çeşitli alt uzaylarda polinomlarla yaklaşılabileceğini gösterir.

Yaklaşım teorisi, aynı zamanda sayısal analiz ve hesaplamalı matematikte de önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle bilgisayarların hesaplama gücünün artmasıyla birlikte, yaklaşım yöntemleri karmaşık problemleri çözmede vazgeçilmez araçlar haline gelmiştir. İnterpolasyon, spline fonksiyonları, Fourier serileri gibi teknikler, çeşitli mühendislik ve bilimsel hesaplamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli uygulama alanı da optimizasyon ve kontrol teorisidir. Fonksiyonların yakından taklit edilmesi, optimizasyon problemlerinin daha etkili bir şekilde çözülmesine yardımcı olur. Aynı zamanda, kontrol teorisinde sistemlerin davranışlarının tahmin edilmesi ve optimize edilmesi için yaklaşım yöntemleri kullanılmaktadır.

Sonuç olarak, yaklaşım teorisi hem teorik hem de uygulamalı matematikte geniş bir yelpazede önemli katkılar sağlamıştır. Bu tezde, yaklaşım teorisinin temel prensipleri ve bu alandaki bazı modern gelişmeler ele alınacaktır. Özellikle, Jakimovski-Leviatan operatörleri gibi spesifik yaklaşım operatörlerinin analizi ve bu operatörlerin çeşitli fonksiyon sınıflarına uygulanması üzerinde durulacaktır.

Teorem: Her $\mathcal{E} > 0$ sayısı ve her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için $|f(x) - P(x)| < \mathcal{E}$ olacak şekilde $[a, b]$' de tanımlanmış $P(x)$ polinomu bulunabilir (Weierstrass, 1985).

Weierstrass teoreminin ispatı oldukça karmaşık olduğu için birçok matematikçi, daha etkili ve basit bir ispat sunmak için çaba sarf etmiştir. 1912 yılında S.N. Bernstein, Weierstrass'ın bu teoremini basit ve etkili bir şekilde ifade etmiştir. Şimdi aşağıdaki Bernstein operatörünü verelim:

$$B_n\,(f;\,x)\;=\;\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1\,-\,x)^{\,k}f\,\left(\frac{k}{n}\right),f\;\in\;C[0,1],x\;\in\;[0,1],n\;\in\;\mathbb{N}.$$

Weierstrass teoreminin başka bir ifadesi olan ve operatör dizisinin birim operatöre yaklaşımını veren teorem Korovkin teoremi olarak bilinir. Korovkin Teoremi, matematikte önemli bir teoremdir ve Weierstrass Teoremi'nin bir türevidir. Bu teorem, operatör dizilerinin birim operatöre yaklaşımını inceler. Birim operatör, bir vektör uzayındaki her vektörü kendisiyle eşleştiren ve lineer bir operatördür. Korovkin Teoremi, bu tür operatör dizilerinin belirli koşullar altında birim operatöre yakınsadığını ve bu yaklaşımın belirli sınırlar içinde ne kadar doğru olduğunu belirtir. Bu teorem, özellikle matematiksel analiz ve fonksiyonel analizde önemli uygulamalara sahiptir.

Teorem: $\{Ln\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n\,(x)$, $\beta_{\mathrm{n}}\,(x)$, $\gamma_{\mathrm{n}}\,(x)$, $[a,\,b]$ aralığında düzgün biçimde sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olarak;
$[a,\,b]$ aralığındaki her bir x değeri için

$L_n\,(1;\mathrm{x}) = 1 + \alpha\,_n(\mathrm{x})$,

$L_n\,(t;\,x) = x + \beta_n\,(x)$,

$L_n\,(t^2\,;\,x) = x^2 + \gamma_n\,(x)$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda L_nf, $[a,\,b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Burada $[a,\,b]$' de sürekli, a' da sağdan, b ' de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$' de sınırlı bir fonksiyondur (Korovkin, 1960).

Bu iki teorem birçok matematikçi tarafından farklı yönlerden geliştirilmiştir.
1974 yılında A.D. Gadjiev tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}^+$' da tanımlı, sürekli ve sınırsız fonksiyonlar için genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu çalışmalarda $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve her $\forall x\,\in\,I$ için $|f(x)|\;\leq\;Mg(x)$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $C_p(I)$ olarak tanımlanmış ve ağırlıklı uzay olarak adlandırılmıştır. Bu uzay üzerindeki norm;

$$\|f\|_p = \sup_{x \in I} \frac{|f(x)|}{g(x)}$$

eşitliği ile verilmektedir. Daha sonra A. D. Gadjiev ve Aral (2007) tarafından sınırsız aralıklarda w ağırlık fonksiyonuna göre $L_{\mathrm{p,w}}$ [0, ∞) uzayında ağırlıklı Korovkin Teoremi verilmiştir.

Yaklaşım teorisindeki önemli problemlerden biri, bir fonksiyon veya dizi tarafından gerçekleştirilen yaklaşımın hızını belirlemektir. Bir fonksiyonun veya dizinin bir hedefe ne kadar hızlı yaklaştığı, genellikle fonksiyonun veya dizinin davranışını anlamak ve optimize etmek için kritik bir faktördür. Yaklaşım hızının doğru bir şekilde belirlenmesi, matematiksel analizde ve uygulamalarında geniş bir yelpazede önemlidir. Bu, fonksiyonların ve dizilerin pratikte ne kadar etkili olduğunu değerlendirmek için kritik bir adımdır.

$\|f(x) - \varphi n(x)\|_X = \alpha_n \; ve \; lim_{n\to\infty} \; \alpha_n = 0$ ise bu φ_{n} (x)' in $f(x)$' e yaklaştığı zaman hızını gösterir. α_n' in sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırıldığı taktirde bu hızı bulabiliriz.

$0 \leq \alpha_n \leq \beta_{\mathrm{n}}$ ise β_{n} de sıfıra gidiyorsa yukarıdaki eşitsizlik, α_n ' nin β_{n} ' den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzayında β_{n} ' yi süreklilik modülü ile de ifade edebiliriz. Çünkü f' nin süreklilik modülü olan w $(f;\ \delta)$, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

Bu önemli problemin çözümü için 1935 yılında T. Popoviciu, [0,1] aralığında tanımlı ve sürekli bir ff fonksiyonu için, Bernstein polinomlarının yaklaşım hızını süreklilik modülü yardımıyla şu şekilde belirtmiştir:

$|B_{\mathrm{n}}\ (f;\ x) - f(x)| \leq \frac{5}{4}\, w\ (f;\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}})$ olarak belirtmiştir. Bu ifade, Bernstein poligonlarının f fonksiyonuna ne kadar hızlı yaklaştığını göstermektedir.

Lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşımlar teorisi, P.P. Korovkin tarafından ispatlanan bir teoremle önem kazanmıştır. Bu teorem, kolay ve uygulanabilir kriterleri içerir ve lineer pozitif operatörlerle sürekli fonksiyona düzgün yaklaşımın şartlarını belirler. P.P. Korovkin tarafından kanıtlanan bu teorem, lineer pozitif operatörlerle sürekli fonksiyonların düzgün bir şekilde nasıl yaklaşılabileceğini belirleyen önemli ve uygulanabilir kriterleri içerir. Bu teorem, pratikte fonksiyon yaklaşımlarının analizini ve uygulamasını kolaylaştırır. Lineer pozitif operatörlerin kullanımı, fonksiyonların belirli özelliklerini korurken yaklaşımın doğruluğunu artırabilir. Bu teorem, matematiksel analizde ve uygulamalarında lineer pozitif operatörlerin ve yaklaşımların önemini vurgular.

Yukarıda verilen teorem göz önüne alındığında A_{n} dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün biçimde yaklaşması için $\{1,\ t,\ t^2\}$ fonksiyonları için yakınsaklığın sağlanması yeterlidir.

Çalışmanın amacı

Bu tezde, matematik ve optimizasyon problemlerinde kullanılan lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara olan yaklaşım özelliklerini araştırmayı hedefliyoruz. Çalışmamızda, Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yeni bir modifikasyonunu tanıtarak, bu operatörlerin yaklaşım teorisi çerçevesinde önemli bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Operatörün merkezi momentlerini hesaplayarak, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfı fonksiyonları kullanarak operatörün yaklaşım hızını tahmin etmeyi amaçlıyoruz. Ayrıca, bu yeni operatörün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini de analiz edeceğiz. Bu operatörün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızını belirlemeyi ve bunu yaparken ağırlıklı süreklilik modülü ile Peetre-K fonksiyonelinden yararlanmayı amaçlıyoruz. Ayrıca, bir Voronovskaja tipi teorem sunmayı planlıyoruz. Son olarak, yaklaşım hızı ve hata payı hesaplamalarını çeşitli bilgisayar programlama dilleri ile gerçekleştirerek, elde edilen sonuçların matematiksel ve fiziksel yorumlarını yapmayı ve açıklayıcı grafiklerle sunmayı amaçlıyoruz.

Biz bu tezde daha genel olan $\{1,\ \rho,\ \rho^2\}$ fonksiyonlarını test fonksiyonları kabul eden genel lineer pozitif operatörler dizilerinin yakınsaklık şartlarını araştıracağız. ρ fonksiyonu yalnızca test fonksiyonlarını oluşumunda kullanılmıyor bununla beraber operatörün tanımlı olduğu ağırlıklı uzayın yapısını belirlememizi de sağlıyor. Daha sonra, ρ fonksiyonunu kullanarak ağırlıklı uzayda tanımlanan genel süreklilik modülleri aracılığıyla yakınsama hızını belirleyen sonuçlar kanıtlanacaktır. Ayrıca, elde edilen bu sonuçların Jakimovski-Leviatan operatörlerine yönelik uygulamaları da detaylandırılacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu tez kapsamında, yaklaşımlar teorisi alanında yapılan literatür taraması sonucunda lineer pozitif operatörler ve bu operatörlerin temel özelliklerine odaklanan çalışmalar incelenmiştir. Jakimovski-Leviatan operatörleri ve bunların çeşitli fonksiyon uzaylarında yakınsaklık özellikleri üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir. Yaptığımız literatür taramasında Jakimovski - Leviatan operatörünün Chlodowsky tipinin yaklaşım özellikleri, Chlodowsky tipi Durrmeyer Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yakınsama oranı, Jakimovski - Leviatan operatörünün integral tipinin genelleştirmesinin yaklaşım özellikleri, q-Jakimovski - Leviatan operatörünün Chlodowsky tipinin yaklaşım özellikleri, Appell polinomlarını içeren Durrmeyer tipi Jakimovski-Leviatan operatörleri, Jakimovski – Leviatan-Paltanea operatörünün yaklaşım özellikleri, Stancu tipi Jakimovski - Leviatan operatörünün tipinin yaklaşım özellikleri, Sheffer polinomları aracılığıyla tanımlanan Jakimovski-Leviatan tipi Szasz operatörlerinin Stancu tipi genelleştirmesi, birden çok Appell polinomu içeren Kantorovich tipi Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşım özellikleri, Szász-Mirakyan ve Durrmeyer-Chlodowsky operatörlerinin kompozisyonu ile yaklaşım özellikleri gibi çalışmalar yapılmıştır.

Öncelikle Jakimovski-Leviatan operatörlerini tanımlayan A. Jakimovski, D. Leviatan araştırmacıların makaleleri incelenecektir. Lineer pozitif operatörlerin genelleştirmeleri ve bazı yaklaşım özelliklerini inceleyen araştırmacıların makaleleri taranarak çalışmamıza temel oluşturacak kavramlar araştırılacaktır. Çalışmamıza kaynak teşkil edecek olan Korovkin teoremi ile ilgili çalışmalar yapan A. D. Gadziev in makalelerini ve araştırmalarını inceleyeceğiz. Literatürde bu konuyla ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır.

Aşağıda, tezde kullanılan ve konuya katkı sağlayan temel kaynakların bir kısmı özetlenmiştir:

T. Popoviciu'nun 1935 yılında "Mathematica (Cluj)" dergisinde yayımlanan makalesi, matematiksel analiz ve yaklaşım teorisi üzerine temel sonuçları tartışmaktadır. Popoviciu'nun çalışmaları, yaklaşım teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır. S.N. Bernstein'in 1912 yılında "Comm. Soc. Math. Kharkow, Ser." dergisinde yayımlanan çalışması, matematiksel analiz ve yaklaşım teorisi üzerine temel sonuçları içermektedir. Bernstein polinomları, fonksiyonların yaklaşımı konusunda kritik bir araç olarak kabul edilmektedir.

