T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYONLARDA BAZI FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Serpil TÜTÜNCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Serpil TÜTÜNCÜ tarafından hazırlanan "Split Kuaterniyonlarda Bazı Fonksiyonlar Üzerine " adlı tez çalışması …/…/… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Nesip AKTAN	…………………..
Danışman	
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU	…………………..
Üye	
Dr. Öğr. Üyesi Gülay KORU YÜCEKAYA	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Serpil TÜTÜNCÜ

Tarih: 13.06.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
SPLİT KUATERNİYONLARDA BAZI FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Serpil TÜTÜNCÜ
Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

2019, 52 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Gülay KORU YÜCEKAYA

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili literatür özeti verilmiştir. İkinci kısımda, split kuaterniyonlara ait temel tanımlar ve özellikler ifade edilmiştir. Ayrıca, split kuaterniyonların en önemli geometrik uygulamasına değinilmiştir. Üçüncü kısımda, split kuaterniyonlarda kuvvet fonksiyonunun hesaplanması üzerinde durulmuştur. Kuvvet fonksiyonunu hesaplanması için üç farklı metot ifade edilmiştir. Bu kısımda, split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili yardımıyla kuvvet fonksiyonunun bulabilmek için yeni bir metot elde edilmiştir. Dördüncü kısımda, split kuaterniyonların 2×2 kompleks matrisi yardımıyla üstel fonksiyonunun bulabilmek için yeni bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemde 2×2 boyutlu kompleks matrisler için (Berstein ve So, 1998) çalışmasında elde edilen sonuçlardan da faydalanılmıştır. Son olarak sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuvvet Fonksiyonu, Matris Temsili, Split Kuaterniyonlar, Üstel Fonksiyon.

ABSTRACT

MS THESIS
ON SOME FUNCTIONS OF SPLIT QUATERNIONS

Serpil TÜTÜNCÜ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assist. Prof.Dr. Melek ERDOĞDU

2019, 52 Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Assist. Prof. Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA

This thesis consists of four sections. In the introduction section, a summary of the related literature is given. In the second section, the basic definitions and features of split quaternions are expressed. In addition, the most important geometric application of split quaternions is mentioned. The third section focuses on the calculation of the power function in split quaternions. Three different methods for the calculation of power function are expressed. In this section, a new method is obtained to find the power function by the 2×2 complex matrix representation of the split quaternions. In fourth section, a new method was obtained to find the exponential function of the split quaternions with the help of the 2×2 complex matrix. In this method, the results obtained in the study for the 2×2 dimensional complex matrices (Berstein and So, 1998) were also used. Finally, conclusions and reccommendations are given.

Keywords: Exponential Function, Matrix Representation, Power Function, Split Quaternions.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıç aşamasından itibaren fikir veren, yönlendiren, her türlü desteği sağlayıp sabırla yardımcı olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU ’ya tüm samimiyetimle teşekkür eder saygılar sunar tüm akademik hayatı boyunca başarılarının artarak devam etmesini temenni ederim.

Çalışmalarım esnasında her adımda destek olup azim kaynağım olan eşim Ali TÜTÜNCÜ’ ye ve varlığıyla manevi gücüm olan minik oğlum Göktürk Ali TÜTÜNCÜ’ ye çok teşekkür ederim.

Serpil TÜTÜNCÜ
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	: 3 boyutlu reel vektör uzayı
q	: Kuaterniyon
$\bar{q}$	: q split kuaterniyonun eşleniği
$\vec{V}_q$	: Kuaterniyonun vektörel kısmı
s_q	: q kuaterniyonunun skaler kısmı
s	: Kuaterniyonun skaler kısmı
H_s	: Split kuaterniyon kümesi
N_q	: Split kuaterniyonun normu
I_q	: Split kuaterniyonun karakteri
$\mathbb{R}_1^3$	: Lorentz (Minkowski) Uzayı
H_{s_0}	: Pure Split Kuaterniyonlar Kümesi
$\times_L$	: Lorentz vektörel çarpımı
$\langle\ ,\ \rangle_L$	: Lorentz Metriği
$\vec{\varepsilon}$	: Birim vektör
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının standart baz elemanları
TH_s	: Timelike split kuaterniyonlar kümesi
TH_{s_1}	: Birim timelike split kuaterniyonlar kümesi
$SO(1,2)$	: 3 Boyutlu Lorentz Uzayında özel ortogonal dönüşümler kümesi
R_q	: q birim timelike kuaterniyonun karşılık geldiği dönme dönüşümü
$\mathbb{C}(q)$	: q kuaterniyonun 2×2 kompleks matris temsili
$M_2(\mathbb{C})$	: 2×2 kompleks matrisler kümesi

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar; 1843 yılında, İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından yeni bir sayı sistemi olarak tanıtılmıştır. Kuaterniyonlar kümesi kompleks sayıların bir tür genelleştirmesi olarak

$$H = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

şeklinde tanıtılmıştır (Wilkins, 1843). Burada imajiner birimler i, j ve k aşağıdaki ilişkileri sağlar:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \; ve \; ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \tag{1.2}$$

Hamilton, kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için bölümün de mümkün olabileceği yeni bir çarpım işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Yani kuaterniyonlar keşfedilmiş ilk bölüm cebiridir (Hacısalihoğlu,1983; Kantor ve Solodovnikov, 1989).

Kuaterniyonlar çarpmaya göre değişmeli değildir. Bu sebepten, kompleks ve reel sayılardan farklı bazı özelliklere sahiptir. Bu özelliklerin incelendiği pek çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların büyük bir kısmı kuaterniyonların matris temsillerini kullanmıştır (Brenner, 1951; Gürlebeck ve Sprossing, 1997; Grob ve Ark., 2001; Farebrother ve Ark., 2003).

Son zamanlarda, kuaterniyon matrisleri üzerine yapılmış çalışmalar da mevcuttur. Bunların en önemlisi Zhang'ın (1997) yapmış olduğu $n \times n$ tipindeki kuaterniyon matrislerin $2n \times 2n$ kompleks matris temsilleri yardımı ile incelediği çalışmadır (Zhang, 1997). Ayrıca, bu çalışmada kuaterniyon matrislerine ait iyi bilinen sonuçlar için yeni ispatlar verilmiştir.

Kuaterniyonların keşfedilmesinden altı yıl sonra, James Cockle tarafından split kuaterniyonlar kümesi, o zaman ki adı ile kokuaterniyonlar kümesi tanıtılmıştır (Cockle, 1849). Kokuaterniyonlar kümesi, zamanla birim elemanların pozitif ve negatif birimler olarak ikiye bölünüyor olmasından dolayı, split (bölünmüş) kuaterniyonlar olarak adlandırılmıştır. Split kuaterniyonlar, kuaterniyonlara benzer olarak değişmeli olmayan bir cebirdir. Fakat sıfır bölen, nilpotent eleman ve sıfırdan farklı idempotent eleman içerir (Kula, 2003; Özdemir, 2009).

Split kuaterniyonların geometride pek çok uygulama alanı mevcuttur (Kula, 2003). Bunlardan en önemlisi, Öklid uzayında dönmelerin kuaterniyonlar ile ifade edildiği gibi, Minkowski uzayındaki dönmelerin birim timelike split kuaterniyonlar ile ifade edilebilmesidir (Özdemir ve Ergin, 2005; Özdemir ve Ergin, 2006; Özdemir, 2007). Bu ifade edilişi kullanarak Özdemir ve Ark. (2014) tarafından, Minkowski 3-uzayında dönme matrislerinin özdeğer ve özvektörleri split kuaterniyonlar yardımı ile incelenmiştir (Özdemir ve Ark., 2014). Kula ve Yaylı (2007) ise split kuaterniyonlar ile yarı Öklid uzayındaki dönme dönüşümlerini ifade etmiştir. Diğer taraftan, Ata ve Yaylı (2009) split kuaterniyonlar ile yarı Öklid projektif uzayları birlikte ele almıştır (Ata ve Yaylı, 2009).

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar hakkında bilgiler, bazı kaynaklardan alıntı yapılarak verilmiştir.

İkinci kısımda, split kuaterniyonlara ait temel tanımlar ve özellikler ifade edilmiştir. Bununla birlikte, split kuaterniyonların en önemli geometrik uygulaması olan, Minkowski 3-uzayındaki dönme dönüşümlerinin birim time timelike split kuaterniyonlarla ifade edilişi verilmiştir.

Üçüncü kısımda, split kuaterniyonların n. kuvvetinin hesaplanması üzerinde durulmuştur. Kuvvet fonksiyonunu hesaplanması için üç farklı method ifade edilmiştir. Öncelikle (Özdemir, 2009) çalışmasında ifade edilen analitik yöntem incelenmiştir. Ardından, De Moivre formülü kullanarak kuvvet fonksiyonunun ifade edilişi üzerinde durulmuştur. Son olarak split kuaterniyonların 2×2 kompleks matrisi yardımıyla kuvvet fonksiyonunun bulabilmek için yeni bir yöntem elde edilmiştir.

Dördüncü kısımda, split kuaterniyonların 2×2 kompleks matrisi yardımıyla üstel fonksiyonunun bulabilmek için yeni bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemde 2×2 boyutlu kompleks matrisler için (Berstein ve So, 1998) çalışmasında elde edilen sonuçlardan da faydalanılmıştır.

Son kısımda ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. SPLİT KUATERNİYONLAR

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $H_s = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k; q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$ kümesine split kuaterniyon kümesi denir. İmajiner elemanları ise,

$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = ijk = 1 \; ve \; ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j \qquad (2.1)$$

eşitliği vardır (Cookle, 1849; İngouchi, 1998 ve Kula, 2003).

Tanım 2.2. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun $s_q = q_0$ reel sayısına kuaterniyonun skaler kısmı denir (Kula; 2003).

Tanım 2.3. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunda $q_0 = 0$ ise q'ya püre split kuaterniyon denir. Pure split kuaterniyon kümesi ise,

$$H_{s_0} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H_s; q_0 = 0\} \qquad (2.2)$$

ile gösterilir (Kula, 2003).

Tanım 2.4. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunda $\vec{V}_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kısmına kuaterniyonun vektörel kısmı denir (Kula, 2003).

Örnek 2.1. $q = 7 + i - 2j + 3k$ split kuaterniyonun skaler ve vektörel kısmını inceleyelim.

$s_q = 7$ ve $\vec{V}_q = i - 2j + 3k$ şeklinde bulunur.

2.2. Split Kuaterniyonların Toplamı

Tanım 2.2.1. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere split kuaterniyonların toplamı,

$$p + q = (s_p + s_q) + (\vec{V}_p + \vec{V}_q) \tag{2.3}$$

$$= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

2.3. Split Kuaterniyonların Skalerle Çarpımı

Tanım 2.3.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu ile $\alpha \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı,

$$\alpha q = q\alpha = (\alpha q_0) + (\alpha q_1)i + (\alpha q_2)j + (\alpha q_3)k \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin, 2007; Kula ve Yaylı, 2007).

