T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTERVAL LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN İTERATİF BOYUT İNDİRGEME METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Büşra YAĞLIPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Büşra YAĞLIPINAR tarafından hazırlanan "İnterval Lineer Denklem Sisteminin İteratif Boyut İndirgeme Metodu İle Çözümü" adlı tez çalışması 23/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Onur KARAOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Şerife Yurdagül KUMCU
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza
Büşra YAĞLIPINAR

Tarih:23/06/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTERVAL LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN İTERATİF BOYUT İNDİRGEME METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Büşra YAĞLIPINAR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2023, 65 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN
Doç. Dr. Mehmet YAVUZ
Dr. Öğr. Üyesi Onur KARAOĞLU

Bu çalışmada, interval lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri araştırılmış olup literatürdeki yöntemler incelenmiştir. Ayrıca, interval lineer denklem sistemlerinin iteratif boyut indirgeme metodu ile çözümü elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İteratif Boyut İndirgeme Metodu (IDDM), İnterval Aritmetik, İnterval Lineer Denklem Sistemleri, İnterval Matris, Kaucher Aritmetik.

ABSTRACT

MS THESIS

THE SOLUTION OF INTERVAL LINEAR EQUATION SYSTEM BY ITERATIVE DECREASING DIMENSION METHOD

Büşra YAĞLIPINAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

Advisor: Assist. Prof. Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2023, 65 Pages

Jury
Assist. Prof. Gülnur ÇELİK KIZILKAN
Assoc. Prof. Mehmet YAVUZ
Assist. Prof. Onur KARAOĞLU

In this study, the solution of interval linear equation system have investigated and the methods found in the literature have examined. Also, the solution of interval linear equation system has obtained by iterative decreasing dimension method.

Keywords: Iterative Decreasing Dimension Method (IDDM), Interval Arithmetic, Interval Linear Equation System, Interval Matrix, Kaucher Arithmetic.

ÖNSÖZ

Çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Öğretim Üyesi Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN yönlendirmeleriyle yapılmış olup, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak teslim edilmiştir.

Çalışmanın hazırlanışında değerli görüş ve yönlendirmelerini esirgemeden bütün sabrıyla yardım eden kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN' a ve eşim Mustafa YAĞLIPINAR' a teşekkürlerimi borç bilirim.

Saygılarımla.

Büşra YAĞLIPINAR
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$I(\mathbb{R})$	: İnterval uzayı
$\mathbb{KR}$	: Kaucher interval uzayı
min	: Minimum
max	: Maksimum
det	: Determinant
M_{ij}	: Minör
A_{ij}	: Kofaktör
ek	: Ek matris
A^*	: Minör ve kofaktörü alınan matris
k	: İterasyon sayısı
m	: İndirgenen matrisin boyutu
$\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}$	: İndirgenen katsayı matrisi
$\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}$	: İndirgenen sistemin çözüm vektörü
$\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}$	: İndirgenen sistemin sağ taraf vektörü
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}$ matrisinin 1. satır vektöründen oluşan matris
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}$ matrisinin 2., 3., … , m. satır vektörlerinden oluşan matris
$\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}$ vektörünün 1. satır vektöründen oluşan matris
$\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}$ vektörünün 2., 3., … , m. satır vektörlerinden oluşan vektör
$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}$ matrisinin, ij - inci elemanı
$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{ij}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}$ vektörünün $i.$ elemanı
$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}$ vektörünün $i.$ elemanı
$\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{k})}$ lineer denklem sisteminin özel çözümü
$\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{k})}$	: $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan matris

1. GİRİŞ

Lineer cebirin temel problemi olan $Ax = b$ lineer cebirsel denklem sistemi teknoloji ve bilimde çok önemli bir alana sahiptir. Bu sistemler fiziksel dünyadaki değişkenlerin arasındaki ilişkilerin tanımlanmasına, oranlar hesaplanmasına ve dönüşümler yapılmasına yardımcı olur. $Ax = b$ probleminde, çözümün tam değerinin bilinmediği durumlarda, bunun yerine yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak çözümün alabileceği değerler için bir aralık hesaplanabilir. Bu tür problemlerde tam çözüm ile hesaplanan çözüm arasındaki farkın bir hata sınırından küçük kalması hedeflenir. Örneğin, ele alınan problemin tam çözümü x, x yerine hesaplanan değer $\tilde{x}$ ve istenen hata sınırı ε ise, hesaplamaların $|x - \tilde{x}| \leq \varepsilon$ olacak şeklinde yapılması beklenir. Aksi halde hesaplanan çözüm tam çözüme yakınsamaz. Buna göre; $x \in [\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]$ olduğu tahmin edilir. Sadece yaklaşık çözüm yöntemlerinin kullanılması değil, hesaplama (yerleştirme, kesme veya yuvarlama) hataları da aralıklarla çalışma ihtiyacını getirir.

İntervallerde işlem yapmak için literatürde farklı aritmetik işlemler karşımıza çıkar. Bunlardan bazıları klasik interval aritmetik, Kaucher aritmetiği, modifiye interval aritmetiktir (Kaucher (1980): Allahdadi ve Khorram (2015): Shary (2019)).

Shary (2019) ve Kaucher (1980) çalışmalarında $Ax = b$ interval lineer denklem sistemleri için klasik interval aritmetik işlemlerin uygulanışının yetersiz olduğundan bahsetmiştir. Çözüm olarak Kaucher (1980) tarafından geliştirilen Kaucher Uzayı ve Kaucher aritmetiğini anlatmıştır.

Abolmasoumi (2014) çalışmasında $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere interval matrisin tersini bir aralığın alt sınırını $1 - \lambda$ ve üst sınırını $1 + \lambda$ olarak kabul edip oluşan aralıkları $\{[1 - \lambda\,][1 + \lambda\,]\}$ şeklinde göstermiş ve matrisin tersini hesaplamıştır.

Nirmala, Datta, Kushwaha ve Ganesan (2011) çalışmalarında interval aritmetik ve modifiye aritmetikten bahsetmişler ve lineer interval denklem sistemleri için A^{-1} matrisinin nasıl bulunacağını incelemişlerdir.

Abolmasoumi ve Alavi (2014) çalışmalarında interval $Ax = b$ sisteminin çözümü için Cramer metodu ve Gradyan vektörünü tanımlayarak çözüm algoritmasını anlatmışlardır.

Adabitabar Firozja, Babakordi ve Shahhosseini (2011) çalışmalarında interval lineer denklem sistemlerinin çözümü için Gauss eliminasyon yöntemini vermişlerdir.

Allahdadi ve Khorram (2015) çalışmalarında modifiye interval aritmetik işlemlerini tanıtmışlardır. Modifiye interval aritmetik işlemlerini kullanılarak Gauss eliminasyon yöntemini uygulamışlardır.

Garloff (2009) çalışmasında lineer interval denklem sistemleri için Gauss eliminasyon yönteminde pivot seçiminden bahsetmişlerdir.

Nirmala, Datta, Kushwaha ve Ganesan (2013) çalışmalarında modifiye interval aritmetiğini kullanarak interval matrislerin determinantının nasıl hesaplanabileceğini incelemişlerdir. Ayrıca interval matrisler için pivotlu Gauss eliminasyon yöntemi ile $Ax = b$ lineer interval denklem sisteminin çözümünden bahsetmişlerdir.

Erdal (2005) çalışmasında lineer interval denklem sistemleri için önce interval matrislerde işlemleri anlatmış ve bazı özelliklerinden bahsetmiştir. Daha sonra lineer interval denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerinden Gauss Eliminasyon Metodu ve 3×3 lük bir matrisin LU ayrışımından bahsetmiştir.

Nirmala, Datta, Kushwaha ve Ganesan (2018) çalışmalarında modifiye interval aritmetiğini kullanarak lineer interval denklem sistemlerinden LU ayrışımının kullanımından bahsetmişlerdir.

Nirmala, Datta, Kushwaha ve Ganesan (2021) çalışmalarında lineer interval denklem sistemlerinde Gauss Jordon metodunu vermişlerdir.

Bulgak (2001) çalışmasında lineer interval denklem sistemleri için matrislerin asimtotik kararlılığını incelemiş ve iteratif yöntemlerden bahsetmiştir.

Aydın ve Keskin (2007) çalışmalarında $Ax = b$ lineer denklem sistemleri için iteratif boyut indirgeme metodu (IDDM) olarak adlandırdıkları yöntemi tanıtmışlardır. Her adımda bir boyut indirgeyen metot için bir algoritma geliştirmişlerdir. Verdikleri metot ve algoritmaları nümerik örneklere uygulamışlardır.

Bu çalışmada interval lineer denklem sistemlerinin çözümleri için literatürde bulunan çalışmalar derlenmiştir. Ayrıca iteratif boyut indirgeme metodu ile interval lineer denklem sistemlerinin çözümleri elde edilmiştir. Çalışmada Kaucher aritmetiği kullanılmıştır. Çalışmamız altı bölümden oluşmaktadır.

1. Bölüm, tez çalışmasının amaç ve literatür bilgisini içermektedir.
2. Bölümde; interval uzayı ve interval aritmetiği tanıtılmıştır.
3. Bölümde; interval matrislerle ilgili genel bilgiler verilmiştir.
4. Bölümde; interval lineer denklemlerin çözümleri ile ilgili literatürde verilen yöntemler derlenmiştir.

5. Bölümde, interval lineer denklem sistemlerinin ıddm yöntemi ile çözümü elde edilmiştir.
6. Bölümde sonuçlar yer almaktadır.

2. İNTERVAL UZAYI VE İNTERVAL ARİTMETİĞİ

2.1. Klasik İnterval Uzayı ve Aritmetiği

a ve b iki reel sayı olmak üzere,

$$[a,\ b] = \{x|\ a \leq x \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

reel sayılar kümesine interval denir. İntervallerin kümesi $I(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Buna göre,

$$I(\mathbb{R}) = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}],\ \underline{a} \leq \overline{a}\ ,\ \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir (Allahdadi ve Khorram, 2015).

İntervaller ile yapılan işlemleri tanıtalım.

$\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ ve $\boldsymbol{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in I(\mathbb{R})$ olsun. $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ intervalleri arasında bir interval işlemi $\bullet \in \{+, -, \times, \div\}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \{x \bullet y \mid x \in \boldsymbol{a},\ y \in \boldsymbol{b}\} \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. (2.1) eşitliği ile verilen işleme interval aritmetiği denir. İntervaller ile yapılan $+,\ -,\ \times$ ve $\div$ işlemlerini sırasıyla tanıtalım.

$\boldsymbol{a} = [\underline{a},\ \overline{a}]$ ve $\boldsymbol{b} = [\underline{b},\ \overline{b}]$ olmak üzere; $x \in \boldsymbol{a}$ ve $y \in \boldsymbol{b}$ verilsin.

$$\underline{a} \leq x \leq \overline{a} \tag{2.2a}$$

$$\underline{b} \leq y \leq \overline{b} \tag{2.2b}$$

olduğunu dikkate alalım. (2.2a) ve (2.2b) eşitsizliklerinin taraf tarafa toplanmasıyla $\underline{a} + \underline{b} \leq x + y \leq \overline{a} + \overline{b}$ olur. Dolayısıyla $x + y \in [\underline{a} + \underline{b}\ ,\ \overline{a} + \overline{b}]$ elde edilir. Buna göre, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ intervallerinin toplamı;

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\underline{a},\ \overline{a}] + [\underline{b},\ \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}\ ,\ \overline{a} + \overline{b}]$$

şeklinde tanımlanır.

$c \in \mathbb{R}$ verilsin. (2.2a) eşitsizliğinin skaler ile çarpımı, $c > 0$ ise $c.\underline{a} \leq c.x \leq c.\overline{a}$ ve $c < 0$ ise $-c.\underline{a} \geq -c.x \geq -c.\overline{a}$ dır. Buna göre, c skaleri ile $\boldsymbol{a}$ intervallerinin çarpımı;

$$c.\boldsymbol{a} = \begin{cases} [c.\underline{a}\,,\ c.\overline{a}] & ,\ c > 0 \\ [\,c.\overline{a}\ ,\ c.\underline{a}\,] & ,\ c < 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

(2.2b) eşitsizliği eksi $(-)$ ile çarpılırsa

$$-\overline{b} \leq -y \leq -\underline{b} \tag{2.2c}$$

elde edilir. (2.2a) ve (2.2c) eşitsizliklerinin taraf tarafa toplanması ile $\underline{a} - \overline{b} \leq x - y \leq \overline{a} - \underline{b}$ olur. Buradan $x - y \in [\underline{a} - \overline{b},\ \overline{a} - \underline{b}\,]$ elde edilir. Buna göre, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ intervalleri arasında çıkarma işlemi;

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [\underline{a},\ \overline{a}] - [\underline{b},\ \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b},\ \overline{a} - \underline{b}]$$

şeklindedir.