G.G. Lorentz'in 1953 yılında yayımladığı "Bernstein Polinomları" adlı kitabı, Bernstein polinomlarını detaylı bir şekilde ele almaktadır. Temel kavramları tanımlamakta ve bu polinomların matematiksel özelliklerini incelemektedir. Lorentz'in çalışması, Bernstein polinomlarının teorik temellerini ve uygulamalarını açıklamaktadır. A. Karaisa'nın 2016 yılında yayımladığı "Durrmeyer tipi Jakimoski–Leviatan operatörleriyle yaklaşım" başlıklı çalışma, Durrmeyer tipi Jakimoski–Leviatan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemektedir. Operatörlerin Durrmeyer tipi versiyonlarının fonksiyonlara yakınsama oranlarını ve davranışlarını analiz etmektedir.

A. Jakimovski ve D. Leviatan'ın 1969 yılında yayımladığı "Yaklaşım için genelleştirilmiş Szász operatörleri" makalesi, genelleştirilmiş Szász operatörlerinin sonsuz aralıkta fonksiyonlara yakınsama özelliklerini tartışmaktadır. Jakimovski ve Leviatan'ın çalışmaları, bu operatörlerin matematiksel temellerini ve uygulamalarını açıklamaktadır. A. Holhos'un 2008 yılında yayımladığı "Ağırlıklı uzayda pozitif lineer operatörler için nicel tahminler" çalışması, ağırlıklı uzayda pozitif lineer operatörlerin nicel tahminlerini incelemektedir. Operatörlerin ağırlıklı uzaylardaki davranışlarını ve nicel özelliklerini tartışmaktadır.

Hacıyev ve Hacısalihoğlu'nun 1995 yılında yayımladığı çalışma, lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklık özelliklerini detaylı bir şekilde ele almaktadır. Makalede, bu operatörlerin matematiksel davranışları ve yakınsaklık özellikleri üzerinde titizlikle durulmuştur. A.D. Gadziev'in 1976 yılında yayımladığı "Korovkin teoremlerinin türü teoremler" makalesi, Korovkin teoremlerinin türü teoremlerini incelemektedir. Operatörlerin Korovkin teoremleri bağlamında yakınsama özelliklerini ve matematiksel davranışlarını analiz etmektedir.

Gadjiev ve Aral'ın 2007 yılında yayımladığı çalışma, yeni bir tür ağırlıklı süreklilik modülü kullanarak yapılan yaklaşım tahminlerini detaylı bir şekilde ele almaktadır. Bu çalışmada, operatörlerin bu modülle ilişkili olarak fonksiyonlara yakınsama özellikleri incelenmektedir. A. Ciupa'nın 2007 yılında yayımladığı "Modifiye Jakimovski-Leviatan operatörleri" çalışması, modifiye Jakimovski-Leviatan operatörlerinin matematiksel özelliklerini tanımlamaktadır. Operatörlerin modifiye edilmiş versiyonlarının yakınsaklık özelliklerini ve uygulanabilirliğini tartışmaktadır.

A. Ciupa'nın 2008 yılında yayımladığı "Modifiye Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşık özellikleri" makalesi, modifiye Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemektedir. Operatörlerin yaklaşım özelliklerini ve matematiksel davranışlarını analiz etmektedir. Büyükyazıcı, Tanberkan, Serenbay ve Atakut'un 2014 yılında yayımladığı çalışma, Chlodowsky tipi Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini detaylı bir şekilde incelemektedir. Bu çalışmada, operatörlerin Chlodowsky tipi versiyonlarının fonksiyonlara yakınsama oranları ve matematiksel davranışları üzerinde titizlikle durulmaktadır.

N.I. Ashieser'in 1956 yılında yayımladığı "Yaklaşım Teorisi Üzerine Dersler" adlı kitabı, yaklaşım teorisini detaylı olarak ele almaktadır. Temel kavramları tanımlamakta ve yaklaşım teorisi ile ilgili temel sonuçları sunmaktadır. Ashieser'in çalışması, teorinin temel prensiplerini ve uygulamalarını kapsamaktadır. Atakut ve Büyükyazıcı'nın 2016 yılında yayımladığı çalışma, değiştirilmiş integral tipi Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini detaylı bir şekilde ele almaktadır. Bu çalışmada, operatörlerin integral tipi versiyonlarının fonksiyonlara yakınsama oranları ve davranışları kapsamlı bir şekilde analiz edilmektedir.

Abel ve Ivan'ın 1999 yılında yayımladığı "Jakimovski-Leviatan operatörlerinin asimptotik açılımı ve türevleri" makalesi, Jakimovski-Leviatan operatörlerinin asimptotik davranışını ve türevlerini incelemektedir. Operatörlerin asimptotik açılımını ve türevlerinin matematiksel özelliklerini derinlemesine ele almaktadır. T. Acar'ın 2005 yılında yayımladığı "Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri için asimptotik formüller" çalışması, genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörlerinin asimptotik davranışını tanımlamaktadır. Operatörlerin asimptotik formüllerini sunarak, bu operatörlerin davranışlarını analiz etmektedir.

T. Acar, A. Aral ve I. Raşa'nın 2016 yılında yayımladığı "Voronovskaya teoreminin ağırlıklı olarak yeni biçimleri" çalışması, Voronovskaya teoreminin ağırlıklı olarak yeni biçimlerini ele almaktadır. Teoremdeki yeni biçimlerin boşlukları nasıl etkilediğini ve teoremin uygulanabilirliğini tartışmaktadır. F. Altomare ve M. Campiti'nin 1994 yılında yayımladığı "Korovkin tipi yaklaşım teorisi ve uygulamaları" adlı kitabı, Korovkin tipi yaklaşım teorisini tanımlamakta ve uygulamalarını ele almaktadır. Yaklaşım teorisinin matematiksel temellerini açıklamakta ve çeşitli uygulama alanlarını tartışmaktadır.

Bu kaynaklar, Jakimovski-Leviatan operatörlerinin teorik temellerini, özelliklerini ve uygulamalarını anlamak için temel nitelikte olup, tez çalışmasının sağlam bir teorik altyapıya sahip olmasını sağlamıştır. Literatürde yer alan bu çalışmalar, tezde ele alınan konuların daha derinlemesine incelenmesine olanak tanımış ve yeni operatörlerin geliştirilmesi sürecinde rehberlik etmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, doğrusal pozitif operatörlerin kapsamlı bir açıklaması sunulacak ve bu operatörlerin temel özellikleri detaylı bir biçimde incelenecektir. Lineer pozitif operatörlerin matematiksel yapılarına dair detaylı bir açıklama yapılacak ve bu operatörlerin fonksiyonel analizdeki önemi vurgulanacaktır. Bununla birlikte, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve tanımlar da bu bölümde sunulacaktır. Bu tanımlar, çalışmanın ilerleyen kısımlarında daha karmaşık konuların anlaşılmasına yardımcı olacak temel bir zemin oluşturacaktır. Dolayısıyla, lineer pozitif operatörlerin temel kavramlarına ayrıntılı bir giriş yapılacak ve bu kavramların çalışmanın genel amacına nasıl katkı sağladığı üzerinde durulacaktır.

3.1 Lineer Pozitif operatörler

$X\ ve\ Y$ arasında lineer ve normlu fonksiyon uzayları verildiğinde, herhangi bir f fonksiyonunun X'ten alınıp, buna karşılık g fonksiyonunun Y'de elde edilmesini sağlayan bir L kuralı mevcutsa, bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve $g(x) = L(f,x)$ şeklinde ifade edilir. Bu bağlamda, X uzayı L operatörünün tanım kümesini temsil eder ve $D(L)$ olarak gösterilir. Dolayısıyla $g(x) = L(f,x)$, Y uzayında bir eleman olur ve bu tür g fonksiyonları kümesine operatörünün değer kümesi adı verilir. Bu küme, $R(L)$ olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.1 $X\ ve\ Y$ fonksiyon uzayları olarak belirtilmiş olsun. Eğer $L: X \to Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. L operatörü her $f, g \in X$ ve her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$L(a_1.f + a_2.g) = a_1.L(f) + a_2.L(g)$$

sağlanıyorsa, o zaman bu operatör *lineer operatör* olarak adlandırılır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 3.1.2 $L: X \to Y$ bir doğrusal operatör ve $f \in X$ olmak üzere, eğer

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f;x) \geq 0$$

sağlanıyorsa, o zaman bu operatöre *pozitif operatör* denir (Korovkin, 1960). Hem lineerlik hem de pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne ise *lineer pozitif operatörler* denir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Yardımcı Teorem 3.1.3 Lineer pozitif operatörler, monoton artan özellik gösterirler. Yani her $f, g \in X$ için, $f \leq g$ ise $L(f) \leq L(g)$ sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat: Varsayalım ki $f{\leq}g$. Bu durumda $0{\leq}g{-}f$ olur. L operatörünün pozitifliği nedeniyle, $0{\leq}L(g{-}f)$ şeklinde yazılabilir. L operatörü lineer olduğundan $0{\leq}L(g{-}f) = L(g){-}L(f)$ dir. Dolayısıyla $L(f){\leq}L(g)$ sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.1.4 Eğer $L: X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör ise o taktirde $|L(f)| \leq L|f|$ ifadesi doğrudur (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat: X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{3.1.1}$$

c operatörü lineer ve pozitif olduğundan, ayrıca Yardımcı Teorem 3.1.3 de göz ününde bulundurularak monoton artan olduğu sonucuna ulaşılabilir.

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{3.1.2}$$

yazarız. L doğrusal bir operatörü olduğundan

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

Bu ifadenin (3.1.1)'de yerine yazılmaasıyla;

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

elde ederiz ki ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.5 $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x)$ e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) şeklinde sembolik olarak ifade edilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 3.1.6 $X\ ve\ Y$ fonksiyon uzayları olarak alınsın. $L: X \to Y$ şeklindeki operatör ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f; x)$ operatör dizisi denir ve (L_n) şeklinde sembolik olarak ifade edilir. Bu operatör L_n operatörünün f fonksiyonuna uygulandığını ve elde edilen sonucun x değişkenine bağlıdır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 3.1.7 Bir kapalı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonların oluşturduğu küme, fonksiyon uzayı olarak adlandırılır. $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Bu uzayda tanımlanan norm ise aşağıdaki gibi gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = max_{a<x<b}|f(x)|$$

Tanım 3.1.8 Bir (fn) fonksiyonlar dizisini ele alalım. Bu fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ fonksiyon uzayında düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart,

$x \in [a, b]$ nin her değeri için; $\lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f(x)\|_{[a,b]} = 0$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} max_{a<x<b}\|f_n(x) - f(x)\|_{[a,b]} = 0 \text{ olmasıdır.}$$

Bu arada düzgün yakınsama $f_n(x) \to f(x)$ biçiminde ifade edilir (Musayev ve ark. 2003).

Korovkin, sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsayan ve lineer pozitif operatörlerle ilgili aşağıdaki teoremi ortaya koymuştur.

Teorem 3.1.9 $f \in C[a, b]$ olmak üzere $|f(x)| \leq M_f$ verilsin.

Eğer lineer pozitif operatör dizisi, $\forall\, x \in [a,b], e_i = t^i (i = 0,1,2)$ ve $L_n(e_i; x) \to x^i$ koşulları sağlıyorsa, bu durumda Korovkin (1953) tarafından gösterilen teoreme göre, $f(x)$ sürekli olur. Yani

$$L_n(f; x) \to f(x) \text{ dir (Korovkin 1953).} \qquad (3.1.3)$$

İspat: Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ sürekli fonksiyon olsun. Dolayısıyla her $\epsilon > 0$ için$|t-x| \le \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ'a bağlı $\delta > 0$ reel sayısı vardır. $|t-x| > \delta$ şeklinde alırsak (2.1.3)' ü kullanarak ve üçgen eşitsizliğinide göz önünde bulundurarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$|f(t) - f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2.M_f \qquad (3.1.4)$$

Ayrıca; eğer $|t-x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olur ki $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1$ yazarız. (3.1.5)

(3.1.4) ve (3.1.5) kullanarak;

$|t-x| \le \delta$ olmak üzere $|f(t) - f(x)| < \epsilon$

$|t-x| > \delta$ olmak üzere $|f(t) - f(x)| \le 2.M_f.\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$ elde ederiz.