Örnek 2.3.1 $p = i - j + 3$, $q = 2i + 3k - 5$ split kuaterniyonları verilsin, buradan $2p - q$' yu bulalım.

$2p - q = 2(i - j + 3) - (2i + 3k - 5)$ olarak bulunur.

2.4. Split Kuaterniyonların Çarpımı

Tanım 2.4.1. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonlarının çarpımı;

$$\begin{aligned} pq = {} & (p_0 q_0 - p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + (p_1 q_0 + p_0 q_1 - p_2 q_3 + p_3 q_2)i + \\ & (p_0 q_2 + p_2 q_0 - p_1 q_3 + p_3 q_1)j + (p_0 q_3 + p_3 q_0 - p_2 q_1 + p_1 q_2)k \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan,

$$s_p s_q = p_0 q_0 \tag{2.7}$$

$$s_p \vec{V}_q = p_0 q_1 i + p_0 q_2 j + p_0 q_3 k \tag{2.8}$$

$$s_q\vec{V}_P = q_0p_1i + q_0p_2j + q_0p_3k \tag{2.9}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\vec{V}_p \times_L \vec{V}_q = \begin{pmatrix} -i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = -p_2q_3i + p_1q_2k + q_1p_3j - p_1q_3j +$$
$$p_3q_2i + p_2q_1k \tag{2.10}$$

$$\langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle_L = p_1iq_1i + p_2jq_2j + p_3kq_3k = -p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \tag{2.11}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak p ve q split kuaterniyonların çarpımı,

$$pq = s_ps_q + \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle_L + s_p\vec{V}_q + s_q\vec{V}_p + \vec{V}_p \times_L \vec{V}_q \tag{2.12}$$

şeklinde de yazılabilir (Özdemir ve Ergin, 2005).

Örnek 2.4.1. $p = i - 3, q = j + k$ split kuaterniyonları olmak üzere pq' yu bulalım. Tanım gereği, $pq = (i-3)(j+k) = ij + ik - 3j - 3k = -4j - 2k$ olarak bulunur. Diğer yandan Denklem 2.4.1' i kullanarak pq split kuaterniyonunu bulmak istersek, $s_ps_q = 0$, $s_p\vec{V}_q = -3j - 3k$, $s_q\vec{V}_p = 0$, $s_q\vec{V}_p = 0$, $\langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle_L = 0$ ve $\vec{V}_p \times_L \vec{V}_q = k - j$ olduğundan $pq = -4j - 2k$ olarak bulunur.

Önerme 2.4.2. Her $p, q \in H_s$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$i)\ a(p+q) = ap + aq \tag{2.13}$$

$$ii)\ (a+b)p = ap + bp \tag{2.14}$$

$$iii)\ (ab)p = a(bp) = b(ap) \tag{2.15}$$

$$iv)\ 1q = q \tag{2.16}$$

özellikleri sağlanır.

Yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte split kuaterniyonlar bir reel vektör uzayıdır (Kula, 2003).

Önerme 2.4.2. Split kuaterniyonun çarpımları aşağıdaki özellikleri sağlar.
$i)$ İki split kuaterniyonun çarpımı bir split kuaterniyondur.
$ii)$ Split kuaterniyonun çarpımı birleşmelidir.
$iii)$ Split kuaterniyon çarpımı dağılmalıdır.
fakat split kuaterniyonun çarpımı değişmeli değildir. Bu özellikler ile split kuaterniyonlar birleşmeli bir cebirdir. Bu cebirin bazı $\{1, i, j, k\}$ olup boyutu dörttür (Kula, 2003).

2.5. Split Kuaterniyonların Eşleniği

Tanım 2.5.1. $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ split kuaterniyonu olmak üzere,

$$\bar{q} = s_q - \vec{V}_q = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \quad (2.17)$$

ifadesine split kuaterniyonun eşleniği denir. Buradan,

$$\bar{\vec{V}}_q = -\vec{V}_q \quad (2.18)$$

olduğu görülür (Özdemir ve Ergin, 2005).

Örnek 2. 5. 1. $p = 3 + i - 2j + 3k$ split kuaterniyonun eşleniğini bulalım. Burada, $s_p = 3, \vec{V}_p = i - 2j + 3k$ olduğundan $\overline{p} = s_p - \vec{V}_p = 3 - i + 2j - 3k$ olarak bulunur.

2. 6. Split Kuaterniyonun Normu

Tanım 2.6.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu olmak üzere,

$$N_q = \|q\| = \sqrt{|{q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2|} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin, 2005).

Tanım 2. 6. 1. $q \in H_s$ olmak üzere $N_q = 1$ ise q' ya birim split kuaterniyon denir (Kula, 2003).

Önerme 2. 6. 1. $q \in H_s$ olmak üzere $\|\bar{q}\|$=$\|q\|$ olur.

İspat: $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve $\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ olmak üzere q split kuaterniyonunun eşleniğinin normunu bulalım.

$$\|\bar{q}\| = \sqrt{|\bar{q}\overline{(\bar{q})}|}=\sqrt{|\bar{q}q|}\sqrt{(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)} \tag{2.20}$$

$$= \sqrt{|{q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2|} \tag{2.21}$$

olduğundan

$$\|\bar{q}\| = \|q\| \tag{2.22}$$

bulunur (Özdemir ve Ergin, 2005).

2. 7. Split Kuaterniyonun Tersi

Tanım 2.7.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere, eğer $N_q \neq 0$ ise

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{(N_q)^2} = \frac{q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k}{{q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2} \tag{2.23}$$

ifadesine q split kuaterniyonun tersi denir (Özdemir ve Ergin, 2005).

2. 8. Split Kuaterniyonun Kompleks Sayılarla Gösterimi

Tanım 2.8.1. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunu $q = q_0 + q_1 i + (q_2 + q_3 i)j$ olarak yazabiliriz. Buradan $c_1 = q_0 + q_1 i$ ve $c_2 = q_2 + q_3 i$ kompleks sayılar olmak üzere her split kuaterniyonu $q = c_1 + c_2 j$ kompleks sayı şeklinde gösterilir (Alagöz ve Ark., 2012).

2. 9. Split Kuaterniyonun Karakteri

Tanım 2.9.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için,

$$I_q = q\bar{q} = \bar{q}q = {q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 \tag{2.24}$$

değeri q split kuaterniyonun karakterini gösterir. Eğer,
I_q< 0 ise q' ya spacelike kuaterniyon;
I_q > 0 ise q' ya timelike kuaterniyon;
$I_q = 0$ ise q' ya lightlike (null) kuaterniyon
adı verilir (Özdemir and Ergin; 2005).

Sonuç 2. 9. 1. $q \in H_s$ lightlike (null) split kuaterniyon ise

$$I_q = q\bar{q} = {q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 = 0, N_q = \|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = 0 \tag{2.25}$$

elde edilir. Bu yüzden lightlike (null) split kuaterniyonların tersi yoktur.

2. 10. Split Kuaterniyonların Geometrik Uygulaması

Tanım 2.10.1. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.26}$$

ile tanımlanan metriğe Lorentz Metriği denir ve bu metrik ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayına üç boyutlu Lorentz (Minkovski) uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım $\mathbb{R}_1^3$' deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır.

$$\vec{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, u_3) \in \mathbb{R}_1^3 \tag{2.27}$$

olmak üzere;

$i)$ $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L$>0 (veya $\vec{u}=0$) ise $\vec{u}$' ya spacelike vektör,

$ii)$ $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L$<0 ise $\vec{u}$' ya timelike vektör,

$iii)$ $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L=0$ ise $\vec{u}$' ya lightlike (null) vektör

denir (Özdemir ve Ergin, 2005).

Minkowski 3-uzayındaki timelike vektör için eğer ilk bileşen pozitif ise future pointing timelike vektör, ilk bileşen negatif ise ise past pointing timelike vektör adı verilir. Ayrıca $\forall\, \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}_1^3$ için,

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L=-u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & u_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$I^*=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.29}$$

olup ''-1'' işaretinin konumu $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin $\mathbb{R}_1^3$' ün hangi bazına göre yazıldığına bağlı olarak değişir. Burada, $\{\overrightarrow{e_1}=(1,0,1), \overrightarrow{e_2}=(0,1,0), \overrightarrow{e_3}=(0,0,1)\}$ bazına göre yazılmıştır.

$$I_{ij}{}^*=\langle\vec{e_i},\vec{e_j}\rangle_L \tag{2.30}$$

eşitliğinden,

$$I_{11}{}^*=\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}\rangle_L=-1, I_{22}{}^*=\langle\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\rangle_L=1, I_{33}{}^*=\langle\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3}\rangle_L=1 \tag{2.31}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.10.2. $\vec{u} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L|}$ olarak tanımlanır (Özdemir ve Ergin, 2005).

Tanım 2.10.3. $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$\times_L = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}_1^3 \tag{2.32}$$

$$(\vec{u},\vec{v}) =\to \vec{u} \times_L \vec{v} = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlı olup $\times_L$ operatörüne Lorentz uzayında vektörel çarpım adı verilir. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\langle\vec{u} \times_L \vec{v},\vec{w}\rangle = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \tag{2.34}$$

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = -\vec{v} \times_L \vec{u} \tag{2.35}$$

$$\langle\vec{u} \times_L \vec{v},\vec{u}\rangle = \langle\vec{u} \times_L \vec{v},\vec{v}\rangle = 0 \tag{2.36}$$

$$(\vec{u} \times_L \vec{v}) \times_L \vec{w} = \langle\vec{u},\vec{w}\rangle_L \vec{v} + \langle\vec{v},\vec{w}\rangle_L \vec{u} \tag{2.37}$$

$$\langle\vec{u} \times_L \vec{v},\vec{u} \times_L \vec{v}\rangle = -\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L + (\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L)^2. \tag{2.38}$$

Tanım 2.10.4. $\forall\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ için $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ future pointing (past pointing) timelike vektörler ise $\vec{u} \times_L \vec{v}$ bir spacelike vektör olup,

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| cosh\,\theta \quad \text{ve} \quad \|\vec{u} \times_L \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sinh\,\theta \tag{2.39}$$

ii) Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri,

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L| < \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \tag{2.40}$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $u \times_L v$ bir timelike vektör olup

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \text{ ve } \|\vec{u} \times_L \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sin\theta \tag{2.41}$$

olur.

iii) Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri,

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L| > \|u\|\|v\| \tag{2.42}$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $u \times_L v$ bir spacelike vektör olup

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| cosh\theta, \quad \|\vec{u} \times_L \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sinh\theta \tag{2.43}$$

ilişkileri sağlanır. Burada θ; $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

iv) Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \tag{2.44}$$

eşitliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\vec{u} \times_L \vec{v}$ bir lightlike (null) vektördür (Özdemir ve Ergin, 2006; Kula ve Yaylı, 2007).