(2.2a) ve (2.2b) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa; $min\ (\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,) \leq xy \leq max\ (\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,)$ olur. Bu nedenle $x \times y \in [min(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,), max(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,)]$ olup $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ intervallerinin çarpımı

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [min(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,), max(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\,)]$$

şeklinde tanımlanır.

$0 \notin \boldsymbol{b}$ olmak üzere (2.2b) eşitsizliğinden

$$1/\overline{b} \leq 1/y \leq 1/\underline{b} \tag{2.2d}$$

olduğundan (2.2a) ve (2.2d) eşitsizliklerinin çarpımından $\min\left\{\underline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}}\,,\ \underline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}}\right\} \leq x\left({}^{1}/_{y}\right) \leq \max\left\{\underline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}}\,,\ \underline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}}\right\}$

elde edilir. Bu sebeple

$$\boldsymbol{a} \times \left(\frac{1}{\boldsymbol{b}}\right) = \boldsymbol{a} \times \left[\,\frac{1}{\underline{b}},\ \ \frac{1}{\overline{b}}\right]$$

şeklinde olup $\boldsymbol{a}$ intervalinin $\boldsymbol{b}$ intervaline bölümü;

$$\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b} = \left[\min\left\{\underline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}}\,,\ \underline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}}\right\},\ \max\left\{\underline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}}\,,\ \underline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\underline{b}},\ \overline{a}.\,\frac{1}{\overline{b}}\right\}\right]$$

olarak tanımlanır.

$\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ intervalleri arasında yukarıda verilen işlemler klasik interval aritmetiği olarak bilinir. Klasik interval aritmetiği Tablo 2.1'de verilmiştir (Hansen ve Walster, 2004: Erdal, 2005: Allahdadi ve Khorram, 2015).

İşlemler	**Kurallar**
Toplama	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \left[\,\underline{a} + \underline{b},\ \overline{a} + \overline{b}\,\right]$
Çıkarma	$\mathbf{a} - \boldsymbol{b} = [\,\underline{a} - \overline{b},\ \overline{a} - \underline{b}\,]$
Çarpma	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left[min\left(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\right),\ max\left(\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\right)\right]$
Bölme	$\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \left(\frac{1}{\boldsymbol{b}}\right) = \boldsymbol{a} \times \left[{}^{1}/_{\overline{b}}\ ,\ {}^{1}/_{\underline{b}}\right],\ 0 \notin \boldsymbol{b}$
Skalerle Çarpma	$c.\boldsymbol{a} = \begin{cases} \left[c.\underline{a}\,,\ c.\overline{a}\,\right] & ,\ c > 0 \\ \left[\,c.\overline{a}\ ,\ c.\underline{a}\,\right] & ,\ c < 0 \end{cases}$

Tablo 2.1. Klasik interval aritmetiği

Örnek 2.1. $\boldsymbol{a} = [-1{,}2]$, $\boldsymbol{b} = [3{,}5]$ ve $c_1 = 5$ ve $c_2 = -3$ olmak üzere $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $c_i.\boldsymbol{a}$ $(i = 1, 2)$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b}$ intervallerini hesaplayalım.

Burada $\underline{a} = -1$, $\underline{b} = 3$, $\overline{a} = 2$, $\overline{b} = 5$'dır.

$+ :\ \underline{a} + \underline{b} = -1 + 3 = 2,\ \overline{a} + \overline{b} = 2 + 5 = 7$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left[\underline{a}+\underline{b},\ \overline{a}+\overline{b}\,\right]=[2,7]$

$-:\ \underline{a}-\overline{b}=-1-5=-6,\ \overline{a}-\underline{b}=2-3=-1$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left[\underline{a}-\overline{b},\ \overline{a}-\underline{b}\,\right]=[-6,\ -1]$

Skalerle çarpma: $c_1.\boldsymbol{a}=[5.(-1),\ 5.2]=[-5,10]$

$c_2.\boldsymbol{a}=[(-3).(-1),\ (-3).2]=[-6,3]$

$\times:\ \underline{a}\,\underline{b}=-1\times 3=-3,\ \underline{a}\overline{b}=-1\times 5=-5,\ \overline{a}\underline{b}=2\times 3=6,\ \overline{a}\overline{b}\ =2\times 5=10$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[min\{-3,-5,6,10\},\ max\{-3,\ -5,6,10\}]=[-5,10]$

$\div\ :\boldsymbol{b}=[3,5]\Rightarrow\frac{1}{\boldsymbol{b}}=\frac{1}{[3,\ 5]}=\left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right]$

$\underline{a}\,\underline{b}=-1\times\frac{1}{5}=-\frac{1}{5},\ \underline{a}\overline{b}=-1\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3},\ \overline{a}\underline{b}=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\ ,\ \overline{a}\overline{b}\ =2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$[-1,2]\times\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right]=\left[min\left\{-\frac{1}{5},-\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3}\right\},\ max\left\{-\frac{1}{5},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3}\right\}\right]=\left[-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$

$\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{b}=\left[-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$

Tablo 2.1’de verilen klasik interval aritmetiği birçok işlem için yetersiz kalmaktadır (Kaucher, 1980: Shary, 2019). Bu yetersizliğin sebepleri Sergey (2019) tarafından aşağıdaki şekilde açıklanmıştır.

i. $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in I(\mathbb{R})$ için klasik interval aritmetiğine göre çoğunlukla $I(\mathbb{R})$ kümesinde

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\ \text{ ve }\ \boldsymbol{a}.\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

denklemlerinin çözümü yoktur.

ii. Klasik interval aritmetiğine göre dağılma özellikleri sağlanmaz.

iii. $I(\mathbb{R})$’nin $'\subseteq'$ kapsama bağıntısına göre sıralama özellikleri yeterli değildir. $\boldsymbol{a}=[\,\underline{a},\ \overline{a}\,]$ ve $\boldsymbol{b}=[\,\underline{b},\ \overline{b}\,]$ için

$$a\wedge b=\left[\max\{\underline{a},\ \underline{b}\},\ \min\{\overline{a},\ \overline{b}\}\right]\qquad(2.3)$$

$$a \vee b = \left[\min\{\underline{a},\ \underline{b}\},\ \max\{\overline{a},\ \overline{b}\}\right] \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri $I(\mathbb{R})$'ye göre kapalı değildir. Örneğin $[1,2],[3,4] \in I(\mathbb{R})$ için $[1,2] \wedge [3,4] = [3,2] \notin I(\mathbb{R})$'dir.

Dolayısıyla, Kaucher (1980) tarafından $I(\mathbb{R})$ interval uzayı genişletilerek Kaucher interval uzayı tanıtılmış ve klasik aritmetiğin cebirsel özelliklerini tamamlayan Kaucher interval aritmetiği verilmiştir.

Şimdi Kaucher interval uzayı ve Kaucher aritmetiğini tanıtalım.

2.2. Kaucher İnterval Uzayı ve Kaucher Aritmetiği

Bu kısımdaki bilgiler için Kaucher (1980), Lakeyev (1996) ve Shary (2019) kaynaklarından yararlanılmıştır.

$[\,\underline{a},\ \overline{a}\,] \in I(\mathbb{R})$ ise $\underline{a} \leq \overline{a}$ olduğu bilinmektedir. $\underline{a} \leq \overline{a}$ olmak üzere $[\,\underline{a},\ \overline{a}\,]$ şeklindeki intervaller *proper interval* olarak adlandırılır. $\overline{a} \leq \underline{a}$ olmak üzere $[\,\overline{a},\ \underline{a}\,]$ intervaline *improper interval* denir. Proper intervallere improper intervaller de eklenerek

$$\mathbb{KR} = \left\{[\,\underline{a},\ \overline{a}\,] \,\middle|\, \underline{a}\,,\ \overline{a} \in \mathbb{R}\right\}$$

uzayı elde edilir.

Kaucher uzayı ile ilgili bazı özellikler ve tanımlamalar aşağıda verilmiştir.

i. Proper ve improper intervaller, aralığın uç noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile tanımlanan

$$dual\colon \mathbb{KR} \to \mathbb{KR},\ dual\,[\,\underline{a},\ \overline{a}\,] = [\,\overline{a},\ \underline{a}\,]$$

eşlemesi ile birbirine dönüştürülebilirler. $\boldsymbol{a}$ intervalinin proper izdüşümü

$$pro\boldsymbol{a} = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{a},\ proper\ ise \\ dual\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{a},\ improper\ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

ii. $I(\mathbb{R})$'deki kapsama bağıntısına benzer olarak $\mathbb{KR}$'de kapsama bağıntısı

$$[\,\underline{a},\ \overline{a}\,] \subseteq [\,\underline{b},\ \overline{b}\,] \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b} \text{ ve } \overline{a} \leq \overline{b}$$

şeklinde tanımlanır. $I(\mathbb{R})$'den farklı olarak $\mathbb{KR}$'de örneğin $[3,1] \subseteq [2,2]$ dir.

iii. $\mathbb{KR}$ (2.3) ve (2.4)'de tanımlanan işlemlere göre kapalıdır. Örneğin $[1,2] \wedge [3,4] = [3,2] \in \mathbb{KR}$'dır.

iv. $I(\mathbb{R})$' deki $\leq$ kısmi sıralama bağıntısının bir genişletilmişi olarak $\mathbb{KR}$'de sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\boldsymbol{a} = [\,\underline{a},\ \overline{a}\,]$ ve $\boldsymbol{b} = [\,\underline{b},\ \overline{b}\,] \in \mathbb{KR}$ için eğer $\underline{a} \leq \underline{b}$ ve $\overline{a} \leq \overline{b}$ ise Kaucher $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$'yi geçmez denir ve $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ şeklinde gösterilir. Bu önermenin tersi de doğrudur.

Eğer $\boldsymbol{a}$ intervalinin her iki uç noktası da negatif değilse $\boldsymbol{a}$'ya negatif olmayan interval denir ve $\boldsymbol{a} \geq 0$ ile gösterilir. Tersine eğer $\boldsymbol{a}$ intervalinin her iki uç noktası da pozitif değilse $\boldsymbol{a}$'ya pozitif olmayan interval denir ve $\boldsymbol{a} \leq 0$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımlamalara göre,

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \big| (\underline{a} \geq 0),\ (\overline{a} \geq 0)\},\ negatif olmayan\ intervaller$$
$$\mathcal{Z} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \big| \underline{a} \leq 0 \leq \overline{a}\},\ sıfır\ içeren\ intervaller$$
$$-\mathcal{P} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} | -\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}\},\ pozitif\ olmayan\ intervaller$$
$$dual\ \mathcal{Z} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} | dual\ \boldsymbol{a} \in \mathcal{Z}\},\ sıfır\ bulunan\ intervaller$$

olmak üzere Kaucher uzayı,

$$\mathbb{KR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P}) \cup (dual\mathcal{Z})$$

olarak verilir.

$\mathbb{KR}$ uzayında intervaller arasında tanımlanan Kaucher interval aritmetiğini tanıtalım.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{KR}$ için Kaucher interval işlemleri $\bullet \in \{+, -, \times, \div\}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \{a \bullet b \mid a \in \boldsymbol{a},\ b \in \boldsymbol{b}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{KR}$ aritmetiği, proper intervaller için tam olarak klasik interval aritmetiğinde olduğu gibi tanımlanır. Bununla birlikte $\mathbb{KR}$'de improper intervallerin varlığı aralığın sıfır içerip içermemesi gibi durumlar bazı ek tanımlamalar gerektirir.

Burada

$$dual\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = dual\ \boldsymbol{a} + dual\ \boldsymbol{b}$$

olduğu açıktır.