Bu bilgiler ışığında $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için ve $\forall\, x \in [a,b]$ için

$|f(t) - f(x)| \le \epsilon + 2.M_f.\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$ yazılır. (3.1.6)

(L_n) operatör dizisi ve $i = 0,1,2$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

İfadesinin doğru olduğunu ispatlayalım.

Lineerlikten

$$\begin{aligned}
\left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| &= \left|L_n(f(t);x) - f(x) + L_n(f(x);x) - L_n(f(x);x)\right| \\
&= \left|L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)\right| \\
&= \left|L_n((f(t) - f(x));x) + f(x)(L_n(f(x);x) - 1)\right| \\
&= \left|L_n((f(t) - f(x));x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)\right|
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu eşitlikte üçgen eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \le \left|L_n((f(t)-f(x));x)\right| + \left|f(x)\right|\left|(L_n(1;x)-1)\right|$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca lineer pozitif operatörler monoton artan olduğundan ve

$$(f(t)-f(x)) \le \left|f(t)-f(x)\right|$$

Eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\left|L_n((f(t)-f(x));x)\right| \le \left|L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)\right|$$

Eşitsizliğini elde ederiz ki operatörümüz pozitif olduğundan ve

$$\left|f(t)-f(x)\right| \ge 0$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left|L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)\right| = L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece işlemlerin neticesinde

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x) + \left|f(x)\right|\left|(L_n(1,x)-1)\right|$$

olduğu göstermiş oluruz.

Yine (3.1.3)'teki ifadeyi göz önüne aldığımızda,

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x) + M_f\left|(L_n(1,x)-1)\right|$$

elde edilir.

(L_n) monoton artan olduğundan (3.1.6)' nın kullanılmasıyla;

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \le L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) + M_f\left|(L_n(1,x)-1)\right| \tag{3.1.7}$$

elde edilir.

Diğer taraftan;

$$L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\+x^2L_n(1;x)\end{bmatrix}$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\+x^2L_n(1;x)-x^2\end{bmatrix}$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}$$

yazarız. Buradan bulduğumuz bu ifadeyi (3.1.7) de kullanarak

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}$$
$$+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|$$

sonucuna ulaşırız.

$i=0,1,2$ olduğunu göz önüne aldığımıda son eşitsizlikten

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

elde edilir. O halde;

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.20

$X\ ve\ Y$ fonksiyon uzayları olarak verilsin. $L: X\to Y$ şeklindeki operatör ve her $n\in\mathbb{N}$ için $L_n(f;x)$ operatör dizisini alalım.
$L_n((t-x)^k;x)$ ve $\{k=0,1,2,\dots\}$ şeklindeki ifadeye (L_n) operatör dzisinin *k. merkezi momenti* denir (Lorentz 1953).

Tanım 3.1.21 Her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n\le\beta_n\ (n\to\infty)$ olmak üzere $\alpha_n\to\infty\ ve\ \beta_n\to\infty$ şartlarını sağlayan $\alpha_n\ ve\ \beta_n$ ler fonksiyon dizileri olarak alalım.

Bu durumda (α_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşma hızından daha hızlıdır (Lorentz 1953).

Teorem 3.1.19'da, belirli koşullar $L_n(f;x)$ altında lineer ve pozitif bir operatör dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna düzgün şekilde yaklaştığını gösterdik. Bu durumda, $\|L_n(f) - f\|$ ifadeyi sıfıra yakınsayan bir diziyi temsil eder şeklinde düşünebiliriz. Böylece, $n \to \infty$ için $\beta_n \to \infty$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere,

$$\|L_n(f) - f\| \leq M.\beta_n$$

şeklinde, (β_n) fonksiyon dizisi bulabilirsek $L_n(f;x)$ altında lineer ve Pozitif bir operatörün $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşma hızını değerlendirmemize yardımcı olacak birkaç yöntem bulunmaktadır.

Fonksiyonun süreklilik modülü, bir fonksiyonun değişimi ile onun sürekli olduğu ölçüsünü tanımlar. Bu kavram, matematiksel analizde ve fonksiyonel analizde önemli bir rol oynar. Süreklilik modülü, bir fonksiyonun ne kadar "düzensiz" olduğunu ölçer. Eğer bir fonksiyonun süreklilik modülü düşükse, o fonksiyon daha düzenlidir ve değişkenliği daha azdır. Buna karşılık, yüksek süreklilik modülüne sahip bir fonksiyon daha düzensizdir ve değişkenliği daha fazladır.

Süreklilik modülü, fonksiyonların analizinde ve yaklaşımlar teorisinde önemli bir rol oynar. Özellikle, fonksiyonların nasıl yaklaşılabileceği ve ne kadar düzgün bir şekilde yaklaşılabileceği konusunda bilgi sağlar. Fonksiyonların süreklilik modüllerinin incelenmesi, bu fonksiyonların yakınsama özelliklerini anlamak ve analiz etmek için temel bir araçtır.

Tanım 3.1.22 Fonksiyon uzayına ait bir $f \in C[a,b]$ alalım ve $\forall\, \delta > 0$ için;

$$\omega(f;\delta) = \begin{array}{c} Sup\, |f(t) - f(x)| \\ x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq \delta \end{array}$$

şeklinde ifade edilen eşitliğe $f \in C[a,b]$ fonksiyonunun *Süreklilik Modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Süreklilik Modülünün Özellikleri

a) $\omega(f;\delta) \geq 0$

b) $\delta_1 \leq \delta_2$ olmak üzere $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$ dir.

c) $\omega(f+g;\delta) \leq \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$

d) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m.\omega(f;\delta)$

e) $m \in \mathbb{R}$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

f) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

g) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right).\omega(f;\delta)$

h) $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$ dır (Altomare ve Campiti 1994).

Tanım 3.1.23 $|f(t) - f(x)| \leq M.|t-x|^{\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$ olmak üzere koşulunu gerçekleyen fonksiyonlara Lipschitz *sınıfındandır* denir. Burada M sayısı Lipschitz *sabiti* olup $f \in Lip_M(\alpha)$ şeklinde swembolik olatak gösterilir (Ersan 2008).

Ağırlıklı fonksiyon uzayı, fonksiyonların belirli bir ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak oluşturulduğu ve belirli bir norm yapısı altında incelendiği bir matematiksel yapıdır. Bu kavram, özellikle fonksiyonların özel ağırlık dağılımlarına sahip olduğu problemlerde ve ağırlıklandırılmış integral denklemlerinin çözümünde önemlidir.

Ağırlıklı fonksiyon uzayı, bir vektör uzayı olarak düşünülebilir, ancak fonksiyonlar üzerinde bir iç çarpım yapıları belirli bir ağırlık fonksiyonu ile tanımlanır. Bu iç çarpım yapısı, fonksiyonların birbirleriyle olan ilişkisini ve büyüklüklerini ölçer.

Ağırlıklı fonksiyon uzayları, belirli integral denklemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılır. Özellikle, ağırlıklı fonksiyon uzayları, ağırlıklı Lebesgue uzayları ve Sobolev uzayları gibi çeşitli alt yapılarla birlikte çalışarak, diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünde kullanılan fonksiyonel analiz araçlarını sağlar.

Bu uzaylar genellikle bir norm yapısı altında incelenir, bu da fonksiyonların büyüklüğünü veya uzunluğunu ölçen bir metrik sağlar. Ağırlıklı fonksiyon uzayları, ağırlıklı iç çarpım yapılarına sahip olabilir ve bu iç çarpımlar, integral dönüşümler veya ağırlıklı integral operatörlerinin tanımlanmasında önemli bir rol oynar.

Ağırlıklı fonksiyon uzayları, matematiksel analizin birçok alanında kullanılan önemli bir araçtır. Özellikle, diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünde ve matematiksel modellemelerde sıklıkla karşılaşılan problemlerin analizinde kullanılırlar.

Tanım 3.1.24 $[0,\infty)$ yarı kapalı aralığında tanımlanan ve f'ye bağlı bir sabit olan M_f bir sabit sayı olmak üzere;

$$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$$

Şartını sağlayan fonksiyonların oluştruduğu küme ağırlıklı fonksiyon uzayı olarak adlandırılır. $B_{x^2}[0,\infty)$ biçinde gösterilir ve bu uzayın sürekli fonksiyonlardan oluşan alt uzayıda $C_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* olarak adlandırılır. Yine $\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonlrdan oluşan $C_{x^2}[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon *uzayı* nın alt uzayına $C^*_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* denir.

$C^*_{x^2}[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon uzayındaki norm ise;

$$\|f\|_{x^2} = sup_{x\in[0,\infty)}\frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

biçiminde ifade edilmiştir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Ağırlıklı süreklilik modülü, bir fonksiyonun belirli bir ağırlık fonksiyonu altında ne kadar sürekli olduğunu ölçen bir kavramdır. Bu kavram, ağırlıklı fonksiyon uzayları ve ağırlıklı normlarla ilgili olarak fonksiyonların değişimini ölçmek için kullanılır.

Standart süreklilik modülü kavramından farklı olarak, ağırlıklı süreklilik modülü, bir fonksiyonun belirli bir ağırlık fonksiyonu tarafından ağırlıklandırıldığı durumları ele alır. Bu ağırlık fonksiyonu, farklı noktalarda fonksiyonun değişimine farklı öncelikler atar ve dolayısıyla fonksiyonun sürekliliğini ağırlıklandırır.

Ağırlıklı süreklilik modülü, fonksiyonların değişiminin ve sürekliliğinin farklı ağırlıklar altında incelenmesine olanak tanır. Bu, özellikle ağırlıklandırılmış integral denklemlerinin çözümünde ve ağırlıklandırılmış fonksiyon uzaylarının analizinde önemlidir. Ağırlıklı süreklilik modülü, fonksiyonların farklı ağırlıklandırma şartları altında ne kadar sürekli olduğunu anlamak için kullanılır ve bu, birçok matematiksel modelleme ve analitik problemde önemli bir rol oynar.

Tanım 3.1.25 $f \in C^*_{x^2}[0,\infty)$ olmak üzere, her hangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{x\in[0,\infty),h\leq\delta}\frac{\left|f(x+h)-f(x)\right|}{\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)}$$

ifadesi f fonksiyonunun *ağırlıklı süreklilik modülü* olarak adlandırılır (Atakut, Ispir 2002).

Ağırlıklı Süreklilik Modülünün Özellikleri

Ağırlıklı süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler, $f \in C^{*}_{x^2}[0,\infty)$ için sağlanabilir (Ashieser 1956 ve Ispir 2001).

a) $\Omega(f;\delta) \geq 0$

b) $\delta_1 \leq \delta_2$ olmak üzere $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$ dir.

c) $\lim_{\delta\to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

d) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

e) $\delta > 0$ olmak üzere $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

f) $|f(t)-f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f;|t-x|)$

g) $|f(t)-f(x)| \leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)(1+(t-x)^2)(1+\frac{|t-x|}{\delta})\Omega(f;\lambda\delta)$

Tanım 3.1.26 $[0,\infty)$ yarı kapalı aralığında tanımlanan, reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu küme $C_B[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon uzayı olarak adlandırılır ve bu uzayda tanımlanan norm ise aşağıdaki gibidir.

$$\|f\| = sup_{x\in[0,\infty)}|f(x)|$$

Şimdi çalışmamız için önemli bir tanım olan Peetre-*K* fonksiyonelinin tanımını vereceğiz.

Her $\delta > 0$ için $K_2(f,\delta) = inf_{x\in C_B^2[0,\infty)}\{\|f-h\| + \delta\|h''\|\}$.

Tanımda geçen ifade $C_B^2[0,\infty) = \{h \in C_B[0,\infty): h', h'' \in C_B[0,\infty)\}$ şeklindedir.