Timelike split kuaterniyonun vektörel kısmı spacelike, timelike veya lightlike (null) olabilir. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için;

i) q timelike ve $\vec{V}_q$ spacelike vektör ise

$$q = N_q(cosh\theta + \vec{u} sinh\theta) \tag{2.45}$$

olarak yazılır. Burada

$$cosh\theta = \frac{q_0}{N_q}, sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}{N_q}, \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{2.46}$$

ise birim spacelike vektördür.

$ii)$ q timelike ve $\vec{V}_q$ timelike vektör ise

$$q = N_q(cos\theta + \vec{u}sin\theta) \tag{2.47}$$

olarak yazılır. Burada,

$$cos\theta = \frac{q_0}{N_q} \text{ ve } sin\theta = \frac{\sqrt{{q_1}^2-{q_2}^2-{q_3}^2}}{N_q} \text{ olup } \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{{q_1}^2-{q_2}^2-{q_3}^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{2.48}$$

ise birim timelike vektördür (Özdemir, 2005; Özdemir ve Ergin, 2006). Timelike split kuaterniyonlar kümesi,

$$TH_s = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3): q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, I_q > 0\} \tag{2.49}$$

ile gösterilir ve split kuaterniyon çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Diğer yandan birim timelike split kuaterniyonlar kümesi

$$TH_{s_1} = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3): q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, I_q > 0 \; ve \; N_q = 1\} \tag{2.50}$$

ile gösterilir.

Minkowski 3-uzayında her dönme dönüşümü birim timelike split kuaterniyonlarla ifade edilebilir. Minkowski 3-uzayındaki dönme dönüşümlerinin kümesi

$$SO(1,2) = \{R \in M_3(\mathbb{R}): I^* R^T I^* R = I \;\; ve \; detR = 1\} \tag{2.51}$$

olarak temsil edilir. Her $\vec{u}, \vec{v} \in E_1^3$ için,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = u^T I^* v \tag{2.52}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde, her $R \in SO(1,2) \; ve \; \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ için,

$$\langle R\vec{u}, R\vec{v} \rangle_L = (R\vec{u})^T I^* (R\vec{v}) = u^T R^T I^* R v = \vec{u}^T R^T I^* R \vec{v} = \vec{u}^T I^* \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \tag{2.53}$$

olduğu görülür. Minkowski 3-uzayında dönme dönüşümleri, açıları, uzunlukları ve vektörlerin karakterlerini korur. Elbette ki dönme açısının çeşidi (küresel veya hiperbolik) ve dönme ekseninin karakteri dönme dönüşümüne bağlıdır.

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ birim timelike split kuaterniyonu için

$$R_q : \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}_1^3 \tag{2.54}$$

$$x \to R_q(x) = qxq^{-1} \tag{2.55}$$

dönüşümü lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen matris ise

$$R_q = \begin{bmatrix} {q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 & 2q_0q_3 - 2q_1q_2 & -2q_0q_2 - 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_0 & q_0 - {q_1}^2 - {q_2}^2 + {q_3}^2 & -2q_2q_3 - 2q_1q_0 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_0 & 2q_1q_0 - 2q_2q_3 & {q_0}^2 - {q_1}^2 + {q_2}^2 - {q_3}^2 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

olarak elde edilir. Buradan $I^* R_q^T I^* R_q = I$ ve $detR_q = 1$ olduğu açıkça görülür. Yani $R \in SO(1,2)$' dir. Tersine $R = (R_{ij}) \in SO(1,2)$ verildiğinde, bu dönme dönüşümüne karşılık gelen $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ birim timelike split kuaterniyonu aşağıda verilen formüller yardımı ile elde edilebilir.

i) Eğer $q_0 \neq 0$ ise

$${q_0}^2 = \frac{1}{4}(1 + R_{11+}R_{22} + R_{33}), \tag{2.57}$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_0}(R_{32} - R_{23}), \tag{2.58}$$

$$q_2 = -\frac{1}{4q_0}(R_{13} + R_{31}), \tag{2.59}$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_0}(R_{21} + R_{12).} \tag{2.60}$$

ii) Eğer $q_0 = 0$ ise

$$q_2 = -\frac{1}{2q_1} R_{12}, \tag{2.61}$$

$$q_3 = -\frac{1}{2q_1} R_{13}, \tag{2.62}$$

$$q_1{}^2 = 1 + q_2{}^2 + q_3{}^2 \tag{2.63}$$

olur (Özdemir, 2005; Özdemir ve Ergin, 2006; Erdoğdu ve Ark. 2014).

Minkowski 3-uzayındaki her dönme dönüşümüne karşılık gelen q ve $-q$ olmak üzere iki birim timelike split kuaterniyon vardır. Buradan görülüyor ki Minkowski 3-uzayındaki her dönme dönüşümüne karşılık gelen skaler kısmı pozitif olan bir tek q bir birim timelike split kuaterniyonu vardır. Burada q' nun vektörel kısmının karakteri; dönme açısının ve dönme ekseninin karakterinin belirlenmesinde önem taşır.

Teorem 2.10.3. $q = cosh\theta + \vec{u}sinh\theta$ birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, R_q dönüşümü u spacelike ekseni etrafında 2θ hiperbolik açı kadar dönmeyi ifade eder (Özdemir ve Ergin, 2006).

İspat: u spacelike birim vektör olmak üzere, $q = cosh\theta + usinh\theta$ birim timelike split kuaterniyonu olsun. Bir $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{u}\}$ ortonormal üçlüsü alalım öyle ki

$$\langle \overrightarrow{e_1}, \vec{u} \rangle_L = 0,\ \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} \rangle = -1 \text{ ve } \overrightarrow{e_2} = \vec{u} \times_L \overrightarrow{e_1} \tag{2.64}$$

olsun. $\overrightarrow{e_1}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki her x spacelike (timelike) birim vektörü,

$$x = cosh\alpha\vec{u} + sinh\alpha\vec{e}_1 \quad (x = sinh\alpha\vec{u} + cosh\alpha\vec{e}_1) \tag{2.65}$$

Şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{\alpha}, \vec{x}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. O halde $R_q(\vec{u})$ ve $R_q(\vec{e}_1)$ vektörlerini hesaplamamız yeterli olacaktır. R_q lineer dönüşümünün tanımını ve $u^2 = 1$ olduğunu kullanarak;

$$R_q(\vec{u}) = (cosh\theta + \vec{u}sinh\theta)\vec{u}(cosh\theta - sinh\theta) \tag{2.66}$$

$$=(\cosh\theta\vec{u} + sinh\theta)(cosh\theta - \vec{u}sinh\theta) = \cosh^2\theta\vec{u} - sinh^2\theta\vec{u} = \vec{u} \tag{2.67}$$

olduğu görülür. Diğer yandan,

$$\vec{u}e_1 = \langle u, e_1\rangle_L + \vec{u} \times_L e_1 = e_2, \tag{2.69}$$

$$e_1\vec{u} = \langle e_1, \vec{u}\rangle_L + e_1 \times_L \vec{u} = -e_2, \tag{2.70}$$

$$e_2\vec{u} = \langle e_2, \vec{u}\rangle_L + e_2 \times_L \vec{u} = e_1 \tag{2.71}$$

ilişkileri kullanılırsa

$$R_q(e_1) = (cosh\theta + \vec{u}sinh\theta)e_1(cosh\theta - \vec{u}sinh\theta) \tag{2.72}$$

$$=(cosh\theta e_1 + sinh\theta e_2)(cosh\theta - \vec{u}sinh\theta) \tag{2.73}$$

$$=cosh^2\theta e_1 + 2cosh\theta sinhe_2 + sinh^2\theta e_1 \tag{2.74}$$

$$=\cosh(2\theta)\, e_1 + \sinh(2\theta) e_2 \tag{2.75}$$

elde edilir. Bu da bize R_q dönüşümü ile $\vec{x}$ vektörünün $\vec{u}$ spacelike ekseni boyunca 2θ hiperbolik açısı ile döndürüldüğünü gösterir.

Örnek 2.10.1. $q = 3 + 2\sqrt{2}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ birim timelike split kuaterniyonunu ele alalım. q' nun vektörel kısmı spacelike olup, R_q lineer dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -12 \\ 12 & 9 & -8 \\ -12 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu dönüşüm,$cosh\theta = 3$ ve $sinh\theta = 2\sqrt{2}$ olmak üzere, 2θ hiperbolik açısı kadar $\vec{u} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ spacelike eksen boyunca dönmeyi ifade eder.

Teorem 2.10.4. (Özdemir ve Ergin 2006) $q = cos\theta + \vec{u}sin\theta$ birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, R_q dönüşümü $\vec{u}$ timelike eksen boyunca 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder.

İspat : $\vec{u}$ timelike birim vektör olmak üzere, $q = cos\theta + \vec{u}sin\theta$ birim timelike split kuaterniyonu olsun. Bir $\{\vec{u}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ ortonormal üçlüsü alalım öyle ki

$$\langle \vec{e}_1, \vec{u} \rangle_L = 0 \,, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle_L = 1 \text{ ve } \overrightarrow{e_2} = \vec{u} \times_L \overrightarrow{e_1} \tag{2.76}$$

olsun. $\overrightarrow{e_1}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki her $\vec{x}$ timelike (spacelike) birim vektör

$$x = cosh\alpha + sinh\alpha\overrightarrow{e_1} \; (x = sinhu + cosh\alpha e) \tag{2.77}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{\alpha}$, $\vec{x}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. R_q lineer dönüşümünün tanımını ve $u^2 = -1$ olduğunu kullanarak

$$R_q(\vec{u}) = (cos\theta + \vec{u}sin\theta)\vec{u}(cos\theta - \vec{u}sin\theta) \tag{2.78}$$

$$= (cos\theta\vec{u} - sin\theta)(cos\theta - \vec{u}sin\theta) \tag{2.79}$$

$$= cos^2\theta\vec{u} + sin^2\theta\vec{u} = \vec{u} \tag{2.80}$$

olduğu görülür. Diğer yandan;

$$\vec{u}\overrightarrow{e_1} = \langle \vec{u}, \overrightarrow{e_1} \rangle_L + \vec{u} \times_L \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \tag{2.81}$$

$$\overrightarrow{e_1}\vec{u} = \langle \overrightarrow{e_1}, \vec{u} \rangle_L + \overrightarrow{e_1} \times_L \vec{u} = -\overrightarrow{e_2} \tag{2.82}$$

$$\overrightarrow{e_2}\vec{u} = \langle \overrightarrow{e_2}, \vec{u} \rangle_L + \overrightarrow{e_2} \times_L \vec{u} = \overrightarrow{e_1} \tag{2.83}$$

ilişkileri kullanılırsa

$$R_q(\overrightarrow{e_1}) = (cos\theta + \vec{u}sin\theta)e_1(cos\theta - \vec{u}sin\theta) \tag{2.84}$$

$$= (cos\theta\overrightarrow{e_1} + sin\theta\overrightarrow{e_2})(cos\theta - \vec{u}sin\theta) \tag{2.85}$$

$$= cos^2\theta\overrightarrow{e_1} + 2cos\theta sin\theta\overrightarrow{e_2} - sin^2\theta\overrightarrow{e_1} \tag{2.86}$$

$$= \cos(2\theta)\,\overrightarrow{e_1} + \sin(2\theta)\overrightarrow{e_2} \tag{2.87}$$

elde edilir. Bu da bize R_q dönüşümü ile $\vec{x}$ vektörünün $\vec{u}$ timelike ekseni boyunca 2θ açısı ile döndürüldüğünü gösterir.