$\mathbb{KR}$'de her $\boldsymbol{a} = [\,\underline{a},\ \overline{a}\,]$ elemanını

$$opp\ \boldsymbol{a} = [-\underline{a}\,,\ -\overline{a}\,]$$

olmak üzere toplamaya göre $\boldsymbol{a} + opp\ \boldsymbol{a} = 0$ olacak şekilde bir tek tersi vardır. Buna göre $\mathbb{KR}$'de çıkarma işlemi

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + opp\ \boldsymbol{b} = [\underline{a},\ \overline{a}] + [-\underline{b},\ -\overline{b}] = [\underline{a} - \underline{b},\ \overline{a} - \overline{b}]$$

şeklinde tanımlanır.

Kaucher uzayında çarpma işlemi *Tablo 2.2*'de verilmiştir.

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{b} \in \mathcal{P}$	$\boldsymbol{b} \in \mathcal{Z}$	$\boldsymbol{b} \in -\mathcal{P}$	$\boldsymbol{b} \in dual\mathcal{Z}$
$\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}$	$[\underline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\overline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b}]$	$[\underline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in \mathcal{Z}$	$[\underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b}\},$ $\max\{\underline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}]$	0
$\boldsymbol{a} \in -\mathcal{P}$	$[\underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b}]$	$[\underline{a}\,\overline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}]$	$[\overline{a}\,\overline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}]$	$[\overline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in dual\mathcal{Z}$	$[\underline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\,\overline{b},\ \underline{a}\,\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\},$ $\min\{\underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b}\}]$

Tablo 2.2. Kaucher uzayında çarpma işlemi

$\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}$ veya $\boldsymbol{a} \in -\mathcal{P}$ olmak üzere $\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR}$'nin çarpma işlemine göre

$$[\underline{a}, \overline{a}].\left[{}^{1}/_{\underline{a}}, {}^{1}/_{\overline{a}}\right] = 1$$

olacak şekilde tek bir tersi vardır. $\left[{}^{1}/_{\underline{a}}, {}^{1}/_{\overline{a}}\right] = inv\,\boldsymbol{a}$ olarak gösterilir.

$\mathbb{KR}$'de çarpmanın tersi olarak bölme işlemi ifade edilir. $\mathbb{KR}$'de bölme işlemi $0 \notin prob\boldsymbol{b}$ olmak üzere

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}.inv\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.\left[{}^{1}/_{\underline{b}}, {}^{1}/_{\overline{b}}\right]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2. Aşağıdaki toplama işlemlerini yapalım.

$[3,5] + [1,2] = [3+1, 5+2] = [4,7]$

$[2,4] + [5,3] = [2+5, 4+3] = [7,7]$

$[-1,2] + [-4,3] = [-1+(-4),\ 2+3] = [-5,5]$

Örnek 2.3. Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapalım.

$[3,6] - [-1,2] = [3,6] + opp[-1,2] = [3,6] + [1,\ -2] = [4,4]$

$[1,2] - [1,2] = [1,2] + opp[1,2] = [1,2] + [-1,\ -2] = [0,0]$

$[-3,7] - [-4,5] = [-3,7] + opp[-4,5] = [-3,7] + [4,\ -5] = [1,2]$

Örnek 2.4. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapalım.

$[0,1].[-1,2] = [-1,2]$

$[-3,\ -1].[0,3] = [-9,0]$

$[0,\ -1].[-1,\ -3] = [3,0]$

Örnek 2.5. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapalım.

$[2,3] \oslash [1,4] = [2,3].inv[1,4] = [2,3].\left[1,\ \frac{1}{4}\right] = [2,\ \frac{3}{4}]$

$[1,2] \oslash [1,2] = [1,2].inv[1,2] = [1,2].\left[1,\ \frac{1}{2}\right] = [1,1]$

$[-1,0] \oslash [2,3] = [-1,0].inv[2,3] = [-1,0].\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right] = [-\frac{1}{3},\ 0]$

3. İNTERVAL MATRİSLER

Elemanları intervaller olan $m \times n$ boyutlu matrislere interval matrisler denir ve

$\boldsymbol{a_{ij}} = [\underline{a}_{ij},\ \overline{a}_{ij}]\ (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$

olmak üzere $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{m\times n}$ şeklinde gösterilir (Bolat, 2010).

Eğer her $A \in \boldsymbol{A}$ matrisi regüler ise $\boldsymbol{A}$ interval matrisi de regülerdir.

3.1. İnterval Matrislerde Aritmetik İşlemler

$\boldsymbol{a_{ij}} = [\underline{a_{ij}},\ \overline{a_{ij}}]$, $\boldsymbol{b_{ij}} = [\underline{b_{ij}},\ \overline{b_{ij}}]$ olmak üzere $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ ve $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$ matrislerini ele alalım. $\boldsymbol{c} \in \mathbb{KR}$ olsun. İnterval matrislerde toplama, çıkarma, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır (Nirmala ve ark., 2011: Nirmala ve ark., 2013).

Toplama: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a_{ij}}) + (\boldsymbol{b_{ij}}) = (\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}) = \left(\underline{a_{ij}} + \underline{b_{ij}},\ \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}\ \right)$

Çıkarma: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a_{ij}}) + opp(\boldsymbol{b_{ij}}) = (\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}) = \left(\underline{a_{ij}} - \underline{b_{ij}}\ ,\ \overline{a_{ij}} - \overline{b_{ij}}\ \right)$

Çarpma: $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{a_{ij}})(\boldsymbol{b_{ij}}) = \ \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{b}_{kj}$

Skalerle Çarpma: $c \times \boldsymbol{A} = \ c \times (\boldsymbol{a_{ij}}) = (c \times \boldsymbol{a_{ij}})$

İnterval matrislerle yapılan işlemler *Tablo 3.1*'de verilmiştir.

İşlemler	**Kurallar**
Toplama	$(\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}})_{1\leq i\leq m,\ \ 1\leq j\leq n}$
Çıkarma	$(\boldsymbol{a_{ij}} - \boldsymbol{b_{ij}})_{1\leq i\leq m,\ \ 1\leq j\leq n}$
Çarpma	$\left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{b}_{kj}\right)_{1\leq i\leq m,\ \ 1\leq j\leq n}$
Skalerle Çarpma	$(c\boldsymbol{a}_{ij})_{1\leq i\leq m,\ \ 1\leq i\leq n}$

Tablo 3.1. İnterval matrislerde işlemler

Örnek 3.1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}[1,2] & [3,4]\\ [4,5] & [5,6]\end{pmatrix}$ ve $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}[1,3] & [0,3]\\ [0,1] & [1,2]\end{pmatrix}$ interval matrisleri ve $\boldsymbol{c_1}=[-1,1], \boldsymbol{c_2}=[2,1]\in\mathbb{KR}$verilsin. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}, \boldsymbol{c_1}\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{c_2}\boldsymbol{A}$ matrislerini hesaplayalım.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}[1,2]+[1,3] & [3,4]+[0,3]\\ [4,5]+[0,1] & [5,6]+[1,2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1+1,2+3] & [3+0,4+3]\\ [4+0,5+1] & [5+1,6+2]\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}[2,5] & [3,7]\\ [4,6] & [6,8]\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}[1,2]+opp[1,3] & [3,4]+opp[0,3]\\ [4,5]+opp[0,1] & [5,6]+opp[1,2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1-1,\ 2-3] & [3-0,\ 4-3]\\ [4-0,\ 5-1] & [5-1,\ 6-2]\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}dual[0,\ -1] & dual[3,1]\\ [4,\ 4] & [4,\ 4]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[-1,0] & [\,1,3]\\ [4,\ 4] & [4,\ 4]\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}[1,2] & [3,4]\\ [4,5] & [5,6]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}[1,3] & [0,3]\\ [0,1] & [1,2]\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}[1,2].[1,3]+[3,4].[0,1] & [1,2].[0,3]+[3,4].[1,2]\\ [4,5].[1,3].+[5,6].[0,1] & [4,5].[0,3].+[5,6].[1,2]\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}[1,6]+[0,4] & [0,6]+[3,8]\\ [4,15]+[0,6] & [0,15]+[5,12]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1,10] & [3,14]\\ [4,21] & [5,27]\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_1}.\boldsymbol{A}=[-1,1].\begin{pmatrix}[1,2] & [3,4]\\ [4,5] & [5,6]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[-1,1][1,2] & [-1,1][3,4]\\ [-1,1][4,5] & [-1,1][5,6]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[-2,2] & [-4,4]\\ [-5,5] & [-6,6]\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_2}.\boldsymbol{A}=[2,1].\begin{pmatrix}[1,2] & [3,4]\\ [4,5] & [5,6]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[2,1][1,2] & [2,1][3,4]\\ [2,1][4,5] & [2,1][5,6]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[2,2] & [6,4]\\ [8,5] & [10,6]\end{pmatrix}$$

3.2. İnterval Matrislerin Minörü ve Kofaktörü

$\boldsymbol{a_{ij}}=[\,\underline{a}_{ij},\ \overline{a}_{ij}]$ olmak üzere, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ karesel interval matrisini ele alalım. $\boldsymbol{a_{ij}}$ bileşeninin minörü $\boldsymbol{A}$ matrisinin $i.$ satırı ve $j.$ sütununun silinmesi ile oluşan alt matrisin determinantı olarak tanımlanır ve $\boldsymbol{M_{ij}}$ ile gösterilir. $\boldsymbol{a_{ij}}$ bileşeninin minörünün $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$ sayısı ile oluşmasına kofaktör denir ve $\boldsymbol{A_{ij}}$ ile gösterilir (Köse, 2023).

Örnek 3.2. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,2] \\ [2,3] & [3,4] \end{pmatrix}$ matrisinin minörünü ve kofaktörünü hesaplayalım.

$\boldsymbol{M_{11}} = [3,4]$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{A_{11}} = (-1)^{1+1}[3,4] = [3,4]$

$\boldsymbol{M_{12}} = [2,3]$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{A_{12}} = (-1)^{1+2}[2,3] = [-3,-2]$

$\boldsymbol{M_{21}} = [1,2]$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{A_{21}} = (-1)^{2+1}[1,2] = [-2,\ -1]$

$\boldsymbol{M_{22}} = [0,1]$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{A_{22}} = (-1)^{2+2}[0,1] = [0,1]$

şeklindedir.

3.3. İnterval Matrislerin Ek Matrisi

$\boldsymbol{a_{ij}} = [\underline{a}_{ij},\ \overline{a}_{ij}]$ olmak üzere karesel $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ interval matrisi verilsin. Elemanları $\boldsymbol{A}$ matrisinin $\boldsymbol{A_{ij}}$ kofaktörü olan matrisin transpozu alındığında $ek(\boldsymbol{A})$ elde edilir. Yani,

$$ek(\boldsymbol{A}) = \left(\boldsymbol{A_{ij}}\right)^{T}$$

şeklindedir (Abolmasoumi, 2014: Nirmala ve ark, 2011).

Örnek 3.3. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,2] \\ [2,3] & [3,4] \end{pmatrix}$ matrisinin ek matrisini hesaplayalım.

Örnek 3.2'de minörünü ve kofaktörünü hesaplamıştık. Buna göre,

$$ek(\boldsymbol{A}) = \left(\boldsymbol{A_{ij}}\right)^{T} = \begin{pmatrix} [3,4] & [-3,\ -2] \\ [-2,\ -1] & [0,1] \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} [3,4] & [-2,\ -1] \\ [-3,\ -2] & [0,1] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

3.4. İnterval Matrislerin Determinantı

$\boldsymbol{a_{ij}} = [\underline{a}_{ij},\ \overline{a}_{ij}]$ olmak üzere, n boyutlu karesel $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ interval matrisi verilsin. Eğer $n = 2$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisinin determinantı,

$$det\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}} - \boldsymbol{a_{12}a_{21}}$$

şeklinde hesaplanır.

$\boldsymbol{A}$ matrisinin kofaktörünü $\boldsymbol{A}_{ij}$ ile gösterelim. Bu taktirde, $n > 2$ için $\boldsymbol{A}$ matrisinin determinantı,

$$det\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{11}}.\boldsymbol{A_{11}} + \boldsymbol{a_{12}}.\ \boldsymbol{A_{12}} + \cdots + \boldsymbol{a_{1n}}.\boldsymbol{A_{1n}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$$

şeklinde hesaplanır (Horacek ve ark, 2017). Horacek ve ark., (2017), klasik matrislerin determinantları ile ilgili aşağıdaki özeliklerin çoğunun interval matrisler içinde mevcut olduğunu belirtmişlerdir. Bu özellikler aşağıda verilmiştir.