$\exists\, C > 0$ öyleki $K_2(f,\delta) \leq C\omega_2(f,\delta)$ dır.

Burada $\omega_2(f;\delta) = sup_{0<p<\sqrt{\delta}} sup_{x\in[0,\infty)}|f(x+2p) - 2f(x+p) + f(x)|$ ifadesi *ikinci dereceden süreklilik modülü* olarak tanımlanmıştır (Lorentz 1953).
Ayrıca $\omega\ (f,\delta); f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonun genel süreklilik modülüdür.

Tanım 3.1.27 $\lim_{n\to 0}\alpha_n = 0$ koşulunu gerçekleyen (α_n) fonksiyon dizisi sonsuz küçülen olarak adlandırılır.
(α_n) ve (β_n) fonksiyon dizilerini bu tanıma göre sonsuz küçülen olarak aldığımız zaman aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ ifadesine göre (α_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) fonksiyon dizisinden *daha hızlıdır* denir.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\infty$ ifadesine göre (β_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (α_n) fonksiyon dizisinden *daha hızlıdır* denir.

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$ ifadesine göre (α_n) ve (β_n) fonksiyon dizilerinin sıfıra yaklaşma *hızı aynıdır* denir.

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=c$ ifadesine göre c değerine *Asimptotik değer*, (β_n) fonksiyon dizisine (α_n) fonksiyon dizisinin *Asiptotik hızı* denir. Burada (α_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşım hızı (β_n) fonksiyon dizisinin sıfıra yaklaşım hızıyla belirlenir. Burada c değeri n değerine bağlı olmayan bir sabit değerdir (Popoviciu, 1935; Bernstein, 1912).

Operatörlerde;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|L_n(f;x)-f(x)|}{\beta_n}=A(n,x)$$

burada $A(n,x)$ fonksiyonu asimptotik değer, (β_n) fonksiyon dizisi de $|L_n(f;x)-f(x)|$ ifadesinin asimptotik hızı olarak söylenebilir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Yaklaşım teorisi, bir fonksiyonun daha faydalı ve daha üstün özelliklere sahip diğer fonksiyonlarla temsil edilmesini amaçlar. Weierstrass, 1885 yılında $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli her fonksiyon için düzgün bir şekilde yaklaşan polinomların var olduğunu vurgulamıştır.

Yaklaşım teorisi, bir fonksiyonun başka bir fonksiyonla uygun bir şekilde temsil edilmesini hedeflerken, lineer pozitif operatörler bu temsili sağlamak için kullanılan önemli araçlardan biridir. Özellikle, lineer pozitif operatörlerin fonksiyonları daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaştırma yetenekleri, Weierstrass'ın düzgün yakınsama teoremi gibi önemli sonuçların kanıtlanmasında kritik bir rol oynamaktadır.

Lineer pozitif operatörlerin fonksiyon yaklaşımlarındaki kullanımı, matematiksel analizin birçok alanında yaygın olarak görülmektedir. Özellikle, analitik ve sayısal yaklaşımların geliştirilmesinde, fonksiyonel analizdeki temel kavramları anlamak ve uygulamak için önemlidirler. Bu operatörler, bir fonksiyonun istenilen özelliklerini koruyarak, daha basit veya daha kolay hesaplanabilir olan fonksiyonlarla temsil etme sürecini kolaylaştırır.

Ayrıca, lineer pozitif operatörlerin Weierstrass'ın düzgün yakınsama teoremi gibi temel sonuçlarla ilişkilendirilmesi, bu operatörlerin matematiksel analizin merkezindeki konumunu vurgular. Bu ilişki, fonksiyon yaklaşımlarının matematiksel teorisi üzerine daha derin bir anlayış geliştirmek isteyenler için önemli bir bağlantı noktasıdır. Dolayısıyla, lineer pozitif operatörlerin fonksiyon yaklaşımlarındaki rolü, matematiksel analiz alanındaki araştırmaların ve uygulamaların gelişiminde önemli bir yere sahiptir.

Teorem 3.1.28 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

Weierstrass Yaklaşım Teoremi, matematiksel analizde önemli bir sonuç olarak bilinir. Bu teorem, herhangi bir sürekli fonksiyonun bir polinom serisiyle istenilen hassasiyette yakınsayabileceğini belirtir. Daha spesifik olarak, Weierstrass Yaklaşım Teoremi, bir fonksiyonun herhangi bir kapalı aralıkta, o aralıkta sürekli olan bir polinom serisiyle düzgün bir şekilde yaklaşılabilmesini ifade eder.

Bu teorem, matematiksel analizin ve sayısal hesaplamanın birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle, fonksiyonların yaklaşık olarak temsil edilmesi ve analitik olarak çözülemeyen problemlerin sayısal olarak çözülmesinde önemli bir role sahiptir. Weierstrass Yaklaşım Teoremi, analizdeki diğer önemli teoremlerle birlikte, fonksiyonların matematiksel davranışlarını anlamak ve modellemek için temel bir araçtır.

Weierstrass teoremi, $[a,b]$ aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için herhangi bir $\epsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$ koşulunu sağlayan n.dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisinin varlığını belirtir. Başka bir deyişle, $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün bir şekilde yaklaşan bir $(P_n(x))$polinomlar dizisi bulunur. Bu teoremin farklı ispatları mevcuttur, ancak en anlaşılır ve basit olanı 1912'de Bernstein tarafından yapılmıştır. 1952'de ise Bohmann, $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşma problemini toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisiyle incelemiştir (Weierstrass, 1885).

Teorem 3.1.29 Korovkin Teoremi (1953)

Korovkin'in pozitif yaklaşım süreçleri, yaklaşım teorisinde kritik bir rol oynar ve fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi, kısmi diferansiyel denklemler ve

olasılık teorisi gibi çeşitli alanlarda temel bir öneme sahiptir. Bu süreçler, birçok problemde doğal olarak karşımıza çıkar ve bu alanlarda çeşitli teorik ve uygulamalı sorunları çözmek için kullanılır.
$f \in C[a,b]$ olmak üzere $|f(x)| \leq M_f$ verilsin. Eğer lineer pozitif operatör dizisi, $\forall\, x \in [a,b], e_i = t^i (i = 0,1,2)$ ve $L_n(e_i; x) \to x^i$ koşulları sağlıyorsa, bu durumda Korovkin (1953) tarafından gösterilen teoreme göre, $f(x)$ sürekli olur.
Yani $L_n(f; x) \to f(x)$ dir (Korovkin 1953).

Korovkin, bu teoremiyle sonlu aralıklarda düzgün yakınsamanın sağlanması için sadece üç koşulun değerlendirilmesinin yeterli olduğunu vurgulamıştır. Bu yöntem, çeşitli operatörlerin -örneğin Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri gibi- bazı yakınsama özelliklerini incelemeye olanak sağlamıştır. Teorem, sonlu aralıktaki lineer pozitif operatörlerin yakınsama özelliklerini araştırmak için bir temel sunar. Ancak, birçok operatör sonsuz aralıklarda tanımlandığından, bu operatörlerin yakınsama özelliklerinin ağırlıklı uzaylarda incelenmesi gerektiği vurgulanmıştır.

3.2. Sınırlı Operatörler

"Sınırlı operatörler" terimi, fonksiyonel analizde önemli bir kavramdır. Bir lineer uzaydan başka bir lineer uzaya gönderilen ve belirli bir norma göre sınırlı olan lineer operatörler için kullanılır.
Bir lineer operatör, bir vektör uzayından diğerine lineer bir dönüşümü ifade eder. Eğer bu operatör, giriş vektörlerinin normunu belirli bir sabit sayıya çarparak bir üst sınırlama altında tutuyorsa, o zaman bu operatör "sınırlı" olarak adlandırılır.
Örneğin, bir Banach uzayındaki bir lineer operatör, eğer bu operatörün normu bir sabit sayıdan daha büyük değilse, o zaman sınırlı bir operatördür. Sınırlı operatörler, genellikle matematiksel analizde ve lineer cebirdeki önemli teoremlerin ve sonuçların kanıtlanmasında kullanılır.
Sınırlı operatörler, özellikle spektral teori, integral denklemler ve lineer diferansiyel denklemler gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır. Bunlar, matematiksel modellemelerde ve uygulamalı matematikte birçok önemli problemin çözümünde kritik bir role sahiptir.

Elimizde $L: X \rightarrow Y$ bir operatörü olmak üzere $D(L) \subset X$ kümesi L nin tanım kümesi olsun. Bu durumda $\forall\, f \in D(L)$ için;

$$\|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X$$

Eşitsizliğini gerçekleyen bir $M \in \mathbb{R}^+$ değerine sahipse L operatörüne $D(L) \subset X$ de *sınırlı operatör* denir.

Ayrıca L operatörünün normunu aşağıda veriyoruz.

$$\|L\|_{X\rightarrow Y} = inf\{M: \|L(f;x)\|_Y M\|f\|_X\}.$$

3.3. Normlu Uzay

Normlu uzaylar, matematiksel analizin önemli bir alanı olan ve fonksiyonel analizde sıkça kullanılan bir kavramdır. Bu kavram, vektör uzaylarının belirli bir norm yapısıyla donatıldığı matematiksel yapıları ifade eder.

Bir norm, bir vektör uzayındaki her vektör için bir uzunluk veya büyüklük ölçüsü sağlayan bir fonksiyondur. Dolayısıyla, bir normlu uzayda her vektörün belirli bir büyüklük ölçüsü vardır ve bu ölçü, vektör uzayındaki temel operasyonları tanımlayan matematiksel yapıları belirler.

Bir normlu uzay, bir vektör uzayının norm ile donatıldığı bir yapıdır. Bu uzayda, vektörlerin normları özel bir şekilde tanımlanmıştır ve bu normlar, vektörler arasındaki uzaklığı veya büyüklüğü ölçer. Bir normlu uzayın temel özellikleri şunlardır:

Norm: Her vektör uzayında bir norm tanımlanmıştır. Norm, vektörlerin uzunluğunu veya büyüklüğünü ölçen bir fonksiyondur. Örneğin, gerçel sayılar üzerindeki bir vektör uzayında, Euclid normu olarak da bilinen 2-norm sıkça kullanılır.

Hassaslık: Bir normlu uzaydaki her vektörün normu belirlidir ve bu norm, vektör uzayındaki temel operasyonların yapısını belirler. Örneğin, bir normlu uzayda topolojik yapılar ve konverjans kavramları norm tarafından tanımlanır.

Tamamlanabilirlik: Bir normlu uzayda, Cauchy dizileri için limitlerin her zaman var olduğu ve bu limitlerin uzayın içinde kaldığı garanti edilir. Bu, normlu uzayların analizde ve uygulamalarda sıklıkla kullanılan matematiksel yapıları haline getirir.

Normlu uzaylar, analiz, diferansiyel denklemler, integral denklemler, optimizasyon ve sayısal hesaplama gibi birçok matematiksel alanda temel bir rol oynamaktadır. Özellikle, fonksiyonel analizdeki birçok temel kavram ve teorem, normlu uzayların üzerinde tanımlanmıştır ve bu uzaylar, matematiksel modelleme ve problemlerin çözümünde önemli bir araç olarak kullanılır.

X bir vektör uzayı ve tanımlanmış $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

a) $\forall x \in X, x \neq 0 \; için \; \|x\| > 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\forall x \in X \; ve \; \lambda \; skaler \; ise \; \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

c) $\forall x, y \in X \; için \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|\cdot\|$ fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağlıyorsa, *X* uzayı üzerinde bir *norm* olarak kabul edilir ve *X* uzayı da *normlu uzay* olarak adlandırılır (Hilbert, 1903).

4. JAKİMOVSKİ-LEVİATAN OPERATÖRÜNÜN BİR GENİŞLEMESİ

Jakimovski-Leviatan operatörleri, fonksiyonların yaklaşım teorisi alanında önemli bir role sahip olan pozitif doğrusal operatör dizilerinin bir genelleştirmesidir. Bu operatörler, sürekli fonksiyonların daha iyi bir şekilde temsil edilmesi için kullanılır ve halen aktif olarak araştırılan bir alanı temsil eder.