Örnek 2.10.2. $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(1,0,0)$ birim timelike split kuaterniyonun vektörel kısmı timelike olup, R_q lineer dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $sin\theta = \frac{1}{2}$ eşitliklerinden $\theta = \frac{\pi}{6}$ olduğu görülür. O halde elde edilen dönüşüm, $\frac{\pi}{3}$ açısı kadar $\vec{u} = (1,0,0)$ timelike eksen boyunca dönmeyi ifade eder.

3. SPLİT KUATERNİYONLARDA TANIMLI KUVVET FONKSİYONU

3.1. Kuvvet Fonksiyonunun Analitik Yolla Hesaplanması

Bu kısımda q^n'i hesaplamak için farklı yollar verilecektir. Bunlardan ilki aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 3.1.1. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $q = S_q + \vec{V}_q \in H$ için

$i)$ n çift ise;

$$q^n = \left[\sum_{r=}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} (s)^{n-2r} V^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2r+1} (s)^{n-2r} V^r\right] \vec{V}_q, \tag{3.1}$$

$ii)$ n tek ise;

$$q^n = \left[\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} (s)^{n-2r} V^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} (s)^{n-2r-1} V^r\right] \vec{V}_q \tag{3.2}$$

olarak bulunur. Burada $s = s_q$ ve $V = \langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle_L$' dir (Özdemir; 2009).

İspat: $i)$ $n = 2k$ için

$$q^{n=2k} = \left[\sum_{r=0}^{k} \binom{2k}{2r} (s)^{2k-2r} V^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{k-1} \binom{2k}{2r+1} (s)^{2k-2r-1} V^r\right] \vec{V}_q \tag{3.3}$$

$$= \left[\binom{2k}{0} s^{2k} + \binom{2k}{2} s^{2k-2} V + \binom{2k}{4} s^{2k-4} V^2 + \cdots + \binom{2k}{2k} V^k\right] +$$
$$\left[\binom{2k}{1} s^{2k-1} + \binom{2k}{3} s^{2k-3} V + \binom{2k}{5} s^{2k-5} V^2 + \cdots + \binom{2k}{2k-1} s V^{k-1}\right] \vec{V}_q \tag{3.4}$$

$$q^{2k} q = \left(s^2 + V + 2s\vec{V}_q\right) \left[\binom{2k}{0} s^{2k} + \binom{2k}{2} s^{2k-2} V + \binom{2k}{4} s^{2k-4} V^2 + \cdots +\right.$$

$$\binom{2k}{2k}V^{k}\Bigg] + \Bigg[\binom{2k}{1}s^{2k-1} + \binom{2k}{3}s^{2k-3}V + \binom{2k}{5}s^{2k-5}V^{2} + \cdots +$$
$$\binom{2k}{2k-1}sV^{k-1}\Bigg]\vec{V_q}\Bigg] \tag{3.5}$$

$$= s^{2k+2} + s^{2k}V\left[\binom{2k}{2} + \binom{2k}{0} + 2\binom{2k}{1}\right] + s^{2k-2}V^{2}\left[\binom{2k}{4} + \binom{2k}{2} + \right.$$
$$\left. 2\binom{2k}{3}\right] + \cdots + s^{2}V^{k}\left[\binom{2k}{2k} + \binom{2k}{2k-2} + 2\binom{2k}{2k-1}\right] + \binom{2k}{2k}V^{k+1} +$$
$$+s^{2k-1}V\left[2\binom{2k}{2} + \binom{2k}{3} + \binom{2k}{1}\right] + s^{2k-3}V^{2}\left[2\binom{2k}{4} + \binom{2k}{5} + \binom{2k}{3}\right] + \cdots +$$
$$s^{3}V^{k-1}\left[2\binom{2k}{2k-2} + \binom{2k}{2k-1} + \binom{2k}{2k-3}\right] + sV^{k}\left[\binom{2k}{2k} + \binom{2k}{2k-1}\right]\vec{V_q} \tag{3.6}$$

$$=q^{2k+2} \tag{3.7}$$

$$q^{2k+2} = \left[\sum_{r=0}^{k+1}\binom{2k+2}{2r}s^{2k+2-2r}V^{r}\right] + \left[\sum_{r=0}^{k}\binom{2k+2}{2r+1}s^{2k+1-2r}V^{r}\right]\vec{V_q} \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanır.

$ii)\ n = 2k+1$ için

$$q^{n=2k+1} = \left[\sum_{r=0}^{k}\binom{2k+1}{2r}(s)^{2k+1-2r}V^{r}\right] + \left[\sum_{r=0}^{k}\binom{2k+}{2r+1}(s)^{2k-2r-1}V^{r}\right]\vec{V_q} \tag{3.9}$$

$$= s^{2k+1} + \binom{2k+1}{2}s^{2k-1}V + \cdots + \binom{2k+1}{2k}sV^{k} + \left[\binom{2k+1}{1}s^{2k} + \right.$$
$$\left[\binom{2k+1}{1}s^{2k} + \binom{2k+1}{3}s^{2k-2}V + \cdots + \binom{2k+1}{2k+1}V^{k}\right]\vec{V_q} \tag{3.10}$$

$$= q^{2k+1}q = \left(s^{2} + V + 2s\vec{V_q}\right)\left[s^{2k+1} + \binom{2k+1}{2}s^{2k-1}V + \cdots + \right.$$
$$\left.\binom{2k+1}{2k}sV^{k} + \left[\binom{2k+1}{1}s^{2k} + \binom{2k+1}{3}s^{2k-2}V + \cdots + \binom{2k+1}{2k+1}V^{k}\right]\vec{V_q}\right] \tag{3.11}$$

$= s^{2k+3} + s^{2k+1}V\left[\binom{2k+1}{2} + 1 + 2\binom{2k+}{1}\right] + \cdots + s^3V^k\left[\binom{2k+1}{2k} + \binom{2k+1}{2k-1} + 2\binom{2k+1}{2k-1}\right] + sV^{k+1}\left[\binom{2k+1}{2k} + 2\right] + s^{2k+2}[2 + (2k+1)] + s^{2k}V\left[2\binom{2k+1}{2} + \binom{2k+1}{3} + \binom{2k+1}{1}\right] + \cdots + s^2\left[V^k 2\binom{2k+1}{2k} + \binom{2k+1}{2k+1} + \binom{2k+1}{2k-1}\right] + V^{k+1}\Big]\vec{V}_q$ (3.12)

$$q^{2k+3} = \left[\sum_{r=0}^{k+1}\binom{2k+3}{2r}s^{2k+3-2r}V^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{k+1}\binom{2k+3}{2r+1}s^{2k+2-2r}V^r\right]\vec{V}_q \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3.1.1: $q = 2 + i - 3j + k$ split kuaterniyonu için q^3 ve q^4'ü bulalım.

$s = s_q = 2$ **,** $\vec{V}_q = i - 3j + k$ ve $V = \langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle_L = -1 + 9 + 1 = 9$ (3.14)

olduğu görülür. Buna göre

$$q^3 = \left[\sum_{r=0}^{1}\binom{3}{2r}2^{3-2r}9^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{1}\binom{3}{2r}2^{3-2r-1}9^r\right](i - 3j + k) \tag{3.15}$$

$$= (2^3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^1 \cdot 9^1) + (3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 9^1)(i - 3j + k) \tag{3.16}$$

$$= 62 + 21(i - 3j + k) \tag{3.17}$$

$$= 62 + 21\vec{V}_q \tag{3.18}$$

elde edilir. Split kuaterniyon çarpımı ile tekrar hesaplayalım.

$$q^2 = q \cdot q = (2 + i - 3j + k)(2 + i - 3j + k) \tag{3.19}$$

$$= 13 + +4i - 12j + 4k \tag{3.20}$$

$$= 13 + 4V_q \tag{3.21}$$

$$q^3 = q^2 \cdot q = (13 + +4i - 12j + 4k)(2 + i - 3j + k) \tag{3.22}$$

$$= 62 + 21(i - 3j + k) \tag{3.23}$$

$$= 62 + 21\vec{V}_q \tag{3.24}$$

olarak bulunur.

Öte yandan

$$q^4 = \left[\sum_{r=0}^{\frac{4}{2}} \binom{4}{2r} 2^{4-2r} 9^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{\frac{4}{2}-1} \binom{4}{2r+1} 2^{4-2r-1} 9^r\right](2 + i - 3j + k) \tag{3.25}$$

$$=\left[\binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{2}2^2 9^1 + \binom{4}{4}2^0 9^2\right] + \left[\binom{4}{1}2^3 9^0 + \binom{4}{3}2^1 9^1\right](2 + i - 3j + k) \tag{3.26}$$

$$= 313 + 104(2 + i - 3j + k) \tag{3.27}$$

$$= 313 + 104\vec{V}_q \tag{3.28}$$

elde edilir.

Çarpma işlemi ile işlemi doğrularsak;

$$q^4 = q^3 \cdot q = (62 + 21i - 63j + 21k)(2 + i - 3j + k) \tag{3.29}$$

$$= 313 + 104(2 + i - 3j + k) \tag{3.30}$$

$$= 313 + 104\vec{V}_q \tag{3.31}$$

olduğu görülür.

3.2. Kuvvet Fonksiyonunun De Moivre’s Kuralı ile Hesaplanması

Bu bölümde split kuaterniyonlar için De Moivre’s kuralını açıklayacağız. Bunun için split kuaterniyonların karakterlerini göz önünde bulunduracağız ve sırasıyla timelike ve spacelike kuaterniyonların formüllerini belirleyeceğiz.

3.2.1 Vektörel kısmı spacelike vektör olan timelike kuaterniyonlar

Vektörel kısmı spacelike vektör olan timelike kuaterniyonlar şu şekilde yazılır.

$$q = N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta) \tag{3.32}$$

Burada $cosh\theta = \frac{|q_0|}{N_q}$, $sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon} = \frac{q_1 i+q_2 j+q_3 k}{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}$ olup $\vec{\varepsilon}$ birim spacelike vektördür ve $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = 1$’ dir. Vektörel kısmı spacelike olan birim timelike q kuaterniyonu 3 boyutlu lightlike olmayan Lorentz vektör ile 2θ hiperbolik açısı kadar dönmeyi ifade eder (Özdemir and Ergin; 2006).