- $det\boldsymbol{A} = det\ \boldsymbol{A}^T$'dır.
- $\boldsymbol{A}$ interval matrisinin bir satırı tamamen sıfır ise o zaman $det\boldsymbol{A} = 0$'dır.
- $\boldsymbol{B}$ matrisi bir $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir satırının λ skaleri ile çarpılması ile elde edilmişse $det\boldsymbol{B} = \lambda det\boldsymbol{A}$'dır.
- $\boldsymbol{B}$ matrisi bir $\boldsymbol{A}$ matrisinin iki satırının yer değiştirilmesi ile elde edilmişse $det\boldsymbol{B} = -det\boldsymbol{A}$'dır.
- $\boldsymbol{A}$ matrisinin iki satırı aynı ise $det\boldsymbol{A} = 0$'dır.

Örnek 3.4. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

$$det\boldsymbol{A} = \det\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} = [2,3][2,3] - [0,1][1,2]$$

$$= [4,9] - [0,2] = [4,9] + opp[0,2] = [4,7]$$

Örnek 3.5. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-1,0] & [0,1] & [0,2] \\ [0,1] & [-2,\ -1] & [-1,1] \\ [0,2] & [-1,2] & [-2,2] \end{pmatrix}$ matrisin determinantını hesaplayalım.

$$det\boldsymbol{A} = \underbrace{[-1,0]\begin{vmatrix} [-2,\ -1] & [-1,1] \\ [-1,2] & [-2,2] \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{i}} - \underbrace{[0,1]\begin{vmatrix} [0,1] & [-1,1] \\ [0,2] & [-2,2] \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{ii}} + \underbrace{[0,2]\begin{vmatrix} [0,1] & [-2,\ -1] \\ [0,2] & [-1,2] \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{iii}}$$

işlemleri adım adım yapalım.

i. $[-1,0]\begin{vmatrix}[-2,\ -1] & [-1,1]\\ [-1,2] & [-2,2]\end{vmatrix} = [-1,0]\,\{[-2,\ -1][-2,2] - [-1,1][-1,2]\}$

$= [-1,0]\,\{[-4,4] - [-2,2]\} = [-1,0]\{[-4,4] + opp[-2,2]\} = [-1,0]\,[-2,2]$

$= [-2,2]$

dır.

ii. $[0,1]\begin{vmatrix}[0,1] & [-1,1]\\ [0,2] & [-2,2]\end{vmatrix} = [0,1]\{[0,1][-2,2] - [-1,1][0,2]\}$

$= [0,1]\,\{[-2,2] - [-2,2]\} = [0,1]\{[-2,2] + opp[-2,2] = [0,1][0,0] = [0,0]$

dır.

iii. $[0,2]\begin{vmatrix}[0,1] & [-2,\ -1]\\ [0,2] & [-1,2]\end{vmatrix} = [0,2]\{[0,1][-1,2] - [-2,-1][0,2]\}$

$= [0,2]\,\{[-1,2] - [-4,0]\} = [0,2]\{[-1,2] + opp[-4,0]\}$
$= [0,2][3,2]$
$= [0,6]$
dır.

i., **ii.** ve **iii.** deki sonuçlar yerine yazılarak;

$\underbrace{[-1,0][-6,6]}_{i} - \underbrace{[0,1][-4,4]}_{ii} + \underbrace{[0,2][-1,6]}_{iii}$

$det\boldsymbol{A} = [-2,2] - [0,0] + [0,6] = [-2,2] + opp[0,0] + [0,6] = [-2,8]$
olarak bulunur.

3.5. İnterval Matrislerin Tersinin Hesaplanması

Herhangi bir n boyutlu karesel $\boldsymbol{A}$ interval matrisi için eğer $det\boldsymbol{A} \neq 0$ olacak şekilde " $\boldsymbol{AX} = I$ ve $\boldsymbol{XA} = I$ eşitliklerini sağlayan $\boldsymbol{X}$'e $\boldsymbol{A}$'nın tersi denir." şeklinde tanımlanır. $\boldsymbol{A}$'nın tersi,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{ek(\boldsymbol{A})}{det\boldsymbol{A}}$$

şeklinde hesaplanır (Nirmala ve ark, 2011). İnterval matrisin tersi alınırken yukarıda tanımlanan işlemler yapılır.

Örnek 3.6. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$ matrisinin tersini hesaplayalım.

Örnek 3.4'de $det\boldsymbol{A} = [4,7]$ olarak hesaplanmıştır.
$ek(\boldsymbol{A})$ matrisi;

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1}[2,3] = [2,3]$$
$$\boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2}[1,2] = [-2,\ -1]$$
$$\boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1}[0,1] = [-1,\ 0]$$
$$\boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2}[2,3] = [2,\ 3]$$

olmak üzere

$$ek(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,0] \\ [-2,\ -1] & [2,3] \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det\boldsymbol{A}} ek(\boldsymbol{A})$$
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{[4,\ 7]} . \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,0] \\ [-2,\ -1] & [2,3] \end{pmatrix} = 1. inv[4,\ 7]. \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,0] \\ [-2,\ -1] & [2,3] \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{7}\right]. \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,0] \\ [-2,\ -1] & [2,3] \end{pmatrix} = dual\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right] \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,0] \\ [-2,\ -1] & [2,3] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[2,3]}_{\boldsymbol{a}} & \underbrace{\left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[-1,0]}_{\boldsymbol{b}} \\ \underbrace{\left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[-2,\ -1]}_{\boldsymbol{c}} & \underbrace{\left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[2,3]}_{\boldsymbol{d}} \end{pmatrix}$$

olup. $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisinin elemanlarını hesaplayalım.

$\boldsymbol{a} = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[2,3] = [\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}]$, $\boldsymbol{b} = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[-1,0] = [-\frac{1}{4},\ 0]$

$\boldsymbol{c} = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[-2,-1] = [-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{7}]$, $\boldsymbol{d} = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[2,3] = [\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}]$

olup sonuç olarak,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \left[\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}\right] & \left[-\frac{1}{4},\ 0\right] \\ \left[-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{7}\right] & \left[\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}\right] \end{pmatrix}$$

bulunur.

4. İNTERVAL LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1. İnterval Lineer Denklem Sistemleri

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, n boyutlu karesel interval matris $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_i})$ ve $\boldsymbol{b} = \left(\boldsymbol{b_{ij}}\right)$ $n \times 1$ interval vektörler olmak üzere interval lineer denklem sistemleri

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

(4.1) sisteminin çözümü

$$\boldsymbol{x} = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists\ A \in \boldsymbol{A}\ ve\ \exists\ b \in \boldsymbol{b}\ \ni Ax = b\} \in \mathbb{KR}^n$$

şeklinde tanımlanır (Pasca, 2010).

$A \in \boldsymbol{A}$ ve $b \in \boldsymbol{b}$ olmak üzere

$$Ax = b \tag{4.2}$$

lineer denklem sistemini ele alalım. $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümünün var olması için gerek ve yeter şart

$$rank([A{:}\, b]) = rank\ (A) = r$$

olmasıdır. Burada,

Eğer $n = r$ ise lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır. Aksi halde yani $n > r$ ise lineer denklem sisteminin $n - r$ parametreye bağlı çözümü vardır (Sabuncuoğlu, 2014).

(4.2) lineer denklem sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği için iyi bilinen bu kriter (4.1) interval lineer denklem sistemi için geçerli değildir. İnterval lineer denklem sisteminde çözüm tek olmayabilir. Yine de çözümün varlığı için yukarıdaki kriter yardımcı olabilir. İnterval lineer denklem sistemlerinin çözümü tek olmayabilir.

Örnek 4.1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$ ve $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$ olmak üzere $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lineer interval denklem sistemi verilsin.

Her $a_{11} \in [2,3]$, $a_{12} \in [0,1]$, $a_{21} \in [1,2]$, $a_{22} \in [2,3]$, $b_1 \in [0,120]$ ve $b_2 \in [60,240]$ için

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Ax = b$ lineer denklem sistemini ele alalım.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{a_{21}}{a_{11}} r_1 + r_2 \to r_2} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} + a_{22} & -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \boldsymbol{c} & \mathbf{d} \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{c} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} + a_{22}, \ \boldsymbol{d} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2$$

Tablo 3.1'den

$$\boldsymbol{c} \in [\tfrac{4}{3},\ 3], \boldsymbol{d} \in [-20, 240]$$

olur.

$rank(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = rank\ \boldsymbol{A}$ olup çözüm vardır. Ancak tek çözüm olmayabilir.

4.2. İnterval Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Literatürde interval lineer denklem sistemleri için verilen çözüm yöntemlerini sırasıyla tanıtalım.

4.2.1. İnterval Lineer Denklem Sisteminin Doğrudan Çözümü

(4.1) interval lineer denklem sistemi verilsin. $det\boldsymbol{A} \neq 0$ ise $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ denklem sisteminin çözümü,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

şeklinde hesaplanır (Ganesan, 2007: Majumdar ve Chakraverty, 2012).

Örnek 4.2. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$ olmak üzere interval lineer denklem sisteminin çözümünü hesaplayalım.

$\boldsymbol{A}$ matrisinin determinantı Örnek 3.4'de $det\boldsymbol{A} = [4,7]$ olarak hesaplanmıştır. Buna göre,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det\boldsymbol{A}} ek(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} [\frac{2}{7}, \frac{3}{4}] & [-\frac{1}{4}, 0] \\ [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}] & [\frac{2}{7}, \frac{3}{4}] \end{pmatrix}$$

olup Örnek 3.6'da hesaplanmıştır.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b} = \begin{pmatrix} \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right] & \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \\ \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}\right] & \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{[0,120].\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right]}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{[60,240].\left[-\frac{1}{4}, 0\right]}_{\boldsymbol{b}} \\ \underbrace{[0,120].\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}\right]}_{\boldsymbol{c}} + \underbrace{[60,240]\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right]}_{\boldsymbol{d}} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a} = [0,120].\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right] = [0,90]$, $\boldsymbol{b} = [60,240].\left[-\frac{1}{4}, 0\right] = [-60,0]$

$\boldsymbol{c} = [0,120].\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}\right] = [-60,0]$, $\boldsymbol{d} = [60, 240]\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{120}{7}, 180\right]$

olup

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} [0,90] + [-60,0] \\ [-60,0] + [17.1428,180] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-60,90] \\ [-42.8572,180] \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre,

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-60,90] \\ [-42.8572,180] \end{pmatrix}$ şeklindedir.

4.2.2. Cramer Metodu

(4.1) interval lineer denklem sistemini ele alalım. $\boldsymbol{A}$ matrisinin j. sütununu silip yerine $\boldsymbol{b}$ vektörünün yazılması ile elde edilen matrisi $\boldsymbol{A_j}$ ile gösterelim. Yani,

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_{22}} & & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{b_n} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{b_1} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{b_2} & & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{b_n} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix} \ldots$$

$$\boldsymbol{A_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{b_1} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{b_2} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{b_n} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix} \ldots \ \boldsymbol{A_n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & & \boldsymbol{b_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ interval lineer denklem sisteminin çözümü

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{1}{det\boldsymbol{A}} . det\boldsymbol{A}_i, \ (1 \leq i \leq n)$$

olmak üzere $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_i})$ şeklinde bulunur (Abolmasoumi ve Alavi, 2014).

Örnek 4.3. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$ olmak üzere $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ interval lineer denklem sisteminin çözümünü hesaplayalım.

$\boldsymbol{A}$ matrisinin determinantı Örnek 3.4'de $det\boldsymbol{A} = [4,7]$ olarak hesaplanmıştır.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} [0,120] & [0,1] \\ [60,240] & [2,3] \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_1$ matrisinin determinantı,

$$\begin{aligned} det\boldsymbol{A}_1 &= [0,120].[2,3] - [0,1].[60,240] \\ &= [0,360] - [0,240] = [0,360] + opp[0,240] \\ &= [0,120] \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{1}{[4,\ 7]}.[0,120] = (1.inv[4,\ 7]).[0,\ 120]$$
$$= dual\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{7}\right].[0,120] = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[0,120] = [0,30]$$

olarak bulunur.