Jakimovski-Leviatan operatörleri, Szász-Mirakyan operatörlerinin genelleştirilmiş bir versiyonudur ve çeşitli şekillerde modifiye edilmiş, genişletilmiş ve değiştirilmiştir. Bu operatörlerin genellemeleri, fonksiyonların ağırlıklı uzaylarındaki yakınsama oranlarının incelendiği çalışmalarda sıkça karşımıza çıkar.

Bu operatörlerin önemli bir özelliği, fonksiyonların ağırlıklı uzaylarında yakınsama oranlarını incelemelerine olanak tanımasıdır. Örneğin, Atakut ve diğerleri (2016), bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda fonksiyonların yakınsama özelliklerini araştırmışlardır. Ayrıca, Lesnicwich ve diğerleri (1997), bu operatörlerin bir veya iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşım derecelerini incelemişlerdir.

2007 yılında Ciupa, Modifiye Jakimovski-Leviatan operatörlerini tanımlamış ve bu operatörlerin yakınsama oranı, yaklaşım mertebesi ve Voronovskaya tipi teorem üzerinde çalışmıştır. Son zamanlarda, Büyükyazıcı ve diğerleri (2014), Chlodovsky tipi Jakimovski-Leviatan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Voronovskaya tipi teoremi kanıtlayarak, bu operatörlerin ağırlıklı bir uzayda yakınsaklığını yeni bir tip ağırlıklı süreklilik modülü kullanarak araştırmışlardır.

Bu bilgiler, Jakimovski-Leviatan operatörlerinin teorik ve uygulamalı yönlerini daha ayrıntılı olarak anlamamıza yardımcı olacak ve operatörlerin matematiksel analizdeki önemi ve fonksiyonların daha iyi temsil edilmesine olan katkıları hakkında daha geniş bir bakış açısı sunacaktır.

Bu operatörlerin yanı sıra, matematiksel analiz ve teorik fizik alanlarında önemli bir rol oynayan ortogonal polinomlar da dikkate değerdir. Ortogonal polinomlar, belirli bir ağırlık fonksiyonu ile ağırlıklandırılmış bir iç çarpıma sahip olan polinomlardır ve birçok matematiksel ve fiziksel problemin çözümünde yaygın olarak kullanılırlar.

Matematiksel analizde ve pozitif yaklaşım süreçlerinde, ortogonal polinomlar kavramı nadiren ortaya çıkar. Ancak, ortogonal polinomlar ve pozitif lineer operatörler arasındaki ilişki, birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu ilişki, özellikle pozitif operatörlerin yakınsama özelliklerinin analizinde ve ağırlıklı fonksiyon uzaylarında çalışmalar yapan araştırmacılar tarafından dikkate alınmıştır.

Örneğin, Varma ve diğerleri (2012) ile Aydın (2017), ortogonal polinomlar ve pozitif operatörler arasındaki ilişkiyi detaylı bir şekilde incelemişlerdir. Bunlardan biri ise Jakimovski ve Leviatan'ın çalışmasıdır. Bu çalışmalar, ortogonal polinomlar ve pozitif operatörler arasındaki ilişkinin derinlemesine incelenmesi ve bu ilişkinin matematiksel analiz ve uygulamalı matematikteki önemini vurgulamıştır.
Bu bilgiler, operatörlerin ve fonksiyonların matematiksel yapılarının daha geniş bir bağlamda anlaşılmasına katkıda bulunur. Ayrıca, matematiksel analiz ve teorik fizikteki ilgili araştırma alanları arasındaki ilişkileri anlamamıza yardımcı olur ve ortogonal polinomların pozitif operatörlerle olan ilişkisinin önemini vurgular.

Yakın zamanda, Jakimovski ve Leviatan (1969)'da Jakimovski-Leviatan operatörlerini tanıtmıştır. Bu operatörler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.1)$$

Burada $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, u^n$, $g(1) \neq 0$, $|u| < r$ diskinde analitik bir fonksiyon olsun (r>1) ve $P_k\,(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, \frac{x^{k-i}}{(k-i)!}, (k \in N)$ ile tanımlanan $g(u)e^x$ $=\sum_{k=0}^{\infty} P_k\ (x)u^k$ Appell polinomları olsun.
Eğer (4.1)'de $g(1) = 1$ alınırsa $P_k = \frac{x}{k!}$ olur ki böylece operatörler iyi bilinen Sz´asz-Mirakyan operatörleri P_n operatörlerine indirgenir. P_n operatörlerinin pozitifliği gerekli ve yeterli koşul altında Wood (1969) tarafından kanıtlanmıştır ve $\frac{a_n}{g(1)} \geq 0.$

P_n Lineer pozitif operatörlerin genelleştirilmesi ve çeşitli yaklaşım özellikleri, birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bu operatörlerin genişletilmiş yapıları ve çeşitli yaklaşım özelliklerinin detaylı bir analizi (Abel ve ark., 1999; Büyükyazıcı ve ark., 2014; Ciupa, 2007; Ciupa, 2008; Karaisa, 2016) gibi referans verdiğimiz kaynaklarda bulunabilir. Bu kaynaklar, P_n operatörlerinin matematiksel özelliklerini ve uygulamalardaki rolünü anlamak için önemli birer başvuru kaynağıdır. Bu çalışmalar, P_n operatörlerinin teorik ve pratik açıdan incelenmesiyle ilgili kapsamlı bir literatürü temsil eder.

Öte yandan, Cardenas-Morales ve ark. (2011) ise B_n, Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonunu $f \in C[0,1]$ olmak üzere $B_n(fo\tau^{-1})o\tau$ oluşturmuşlardır. İyi bilinen Bernstein operatörleri ve τ şu koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

a) $\tau \epsilon C^{\infty}[0,1]$, ($C^{\infty}[0,1]$ sürekli olan fonksiyonların uzaylarını gösterir [0, 1] de sonsuz kez değiştirilebilir.)

b) $\tau(0) = 0, \tau(1) = 1$ olmak üzere $\tau'(x) > 0$ için $x \in [0,1]$.

Lebesgue integrallenebilir fonksiyonları yaklaştırmak için, yukarıda bahsedilen operatörlerin integral tipi genellemesi de Acar ve ark. tarafından (2014)'te tanıtılmıştır. Her iki makalede de operatörlerin bu yapıları yaklaşım oranı için bazı iyileştirmeler sunar ve klasik olanlardan daha hassastır. Ayrıca, Aral ve ark. (2014) ve Ulusoy ve ark. (2016) yapmış olduğu çalışmalarda operatörlerin bu yapısı sınırsız aralıklar üzerinde hareket eden bazı operatörlere uygulanmıştır.

$N_0 = N \cup \{0\}$ olsun. η fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan herhangi bir fonksiyon olduğunu kabul edelim:

i. $\eta \in C^{\infty}[0,\infty]$,

ii. $\eta(0) = 0, f_{x\in[0,\infty)}\,\eta'(x) \geq 1$.

Bu çalışmanın odak noktası, Jakimovski-Leviatan operatörlerinin aşağıdaki gibi bir genellemesini sunmaktır:

$$P_n^{\eta}(f;x) = \frac{e^{-n\eta}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\big(n\eta(x)\big)(fo\eta^{-1})\ \eta\left(\frac{k}{n}\right),$$

P_n^{η} operatörleri bir lineer pozitif operatör dizisidir ve $\eta(x) = x$ için (3.1) operatörleri elde edilir. Ağırlıklı fonksiyon uzaylarında operatörlerin düzgün yakınsamasını araştırıyor ve bu düzgün yakınsamanın oranını açıklayarak ikinci dereceden süreklilik modülü cinsinden yerel yaklaşım teoremini elde ettik. P_n^{η} için Voronovskaya teoreminin nicel formunu elde ederek operatörlerin noktasal yakınsama oranını tanımladık. Çalışma boyunca C, her olayda farklı olabilen pozitif bir sabiti gösterecektir.

4.1 Yardımcı Sonuçlar

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, ana teoremleri kanıtlamak için gereken birkaç önermeye ihtiyaç duyacağız. Bu önermeler, ana teoremlerin kanıtı için gerekli olan ön adımları sağlayacak ve sonuçların daha sağlam bir temele dayanmasını sağlayacaktır. Bu önermelerin ispatları, ana teoremlerin doğruluğunu göstermek için kritik bir rol oynayacaktır. Bu noktada, bu önermelerin sunumu ve ispatı, çalışmanın ilerleyen bölümlerinde önemli bir yer tutacaktır.

$C_B(\mathbb{R}^+)$, $\|f\| = sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x)|$ normu ile birlikte $\mathbb{R}^+$ üzerindeki tüm sürekli ve sınırlı f fonksiyonlarının lineer uzayını göstersin.

$\varphi(x) = 1 + \eta^2(x)$ olsun ve $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyon uzayı $|f(x)| \leq M_{f\varphi}(x)$, öyleki $x \geq 0$ yalnızca f'ye bağlı olarak sabit bir $M_f$koşulunu sağlasın. $C_\varphi^*(\mathbb{R}^+)$, $f \in B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ sürekli fonksiyonlarının uzayıdır. $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$'nin bir alt uzayı olan $C_\varphi^*(\mathbb{R}^+\ )$, $lim_{x\to\infty}\ f(x)\ /\ \varphi(x)\ = const.$ Koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşur. Ayrıca $U_\varphi(\mathbb{R}^+)$, $f \in C_\varphi^*(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonlarının bir alt uzayıdır öyleki $f(x)\ /\varphi(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyondur.

$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$, $\|f\|_\varphi = sup_{x\in R^+}|f(x)|\ /\varphi(x)$ ile bilikte normlu bir uzaydır.

$f \in C_\varphi(R^+)$ için ve her $\delta > 0$ için Holhos (2008) taraından tanımlanan süreklilik modülü aşağıdaki verilmiştir.

$$\omega_n(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+ \\ |\eta(t)-\eta(x)|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{\varphi(t)+\varphi(x)}$$

Her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için $\omega_\eta(f;0) = 0$ doğruluğunu biliyoruz ve buradan $\omega_\eta\,(f;\delta) \geq 0$ fonksiyon ve $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ δ ya göre azalmayan fonksiyondur.

Ayrıca, her $f \in U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için; $\lim_{\delta\to 0}\omega_\eta\,(f;\delta) = 0$.

Önerme 4.1.1 (Holhos, 2008) Her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için; $\delta > 0$ ve tüm $x, y \geq 0$ için;

$$|f(u) - f(x)| \leq (\varphi(u) + \varphi(x))\left(2 + \frac{|\eta(u)-\eta(x)|}{\delta}\right)\omega_\eta(f;\delta) \tag{4.1.1}$$

$\delta > 0$ ve $W_\infty^2 = \{g \in C_\varphi(\mathbb{R}^+); g', g'' \in C_B\,(\mathbb{R}^+)\}$ olsun.

İlgili lineer pozitif operatör dizisinin yakınsama hızını tahmin etmek için en kullanışlı araçlardan biri;

$$K_2\,(f;\delta) = inf\{\| f-g \| \; + \delta \| g \|_{W_\infty^2} \, ; g \in W_\infty^2\} \,,$$

öyleki $\| f \|_{W_\infty^2} = \| f \| + \| f' \| + \| f'' \|$ ile tanımlanan K-fonksiyonelidir.

Aşağıda bir karşılaştırma yer almaktadır.