Vektörel kısmı spacelike olan birim timelike kuaterniyonu için Euler formülü sağlanır.

$$\vec{\varepsilon}^2 = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = 1 \tag{3.33}$$

olduğundan

$$e^{\overrightarrow{\varepsilon\theta}} = 1 + \vec{\varepsilon}\theta + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^2}{2!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^3}{3!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^4}{4!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^5}{5!} + \cdots \tag{3.34}$$

$$= 1 + \vec{\varepsilon}\theta + \frac{\vec{\varepsilon}^2\theta^2}{2!} + \frac{\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^2\theta^3}{3!} + \frac{(\vec{\varepsilon}^2)^2\theta^4}{4!} + \frac{\vec{\varepsilon}\left(\vec{\varepsilon}^2\right)^2}{5!} + \cdots \tag{3.35}$$

$$= (1 + \vec{\varepsilon}\theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\vec{\varepsilon}\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\vec{\varepsilon}\theta^5}{5!} + \cdots) \tag{3.36}$$

$$= \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + (\vec{\varepsilon}\theta + \frac{\vec{\varepsilon}(\theta)^3}{3!} + \frac{\vec{\varepsilon}(\theta)^5}{5!} + \cdots) \tag{3.37}$$

$$= \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + \vec{\varepsilon}(\theta + \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} + \cdots) \tag{3.42}$$

$$= cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta \tag{3.43}$$

elde ederiz.

Bununla birlikte, başka bir yöntem de kullanabiliriz.

$$q = cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta \tag{3.44}$$

$$dq = (sinh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta)d\theta \tag{3.45}$$

$$dq = \vec{\varepsilon}(cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta)d\theta \tag{3.46}$$

$$dq = \vec{\varepsilon} q d\theta \tag{3.47}$$

$$\int \frac{dq}{q} = \int \vec{\varepsilon}\, d\theta \tag{3.48}$$

$$lnq = \vec{\varepsilon}\theta \ \text{ ise } e^{\vec{\varepsilon}\theta} = q = cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta \tag{3.49}$$

yazabiliriz. Şimdi vektörel kısmı spacelike vektör olan bir timelike kuaterniyon için De Moivre's formülünü ispatlayalım.

Teorem 3.2.1. $q = N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta)$ vektörel kısmı spacelike olan birim timelike kuaterniyonu olsun. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$q^n = (N_q)^n(coshn\theta + \vec{\varepsilon} sinhn\theta) \tag{3.50}$$

eşitliği sağlanır (Özdemir, 2009).

İspat: Tümevarım metodu ile teoremin ispatı yapılacaktır.

$$q = cosh\theta + \vec{\varepsilon} sinh\theta \tag{3.51}$$

olduğunu biliyoruz.

$$q^n = (N_q)^n(coshn\theta + \vec{\varepsilon}sinhn\theta) \tag{3.52}$$

olduğunu kabul edelim. Buradan

$$q^{n+1} = (N_q)^n(coshn\theta + \vec{\varepsilon}sinhn\theta)N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta) \tag{3.53}$$

$$= (N_q)^{n+1}(\text{coshn}\theta + \vec{\varepsilon}sinhn\theta)(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta) \tag{3.54}$$

$$= \left(N_q\right)^{n+1}(coshn\theta cosh\theta + sinhn\theta sinh\theta) + (coshn\theta sinh\theta + sinhn\theta cosh\theta)\vec{\varepsilon} \tag{3.55}$$

olduğu görülür.

$$coshn\theta cosh\theta + sinhn\theta sinh\theta = \cosh(n\theta + \theta) \tag{3.56}$$

$$coshn\theta sinh\theta + sinhn\theta cosh\theta = \sinh(n\theta + \theta) \tag{3.57}$$

eşitliklerini kullanırsak;

$$q^{n+1} = \left(N_q\right)^{n+1}(\cosh(n+1)\,\theta + \vec{\varepsilon}\sinh(n+1)\,\theta) \tag{3.58}$$

şeklinde yazılır ve ispat biter.

Teorem 3.2.2. $q = N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta)$ olmak üzere;

$$q^{-1} = \left(N_q\right)^{-1}(cosh\theta - \vec{\varepsilon}sinh\theta) \tag{3.59}$$

$$q^{-n} = \left(N_q\right)^{-n}(cosh\theta - \vec{\varepsilon}sinhn\theta) \tag{3.60}$$

$$= \left(N_q\right)^{-n}(\cosh(-n\theta) + \vec{\varepsilon}sinh - (n\theta)) \tag{3.61}$$

Bu formül tüm tamsayılar için geçerlidir (Özdemir, 2009).

İspat: Tümevarım metodu ile teoremin ispatını yapalım.

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta)} = \frac{\left(N_q\right)^{-1}(cosh\theta - \vec{\varepsilon}sinh\theta)}{cosh^2\theta - \vec{\varepsilon}^2 sinh^2\theta} \tag{3.62}$$

elde edilir.

$$cosh^2\theta - \vec{\varepsilon}^2 sinh^2\theta = 1 \tag{3.63}$$

olduğundan;

$$q^{-1} = \left(N_q\right)^{-1}(cosh\theta - \vec{\varepsilon}sinh\theta) \tag{3.64}$$

$$q^{-n} = (N_q)^{-n}(coshn\theta - \vec{\varepsilon}sinhn\theta) \tag{3.65}$$

olduğunu kabul edip,

$$q^{-(n+1)} = (N_q)^{-n}(coshn\theta - \vec{\varepsilon}sinhn\theta)\left(N_q\right)^{-1}(cosh\theta - \vec{\varepsilon}sinh\theta) \tag{3.66}$$

$$=\left(N_q\right)^{-(n+1)}[coshn\theta cosh\theta + sinhn\theta sinh\theta - \vec{\varepsilon}(coshn\theta sinh\theta + sinhn\theta cosh\theta)] \tag{3.67}$$

elde ederiz.

$$coshn\theta cosh\theta + sinhn\theta sinh\theta = \cosh(n\theta + \theta) \tag{3.68}$$

$$coshn\theta sinh\theta + sinhn\theta cosh\theta = \sinh(n\theta + \theta) \tag{3.69}$$

eşitliklerini kullanarsak;

$$= \left(N_q\right)^{-(n+1)}(\cosh(n+1)\,\theta - \vec{\varepsilon}\sinh(n+1)\,\theta) \tag{3.70}$$

yazabiliriz.

Örnek 3.2.1. $q = 3 + i - j + 2k$ olmak üzere q^3'ü bulalım. $I_q = 9 + 1 - 1 - 4 = 5 > 0$ ve $\langle \vec{V_q}, \vec{V_q} \rangle = -1 + 1 + 4 = 4 > 0$ olduğundan q kuaterniyonu vektörel kısmı spacelike vektör olan timelike kuaterniyon olduğu görülüyor. O halde q kuaterniyonu; $q = N_q(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta)$ şeklinde yazılır. $N_q = \sqrt{I_q} = \sqrt{5}$ olduğundan, $\sqrt{5}(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta) = 3 + i - j + 2k$ eşitliğinden, $\sqrt{5}cosh\theta = 3$ ise $cosh\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $sinh\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ve $\vec{\varepsilon} = \frac{i-j+2k}{2}$ olur. $q = \sqrt{5}(cosh\theta + \vec{\varepsilon}sinh\theta)$ ve $q^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 (cosh3\theta + \vec{\varepsilon}sinh3\theta)$ olduğundan,

$$q^3 = \sqrt{5}^3 (cosh2\theta cosh\theta + sinh2\theta sinh\theta + \vec{\varepsilon}(sinh2\theta cosh\theta + cosh2\theta sinh\theta)) \quad (3.77)$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$cosh3\theta = \cosh(2\theta + \theta) = cosh2\theta cosh\theta + sinh2\theta sinh\theta \quad (3.78)$$

$$sinh3\theta = \sinh(2\theta + \theta) = sinh2\theta cosh\theta + sinh\theta cosh2\theta \quad (3.79)$$

$$cosh2\theta = sinh^2\theta - \vec{\varepsilon}^2 cosh^2\theta \quad (3.80)$$

$$sinh2\theta = 2 sinh\theta cosh\theta \quad (3.81)$$

eşitlikleri kullanarak;

$$q^3 = 63 + 31(i - j + 2k) \quad (3.82)$$

bulunur. Teorem 3.1'e göre hesaplarsak;

$$q^3 = \left(\sum_{r=0}^{1} \binom{3}{2r} 3^{3-2r} 4^r\right) + \left(\sum_{r=0}^{1} \binom{3}{2r+1} 3^{2-2r} 4^r\right)(i - j + 2k) \quad (3.83)$$

$$= 63 + 31(i - j + 2) \quad (3.84)$$

aynı sonuç bu yöntem ile de bulunmuş olur.

3.2.2. Vektörel Kısmı Timelike Vektör Olan Timelike Kuaterniyonlar

Vektörel kısmı timelike vektör olan timelike kuaterniyonlar şu şekilde yazılır.

$$q = N_q(\cos\theta + \vec{\varepsilon}\sin\theta) \tag{3.85}$$

Burada $\cos\theta = \frac{|q_0|}{N_q}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon} = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}}$ olup $\vec{\varepsilon}$ birim timelike vektördür ve $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = -1$' dir. Vektörel kısmı timelike olan birim timelike q kuaterniyonu 3 boyutlu lightlike olmayan Lorentz vektör ile 2θ hiperbolik açısı kadar dönmeyi ifade eder. Vektörel kısmı timelike olan birim timelike kuaterniyonu için Euler formülü sağlanır.

$$\vec{\varepsilon}^2 = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = 1 \tag{3.86}$$

olduğundan,

$$e^{\overrightarrow{\varepsilon\theta}} = 1 + \vec{\varepsilon}\theta + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^2}{2!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^3}{3!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^4}{4!} + \frac{(\vec{\varepsilon}\theta)^5}{5!} + \cdots \tag{3.87}$$

$$= 1 + \varepsilon\theta + \frac{\varepsilon^2\theta^2}{2!} + \frac{\varepsilon\varepsilon^2\theta^3}{3!} + \frac{(\varepsilon^2)^2\theta^4}{4!} + \frac{\varepsilon\left(\varepsilon^2\right)^2}{5!} + \cdots \tag{3.88}$$

$$= (1 + \vec{\varepsilon}\theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\vec{\varepsilon}\theta^3}{3!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\vec{\varepsilon}\theta^5}{5!} - \cdots) \tag{3.89}$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + (\vec{\varepsilon}\theta - \frac{\vec{\varepsilon}(\theta)^3}{3!} + \frac{\vec{\varepsilon}(\theta)^5}{5!} - \cdots) \tag{3.90}$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + \vec{\varepsilon}(\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \cdots) \tag{3.91}$$

$$= \cos\theta + \vec{\varepsilon}\sin\theta \tag{3.92}$$

elde ederiz. Vektörel kısmı timelike vektör olan bir timelike kuaterniyon için De Moivre's formülünü ispatlayalım.

Teorem 3.2.3. $q = N_q(cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta)$ vektörel kısmı timelike olan birim timelike kuaterniyonu olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$q^n = (N_q)^n(cosn\theta + \vec{\varepsilon}sinn\theta) \tag{3.93}$$

sağlanır (Özdemir, 2009).