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,120] \\ [1,2] & [60,240] \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_2$ matrisinin determinantı:

$$det\boldsymbol{A}_2 = [2,3].[60,240] - [0,120].[1,2]$$
$$= [120,720] - [0,240] = [120,720] + opp[0,240]$$
$$= [120,480]$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{1}{[4,\ 7]}.[120,480] = (1.inv[4,\ 7]).[120,480]$$
$$= dual\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{7}\right].[120,480] = \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{4}\right].[120,480] = [\frac{120}{7},\ 120]$$

şeklinde bulunur. Buna göre,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,30] \\ \left[\frac{120}{7}, 120\right] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.2.3. Gauss Eliminasyon Yöntemi

(4.1) interval lineer denklem sistemini ele alalım. $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ ilaveli matrisine $\boldsymbol{a_{11}} \neq 0$ olmak üzere $i = 2,3,\dots n$ için $-\frac{\boldsymbol{a_{i1}}}{\boldsymbol{a_{11}}} E_1 + E_i \to E_i$ elementer satır işlemi uygulanırsa,

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{12} + a_{22} & \cdots & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1n} + a_{2n} & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 + b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{12} + a_{n2} & \cdots & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1n} + a_{nn} & -\frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 + b_n \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

elde edilir. Böylece birinci satır hariç tüm satırlardaki $\boldsymbol{x_1}$'in katsayısı sıfır olur. Benzer şekilde sırasıyla $\boldsymbol{a_{ii}} \neq 0$ olmak üzere $j = i + 1,\ i + 2, \dots n$ için $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}} E_i + E_j \rightarrow E_j$ elementer satır işlemleri uygulanırsa;

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n}{}^{(n)} & b_2{}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right)$$

olur. Böylece üçgensel bir sistem elde edilir. Buradan $n.$ denklemde

$$\boldsymbol{x_n} = \frac{\boldsymbol{b_n^{(n)}}}{\boldsymbol{a_{nn}^{(n)}}}$$

bulunur. $\boldsymbol{x_n}$, $(n-1)$ denklemde yerine konularak $\boldsymbol{x_{n-1}}$ bulunur ve geriye doğru yerine koyma işlemine bu şekilde devam edilerek

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{1}{\boldsymbol{a_{ii}^{(n)}}} \left(\boldsymbol{b_i^{(n)}} - \sum_{j=i+1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}^{(n)}} \boldsymbol{x_j}\right),\ i = n-1,\ n-2,\ \dots 2, 1$$

elde edilir (Hansen ve Walster, 2004: Garloff, 2009: Adabitabarfirozja ve ark., 2011: Nirmala ve ark., 2013).

Örnek 4.4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}[2,3] & [0,1]\\ [1,2] & [2,3]\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}[0,120]\\ [60,240]\end{pmatrix}$ olmak üzere (4.1) sisteminin çözümünü hesaplayalım.

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{matrix}[2,3] & [0,1]\\ [1,2] & [2,3]\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[0,120]\\ [60,240]\end{matrix}\right)$$

$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ ilaveli matrisi için $-\frac{\boldsymbol{a_{21}}}{\boldsymbol{a_{11}}}E_1+E_2\rightarrow E_2$ elementer satır işlemi yapılsın.

$$-\frac{\boldsymbol{a_{21}}}{\boldsymbol{a_{11}}}=\frac{[1,\ 2]}{[2,\ 3]}=[-2,-1].\,inv[2,\ \ 3]=[-2,\ -1].\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right]=\left[-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right]$$

$$\boldsymbol{a_{21}^{(2)}}=[1,2]+\left[\frac{-[1,\ 2]}{[2,\ 3]}.\,[2,3]\right]=[1,2]-[1,2]=[1,2]+opp[1,2]=[0,0]=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a_{22}^{(2)}}=[2,3]+\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right].[0,1]=[2,3]+\left[-\frac{2}{3},\ 0\right]=\left[\frac{4}{3},\ 3\right]$$

$$\boldsymbol{b_2^{(2)}}=[60,\ 240]+\left[-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right].[0,\ 120]=[60,\ 240]+[-80,0]=[-20,240]$$

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\sim\left(\begin{matrix}[2,3] & [0,1]\\ \boldsymbol{0} & \left[\frac{4}{3},3\right]\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[0,120]\\ [-20,240]\end{matrix}\right)$$

Elementer satır işlemlerinin sonucunda,

$$\boldsymbol{x_1}.[2,3]+\boldsymbol{x_2}.[0,1]=[0,120]$$

$$\boldsymbol{x_2}.\left[\frac{4}{3},\ 3\right]=[-20,240]$$

olup,

$$\boldsymbol{x_2}=\frac{[-20,\ \ 240]}{\left[\frac{4}{3},\ 3\right]}=[-20,240].\,inv\left[\frac{4}{3},\ \ 3\right]=[-20,240].\left[\frac{3}{4},\ \frac{1}{3}\right]=\left[-\frac{20}{3},\ 80\right]$$

bulunur. Şimdi $\boldsymbol{x_1}$'i hesaplayalım,

$$\boldsymbol{x_1}.[2,3] + \boldsymbol{x_2}[0,1] = [0,120]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{1}{[2,3]}\left\{[0,120] - \left[-\frac{20}{3},\ 80\right].[0,1]\right\}$$

$$= \left[\frac{10}{3},\ \frac{40}{3}\right]$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \left[\frac{10}{3},\ \frac{40}{3}\right] \\ \left[-\frac{20}{3},\ 80\right] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.2.4. LU Ayrışımı

(4.1) interval lineer denklem sisteminin LU ayrışımı ile çözümü için aşağıdaki adımlar izlenir.

- $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ olacak şekilde

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l_{21}} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{l_{n1}} & \boldsymbol{l_{n2}} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ ve } \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} & \cdots & \boldsymbol{u_{1n}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{u_{22}} & \cdots & \boldsymbol{u_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

  matrisleri bulunur.
- $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$ eşitliğinin her iki tarafı $\boldsymbol{L^{-1}}$ ile çarpılarak $\boldsymbol{L^{-1}LUx} = \boldsymbol{L^{-1}b}$ elde edilir.
- $\boldsymbol{L^{-1}b} = \boldsymbol{C}$ denilirse $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{C}$ eşitliği elde edilir.
- $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{C}$ eşitliğinin her iki tarafı $\boldsymbol{U^{-1}}$ ile çarpılarak, $\boldsymbol{U^{-1}Ux} = \boldsymbol{U^{-1}C}$ elde edilir.Bu durumda $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U^{-1}C}$ şeklinde elde edilir (Nirmala ve Ganesan, 2018).

Örnek 4.5. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.1) interval lineer denklem sisteminin çözümünü hesaplayalım.

L ve ***U*** matrisleri,

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l_{21}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{u_{22}} \end{pmatrix}$$

şeklinde alalım.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l_{21}} & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{u_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} \\ \boldsymbol{l_{21}}.\boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{l_{21}}.\boldsymbol{u_{12}} + \boldsymbol{u_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_{11}} = [2,3], \; \boldsymbol{u_{12}} = [0,1]$$

şeklindedir.

$$\boldsymbol{l_{21}}.\boldsymbol{u_{11}} = [1,2] \Rightarrow \boldsymbol{l_{21}} = \frac{[1,\ 2]}{\boldsymbol{u_{11}}} = \frac{[1,\ 2]}{[2,\ 3]} = [1,2].\,inv\,[2,3] = [1,2].\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right]$$

şeklindedir.

$$\boldsymbol{l_{21}}.\boldsymbol{u_{12}} + \boldsymbol{u_{22}} = [2,3]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{u_{22}} = [2,3] - \boldsymbol{l_{21}}.\boldsymbol{u_{12}} = [2,3] - \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right].[0,1] = [2,3] - [0,\ \tfrac{2}{3}] = [2,3] + opp\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{u_{22}} = \left[2,\ \frac{7}{3}\right]$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ \mathbf{0} & \left[2,\ \frac{7}{3}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

olur.

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ \mathbf{0} & \left[2,\ \frac{7}{3}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}$ olacak şekilde, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}$ kabul edelim.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y_1} = [0,120]$$
$$\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] . \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} = [60,240]$$

şeklindedir.

$$\boldsymbol{y_2} = [60,240] - \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] . \boldsymbol{y_1} = [60,240] - \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] . [0,120] = [60,240] - [0,80]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{y_2} = [60,240] + opp[0,80] = [60,160]$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,160] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ \mathbf{0} & \left[2,\ \frac{7}{3}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,160] \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$[2,3]. \boldsymbol{x_1} + [0,1]. \boldsymbol{x_2} = [0,120]$$
$$\left[2,\ \frac{7}{3}\right] . \boldsymbol{x_2} = [60,160]$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{[60,\ 160]}{\left[2,\ \frac{7}{3}\right]} = [60,160].\, inv\left[2,\ \frac{7}{3}\right] = [60,160]. \left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{7}\right] = \left[30,\ \frac{480}{7}\right]$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{1}{[2,\ 3]}\{[0,120] - [0,1].\boldsymbol{x_2}\}$$

$$= \frac{1}{[2,\ 3]}\left\{[0,120] - [0,1].\left[30,\ \frac{480}{7}\right]\right\} = \frac{1}{[2,\ 3]}\left\{[0,120] + opp\left[0,\ \frac{480}{7}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{[2,\ 3]}.\left[0,\ \frac{360}{7}\right] = \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right].\left[0,\ \frac{360}{7}\right] = [0,\ \frac{120}{7}]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = [0,\ \frac{120}{7}]$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[0,\ \frac{120}{7}\right] \\ \left[30,\ \frac{480}{7}\right] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

5. İNTERVAL LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN İTERATİF BOYUT İNDİRGEME METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Öncelikle, Keskin ve Aydın (2007) tarafından verilmiş olan IDDM metodunu tanıtalım.

5.1. İteratif Boyut İndirgeme Metodu (IDDM)

Buradaki semboller Keskin ve Aydın (2007)'da bulunan sembollerle aynı olarak kullanılmıştır.

k	İterasyon sayısı	$k = 1, 2, \dots, n-1$
M	İndirgenen matrisin boyutu	$m = n - k + 1$
$A^{(k)}$	İndirgenen katsayı matrisi	$m \times m$ matris
$X^{(k)}$	İndirgenen sistemin çözüm vektörü	$(n-k+1) \times 1$ vektör
$f^{(k)}$	İndirgenen sistemin sağ taraf vektörü	$m \times 1$ vektör
$A_1^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin 1. satır vektöründen oluşan matris	$1 \times m$ matris
$A_2^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin 2., 3., … , m. satır vektörlerinden oluşan matris	$(m-1) \times m$ matris
$u^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün 1. satır vektöründen oluşan matris	1×1 vektör
$v^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün 2., 3., … , m. satır vektörlerinden oluşan vektör	$(m-1) \times m$ vektör
$a_{ij}^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin, ij. elemanı	skaler
$x_i^{(k)}$	$X^{(k)}$ vektörünün i. elemanı	skaler
$f_i^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün i. elemanı	skaler
$X_0^{(k)}$	$A_1^{(k)} X^{(k)} = u^{(k)}$ lineer denklem sisteminin özel çözümü	$1 \times m$ vektör
$R^{(k)}$	$A_1^{(k)} X^{(k)} = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan matris	$m \times (m-1)$ matris

Tablo 4.1. IDDM metodunda kullanılan semboller (Keskin ve Aydın, 2007).

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ regüler matris ve $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ olmak üzere $Ax = b$ lineer denklem sistemini ele alalım. İterasyonun $k.$ adımında, indirgenmiş sistemin katsayı matrisi $A^{(k)}$ ve sağ taraf vektörü $b^{(k)}$ olmak üzere;

$$A^{(k)} = \begin{cases} A & , \ k = 1 \\ A_2^{(k-1)} R^{(k-1)}, & k = 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{ve} \quad b^{(k)} = \begin{cases} b & , \ k = 1 \\ v^{(k-1)} - A_2^{(k-1)} X_0^{(k-1)}, & k = 2, \dots, n \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, u^{(k)}$ ve $v^{(k)}$ sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$A_1^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1m}^{(k)} \end{pmatrix}, \ u^{(k)} = \left({b_1}^{(k)} \right)$$

$$A_2^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2m}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \cdots & a_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}, v^{(k)} = \begin{pmatrix} {b_2}^{(k)} \\ \vdots \\ {b_m}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$a_{1s}^{(k)}$, $A_1^{(k)}$' nın sıfırdan farklı ilk elemanı olmak üzere

$$X_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \frac{b_1^{(k)}}{a_{1s}^{(k)}} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}^T$$

ve $r_{1j}^{(k)} = -\frac{a_{1j}^{(k)}}{a_{1j}^{(k)}}$ olmak üzere

$$R^{(k)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{1\times(m-s)}^{(k)} \\ I_{(m-s)\times(m-s)} \end{pmatrix}, & s = 1 \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} & 0_{(s-1)\times(m-s)} \\ 0_{1\times(s-1)} & r_{1\times(m-s)}^{(k)} \\ 0_{(m-s)\times(s-1)} & I_{(m-s)\times(m-s)} \end{pmatrix}, & 1 < s < m \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} \\ 0_{1\times(s-1)} \end{pmatrix}, & s = m \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $AX = b$ probleminin çözümü;

$$X = X^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}) X_0^{(i)}$$

dır.