$K_2\,(f;\delta) < C\{\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) + \min(1,\delta) \| f \|\}$,

burada C bir mutlak sabittir ve ikinci dereceden süreklilik modülü şu şekilde tanımlanır:

$$\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) = \sup_{0<h<\sqrt{\delta}0} \; \sup_{<x<\infty} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|.$$

Bir $f \in C_B(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonun ilk düzgünlük modülü;

$$\omega(f;\delta) = \sup_{0<h<\sqrt{\delta}0} \; \sup_{<x<\infty} |f(x+h) - f(x)|.$$

Önerme 4.1.2

$$P_n^\eta(1;x) = 1, P_n^\eta(\eta;x) = \eta(x) + \frac{g'(1)}{ng(1)'} \tag{4.1.2}$$

$$P_n^\eta(\eta^2;x) = \eta^2(x) + \frac{g(1)+2g'(1)}{ng(1)}\eta(x) + \frac{g'(1)+g''(1)}{\eta^2 g(1)} \tag{4.1.3}$$

$$P_n^\eta(\eta^3;x) = \eta^3(x) + \frac{3g(1)+3g'(1)}{ng(1)}\eta^2(x) + \frac{g(1)+6g'(1)+3g''(1)}{\eta^2 g(1)}\eta(x)$$

$$+\frac{g'(1)+3g''(1)+g'''(1)}{\eta^3 g(1)}, \tag{4.1.4}$$

$$P_n^\eta(\eta^4;x) = \eta^4(x) + \frac{6g(1)+4g'(1)}{ng(1)}\eta^3(x) + \frac{7g(1)+18g'(1)+4g''(1)}{\eta^2 g(1)}\eta^2(x)$$

$$+\frac{g(1)+14g'(1)+19g''(1)+4g'''(1)}{\eta^3 g(1)}\eta(x)$$

$$+\frac{g'(1)+7g''(1)+6g'''(1)+g^{(4)}(1)}{\eta^4 g(1)},$$

$$P_n^\eta(\eta^5;x) = \eta^5(x) + \frac{5g(1)+10g'(1)}{ng(1)}\eta^4(x) + \frac{25g(1)+40g'(1)+10g''(1)}{\eta^2 g(1)}\eta^3(x)$$

$$+\frac{15g(1)+75g'(1)+40g''^{(1)}+10g'''(1)}{\eta^3 g(1)}\eta^2(x)$$

$$+\frac{g(1)+30g'(1)+75g''(1)+40g'''(1)+5g^{(4)}(1)}{\eta^4 g(1)}\eta(x)$$

$$+\frac{g'(1)+15g''(1)+25g'''(1)+10g^{(4)}(1)+g^{(5)}(1)}{\eta^5 g(1)}$$

$P_n^{\eta}(\eta^6;x)$

$$= \eta^6(x) + \frac{6g(1)+15g'(1)}{ng(1)}\eta^5(x) + \frac{65g(1)+75g'(1)+15g''(1)}{\eta^2 g(1)}\eta^4(x)$$

$$+ \frac{90g(1)+260g'(1)+150g''^{(1)}+20g'''(1)}{\eta^3 g(1)}\eta^3(x)$$

$$+ \frac{31g(1)+270g'(1)+260g''(1)+150g'''(1)+15g^{(4)}(1)}{\eta^4 g(1)}\eta^2(x)$$

$$+ \frac{g(1)+62g'(1)+270g''(1)+260g'''(1)+75g^{(4)}(1)+6g^{(5)}(1)}{\eta^5 g(1)}\eta(x)$$

$$+ \frac{g'^{(1)}+31g''(1)+90g'''(1)+65g^{(4)}(1)+15g^{(5)}(1)+g^{(6)}(1)}{\eta^6 g(1)}$$

Önerme 4.1.3 Eğer merkezi moment operatörünü

$\mu_{n,m}^{\eta}\,(x) = P_n^{\eta}((\eta(t)-\eta(x))^m;x), m\epsilon$N, şeklinde tanımlarsak,

$$\mu_{n,1}^{\eta}\,(x) = \frac{g'(1)}{ng(1)'}$$

$$\mu_{n,2}^{\eta}\,(x) = \frac{\eta(x)}{n} + \frac{g'^{(1)}+g''(1)}{n^2 g(1)} \qquad (4.1.5)$$

$$\mu_{n,4}^{\eta}\,(x) = \eta^2(x)\frac{3g(1)-2g''(1)}{n^2 g(1)} + \eta(x)\frac{g(1)+10g'(1)+7g''(1)}{n^3 g(1)}$$

$$+ \frac{g'(1)+7g''(1)+6g'''(1)+g^{(4)}(1)}{n^4 g(1)}$$

$$\mu_{n,6}^{\eta}\,(x) = \frac{-30g''(1)}{n^2 g(1)}\eta^4(x) + \frac{15g(1)+120g'(1)}{n^3 g(1)}\eta^3(x)$$

$$+ \frac{-85g''(1)+105g'^{(1)}+32g(1)}{n^4 g(1)}\eta^2(x)$$

$$+ \frac{g(1)+96g'(1)+180g''(1)+110g'''(1)+15g^4(1)}{n^5 g(1)}\eta(x)$$

$$+ \frac{g'(1)+31g''(1)+90g'''(1)+65g^{(4)}(1)+15g^{(5)}(1)+g^{(6)}(1)}{n^6 g(1)}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Önerme 4.1.4. Her $f \in C_B(\mathbb{R}^+)$ için ; $\| P_n^{\eta} f \| \leq \| f \|$.

İspat. Önerme 4.1.2 uygulandığında, bu önermenin ispatı kolayca elde edilir. Bu nedenle ayrıntılar atlanmıştır.

4.2 Ana Sonuçlar

İlk önce, P_n^{η} operatörleri için düzgün yakınsaklık teoremini şu şekilde oluşturuyoruz:
Ağırlıklı Korovkin teoremi (Gadziev 1974; Gadziev 1976) ve bu düzgün yakınsaklığı tahmin ediyoruz. Korovkin teoreminin ağırlıklı formu şu şekilde verilir:

Önerme 4.2.1 (Holhos, 2008)
$L_n;\ C_B(\mathbb{R}^+)'$dan $B_{\varphi}(\mathbb{R}^+)'$ye lineer pozitif operatör ve $n \geq 1$ ancak ve ancak K_n n'ye bağlı olarak pozitif bir sabit olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|L_n\,(\varphi; x)| \leq K_n \varphi(x) \tag{4.1.6}$$

Teorem 4.2.2 (Holhos, 2008)
$L_n;\ C_B(\mathbb{R}^+)'$dan $B_{\varphi}(\mathbb{R}^+)'$ye lineer pozitif operatör ve $n \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n\ \eta^{\nu} - \eta^{\nu} \|_{\varphi} = 0, \nu = 0,1,2.$$

Sonra herhangi bir $f \epsilon C_{\varphi}^{*}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için;

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n\ f - f \|_{\varphi} = 0.$$

Yukarıdaki teoremden yola çıkarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.3 Herhangi bir $f \epsilon C_{\varphi}^{*}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için;

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n^{\eta} f - f \|_{\varphi} = 0.$$

İspat. Teorem 4.2,2'yi uygulamak için, P_n^{η} operatörleri için (4.1.6) eşitsizliğine ihtiyacımız var. (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerini kullanarak;

$$\left|P_n^{\eta}(\varphi; x)\right| = 1 + \eta^2(x) + \frac{g(1) + 2g'(1)}{ng(1)}\eta(x) + \frac{g'(1) + g''(1)}{\eta^2 g(1)}$$

Tüm $x \in [0, \infty)$ değerleri için ve $\eta(x) < 1 + \eta^2(x)$ olduğundan;

$$\left|P_n^{\eta}(\varphi;x)\right| \leq \left(1+\eta^2(x)\right)\left(1+\frac{g(1)+2g'(1)}{ng(1)}+\frac{g'(1)+g''(1)}{\eta^2 g(1)}\right)$$

$$\leq \left(1+\eta^2(x)\right)\left(\frac{ng(1)+g'(1)(2+2n)+2g''(1)}{n^2 g(1)}\right) = C\left(1+\eta^2(x)\right)$$

olduğunu elde ederiz.

Ayrıca,

$\parallel P_n^{\eta}(\eta^0)-(\eta^0)\parallel_{\varphi}=0,$

$\parallel P_n^{\eta}(\eta)-(\eta)\parallel_{\varphi}\leq \frac{1}{n}\left|\frac{g'(1)}{g(1)}\right|$

$$\parallel P_n^{\eta}(\eta^2)-(\eta^2)\parallel_{\varphi}=\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\frac{\left|\frac{n(x)}{n}+\frac{g'(1)+g''(1)}{\eta^2 g(1)}\right|}{1+\eta^2(x)} \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left|\frac{g'(1)+g''(1)}{g(1)}\right|, \tag{4.1.7}$$

Buradan Teorem 4.2.2 de dikkate alarak; $\lim_{n\to\infty}\parallel P_n^{\eta} f-f\parallel_{\varphi}=0$ yazarız.

Teorem 4.2.4 (Holhos, 2008) Bir lineer pozitif operatör dizisi olan $L_n\colon C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)\longrightarrow B_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ için;

$\parallel L_n(\eta^0)-\eta^0\parallel_{\varphi^0}=a_n,$ (4.1.8)

$\parallel L_n(\eta)-\eta\parallel_{\varphi^{\frac{1}{2}}}=b_n,$

$\parallel L_n(\eta^2)-\eta^2\parallel_{\varphi}=c_n,$

$\parallel L_n(\eta^3)-\eta^3\parallel_{\varphi^{\frac{3}{2}}}=d_n,$ (4.1.9)

Burada $n\to\infty$ olmak üzere sıfır $a_n, b_n, c_n\ ve\ d_n$ ler sıfıra yaklaşmaktadırlar. Sonra tüm $f\epsilon C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ için,

$$\delta_n=2\sqrt{(a_n+2.b_n+c_n).(1+a_n)}+a_n+3.b_n+3.c_n+d_n$$

olmak üzere,

$$\parallel L_n(f)-f\parallel_{\varphi^{\frac{3}{2}}}\leq(7+4a_n+2c_n)\omega_{\eta}(f;\delta_n)+\parallel f\parallel_{\varphi} a_n.$$

Teorem 4.2.5 Her $f\epsilon C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ için,

$$\parallel D_n^{\eta}(f)-f\parallel_{\varphi^{\frac{3}{2}}}\leq\left(7+\frac{2\left(g(1)+3g'(1)+g''(1)\right)}{ng(1)}\right)\omega_{\eta}(f;\delta_n).$$

Burada,

$$\delta_n = 2.\sqrt{2b_n + c_n} + 3.b_n + 3.c_n + d_n \text{ ve } \; b_n, c_n, d_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

pozitif sayıların dizisi olarak alıyoruz.

İspat. Önce ilk olarak $a_n, b_n, c_n \; ve \; d_n$ dizilerini belirleyelim. (4.1.2) ve (4.1.3) ifadelerini göz önüne aldığımızda

$$\| P_n^{\eta}(\eta^0) - \eta^0 \|_{\varphi^0} = a_n = 0$$

$$b_n = \| P_n^{\eta}(\eta^2) - (\eta^2) \|_{\varphi} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2(x)}} \left| \frac{g'(1)}{g(1)} \right| \leq \frac{1}{n}.\left| \frac{g'(1)}{g(1)} \right|.$$

Ayrıca (4.1.7)'yi kullanarak,

$$c_n = \| P_n^{\eta}(\eta^2) - (\eta^2) \|_{\varphi} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{\big((g(1) + 2g'(1))n(x)\big)}{ng(1)(1+\eta^2(x))} + \frac{g'(1) + g''(1)}{\eta^2 g(1)(1+\eta^2(x))} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\left| \frac{g(1) + 2g'^{(1)}}{g(1)} \right| + \left| \frac{g'^{(1)} + g''^{(1)}}{g(1)} \right| \right).$$

Son olarak (4.1.4)'ü kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$d_n = \| P_n^{\eta}(\eta^3) - (\eta^3) \|_{\varphi^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left\{ \frac{\eta^2(x)}{n\big(1+\eta^2(x)\big)^{3/2}} \left| \frac{4g(1) + 3g'(1)}{g(1)} \right| \right.$$

$$+ \frac{\eta(x)}{n^2\big(1+\eta^2(x)\big)^{3/2}} \left| \frac{g(1) + 8g'(1) + 3g''(1)}{g(1)} \right|$$

$$\left. + \frac{1}{n^3\big(1+\eta^2(x)\big)^{3/2}} \left| \frac{g'(1) + 4g''(1) + g'''(1)}{g(1)} \right| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n}\left\{ \left| \frac{4g(1) + 3g'(1)}{g(1)} \right| + \left| \frac{g(1) + 8g'(1) + 3g''(1)}{g(1)} \right| \right.$$

$$\left. + \left| \frac{g'^{(1)} + 4g''^{(1)} + g'''^{(1)}}{g(1)} \right| \right\}.$$

Teorem 4.2.4'ün tüm koşulları sağlandığı için istenen sonucu elde ederiz.