İspat: Tümevarım metodu ile teoremin ispatını yapalım.

$$q = cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta \tag{3.94}$$

olduğunu biliyoruz.

$$q^n = (N_q)^n(cosn\theta + \vec{\varepsilon}sinn\theta) \tag{3.95}$$

olduğunu kabul edelim.

$$q^{n+1} = (N_q)^n(cosn\theta + \vec{\varepsilon}sinn\theta)N_q(cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta) \tag{3.96}$$

$$= (N_q)^{n+1}(\mathrm{cosn}\theta + \vec{\varepsilon}sinn\theta)(cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta) \tag{3.97}$$

$$q^{n+1} = (N_q)^{n+1}[(cosn\theta cos\theta + sinn\theta sin\theta) + \varepsilon(sinn\theta cos\theta + cosn\theta sin\theta)] \tag{3.98}$$

olduğu görülür. Burada

$$cosn\theta cos\theta + sinn\theta sin\theta = \cos(n+1)\theta \tag{3.99}$$

$$sinn\theta cos\theta + cosn\theta sin\theta = \sin(n+1)\theta \tag{3.100}$$

eşitliklerini kullanarak;

$$q^{n+1} = (N_q)^{n+1}(\cos(n+1)\,\theta + \vec{\varepsilon}\sin(n+1)\,\theta) \tag{3.101}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2.2. $q = 2 + 2i - j + k$ split kuaterniyonu verilsin. q^2' yi bulalım.

$$I_q = 4 + 4 - 1 - 1 = 6 > 0 \text{ ve } \langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle = -4 + 1 + 1 = -2 < 0 \qquad (3.102)$$

q kuaterniyonu vektörel kısmı timelike vektör olan timelike kuaterniyon olduğu görülüyor. O halde q kuaterniyonu;

$$q = N_q(cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta) \qquad (3.103)$$

şeklinde yazılır. $N_q = \sqrt{I_q} = \sqrt{6}$ olduğundan; $\sqrt{6}(cos\theta + \vec{\varepsilon}sin\theta) = 2 + 2i - j + k$ eşitliğinden $\sqrt{6}cos\theta = 2$ ise $cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ve $\vec{\varepsilon} = \frac{2i-j+k}{\sqrt{2}}$ olur. $q^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 (cos2\theta + \vec{\varepsilon}sin2\theta)$ olarak bulunur.

Diğer yandan $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$ ve $sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$ eşitlikleri kullanılarak; $q^2 = 2 + 4(2i - j + k)$ bulunur. Teorem 3.1.1'e göre hesaplarsak;

$$q = 2 + 2i - j + k, \quad s = 2, V = \langle V_q, V_q \rangle = -2 \qquad (3.104)$$

olduğundan

$$q^2 = \left(\sum_{r=0}^{1} \binom{2}{2r} 2^{2-2r}(-2)^r\right) + \left(\sum_{r=0}^{0} \binom{2}{2r+1} 2^{1-2r}(-2)^r\right)(2i - j + k) \qquad (3.105)$$

$$= 2 + 4(2i - j + k) \qquad (3.106)$$

olarak bulunur

3.2.3. Vektörel Kısmı Lightlike Olan Timelike Kuaterniyonlar

Vektörel kısmı lightlike olan her birim timelike kuaterniyon ε bir null vektör olduğunda $q = 1 + \varepsilon$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.2.4. Eğer q vektörel kısmı null olan birim timelike kuaterniyon ise, $q^n = 1 + n\vec{\varepsilon}$, eşitliğin kökü $w^n = 1 + \frac{\vec{\varepsilon}}{n}$ ve $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$ 'dır (Özdemir, 2008).

İspat: Vektörel kısmı lightlike (null) olan timelike kuaterniyon; $q = 1 + \vec{\varepsilon}$ şeklinde yazılır. $q^n = 1 + n\vec{\varepsilon}$ olduğunu kabul edelim.

$$q^{n+1} = q^n q = (1 + n\vec{\varepsilon})(1 + \vec{\varepsilon}) \tag{3.107}$$

$$= (1 + \vec{\varepsilon} + n\vec{\varepsilon} + n\vec{\varepsilon}^2) \tag{3.108}$$

$$= 1 + \vec{\varepsilon} + n\vec{\varepsilon} \tag{3.109}$$

$$= 1 + (n + 1)\vec{\varepsilon} \tag{3.110}$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Örnek 3.2.3. $q = 1 + i + k$ kuaterniyonu verilsin q^3' ü bulalım. $I_q = 1 + 1 - 0 - 1 = 1 > 0$ ve $\langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle = -1 + 1 = 0$ vektörel kısmı lightlike (null) olan birim timelike kuaterniyondur. $q = 1 + \vec{\varepsilon} = 1 + i + k$ olduğundan $q^3 = 1 + 3(i + k) = 1 + 3i + 3k$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.5. q vektörel kısmı lightlike (null) olan birim timelike kuaterniyon ise; $q^{-1} = 1 - \vec{\varepsilon}$ 'dir. (Özdemir, 2008)

İspat: $q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{1+\vec{\varepsilon}} = \frac{1\cdot(1-\vec{\varepsilon})}{(1+\vec{\varepsilon})\cdot(1-\vec{\varepsilon})} = \frac{1-\vec{\varepsilon}}{1-\vec{\varepsilon}^2} = 1 - \vec{\varepsilon}$ ve $\vec{\varepsilon}^2 = 0$ olduğundan;

$$q^{-n} = \left(N_q\right)^{-n}(1 - n\vec{\varepsilon}) \tag{3.111}$$

$$q^{-n}q^{-1} = \left(N_q\right)^{-n}(1 - n\vec{\varepsilon})\left(N_q\right)^{-1}(1 - \vec{\varepsilon}) \tag{3.112}$$

$$= \left(N_q\right)^{-n-1}(1 - \vec{\varepsilon} - n\vec{\varepsilon} + n\vec{\varepsilon}^2) \tag{3.113}$$

$$= \left(N_q\right)^{-n-1}(1 - (n + 1)\vec{\varepsilon}) \tag{3.114}$$

olur ve ispat biter.

3.2.4. Spacelike Kuaterniyonlar

Spacelike kuaterniyonlar şu şekilde yazılır.

$$q = N_q(\sinh\theta + \vec{\varepsilon}\cosh\theta). \tag{3.115}$$

Burada $\sinh\theta = \frac{|q_0|}{N_q}$, $\cosh\theta = \frac{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon} = \frac{q_1 i+q_2 j+q_3 k}{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}$ olup $\vec{\varepsilon}$, E_1^3'de birim spacelike vektördür. Spacelike kuaterniyonlar için De Movre's kuralı şu şekildedir.

Teorem 3.2.6. $q = N_q(\sinh\theta + \vec{\varepsilon}\cosh\theta)$ spacelike kuaterniyonu için;

$$q^n = \begin{cases} \left(N_q\right)^n(\sinh n\theta + \vec{\varepsilon}\cosh n\theta), & n \text{ tek ise} \\ \left(N_q\right)^n(\cosh n\theta + \vec{\varepsilon}\sinh n\theta), & n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{3.116}$$

eşitliği vardır (Özdemir, 2009).

İspat: n çift ise, $q^n = \left(N_q\right)^n(\cosh n\theta + \vec{\varepsilon}\sinh n\theta)$ olduğunu gösterelim. $n = 2k$ için $q^{2k} = \left(N_q\right)^{2k}(\cosh 2k\theta + \vec{\varepsilon}\sinh 2k\theta)$ olduğunu kabul edelim. $n = 2k+2$ için doğruluğunu ispatlayalım.

$$q^{2k+2} = \left(N_q\right)^{2k}(\cosh 2k\theta + \vec{\varepsilon}\sinh 2k\theta)\left(N_q\right)^2(\cosh 2\theta + \vec{\varepsilon}\sinh 2\theta) \tag{3.117}$$

$$= \left(N_q\right)^{2k+2}(\cosh 2k\theta\cosh 2\theta + \vec{\varepsilon}\cosh 2k\theta\sinh 2\theta + \vec{\varepsilon}\sinh 2k\theta\cos + \sinh 2k\theta\sinh 2\theta) \tag{3.118}$$

$$= \left(N_q\right)^{2k+2}(\cosh 2k\theta\cosh 2\theta + \sinh 2k\theta\sinh 2\theta) + \vec{\varepsilon}(\cosh 2k\theta\sinh 2\theta + \sinh 2k\theta\cosh 2\theta) \tag{3.119}$$

olarak elde edilir.

$$\cosh(2k+2)\,\theta = \cosh 2k\theta\cosh 2\theta + \sinh 2k\theta\sinh 2\theta \tag{3.120}$$

$$\sinh(2k+2)\,\theta = cosh2k\theta sinh2\theta + sinh2k\theta cosh2\theta \tag{3.121}$$

eşitliklerini kullanırsak;

$$q^{2k+2} = \left(N_q\right)^{2k+2}(\cosh(2k+2)\,\theta + \vec{\varepsilon}\sinh(2k+2)\,\theta) \tag{3.122}$$

elde edilir. İkinci durum olan n tek olması halinde ise; $q^n = \left(N_q\right)^n(sinhn\theta + \vec{\varepsilon}coshn\theta)$ olduğunu gösterelim. Spacelike kuaterniyonlarda; $q = N_q(sinh\theta + \vec{\varepsilon}cosh\theta)$ olduğunu biliyoruz. $n = 2k+1$ için $q^{2k+1} = \left(N_q\right)^{2k+1}(\sinh(2k+1)\theta + \vec{\varepsilon}\cosh(2k+1)\theta)$ olduğunu kabul edelim.

$$q^{2k+3} = q^{2k+1}q^2 \tag{3.123}$$

$$= \left(N_q\right)^{2k+1}(\sinh(2k+1)\,\theta + \vec{\varepsilon}\cosh(2k+1)\,\theta)\left(N_q\right)^2(cosh2\theta + \vec{\varepsilon}sinh2\theta) \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}&= \left(N_q\right)^{2k+3}(\sinh(2k+1)\,\theta cosh2\theta + \vec{\varepsilon}\sinh(2k+1)\,\theta sinh2\theta\\ &+\vec{\varepsilon}\cosh(2k+1)\,\theta cosh2\theta + \vec{\varepsilon}^2\cosh(2k+1)\theta\, sinh2\theta)\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}&= \left(N_q\right)^{2k+3}(\sinh(2k+1)\,\theta cosh2\theta + \cosh(2k+1)\,sinh2\theta)\\ &+\vec{\varepsilon}(sinh(2k+1)\theta sinh2\theta + cosh(2k+1)\theta cosh2\theta)\end{aligned} \tag{3.126}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\sinh\big((2k+1)\theta + 2\theta\big) = \sinh(2k+1)\,\theta cosh2\theta + \cosh(2k+1)\,sinh2\theta \tag{3.127}$$

$$\cosh\big((2k+1)\theta + 2\theta\big) = \sinh(2k+1)\,\theta sinh2\theta + \cosh(2k+1)\,\theta cosh2\theta \tag{3.128}$$

eşitliklerini kullanırsak;

$$q^{2k+3} = \left(N_q\right)^{2k+3}(\sin(2k+3)\,\theta + \cosh(2k+3)\,\theta) \tag{3.129}$$

elde edilir ve ispat biter.