Örnek 5.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ lineer denklem sistemini çözelim.

1. $k = 1$ için

$A^{(1)} = A,\ b^{(1)} = b$

1.1. $A_1^{(1)},\ A_2^{(1)},\ u^{(1)}$ ve $v^{(1)}$' i oluşturalım,

$A_1^{(1)} = (1 \quad -1 \quad -1), u^{(1)} = (1)$

$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.2. $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ olup $s = 1$ dır.

$X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = (1 \quad 0 \quad 0)^T$dır.

1.3. $r_{12}^{(1)} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{-1}{1} = 1, r_{13}^{(1)} = -\frac{a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{-1}{1} = 1$ olduğundan

$R^{(1)} = \begin{pmatrix} r_{12}^{(1)} & r_{13}^{(1)} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dır.

2. $k = 2$ için $A^{(2)}$ ve $b^{(2)}$' yi hesaplayalım.

$A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$b^{(2)} = v^{(1)} - A_2^{(1)} X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

olup indirgenmiş sistem aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.1. $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, $u^{(2)}$ ve $v^{(2)}$'i oluşturalım.

$A_1^{(2)} = (5 \quad -3), u^{(2)} = (-2), A_2^{(2)} = (0 \quad 2), v^{(2)} = (2)$

2.2. $a_{11}^{(2)} = 5 \neq 0$ olup $s = 1$ dir.

$X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & 0 \end{pmatrix}^T$ dır.

2.3. $r_{12}^{(2)} = -\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} = \frac{3}{5}$ olup $R^{(2)} = \begin{pmatrix} r_{12}^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ dır.

3. $k = 3$ için $A^{(3)}$ ve $b^{(3)}$'yi hesaplayalım.

$$A^{(3)} = A_2^{(2)} R^{(2)} = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = (2)$$

$$b^{(3)} = v^{(2)} - A_2^{(2)} X_0^{(2)} = (2) - (0 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = (2) - (0) = (2)$$

olup indirgenmiş sistem

$2. X^{(3)} = 2$

şeklindedir.

3.1. $X_0^{(3)} = \frac{b_1^{(3)}}{a_{11}^{(3)}} = \left(\frac{2}{2}\right) = (1)$'dir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} X = X^{(1)} &= X_0^{(1)} + R^{(1)} X_0^{(2)} + R^{(1)} R^{(2)} X_0^{(3)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

5.2. İnterval İteratif Boyut İndirgeme Yöntemi

Bu kısımda, Keskin ve Aydın (2007)'da tanıtılan iteratif boyut indirgeme yöntemi kullanılarak interval lineer denklem sistemlerinin çözümleri elde edilmiştir. Yapılan işlemlerde Kaucher aritmetiği dikkate alınmıştır.

5.2.1. 2 Boyutlu İnterval Sistemler için İteratif Boyut İndirgeme Yöntemi

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}] & [\underline{a_{12}}, \overline{a_{12}}] \\ [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] \end{pmatrix}$ regüler matris ve $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [\underline{b_1}, \overline{b_1}] \\ [\underline{b_2}, \overline{b_2}] \end{pmatrix}$ olmak üzere, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ interval lineer denklem sistemini ele alalım. 2 boyutlu interval lineer denklem sistemi için iteratif boyut indirgeme yönteminin iterasyon sayısı ikidir.

1. İterasyon: $k = 1$ için,

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}$$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{1})},\ \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{1})},\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{1})}$ ve $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{1})}$'i oluşturalım.

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{1})} = \left([\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}]\ [\underline{a_{12}}, \overline{a_{12}}]\right),\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{1})} = \left([\underline{b_1}, \overline{b_1}]\right)$$
$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{1})} = \left([\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}]\ [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}]\right),\ \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{1})} = \left([\underline{b_2}, \overline{b_2}]\right)$$

1.2. $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}^{(\boldsymbol{1})} = [\underline{a_{1s}}, \overline{a_{1s}}]$ elemanları $\underline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}} \neq 0$ ve $\overline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}} \neq 0$ olacak şekilde ilk elemandır.

<u>Burada eğer $s = 1$ ise;</u>

1.3. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(\boldsymbol{1})} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}^{(1)}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \left(\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{1})}.\, inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{1})} \quad \boldsymbol{0}\right)^{\boldsymbol{T}}$ dir.

1.4. $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{1})} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{1s}^{(1)}} = -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{1})}.\, inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{1})}$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{1\times1}^{(1)} \\ I_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

dir.

<u>Eğer s = 2 ise;</u>

1.3. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \frac{\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}^{(1)}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}^{(1)} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ dir.

1.4. $\boldsymbol{R}^{(1)}$ matrisini oluşturalım.

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{1\times1} \\ \boldsymbol{0}_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

2. İterasyon: $k = 2$ için $\boldsymbol{A}^{(2)}$'yi ve $\boldsymbol{b}^{(2)}$'yi hesaplayalım.

<u>Eğer s = 1 ise;</u>

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(1)} = \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right]\right).\begin{pmatrix} -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(1)} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(1)} = \left(\left[\underline{b_2},\ \overline{b_2}\right]\right) - \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right]\right).\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(1)} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(2)}.\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(2)}$ dir.

<u>Eğer s = 2 ise;</u>

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(1)} = \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right]\right).\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\right)$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(1)} = \left(\left[\underline{b_2},\ \overline{b_2}\right]\right) - \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right]\right).\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}^{(1)} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(2)}.\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(2)}$ dir.

2.1. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(2)} = \frac{\boldsymbol{b}^{(2)}}{\boldsymbol{A}^{(2)}} = \boldsymbol{b}^{(2)}.\,inv\,\boldsymbol{A}^{(2)}$ dir.

Çözüm:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{(1)}=\sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{R}^{(j)}\right)\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(2)}$$

Eğer s = 1 ise;

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}+\boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(2)}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}.\left(\boldsymbol{b}^{(2)}.\,inv\;\boldsymbol{A}^{(2)}\right)$$

şeklinde bulunur.

Eğer s = 2 ise;

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}+\boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(2)}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}.\left(\boldsymbol{b}^{(2)}.\,inv\;\boldsymbol{A}^{(2)}\right)$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5.2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}[1,2] & [0,1]\\ [-1,1] & [2,4]\end{pmatrix}$ ve $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}[-1,0]\\ [3,7]\end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

1. $k=1$ için

$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A}\,,\;\boldsymbol{b}^{(1)}=\boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)}$, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)}$, $\boldsymbol{u}^{(1)}$ ve $\boldsymbol{v}^{(1)}$'i oluşturalım.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)}=([1,2]\quad[0,1]),\,\boldsymbol{u}^{(1)}=([-1,0]$
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)}=([-1,1]\quad[2,4]),\,\boldsymbol{v}^{(1)}=([3,7])$

1.2. $\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}=[1,2],\;1\neq0$ ve $2\neq0$ olup $\boldsymbol{s}=\mathbf{1}$ dir.

1.3. $\boldsymbol{X_0^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{b_1^{(1)}}}{\boldsymbol{a_{11}^{(1)}}} & 0 \end{pmatrix}^T$ için *Tablo 2.2.' de 3. satır 1.sütuna göre;*

$$\frac{\boldsymbol{b_1^{(1)}}}{\boldsymbol{a_{11}^{(1)}}} = \frac{[-1,\ 0]}{[1,\ 2]} = [-1, 0].\,inv[1, 2] = [-1, 0].\left[1,\ \tfrac{1}{2}\right] = [-\tfrac{1}{2},\ 0] \text{ ise}$$

$$\boldsymbol{X_0^{(1)}} = \left(\left[-\tfrac{1}{2},\ 0\right] \quad 0\right)^T$$

1.4. *Tablo 2.2.' de 3. satır 1.sütündan faydalanarak* $\boldsymbol{r_{12}^{(1)}}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r_{12}^{(1)}} = -\frac{\boldsymbol{a_{12}^{(1)}}}{\boldsymbol{a_{11}^{(1)}}} = -\frac{[0,\ 1]}{[1,\ 2]} = -[0, 1].\,inv\,[1, 2] = -[0, 1].\left[1,\ \tfrac{1}{2}\right] = [-\tfrac{1}{2},\ 0]$$

$$\boldsymbol{R^{(1)}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_{12}^{(1)}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[-\tfrac{1}{2},\ 0\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

dır.

2. $k = 2$ için $\boldsymbol{A^{(2)}}$ ve $\boldsymbol{b^{(2)}}$'yi hesaplayalım.

$$\boldsymbol{A^{(2)}} = \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{R^{(1)}} \text{ ise}$$

$$\boldsymbol{A^{(2)}} = ([-1, 1] \quad [2, 4])\begin{pmatrix} \left[-\tfrac{1}{2},\ 0\right] \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\left[\tfrac{3}{2},\ \tfrac{9}{2}\right]\right)$$

$$\boldsymbol{b^{(2)}} = \boldsymbol{v^{(1)}} - \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{X_0^{(1)}} \text{ ise}$$

$$\boldsymbol{b^{(2)}} = ([3, 7]) - ([-1, 1] \quad [2, 4])\begin{pmatrix} \left[-\tfrac{1}{2},\ 0\right] \\ 0 \end{pmatrix} = [3, 7] + opp\left[-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\right] = \left(\left[\tfrac{7}{2},\ \tfrac{13}{2}\right]\right)$$

olup indirgenmiş sistem

$$\left(\left[\tfrac{3}{2},\ \tfrac{9}{2}\right]\right).\boldsymbol{X^{(2)}} = \left(\left[\tfrac{7}{2},\ \tfrac{13}{2}\right]\right)$$

şeklindedir.

2.1. *Tablo 2.2.' de 1. satır 1.sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{X_0^{(2)}}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{X_0^{(2)}} = \left(\frac{\left[\tfrac{7}{2},\ \tfrac{13}{2}\right]}{\left[\tfrac{3}{2},\ \tfrac{9}{2}\right]}\right) = \left[\tfrac{7}{2},\ \tfrac{13}{2}\right].\,inv\left[\tfrac{3}{2},\ \tfrac{9}{2}\right] = \left[\tfrac{7}{2},\ \tfrac{13}{2}\right].\left[\tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{9}\right]\left(\left[\tfrac{7}{3},\ \tfrac{13}{9}\right]\right)$$

$\Rightarrow \boldsymbol{X_0^{(2)}} = dual\left[\tfrac{7}{3},\ \tfrac{13}{9}\right] = \left[\tfrac{13}{9},\ \tfrac{7}{3}\right]$ dir.

Çözüm:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}+\boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(2)}=\begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]\\ 1\end{pmatrix}.\left[\frac{13}{9},\ \frac{7}{3}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left[-\frac{7}{6},\ 0\right]\\ \left[\frac{13}{9},\ \frac{7}{3}\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[-\frac{5}{3},\ 0\right]\\ \left[\frac{13}{9},\ \frac{7}{3}\right]\end{pmatrix}$$

dır.

Örnek 5.3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}[0,1] & [-1,1]\\ [1,3] & [1,2]\end{pmatrix}$ ve $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}[-2,3]\\ [3,7]\end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

1. $k=1$ için

$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}^{(1)}=\boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)},\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(1)}$ ve $\boldsymbol{v}^{(1)}$'i oluşturalım,

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)}=([0,1]\quad [-1,1]),\ \boldsymbol{u}^{(1)}=([-2,3])$

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)}=([1,3]\quad [1,2]),\ \boldsymbol{v}^{(1)}=([3,7])$

1.2. $\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}=[-1,1],\ -1\neq 0$ ve $1\neq 0$ olup $\boldsymbol{s}=\mathbf{2}$ dir.