Şimdi, aşağıda ikinci mertebeden süreklilik modülü aracılığıyla doğrudan bir yaklaşım teoremi vereceğiz.

Teorem 4.2.6 η; $(\eta_1)\ ve\ (\eta_2)$ koşullarını sağlasın ve $\|\eta''\|$ sonlu olsun. Eğer $f\epsilon\, C_B(\mathbb{R}^+)$ ise o zaman;

$$\left|P_n^\eta(f;x)-f(x)\right| \leq C\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{g(1).(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}}\right) + \min\left(1,\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)\|f\|\right\}+\omega\left(f,\frac{g'(1)}{ng(1)}\right),$$

yazabiliriz ki burada C belirli bir pozitif sayıdır.

İspat. İlk önce operatörleri tanımlayacağız.

$$\hat{P}_n^\eta(f;x)=P_n^\eta(f;x)+f(x)-(fo\eta^{-1})\left(\eta(x)+\frac{g'(1)}{ng(1)}\right).$$

Önerme 4.1.2'den açıkça görülmektedir ki;

$$\hat{P}_n^\eta(1;x)=P_n^\eta(1;x)=1 \tag{4.1.10}$$

ve

$$\hat{P}_n^\eta(\eta(t);x)=P_n^\eta(\eta(t);x)+\eta(x)-\frac{g'(1)}{ng(1)}=\eta(x). \tag{4.1.11}$$

Taylor formülüne göre $t\in\mathbb{R}^+$için $g\epsilon W_\infty^2$ yazabiliriz ki

$$\begin{aligned} g(t)&=(go\eta^{-1})\big(\eta(t)\big)\\ &=(go\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)+D(go\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)\big(\eta(t)-\eta(x)\big)\\ &+\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)D^2(go\eta^{-1})(u)du. \end{aligned}$$

olur.

Daha sonra (4.1.10) ve (4.1.11)'i kullanarak,

$$\hat{P}_n^\eta(g;x)-g(x)=\hat{P}_n^\eta\left(\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)D^2(go\eta^{-1})(u)du;x\right). \tag{4.1.12}$$

Ayrıca $u=\eta(y)$ düşünüldüğünde (4.1.12)'deki integrali şu şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)D^2(go\eta^{-1})(u)du$$

$$\int_{x}^{t}(\eta(t)-\eta(y))D^2(go\eta^{-1})\eta(y)\eta'(y)dy.$$

Aşağıdaki eşitliği kullanarak,

$$D^2(go\eta^{-1})\big(\eta(y)\big)=\frac{1}{\eta'(y)}\frac{g''(y)\eta'(y)-g'(y)\eta''(y)}{(\eta'(y))^2}, \tag{4.1.13}$$

$$\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)D^2(go\eta^{-1})(u)du$$

$$=\int_{x}^{t}(\eta(t)-\eta(y))\left(\frac{1}{\eta'(y)}\frac{g''(y)\eta'(y)-g'(y)\eta''(y)}{(\eta'(y))^2}\right)dy$$

$$\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g''(\eta^{-1}(u))}{(\eta'(\eta^{-1}(u)))^3}du-\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g'\big(\eta^{-1}(u)\big)\eta''\big(\eta^{-1}(u)\big)}{\big(\eta'(\eta^{-1}(u))\big)^3}du$$

şeklinde yazabiliriz.

O halde son durumda (4.1.12)'yi şu şekilde yazabiliriz.

$$\widehat{P}_n^{\eta}(g;x)-g(x)=\,^\wedge P_n^{\eta}\left(\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g''\big(\eta^{-1}(u)\big)}{\Big(\eta'\big(\eta^{-1}(u)\big)\Big)^3}du;x\right)$$

$$-\widehat{D}_n\left(\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g'\big(\eta^{-1}(u)\big)\eta''\big(\eta^{-1}(u)\big)}{\Big(\eta'\big(\eta^{-1}(u)\big)\Big)^3}du;x\right)$$

$$=P_n^{\eta}\left(\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g''\big(\eta^{-1}(u)\big)}{\Big(\eta'\big(\eta^{-1}(u)\big)\Big)^3}du;x\right)$$

$$-\int_{\eta(x)}^{\eta(x)+\frac{1}{n}}\left(\eta(x)+\frac{1}{n}-u\right)\frac{g''\big(\eta^{-1}(u)\big)}{\Big(\eta'\big(\eta^{-1}(u)\big)\Big)^3}du$$

$$-P_n^{\eta}\left(\int_{\eta(x)}^{\eta(t)}(\eta(t)-u)\frac{g'\big(\eta^{-1}(u)\big)\eta''(\eta^{-1}(u))}{\Big(\eta'\big(\eta^{-1}(u)\big)\Big)^3}du;x\right)$$

$$+\int_{\eta(x)}^{\eta(x)+\frac{1}{n}}\left(\eta(x)+\frac{1}{n}-u\right)\frac{g'\left(\eta^{-1}(u)\right)\eta''(\eta^{-1}(u))}{\left(\eta'\left(\eta^{-1}(u)\right)\right)^{3}}du.$$

Ayrıca (η_2)varsayımı aşağıdaki ifadeyi yazmamıza izin vermektedir.

$$\left|\hat{P}_n^{\eta}(g;x)-g(x)\right|\leq\left(\mu_{n,2}^{\eta}(x)+\frac{1}{n^2}\right)(\|g''\|+\|g'\|\|\eta''\|)$$

$$\leq\left(\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)(\|g''\|+\|g'\|\|\eta''\|)$$

Önerme 4.1.3 ve (4.1.5)'i kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\left|P_n^{\eta}(f;x)-f(x)\right|\leq\left|\hat{P}_n^{\eta}\,(f;x)-f(x)+(fo\eta^{-1})\left(\eta(x)+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq\left|\hat{P}_n^{\eta}(f-g;x)\right|+\left|\hat{P}_n^{\eta}(g;x)-g(x)\right|+|g(x)-f(x)|$$

$$+\left|(fo\eta^{-1})\left(\eta(x)+\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)-(fo\eta^{-1})(\eta(x))\right|$$

$$\leq 4\|f-g\|+\left(\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)$$

$$\times(\|g''\|+\|g'\|\|\eta''\|)+\omega\left(fo\eta^{-1},\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)$$

ve $C=max\{1,\|\eta''\|\}$ seçersek,

$$\left|P_n^{\eta}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq C\left\{\|f-g\|+\left(\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)(\|g''\|+\|g'\|+\|g\|)\right\}$$

$$+\omega\left(fo\eta^{-1},\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)$$

$$=C\left\{\|f-g\|+\left(\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)\|g\|_{W_\infty^2}\right\}$$

$$+\omega\left(fo\eta^{-1},\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)$$

elde ederiz.

Tüm $g\in W_\infty^2$ üzerinde sağ taraftaki infimumu alarak ve (4.1.1) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|P_n^{\eta}(f;x)-f(x)\right|$$
$$\leq CK_2\left(f;\left(\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)\right)+\omega\left(fo\eta^{-1},\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)$$
$$\leq C\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}}\right)\right.$$
$$\left.+\min\left(1,\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)\|f\|\right\}$$
$$+\omega\left(fo\eta^{-1},\frac{g'(1)}{ng(1)}\right)$$

elde ederiz.

Ayrıca $x\epsilon\ \mathbb{R}^+$ için

$\omega(fo\eta^{-1},t)=sup\{\left|f\left(\eta^{-1}(y)\right)-f\left(\eta^{-1}(x)\right)\right|:0\leq y-x\leq t\}$

$=sup\{|f(\hat{y})-f(\hat{x})|:0\leq\eta(\hat{y})-\eta(\hat{x})\leq t\}$.

eşitliğine sahibiz. Buradan,

$0\leq\ \eta(\hat{y})-\eta(\hat{x})\leq t$ olduğundan bazı $u\in(\hat{x},\hat{y}), i.e., 0\leq\hat{y}-\hat{x}\leq t/\eta'(u$

$\leq t$ için $0\leq(\hat{y}-\hat{x})\eta'(u)\leq t$.

Böylece;

$\omega(fo\eta^{-1},t)=\ sup\{|f(\hat{y})-f(\hat{x})|:0\leq\ \hat{y}\ -\ \hat{x}\leq t\}$

$=\omega(f,t)$.

Bu yüzden aşağıdaki istenilen ifadeye sahip oluruz.

$$\left|P_n^{\eta}(f;x)-f(x)\right|$$
$$\leq\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}}\right)\right.$$
$$\left.+\ \min\left(1,\frac{g(1)(n\eta(x)+1)+g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)\|f\|\right\}$$
$$+\omega\left(f,\frac{g'(1)}{ng(1)}\right).$$

5. YAKINSAMA ORANI

Bu bölümde P_n^η operatörlerinin noktasal yakınsamasını vereceğiz. Bunun için nicel bir Voronovskaya teoremi ve ispatını vererek başlayacağız. Burada, farklı süreklilik modüllerine göre farklı operatörler için nicel Voronovskaya teoreminin, (Acar 2005; Acar 2015; Acar 2016; Ulusoy ve ark., 2016) makalelerinde kapsamlı bir şekilde çalışıldığını söyleyebiliriz.

Teorem 5.1 Eğer η fonksiyon$(p_1),(p_2)$ koşullarını sağlıyorsa ve $f''/(\eta')^2\ ,f'.\eta''/(\eta')^3\ \epsilon\ C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere o zaman aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\left|n\left[P_n^\eta(f;x)-(f(x)\right]-\frac{g'(1)}{g(1)}D(fo\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)-\frac{\eta(x)}{2}D^2(fo\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)\right|$$

$$\leq\left|\frac{g'(1)+g''(1)}{2ng(1)}\right|\left|D^2(fo\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)\right|$$

$$+6n\ (\eta^2(x)+\eta(x)+2)\left(\frac{\eta(x)}{n}+\frac{g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}\right)$$

$$\times\left\{\omega_\eta\left(\frac{f'}{(\eta')^2},\left(\sqrt{\delta_n^\eta(x)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+\omega_\eta\left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3},\left(\sqrt{\delta_n^\eta(x)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right\}.$$

Bu arada herhangi $x\ \epsilon\ [0,\infty)$ için $\delta_n^\eta(x)=\frac{C}{n^3}\left|\frac{g''(1)\eta^5(x)(2g''(1)-3g(1))}{g^2(1)}\right|$ $ve\ c$ belirli bir sabittir.

İspat. $(fo\eta^{-1})$'nin Taylor açılımı aşağıda verilmiştir.

$$(fo\eta^{-1})\big(\eta(t)\big)=(fo\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)+D(fo\eta^{-1})\big(\eta(x)\big)\big(\eta(t)\big)-\big(\eta(x)\big)+$$
$$\frac{D^2(fo\eta^{-1})(\eta(x))(\eta(t))-(\eta(x))^2}{2}+h(t,x)\big(\eta(t)\big)-\big(\eta(x)\big)^2 \tag{5.1}$$

burada,

$h(t,x)=\frac{D^2(fo\eta^{-1})(\xi)-D^2(fo\eta^{-1})(\eta(x))}{2}$ alınmış olup $\xi,\eta(x)$ile $\eta(t)$ arasında bir sayıdır. Eğer P_n^η'i (5.1) açılımı için uygularsak;

$$\left|n\left[P_n^\eta(f,x)-f(x)\right]-\frac{g'(1)}{g(1)}D(fo\eta^{-1})\big(n(x)\big)-\frac{n(x)}{2}D^2(fo\eta^{-1})(n(x))\right|$$

$$\leq\left|nD(fo\eta^{-1})(n(x))\mu_{n,1}^\eta(x)-\frac{g'(1)}{g(1)}D(fo\eta^{-1})\big(n(x)\big)\right|$$

$$+\left|\frac{nD^2(fo\eta^{-1})\big(n(x)\big)}{2}\mu_{n,2}^{\eta}(x)-\frac{n(x)}{2}D^2(fo\eta^{-1})(n(x))\right|$$

$+nP_n^{\eta}(|h(t,x)|(\eta(t)-\eta(x))\ ^2;x)$ elde etmiş oluruz.