3.3. Kompleks Matris Temsilini Kullanarak Kuvvet Fonksiyonunun Hesaplanması

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H_S$ olsun. Bu split kuaterniyonun 2×2 kompleks matris temsili;

$$\mathbb{C}(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_1 i & q_2 + q_3 i \\ q_2 - q_3 i & q_0 - q_1 i \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

olarak bulunur. Bu matrisin özdeğeri;

$$\lambda_1 = q_0 - \sqrt{-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2} \tag{3.131}$$

$$\lambda_2 = q_0 + \sqrt{-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2} \tag{3.132}$$

olarak bulunur. Buradan üç farklı durum söz konusu olduğu görülür.

1. Durum : $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 > 0$ (3.133)

2. Durum : $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 0$ (3.134)

3. Durum : $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 < 0$ (3.135)

Bu durumlarda matrisin iki farklı reel; çakışık reel ve iki farklı kompleks özdeğerleri olacaktır.

1.Durum : $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 > 0$ olsun. Bu durumda $\vec{V_q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ vektör kısmı için;

$$I_{V_q} = \vec{V_q}\overline{\vec{V_q}} = {q_1}^2 - {q_2}^2 + {q_3}^2 < 0 \tag{3.136}$$

olacaktır. O halde q' nun vektörel kısmı spacelike kuaterniyon olur.

Bu durumda $\mathbb{C}(q)$; 2×2 kompleks matrisinin iki farklı reel özdeğeri olacaktır. Bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise;

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} q_2\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} + q_1q_3 + \left(q_3\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} - q_1q_2\right)i \\ -q_2{}^2 - q_3{}^2 \end{bmatrix} \tag{3.137}$$

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} -q_2\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} + q_1q_3 + \left(-q_3\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} - q_1q_2\right)i \\ -q_2{}^2 - q_3{}^2 \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

olarak bulunur. O halde $\mathbb{C}(q)$ matrisi köşegenleştirilebilir ve

$$\mathbb{C}(q) = PDP^{-1} \tag{3.139}$$

matris eşitliği mevcuttur. Burada;

$$D = \begin{bmatrix} q_0 - \sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} & 0 \\ 0 & q_0 + \sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

köşegen matris olup, $P = \left[p_{ij}\right] \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi ise;

$$p_{11} = \left(q_2\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}\right) + q_1q_3 + \left(q_3\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} - q_1q_2\right)i, \tag{3.141}$$

$$p_{12} = \left(-q_2\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}\right) + q_1q_3 + \left(-q_3\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} - q_1q_2\right)i, \tag{3.142}$$

$$p_{21} = p_{22} = -q_2{}^2 - q_3{}^2 \tag{3.143}$$

olarak bulunur. Bu matris eşitliğinden;

$$[\mathbb{C}(q)]^n = PD^nP^{-1} \tag{3.144}$$

olduğu sonucuna varılır. O halde, $[\mathbb{C}(q)]^n = \mathbb{C}(q^n)$ eşitliğinden faydalanarak q^n bulunur.

Örnek 3.2.4. $q = 3 + i - j + k \in H_s$ alalım. Bu split kuaterniyonun 2×2 kompleks matris temsili

$$C(q) = \begin{bmatrix} 3+i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

olarak bulunur. $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = -1 + 1 + 1 = 1>0$ olduğundan iki farklı $\mathbb{C}(q)$ matrisinin iki farklı reel öz değeri vardır.

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{1} = 2 \tag{3.146}$$

$$\lambda_2 = 3 + \sqrt{1} = 4 \tag{3.147}$$

olarak bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla;

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.148}$$

olarak elde edilir. Buradan özvektörler yardımıyla;

$$P = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

olduğu görülür. O halde;

$$\mathbb{C}(q) = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix} \tag{3.150}$$

matris eşitliği elde edilir. Buna göre;

$$[\mathbb{C}(q)]^8 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 4^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

$$= \begin{bmatrix} 32896 + 32640i & 32640 + 32640i \\ -32640 - 32640i & 32896 - 32640i \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

olarak bulunur. $[\mathbb{C}(q)]^8 = \mathbb{C}(q^8)$ olduğundan; (3.153)

$$q^8 = 32896 + 32640i + 32640j + 32640k \quad (3.154)$$

elde edilir.

2.Durum: $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 0$ olsun. Bu durumda $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ vektörel kısmı için;

$$I_{V_q} = V_q \bar{V}_q = {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 = 0 \quad (3.155)$$

olacaktır. Bu durumda q' nun vektörel kısmı null kuaterniyon olur. Ayrıca $\mathbb{C}(q)$; 2×2 kompleks matrisinin iki katlı reel özdeğerleri;

$$\lambda_{1,2} = q_0 \quad (3.156)$$

olarak bulunur.

3.Durum: $-{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2<0$ olsun. Bu durum için, $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ vektör kısmı için

$$I_{V_q} = V_q \bar{V}_q = {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2>0 \quad (3.157)$$

olacaktır. Sonuç olarak q' nun vektörel kısmı timelike kuaterniyon olduğu görülür. Bu durumda $\mathbb{C}(q)$, 2×2 kompleks matrisinin iki farklı kompleks özdeğeri;

$$\lambda_1 = q_0 - \sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}\,i \quad (3.158)$$

$$\lambda_2 = q_0 + \sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}\,i \quad (3.159)$$

olarak elde edilir. Öte yandan bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla;

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} q_1q_3 - q_3\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} + (-q_1q_2 + q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2})i \\ -q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} q_1q_3 + q_3\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} + (-q_1q_2 - q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2 + q_3^2})i \\ -q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

olarak bulunur. Buradan $\mathbb{C}(q)$ matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu görülür ve;

$$[\mathbb{C}(q)]^n = PDP^{-1} \quad (3.162)$$

matris eşitliğini yazabiliriz. Burada;

$$D = \begin{bmatrix} q_0 - \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}i & 0 \\ 0 & q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}i \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

köşegen matris olup, $P = [p_{ij}] \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi ise;

$$p_{11} = q_1q_3 - \left(q_3\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) + \left(-q_1q_2 + q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)i, \quad (3.164)$$

$$p_{12} = q_1q_3 + \left(q_3\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) + \left(-q_1q_2 - q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right)i, \quad (3.165)$$

$$p_{21} = p_{22} = -q_2^2 - q_3^2 \quad (3.166)$$

olarak elde edilir. Birinci duruma benzer şekilde;

$$[\mathbb{C}(q)]^n = PD^nP^{-1} \text{ ve } [\mathbb{C}(q)]^n = \mathbb{C}(q^n) \quad (3.167)$$

eşitliklerinden faydalanarak q^n bulunabilir.

Örnek: $q = 1 + 3i - j + 2k \in H_s$ verilsin. Bu split kuaterniyonun 2×2 kompleks matris temsili;

$$\mathbb{C}(q) = \begin{bmatrix} 1+3i & -1+2i \\ -1-2i & 1-3i \end{bmatrix} \tag{3.168}$$

olduğu görülür. $-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2 = -9 + 1 + 4 = -4 < 0$ olduğundan $\mathbb{C}(q)$ matrisinin iki farklı kompleks özdeğeri vardır. Bu özdeğerlerin ise;

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{-4}i = 1 - 2i \tag{3.169}$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{-4}i = 1 + 2i \tag{3.170}$$

olduğu elde edilir.

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 10+5i \\ -5 \end{bmatrix} \tag{3.171}$$

ise bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. Buradan;

$$\mathbb{C}(q) = \begin{bmatrix} 2+i & 10+5i \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} + \frac{1}{20}i & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{20}i & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \tag{3.172}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre;

$$[\mathbb{C}(q)]^{13} = \begin{bmatrix} 2+i & 10+5i \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-2i)^{13} & 0 \\ 0 & (1+2i)^{13} \end{bmatrix} \tag{3.173}$$

$$= \begin{bmatrix} -8839 - 50703i & -16901 + 33802i \\ -16901 + 33802i & -8839 - 50703i \end{bmatrix} \tag{3.174}$$

olarak bulunur. $[\mathbb{C}(q)]^{13} = \mathbb{C}(q^{13})$ olduğundan;

$$q^{13} = -8839 - 50703i - 16901j + 33802k \tag{3.175}$$

elde edilir.

4. SPLİT KUATERNİYONLARDA TANIMLI ÜSTEL FONKSİYON

Bu kısımda Bölüm 3.3' de tanımlanan split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili yardımıyla üstel fonksiyonların hesaplanmasına dair bir metot sunulacaktır.

Teorem 4.1. λ_1 ve λ_2 verilen herhangi bir $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerleri olsun.

1) Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ise

$$e^A = e^\lambda[(1-\lambda)I + A] \tag{4.1}$$

2) Eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise,

$$e^A = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} I + \frac{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} A \tag{4.2}$$

olarak bulunur (Berstein, 1998)

İspat : 1) Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = \boldsymbol{\lambda}$ ise bir $P \in M_2(\mathbb{C})$ tersinir matrisi ve $x \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki,

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \tag{4.3}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$e^A = e^\lambda P\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^\lambda[(1-\lambda)I + A] \tag{4.4}$$

elde edilir.

2) Eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise bir $\theta \in M_2(\mathbb{C})$ tersinir matrisi vardır öyle ki,

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{4.5}$$

olarak yazılabilir. Sonuçta,

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} I + \frac{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

olduğundan ispat biter.

Önerme 4.1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi verilsin.

1) Eğer $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$ ise

$$e^A = e^{\frac{a_{11}+a_{22}}{2}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

2) Eğer $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ ise

$$e^A = e^{\frac{a_{11}+a_{22}}{2}} \begin{bmatrix} cosh\theta + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{sinh\theta}{\theta} & a_{12}\frac{sinh\theta}{\theta} \\ a_{21}\frac{sinh\theta}{\theta} & cosh\theta - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{sinh\theta}{\theta} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Burada,

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \tag{4.9}$$

olarak tanımlıdır (Berstein, 1998).

İspat : *A* matrisinin öz değerleri sırasıyla

$$\lambda_1 = \frac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}}{2} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. $\lambda_1 = \lambda_2$ olması için gerek ve yeter şart $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$ olmasıdır. Bu durumda λ_1 ve λ_2 değerlerinin Teorem 4.1.'de yerine yazarsak istenen sonucu elde ederiz (Berstein, 1998).