1.3. $\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}}\end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ için *Tablo 2.2.' de 3. satır 3. sütuna göre;*

$\frac{\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}}=\frac{[-2,\ 3]}{[-1,\ 1]}=[-2,3].inv[-1,1]=[-2,3].[-1,1]=[-3,3]$ ise

$\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}=(0\quad [-3,3])^{\boldsymbol{T}}$

1.4. $\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dır.

2. $k=2$ için $\boldsymbol{A}^{(2)}$ ve $\boldsymbol{b}^{(2)}$'yi hesaplayalım.

$\boldsymbol{A}^{(2)}=\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(1)}$ ise

$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{(2)}=([1,3]\quad [1,2]).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=([1,3])$

$\boldsymbol{b}^{(2)}=\boldsymbol{v}^{(1)}-\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)}$ ise

$$= ([3,7]) - ([1,3] \quad [1,2]).\begin{pmatrix} 0 \\ [-3,3] \end{pmatrix} = ([3,7]) + opp([-6,6]) = ([9,1])$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})} = dual\,[9,1] = [1,9]$ dır.

olup indirgenmiş sistem

$([1,3]).\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} = ([1,9])$

şeklindedir.

2.1. *Tablo 2.2.' de 1. satır 1.sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{2})}$ *değerini hesaplayalım.*

$\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{2})} = \left(\frac{[1,\ 9]}{[1,\ 3]}\right) = [1,9].inv[1,3] = [1,9].\left[1,\ \frac{1}{3}\right] = ([1,3])$ dir.

Çözüm:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{(\mathbf{1})} = X_0^{(1)} + R^{(1)}X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-3,3] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}([1,3]) = \begin{pmatrix} 0 \\ [-3,3] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [1,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [1,3] \\ [-3,3] \end{pmatrix}$$

dır.

5.2.2. 3 Boyutlu İnterval Sistemler için İteratif Boyut İndirgeme Yöntemi

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{11}},\ \overline{a_{11}}] & [\underline{a_{12}},\ \overline{a_{12}}] & [\underline{a_{13}},\ \overline{a_{13}}] \\ [\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}},\ \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}},\ \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}},\ \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}},\ \overline{a_{33}}] \end{pmatrix}$ regüler matris ve $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [\underline{b_1},\ \overline{b_1}] \\ [\underline{b_2},\ \overline{b_2}] \\ [\underline{b_3},\ \overline{b_3}] \end{pmatrix}$ olmak üzere, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ interval lineer denklem sistemini ele alalım. 3 boyutlu interval lineer denklem sistemi için iteratif boyut indirgeme yönteminin iterasyon sayısı üçtür.

1. İterasyon: $k = 1$ için

$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1})} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}^{(\mathbf{1})} = \boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}$, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})}$, $\boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})}$ ve $\boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})}$'i oluşturalım.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} = \left([\underline{a_{11}},\ \overline{a_{11}}]\,[\underline{a_{12}},\ \overline{a_{12}}]\,[\underline{a_{13}},\ \overline{a_{13}}]\right)$, $\boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})} = \left([\underline{b_1},\ \overline{b_1}]\right)$

$$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}}, \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}}, \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}}, \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}}, \overline{a_{33}}] \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} [\underline{b_2}, \overline{b_2}] \\ [\underline{b_3}, \overline{b_3}] \end{pmatrix}$$

1.2. $\boldsymbol{a}_{1s}^{(1)} = [\underline{a_{1s}}, \overline{a_{1s}}]$ elemanları $\underline{a_{1s}} \neq 0$ ve $\overline{a_{1s}} \neq 0$ olacak şekilde ilk elemandır.

Burada eğer s = 1 ise;

1.3. $\boldsymbol{X}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{b}_1^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{1s}^{(1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ dir.

1.4. $\boldsymbol{r}_{12}^{(1)} = -\frac{\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}} = -\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}_{13}^{(1)} = -\frac{\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}} = -\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{1\times2} \\ \boldsymbol{I}_{2\times2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{12}^{(1)} & \boldsymbol{r}_{13}^{(1)} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} & -\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer s = 2 ise;

1.3. $\boldsymbol{X}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{b}_1^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{1s}^{(1)}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ dır.

1.4. $\boldsymbol{r}_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}^{(1)}}{a_{12}^{(1)}} = \boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{1\times1} & 0_{1\times1} \\ 0_{1\times1} & r_{1\times1}^{(1)} \\ 0_{1\times1} & I_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{r}_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

Eğer s = 3 ise;

1.3. $\boldsymbol{X_0^{(1)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{b_1^{(1)}}}{\boldsymbol{a_{1s}^{(1)}}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})}.inv\boldsymbol{a_{13}^{(1)}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ dır.

1.4. $\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{1}\times\mathbf{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

2. İterasyon: $k = 2$ için $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$ ve $\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})}$' yi hesaplayalım.

Eğer s = 1 ise;

$$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})}$$

$$= \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}}, \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}}, \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}}, \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}}, \overline{a_{33}}] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a_{12}^{(1)}}.inv\boldsymbol{a_{11}^{(1)}} & -\boldsymbol{a_{13}^{(1)}}.inv\boldsymbol{a_{11}^{(1)}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{X_0^{(1)}}$$

$$= \begin{pmatrix} [\underline{b_2}, \overline{b_2}] \\ [\underline{b_3}, \overline{b_3}] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}}, \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}}, \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}}, \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}}, \overline{a_{33}}] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})}.inv\boldsymbol{a_{11}^{(1)}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{11}}^{(2)}, \overline{a_{11}}^{(2)}] & [\underline{a_{12}}^{(2)}, \overline{a_{12}}^{(2)}] \\ [\underline{a_{21}}^{(2)}, \overline{a_{21}}^{(2)}] & [\underline{a_{22}}^{(2)}, \overline{a_{22}}^{(2)}] \end{pmatrix}$ ve $\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} [\underline{b_1}^{(2)}, \overline{b_1}^{(2)}] \\ [\underline{b_2}^{(2)}, \overline{b_2}^{(2)}] \end{pmatrix}$ olmak üzere $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}.\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})}$ dir.

Eğer s = 2 ise;

$$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}}, \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}}, \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}}, \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}}, \overline{a_{33}}] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_{13}^{(1)}}.inv\boldsymbol{a_{12}^{(1)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{A_2^{(1)}}\boldsymbol{X_0^{(1)}}$$

$$= \begin{pmatrix} [\underline{b_2}, \overline{b_2}] \\ [\underline{b_3}, \overline{b_3}] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & [\underline{a_{23}}, \overline{a_{23}}] \\ [\underline{a_{31}}, \overline{a_{31}}] & [\underline{a_{32}}, \overline{a_{32}}] & [\underline{a_{33}}, \overline{a_{33}}] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})}.inv\boldsymbol{a_{12}^{(1)}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left[\underline{a_{11}}^{(2)},\ \overline{a_{11}}^{(2)}\right] & \left[\underline{a_{12}}^{(2)},\ \overline{a_{12}}^{(2)}\right] \\ \left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right] & \left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right] \end{pmatrix}$ ve

$\boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left[\underline{b_1}^{(2)},\ \overline{b_1}^{(2)}\right] \\ \left[\underline{b_2}^{(2)},\ \overline{b_2}^{(2)}\right] \end{pmatrix}$ olmak üzere $\boldsymbol{A}^{(2)}.\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(2)}$ dir.

<u>Eğer $s = 3$ ise;</u>

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{1})}\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{1})} = \begin{pmatrix} \left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right] \left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right] \left[\underline{a_{23}},\ \overline{a_{23}}\right] \\ \left[\underline{a_{31}},\ \overline{a_{31}}\right] \left[\underline{a_{32}},\ \overline{a_{32}}\right] \left[\underline{a_{33}},\ \overline{a_{33}}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{1})}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(\boldsymbol{1})}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\underline{b_2},\ \overline{b_2}\right] \\ \left[\underline{b_3},\ \overline{b_3}\right] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right] \left[\underline{a_{22}},\ \overline{a_{22}}\right] \left[\underline{a_{23}},\ \overline{a_{23}}\right] \\ \left[\underline{a_{31}},\ \overline{a_{31}}\right] \left[\underline{a_{32}},\ \overline{a_{32}}\right] \left[\underline{a_{33}},\ \overline{a_{33}}\right] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{1})}.\,inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{13}}^{(\boldsymbol{1})} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left[\underline{a_{11}}^{(2)},\ \overline{a_{11}}^{(2)}\right] & \left[\underline{a_{12}}^{(2)},\ \overline{a_{12}}^{(2)}\right] \\ \left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right] & \left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right] \end{pmatrix}$ ve

$\boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left[\underline{b_1}^{(2)},\ \overline{b_1}^{(2)}\right] \\ \left[\underline{b_2}^{(2)},\ \overline{b_2}^{(2)}\right] \end{pmatrix}$ olmak üzere $\boldsymbol{A}^{(2)}.\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(2)}$ dir.

2.1. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})}$, $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{2})}$, $\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{2})}$ ve $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{2})}$'i oluşturalım.

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})} = \left(\left[\underline{a_{11}}^{(2)},\ \overline{a_{11}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{12}}^{(2)},\ \overline{a_{12}}^{(2)}\right]\right),\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{2})} = \left(\left[\underline{b_1}^{(2)},\ \overline{b_1}^{(2)}\right]\right)$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{2})} = \left(\left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right]\right),\ \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{2})} = \left(\left[\underline{b_2}^{(2)},\ \overline{b_2}^{(2)}\right]\right)$$

2.2. $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}^{(\boldsymbol{2})} = \left[\underline{a_{1s}}^{(2)},\ \overline{a_{1s}}^{(2)}\right]$ elemanları $\underline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}}^{(\boldsymbol{2})} \neq 0$ ve $\overline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1s}}}^{(\boldsymbol{2})} \neq 0$ olacak şekilde ilk elemandır.

<u>Burada eğer $s = 1$ ise;</u>

2.3. $\boldsymbol{X_0^{(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(2)}}{a_{1s}^{(2)}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{u}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a_{11}^{(2)}} \quad \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$ dir.

2.4. $\boldsymbol{r_{12}^{(2)}} = -\frac{\boldsymbol{a_{12}^{(2)}}}{\boldsymbol{a_{1s}^{(2)}}} = -\boldsymbol{a_{12}^{(2)}}.\,inv\boldsymbol{a_{11}^{(2)}}$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_{1\times1}^{(2)}} \\ I_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a_{12}^{(2)}}.\,inv\boldsymbol{a_{11}^{(2)}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

dir.

<u>Eğer s = 2 ise;</u>

2.3. $\boldsymbol{X_0^{(2)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{b_1^{(2)}}{a_{1s}^{(2)}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{u}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a_{12}^{(2)}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ dir.

2.4. $\boldsymbol{R^{(2)}}$ matrisini oluşturalım.

$$\boldsymbol{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{1\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

3.İterasyon: $k = 3$ için $\boldsymbol{A^{(3)}}$'yi ve $\boldsymbol{b^{(3)}}$'yi hesaplayalım.

<u>Eğer s = 1 ise;</u>

$$\boldsymbol{A^{(3)}} = \boldsymbol{A_2^{(2)}}\boldsymbol{R^{(2)}} = \left(\left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right]\right).\begin{pmatrix} -\boldsymbol{a_{12}^{(2)}}.\,inv\boldsymbol{a_{11}^{(2)}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b^{(3)}} = \boldsymbol{v^{(2)}} - \boldsymbol{A_2^{(2)}}\boldsymbol{X_0^{(2)}}$$

$$= \left(\left[\underline{b_2}^{(2)},\ \overline{b_2}^{(2)}\right]\right) - \left(\left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right]\right).\begin{pmatrix} \boldsymbol{u^{(2)}}.\,inv\boldsymbol{a_{11}^{(2)}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A^{(3)}}.\boldsymbol{X^{(3)}} = \boldsymbol{b^{(3)}}$ dir.