Daha sonra sırasıyla (4.1.13) ve (4.1.1)'i kullanarak;

$$|h(t,x)|=\frac{1}{2}\left\{\frac{f''(\xi)}{(n'(\xi))^2}-\frac{f''(x)}{\big(n'(x)\big)^2}+f'(x)\frac{\eta''(x)}{\big(\eta'(x)\big)^3}-f'(\xi)\frac{\eta''(\xi)}{(\eta'(\xi))^3}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{2}(\varphi(t)+\varphi(x))\left(2+\frac{|\eta(t)-\eta(x)|}{\delta}\right)\left\{\omega_\eta\left(\frac{f''}{(\eta')^2},\delta\right)+\omega_\eta\left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3},\delta\right)\right\}$$

ifadesini elde ederiz.

Diğer yandan her $|\eta(t)-\eta(x)|\leq\delta$ için $\varphi(t)+\varphi(x)\leq\delta^2+2\eta^2(x)+2\eta(x)\delta+2$ olduğundan,

$|h(t,x)|\leq\frac{3}{2}(\delta^2+2\eta^2(x)+2\eta(x)\delta+2)\left\{\omega_\eta\left(\frac{f''}{(\eta')^2},\delta\right)+\omega_\eta\left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3},\delta\right)\right\}$.

Buradan her;

$|\eta(t)-\eta(x)|>\delta$ için

$\varphi(t)+\varphi(x)\leq\left(\frac{\eta(t)-\eta(x)}{\delta}\right)^2(\delta^2+2\eta^2(x)+2\eta(x)\delta+2)$

$$|h(t,x)|\leq\frac{3}{2}(\delta^2+2\eta^2(x)+2\eta(x)\delta+2)\frac{|\eta(t)-\eta(x)|^3}{\delta}\left\{\omega_\eta\left(\frac{f''}{(\eta')^2},\delta\right)\right.$$
$$\left.+\omega_\eta\left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3},\delta\right)\right\}$$

sonucunu elde ederiz.

$\delta<1$ seçtiğimizde ise aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

$$|h(u,x)|\leq3(\eta^2(x)+\eta(x)+2)\left(\frac{|\eta(t)-\eta(x)|^3}{\delta^3}+1\right)$$
$$\times\left\{\omega_\eta\left(\frac{f''}{(\eta')^2},\delta\right)+\omega_\eta\left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3},\delta\right)\right\}.$$

Önerme 4.1.3 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini dikkate alarak,

$$\mu_{n,1}^{\eta}(x)=\frac{g'(1)}{ng(1)'}$$

$\mu_{n,2}^{\eta}(x)=\frac{\eta(x)}{n}+\frac{g'(1)+g''(1)}{n^2g(1)}$,

$$\left| n[P_n^\eta(f,x) - f(x)] - \frac{g'(1)}{g(1)} D(fo\eta^{-1})(n(x)) - \frac{n(x)}{2} D^2(fo\eta^{-1})(n(x)) \right|$$

$$\leq \left| \frac{g'(1) + g''(1)}{2ng(1)} \right| \left| D^2(fo\eta^{-1})(n(x)) \right| + 3n(\eta^2(x) + \eta(x) + 2)$$

$$\times \left\{ \omega_\eta \left(\frac{f''}{(\eta')^2}, \delta \right) + \omega_\eta \left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3}, \delta \right) \right\} \mu_{n,2}^\eta \left(1 + \frac{1}{\delta^3} \frac{\sqrt{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}}{\mu_{n,2}(x)} \right)$$

elde ederiz.

Eğer $\delta = \left(\sqrt{\frac{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}{\mu_{n,2}(x)}} \right)^{\frac{1}{3}}$ seçersek;

$$\left| n[P_n^\eta(f,x) - f(x)] - D(fo\eta^{-1})(n(x)) - \eta(x) D^2(fo\eta^{-1})(n(x)) \right|$$

$$\leq \left| \frac{g'(1)+g''(1)}{2ng(1)} \right| \left| D^2(fo\eta^{-1})(n(x)) \right| + 6n(\eta^2(x) + \eta(x) + 2)\mu_{n,2}^\eta$$

$$\times \left\{ \omega_\eta \left(\frac{f''}{(\eta')^2}, \left(\sqrt{\frac{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}{\mu_{n,2}(x)}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) + \omega_\eta \left(\frac{f'\eta''}{(\eta')^3}, \left(\sqrt{\frac{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}{\mu_{n,2}(x)}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right\} \tag{5.2}$$

sahip oluruz.

Öte yandan bazı basit hesaplamalarla aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \frac{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}{\mu_{n,2}(x)} = \frac{30}{g^2(1)} g''(1)\eta^5(x)(2g''(1) - 3g(1)).$$

Bu aşağıdaki ifadeyi sağlayacak pozitif bir C sabiti olduğu anlamına gelmektedir.

$$\left| \frac{\mu_{n,4}(x)\mu_{n,6}(x)}{\mu_{n,2}(x)} \right| \leq \frac{C}{n^3} \left| \frac{g''(1)\eta^5(x)(2g''(1) - 3g(1))}{g^2(1)} \right| := \delta_n^\eta(x).$$

Yukarıda elde ettiğimiz ifadeleri (5.2) de yerine koyarsak, istenen sonucu elde ederiz.

Yukarıdaki teoremin bir sonucunu ise aşağıda veriyoruz:

Sonuç 5.2 $f, f''/(\eta')^2, f'.\eta''/(\eta')^3 \epsilon C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olsun. Sonra herhangi bir $x\epsilon[0,\infty)$ için $\lim_{n\to\infty} n\left[P_n^\eta(f,x) - f(x)\right] = \frac{g\prime(1)}{g(1)} D(fo\eta^{-1})(n(x)) + \frac{n(x)}{2} D^2(fo\eta^{-1})(n(x))$.

Matlab Matematik uygulamasını kullanarak yeni P_n^ηoperatörlerini, klasik Jakimovski-Leviatan operatörleri P_n ile karşılaştırabiliriz. Bunun için $\eta\ ve\ g$ fonksiyonlarını seçerek analizler yapabiliriz. Yapılan analizler ve hesaplamalar sonucunda, P_n^{η} operatörlerinin P_n operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım sağladığını söyleyebiliriz. Bu karşılaştırma, $\eta\ ve\ g$ fonksiyonlarının seçimiyle birlikte, farklı fonksiyonlar ve veri kümeleri üzerinde gerçekleştirilebilir. Elde edilen sonuçlar, P_n^{η} operatörlerinin performansının genellikle daha yüksek olduğunu ve daha hassas sonuçlar verdiğini göstermektedir. Bu durum, özellikle yaklaşımın doğruluğu ve hızının kritik olduğu durumlarda P_n^{η} operatörlerinin tercih edilmesini desteklemektedir.

6. KAYNAKLAR

Abel, U., Ivan, M., 1999, Asymptotic Expansions and Derivatives of Jakimovski-Leviatan Operators. In: Functions, Series, Operators, *János Bolyai Math. Soc., Budapest*, 103-119.

Acar, T., 2005, Asymptotic Formulas for Generalized Szász-Mirakyan Operators. *Applied Mathematics and Computation*, 263: 223–239.

Acar, T., Aral, A., 2015, Pointwise Convergence and q-Derivatives of q-Bernstein Operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 36(3): 287-304.

Acar, T., Aral, A., Raşa, I., 2016, New Weighted Forms of Voronovskaya Type Theorems. *Positivity,* 20(1): 25-40.

Acar, T., Aral, A., Raşa, I., 2014, Modified Bernstein-Durrmeyer Operators. *General Mathematics*, 22(1): 27-41.

Acar, T., Ulusoy, G., 2016, Approximation by Modified Szász-Durrmeyer Operators. *Periodica Mathematica Hungarica*, 72(1): 64-75.

Altomare, F., Campiti, M., 1994, Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications. *In: De Gruyter Studies in Mathematics,* vol. 17. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Aral, A., Inoan, D., Raşa, I., 2014, On Generalized Szász-Mirakyan Operators. *Results in Mathematics,* 66(1-2): 441-452.

Ashieser, N.I., 1956, Lecture on Approximation Theory. OGIZ, Moscow-Leningrad. Translated by C.J. Hyman. Theory of Approximation (in English).

Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ., 2016, Approximation by Modified Integral Type Jakimovski–Leviatan Operators. *Filomat,* 30(1): 29–39.

Aydın Arı, D., 2017, Approximation Properties of Szasz Type Operators Involving Charlier Polynomials. *Filomat,* 31(2): 479-487.

Büyükyazıcı, İ., Tanberkan, H., Serenbay, S.K., Atakut, Ç., 2014), Approximation by Chlodowsky Type Jakimovski-Leviatan Operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259: 153-163.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P., Raşa, I., 2011, Bernstein Type Operators on Polynomials. *Applied Computational Mathematics*, 62: 158-163.

Ciupa, A., 2007, Modified Jakimovski-Leviatan Operators. *Creative Mathematics and Informatics,* 16: 13-19.

Ciupa, A., 2008, Approximation Properties of Modified Jakimovski-Leviatan Operators. *Automation, Computers, Applied Mathematics,* 17(3): 401-408.

Ersan, S., 2008, Approximation Properties of Two-Variable q-Bleimann, Butzer and Hahn Operators. Ph.D. Thesis, *Ankara University*, Ankara.

Gadziev, A.D., 1974, Convergence Problems for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and P.P. Korovkin's Theorems. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 218: 1001-1004. Also in Soviet Mathematics Doklady*, 15: 1433-1436 (in English).

Gadziev, A.D., 1976, Theorems of the Type of Korovkin's Theorems. Mathematische Zeitschrift, 205: 781-786. *Translated in Mathematics Notes*, 20(5-6): 995-998.

Gadjiev, A.D., Aral, A.,2007, The Estimates of Approximation Using a New Type of Weighted Modulus of Continuity. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(1): 127-135.

Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H., 1995, Convergence of Sequences of Linear Positive Operators. *A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Publications,* 1-100, Ankara.

Hilbert, D., 1903, Grundzüge der Geometrie. Verlag von Julius Springer.

Holhos, A., 2008, Quantitative Estimates for Positive Linear Operators in Weighted Spaces. *General Mathematics*, 16(4): 99-110.

Ispir, N., Atakut, Ç., 2002, Approximation by Modified Szasz-Mirakjan Operators on Weighted Spaces. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-*Mathematical Sciences*, 112(4): 571-578.

Ispir, N., 2001, On Modified Baskakov Operators in Weighted Spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 25: 355-365.

Jakimovski, A., Leviatan, D., 1969, Generalized Szász Operators for Approximation on an Infinite Interval. *Mathematica (Cluj)*, 34: 97-103.

Karaisa, A., 2016, Approximation with Durrmeyer Type Jakimovski-Leviatan Operators. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 39(9): 2401-2410.

Karaisa, A., Karakoç, F., 2016, Stancu Type Generalization of the Dunkl Analogue of Szász Operators. *Applied Mathematics and Computation*, 26(4): 1235-1248.

Korovkin, P.P., 1960, Linear Operators and Approximation Theory. *Russian Monographs and Texts on Advanced Mathematics*, III, 1-63, Gordon & Breach.

Leśniewicz, Rempulska, L., 1997, Approximation by Some Operators of the Szasz–Mirakjan Type in Exponential Weight Spaces. *Glasnik Matematicki*, 32(52): 57–69.

Lorentz, G.G., 1953, Bernstein Polynomials. *University of Toronto Press*, Toronto.

Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., 2003, Analysis II with Theory and Solved Problems. Tekağaç Eylül Publications, Kütahya.

SN Bernstein, 1912, Communications of the Society of Mathematics, *Kharkov*, Ser.

T Popoviciu, 1935, Mathematica (Cluj).

Varma, S., Tasdelen, F., 2012, Szasz Type Operators Involving Charlier Polynomials. *Mathematical and Computational Modelling*, 56: 118–122.

Ulusoy, G., Acar, T., 2016, q-Voronovskaya Type Theorems for q-Baskakov Operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(16): 3391-3401. https://doi.org/10.1002/mma.3784.

Weierstrass, K. G., 1885, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veranderlichen. Sitzungsber, Akad., Berlin.

Wood, B., 1969, Generalized Szász Operators for Approximation in the Complex Domain. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(4): 790-801.