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H_s$ olsun. Bu split kuaterniyonun 2×2 kompleks matris temsilini Bölüm 3.3'de,

$$\mathbb{C}(q)=\begin{bmatrix} q_0+q_1i & q_2+q_3i \\ q_2-q_3i & q_0-q_1i \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanmıştık. Buna göre

$$\begin{aligned} a_{11}&=q_0+q_1i \\ a_{12}&=q_2+q_3i \\ a_{21}&=q_2-q_3i \\ a_{22}&=q_0-q_1i \end{aligned} \tag{4.12}$$

olduğundan,

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=-4(q_1)^2+4(q_2)^2+4(q_3)^2 \tag{4.13}$$

$$=4(-{q_1}^2+{q_2}^2+{q_3}^2) \tag{4.14}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k\in H_s$ kuaterniyonu verilsin.

1) $\vec{V}_q$ null ise,

$$e^{\mathbb{C}(q)}=e^{q_0}\begin{bmatrix} 1+q_1i & q_2+q_3i \\ q_2-q_3i & 1-q_1i \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

2) $\vec{V}_q$ null değil ise,

$$e^{\mathbb{C}(q)}=e^{q_0}\begin{bmatrix} cosh\theta+q_1i\left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) & (q_2+q_3i)\left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) \\ (q_2-q_3i)\left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) & cosh\theta-q_1i\left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

olur. Burada $\theta=\sqrt{\langle\vec{V}_q,\vec{V}_q\rangle_L}$ elde edilir.

İspat: (4.14) denklemini ve Önerme 4.1.'i kullanarak ispatı yapacağız.

1) (4.14) denkleminden $\vec{V}_q$ null ise $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0$ olacağı görülür. O halde Önerme 4.1.'de birinci durum söz konusudur. Önerme 4.1.; 1)'de (4.12)'yi yerine yazarsak;

$$e^{\mathbb{C}(q)}=e^{q_0}\begin{bmatrix}1+q_1i & q_2+q_3i\\ q_2-q_3i & 1-q_1i\end{bmatrix} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir.

2) Benzer şekilde (4.14) denkleminden $\vec{V}_q$ null değilse $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}\neq 0$ olduğu görülür. Buna göre Önerme 4.1.'de ikinci durum söz konusu olur. Önerme 4.1.; 2)'de (4.12) eşitliklerini yerine yazarsak istenen sonuç elde edilir.

Örnek 4.1. $q=3+i+j\in H_s$ split kuaterniyonunu alalım. $\vec{V}_q=i+j$, $\langle\vec{V}_q,\vec{V}_q\rangle_L=0$ olduğundan $\vec{V}_q$ null olur. O halde $q_0=3$, $q_1=1$, ve $q_2=1$ ve $q_3=0$ olduğundan Teorem 4.2.; 1)'den

$$e^{\mathbb{C}(q)}=e^{3}\begin{bmatrix}1+i & 1\\ 1 & 1-i\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2. $q=1+i+j+k\in H_s$ split kuaterniyonunu ele alalım $\vec{V}_q=i+j+k$ olduğu görülür. $\langle\vec{V}_q,\vec{V}_q\rangle_L=-1+1+1\neq 0$ olduğundan $\vec{V}_q$ spacelike vektör olur. O halde $\theta=\sqrt{\langle\vec{V}_q,\vec{V}_q\rangle_L}=1$ olarak bulunur. Sonuç olarak $q_0=q_1=q_2=q_3=1$ olduğundan Teorem 4.2.; 2)'ye göre,

$$e^{\mathbb{C}(q)}=\begin{bmatrix}cosh1+isinh1 & (1+i)sinh1\\ (1-i)sinh1 & cosh1-isinh1\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e+e^{-1})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})i & \frac{1}{2}(e-e^{-1})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})\\ \frac{1}{2}(e-e^{-1})+\frac{1}{2}(-e+e^{-1})i & \frac{1}{2}(e+e^{-1})-\frac{1}{2}(e-e^{-1})i\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3. Her $q \in H_s$ için $e^{\mathbb{C}(q)} = \mathbb{C}(e^q)$ eşitliği sağlanır.

İspat : $q \in H_s$ split kuaterniyonu verilsin.

$$e^{\mathbb{C}(q)} = I + \mathbb{C}(q) + \frac{\mathbb{C}(q)^2}{2} + \frac{\mathbb{C}(q)^3}{3!} + \cdots \quad (4.21)$$

olarak tanımlanır. Öte yandan $\forall n \in N$ için $\mathbb{C}(q^n) = \left(\mathbb{C}(q)\right)^n$ olduğundan,

$$e^{\mathbb{C}(q)} = I + \mathbb{C}(q) + \frac{\mathbb{C}(q^2)}{2} + \frac{\mathbb{C}(q^3)}{2} + \cdots \quad (4.22)$$

$$= \mathbb{C}\left(1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \cdots\right) \quad (4.23)$$

$$= \mathbb{C}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n\right) = \mathbb{C}(e^q) \quad (4.24)$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.1. $= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H_s$ split kuaterniyonun vektörel kısmı null ise,

$$e^q = e^{q_0}(1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \quad (4.25)$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.2. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in H_s$ split kuaterniyonun vektörel kısmı null değil ise,

$$e^q = e^{q_0}\left(cosh\theta + q_1 \left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) i + q_2 \left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) j + q_3 \left(\frac{sinh\theta}{\theta}\right) k\right) \quad (4.26)$$

olarak bulunur. Burada $\theta = \sqrt{\langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle_L}$'dir.

İspat: Teorem 4.2.; 2) ve Teorem 4.3.'e göre ispat açıktır.

Örnek 4.3. $q = 2 + 2i + j + k \in H_s$ split kuaterniyonun vektörel kısmı $V_q = 2i + j + k$ olarak bulunur.

$\langle \vec{V}_q, \vec{V}_q \rangle_L = -4 + 1 + 1 = -2$'dir. Buna göre $\theta = \sqrt{2}i$'dir. $q_0 = 2, q_1 = 2,\ q_2 = 1$ ve $q_3 = 1$ olduğundan Sonuç 4.2.'ye göre ;

$$e^q = e^2(\cosh(\sqrt{2}i + 2\left(\frac{sinh\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}\right)i + \left(\frac{sinh\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}\right)j + \left(\frac{sinh\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}\right)k) \tag{4.27}$$

olduğu görülür. Ayrıca $\cosh(\sqrt{2})i = \cos(\sqrt{2})$ ve $\frac{sinh\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i} = \frac{sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ olduğundan,

$$e^q = e^2(\cos(\sqrt{2}) + 2\left(\frac{sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)i + \left(\frac{sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)j + \left(\frac{sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)k) \tag{4.28}$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında split kuaterniyonların kuvvetini ve üstelini hesaplamak için 2×2 tipinde kompleks matrislerden faydalanılmıştır. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunun 2×2 kompleks matris temsili olan,

$$\mathbb{C}(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_1 i & q_2 + q_3 i \\ q_2 - q_3 i & q_0 - q_1 i \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğer ve özvektörleri elde edilmiştir. Özdeğerlerin iki farklı reel, iki çakışık reel ve iki farklı kompleks olması durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Bu durumlarda sırasıyla split kuaterniyonunvektörel kısmının spacelike, timelike ve null olduğu elde edilmiştir. Buna göre null olmayan durumlar için $\mathbb{C}(q)$ matrisinin köşegenleştirebileceği sonucundan faydalanılmıştır. Buna göre,

$$\mathbb{C}(q^n) = [\mathbb{C}(q)]^n$$

ve

$$\mathbb{C}(e^q) = e^{\mathbb{C}(q)}$$

ilişkileri yardımıyla split kuaterniyonların kuvveti ve üstelini hesaplamak için yeni metotlar ifade edilmiştir. Benzer şekilde farklı fonksiyonların da hesaplanabileceği açık olup; bu çalışma ileride yapılacak yeni çalışmalar için önemli ve değerli bir kaynak teşkil edecektir.

KAYNAKLAR

Alagöz, Y., Oral, K.H. and Yüce, S., 2012, Split Quaternion Matrices, *Miskolc Mathematical Notes*, 13, 223-232.

Ata, E. and Yaylı, Y. 2009, Split quaternions and semi-Euclidean projective, *Chaos, Solitons & Fractals,* 41, 1910-1915.

Berstein, D.S. and So, W., 1998, Some explicit formulas for the matrix exponential, *IEEE Trans. Autom. Control*, 38, 1228–1232

Brenner, J.L., 1951, Matrices of Quaternions, *Pasific Journal of Mathematics*, 1, 329-335.

Cockle, J. 1849, On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary, *Philosophical Magazine,* 35, 434-435.

Farebrother, R.W., Grob, J. and Troschke, S.O., 2003, Matrix representation of quaternions, *Linear Algebra and its Applications*, 362, 251-255.

Grob, J., Trenkler, G. and Troschke, S.O. 2001, Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach, *Linear Algebra and its Applications*, 326, 205-213.

Gürlebeck, K. and Sprossing, W., 1997, Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, Wiley.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No.2.

Kantor, I.L., Solodovnikov, A.S., 1989, Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras, Springer-Verlag, New York.

Kula, L. 2003, Bölünmüş kuaterniyonların ve geometrik uygulamaları. Doktora tezi, *Ankara Üniversitesi*, Ankara, 116 s.

Kula, L. and Yaylı, Y., 2007, Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space, *Journal of Korean Mathematical Society*, 44, 1313-1327.

Özdemir, M., 2007, Timelike kuaterniyonların bazı geometrik uygulamaları, Doktora tezi, *Akdeniz Üniversitesi*, Antalya.

Özdemir, M., 2009, The Roots of a Split Quaternion, *Applied Mathematics Letters*, 22, 258-263.

Özdemir, M., Erdoğdu, M. and Şimşek, H., 2014, On Eigenvalues and Eigenvectors of a Lorentzian Rotation Matrix by Using Split Quaternions, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24, 179-192.

Özdemir, M. and Ergin, A.A., 2005, Some geometric applications of split quaternions, *Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc.*, 16, 108-115.

Özdemir, M. and Ergin, A.A., 2006, Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space, *Journal of Geometry and Physics*, 56, 322-336.

Wilkins, D.R., 1843, On Quaternions or On A New System of Imaginaries in Algebra by William Rowan Hamilton, *Philosophical Magazine*, 1844-1850.

Zhang, F., 1997, Quaternions and Matrices of Quaternions, *Linear Algebra and its Applications*, 251, 21-57.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Serpil TÜTÜNCÜ
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	:	KULU/KONYA 01.01.1988
Telefon	:	05545159398
e-mail	:	Serpiltutuncu1@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	KULU ANADOLU LİSESİ, KULU/KONYA	2005
Üniversite	:	SELÇUK ÜNİVERSİTESİ, KONYA	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-2013	KULU ANADOLU LİSESİ	ÜCRETLİ ÖĞRETMEN
2014-2016	İŞ BANKASI	MEMUR
2018-	GENÇLİK VE SPOR BAKANLIĞI KONYA KIZ YURT MÜDÜRLÜĞÜ	MEMUR

YAYINLAR

Tütüncü S., Erdoğdu, M., On Computing Powers of Split Quaternions, *VI. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıstayı*-2019, Konya-Türkiye.