<u>Eğer s = 2 ise;</u>

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{A}_{2}^{(2)}\boldsymbol{R}^{(2)} = \left(\left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right]\right).\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \left(\left[\underline{a_{21}},\ \overline{a_{21}}\right]\right)$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{v}^{(2)} - \boldsymbol{A}_{2}^{(2)}\boldsymbol{X}_{0}^{(2)}$$

$$= \left(\left[\underline{b_{2}}^{(2)},\ \overline{b_{2}}^{(2)}\right]\right) - \left(\left[\underline{a_{21}}^{(2)},\ \overline{a_{21}}^{(2)}\right]\left[\underline{a_{22}}^{(2)},\ \overline{a_{22}}^{(2)}\right]\right).\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(2)}\end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\boldsymbol{A}^{(3)}.\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{b}^{(3)}$ dir.

3.1. $\boldsymbol{X}_{0}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{b}^{(3)}}{\boldsymbol{A}^{(3)}} = \boldsymbol{b}^{(3)}.\,inv\ \boldsymbol{A}^{(3)}$ dir.

Çözüm;

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{(1)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{R}^{(j)}\right)\boldsymbol{X}_{0}^{(3)}$

<u>Eğer s = 1 ise;</u>

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{0}^{(1)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{0}^{(2)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(2)}\boldsymbol{X}_{0}^{(3)}$$

$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} & -\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(2)}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)} & -\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\boldsymbol{a}_{12}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a}_{11}^{(2)}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}.\left(\boldsymbol{b}^{(3)}.\,inv\ \boldsymbol{A}^{(3)}\right)$$

dir.

<u>Eğer s = 2 ise;</u>

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{0}^{(1)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{0}^{(2)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(2)}\boldsymbol{X}_{0}^{(3)}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}^{(2)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_{13}^{(1)}.\,inv\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}.\left(\boldsymbol{b}^{(3)}.\,inv\ \boldsymbol{A}^{(3)}\right)$$

dir.

<u>Eğer $s = 3$ ise;</u>

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(2)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(2)}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(3)}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u}^{(1)}.\, inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(2)}.\, inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(2)}.\, inv\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(2)} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.\,(\boldsymbol{b}^{(3)}.\, inv\ \boldsymbol{A}^{(3)})$$

dir.

Örnek 5.4. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] & [2,3] \\ [-1,0] & [2,3] & [1,2] \\ [-1,2] & [1,3] & [-1,0] \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

1. Adım: $k = 1$ için

$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\,,\ \boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)},\ \boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)},\ \boldsymbol{u}^{(1)}$ ve $\boldsymbol{v}^{(1)}$'i oluşturalım.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(1)} = ([1,2] \quad [-1,1] \quad [2,3]),\ \boldsymbol{u}^{(1)} = ([1,2])$

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(1)} = \begin{pmatrix} [-1,0] & [2,3] & [1,2] \\ [-1,2] & [1,3] & [-1,0] \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$

1.2. $\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)} = [1,2],\ 1 \neq 0$ ve $2 \neq 0$ olup $\boldsymbol{s} = \mathbf{1}$ dır.

1.3. $\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{[1,\ 2]}{[1,\ 2]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ için *Tablo 2.2.' de 1. satır 1. sütuna göre;*

$$\frac{\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}} = \frac{[1,\ 2]}{[1,\ 2]} = [1,2].\, inv[1,2] = [1,2].\left[{}^{1}/_{1},\ {}^{1}/_{2}\right] = [1,1]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(1)} = ([1,1] \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$$

dır.

1.4. $\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}=\left(-\frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}} \quad -\frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}}\right)=\left(-\frac{[-1,\ 1]}{[1,\ 2]} \ -\frac{[2,\ 3]}{[1,\ 2]}\right)$

Tablo 2.2.' de 2. satır 1. sütundan faydalanarak $\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{1})}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{1})}=-\frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}}=-\frac{[-1,1]}{[1,\ 2]}=-[-1,1].inv[1,2]=-[-1,1].\left[{}^{1}\!/_{1},\ {}^{1}\!/_{2}\right]$$
$$=-\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{r}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{1})}=dual\left[\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$$

Tablo 2.2.' de 1. satır 1. sütundan faydalanarak $\boldsymbol{r}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}-\frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}^{(1)}}=-\frac{[2,3]}{[1,\ 2]}=-[2,3].inv[1,2]=-[2,3].\left[{}^{1}\!/_{1},\ {}^{1}\!/_{2}\right]=[-\tfrac{3}{2},\ -2]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{r}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}=dual\left[-\frac{3}{2},\ -2\right]=[-2,\ -\tfrac{3}{2}]$$
$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}=\left(\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right] \quad \left[-2,\ -\frac{3}{2}\right]\right)$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{1})} & \boldsymbol{r}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right] & \left[-2,\ -\frac{3}{2}\right]\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ dır.}$$

2. $k=2$ için

$$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}=\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})}\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})}\Rightarrow\begin{pmatrix}[-1,0] & [2,3] & [1,2]\\ [-1,2] & [1,3] & [-1,0]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right] & \left[-2,\ -\frac{3}{2}\right]\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}=\begin{pmatrix}\left[\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right] & [1,4]\\ [0,4] & [-5,2]\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})}=\boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})}-\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})}\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{1})}\Rightarrow\begin{pmatrix}[-1,0]\\ [-1,1]\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}[-1,0] & [2,3] & [1,2]\\ [-1,2] & [1,3] & [-1,0]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}[1,1]\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + opp[-1,0] \\ [-1,1] + opp[-1,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + [1,0] \\ [-1,1] + [1,\ -2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [0,0] \\ [0,\ -1] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b}^{(2)} = dual \begin{pmatrix} [0,0] \\ [0,\ -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,0] \\ [-1,0] \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\begin{pmatrix} \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right] & [1,4] \\ [0,4] & [-5,2] \end{pmatrix} . \boldsymbol{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} [0,0] \\ [-1,0] \end{pmatrix}$ dir.

2.1. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})},\ \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{2})},\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{2})}$ ve $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{2})}$'i oluşturalım.

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})} = \left(\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right] [1,4] \right),\ \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{2})} = ([0,0])$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{2})} = ([0,4][-5,2]),\ \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{2})} = ([-1,0])$$

2.2. $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{2})} = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$, $\frac{3}{2} \neq 0$ ve $\frac{7}{2} \neq 0$ olup $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{1}$ dir.

2.3. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(\boldsymbol{2})} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{1})}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ için *Tablo 2.2.' de 1. satır 1. sütuna göre;*

$$\frac{[0,\ 0]}{\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]} = [0,0].inv\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right] = [0,0].\left[{}^{2}/_{3},\ {}^{2}/_{7}\right] = [0,0]$$

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(\boldsymbol{2})} = ([0,0] \quad \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}$$

olur.

2.4. *Tablo 2.2.' de 1. satır 1. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{1})}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{2})} = -\frac{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{1})}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{1})}} = \left(-\frac{[1,\ 4]}{\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]} \right) = [1,4].inv\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}^{(\boldsymbol{2})} = -[1,4].\left[{}^{2}/_{3},\ {}^{2}/_{7}\right] = -\left[\frac{2}{3}, \frac{8}{7}\right] = \left[-\frac{8}{7}, -\frac{2}{3}\right]$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{2})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{12}}^{(\boldsymbol{2})} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{8}{7}, -\frac{2}{3}\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

3.Adım: $k = 3$ için $\boldsymbol{A}^{(3)}$ ve $\boldsymbol{b}^{(3)}$' yi hesaplayalım.

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(2)}\boldsymbol{R}^{(2)} \Rightarrow ([0,4][-5,2]).\begin{pmatrix}\left[-\frac{8}{7}, -\frac{2}{3}\right] \\ 1\end{pmatrix} = \left[-5, \frac{2}{5}\right]$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{v}^{(2)} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(2)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(2)} \Rightarrow ([-1,0]) - ([0,4][-5,2]).\begin{pmatrix}[0,0] \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= [-1,0] - [0,0] = [-1,0] + opp[0,0] = [-1,0]$$

olup indirgenmiş sistem $\left[-5, \frac{2}{5}\right].\boldsymbol{X}^{(3)} = [-1,0]$ dir.

3.1. *Tablo 2.2.' de 2. satır 2. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{b}^{(3)}}{\boldsymbol{A}^{(3)}} = \frac{[-1,\ 0]}{\left[-5, \frac{2}{5}\right]} = [-1,0].inv\left[-5, \frac{2}{5}\right] = [-1,0].\left[-\frac{1}{5}, \frac{5}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right] \text{ dir.}$$

Çözüm;

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(1)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(2)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(2)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}[1,1] \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \left[-2, -\frac{3}{2}\right] \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[0,0] \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \left[-2, -\frac{3}{2}\right] \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left[-\frac{8}{7}, -\frac{2}{3}\right] \\ 1\end{pmatrix}\left(\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right]\right)$$

$$= \begin{pmatrix}[1,1] \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\left[-\frac{18}{35}, \frac{90}{14}\right] \\ \left[-\frac{8}{35}, \frac{5}{3}\right] \\ \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right]\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\left[\frac{17}{35}, \frac{52}{7}\right] \\ \left[-\frac{8}{35}, \frac{5}{3}\right] \\ \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right]\end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 5.5. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}[0,1] & [-1,2] & [1,2] \\ [2,3] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,2] & [-1,0] & [2,3]\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}[1,2] \\ [-1,0] \\ [0,1]\end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

1. $k = 1$ için

$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_1^{(1)},\ \boldsymbol{A}_2^{(1)},\ \boldsymbol{u}^{(1)}$ ve $\boldsymbol{v}^{(1)}$'i oluşturalım.

$$\boldsymbol{A}_1^{(1)} = ([0,1] \quad [-1,2] \quad [1,2]),\ \boldsymbol{u}^{(1)} = ([1,2])$$

$$\boldsymbol{A}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,2] & [-1,0] & [2,3] \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [0,1] \end{pmatrix}$$

1.2. $\boldsymbol{a}_{12}^{(1)} = [-1,2], -1 \neq 0$ ve $2 \neq 0$ olup $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{2}$ dır.

1.3. $\boldsymbol{X}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \frac{\boldsymbol{b}_1^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ için *Tablo 2.2.' de 1. satır 2. sütuna göre;*

$$\frac{\boldsymbol{b}_1^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}} = \frac{[1,\ 2]}{[-1,\ 2]} = [1,2].inv[-1,2] = [1,2].\left[-{}^{1}/_{1},\ {}^{1}/_{2}\right] = [-2,1]$$

$$\boldsymbol{X}_0^{(1)} = (\boldsymbol{0}\ [-2,\ 1]\ \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}$$

olur.

1.4. *Tablo 2.2.' de 1. satır 2. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{r}_{13}^{(1)}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r}_{13}^{(1)} = \left(-\frac{\boldsymbol{a}_{13}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_{12}^{(1)}}\right) = \left(-\frac{[1,\ 2]}{[-1,\ 2]}\right) = -[1,2].inv[-1,2] = -[1,2].\left[-{}^{1}/_{1},\ {}^{1}/_{2}\right] = [2,\ -1]$$

$$\boldsymbol{r}_{13}^{(1)} = dual[2,\ -1] = [-1,2]$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{r}_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [-1,2] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

2.Adım: $k = 2$ için $\boldsymbol{A}^{(2)}$ ve $\boldsymbol{b}^{(2)}$' yi hesaplayalım.

$$A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,2] & [-1,0] & [2,3] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [-1,2] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2,3] & [-2,5] \\ [-1,2] & [0,4] \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = v^{(1)} - A_2^{(1)} X_0^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [0,1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [2,3] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,2] & [-1,0] & [2,3] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ [-2,1] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [0,1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [-4,2] \\ [-1,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + opp[-4,2] \\ [0,1] + opp[-1,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + [4,-2] \\ [0,1] + [1,-2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3,-2] \\ [1,-1] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{(2)} = dual \begin{pmatrix} [3,-2] \\ [1,-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,3] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\begin{pmatrix} [2,3] & [-2,5] \\ [-1,2] & [0,4] \end{pmatrix} . X^{(2)} = \begin{pmatrix} [3,-2] \\ [1,-1] \end{pmatrix}$ dir.

2.1. $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, u^{(2)}$ ve $v^{(2)}$'i oluşturalım.

$A_1^{(2)} = ([2,3][-2,5])$, $u^{(2)} = ([-2,3])$

$A_2^{(2)} = ([-1,2][0,4])$, $v^{(2)} = ([-1,1])$

2.2. $a_{11}^{(2)} = [2,3]$, $2 \neq 0$ ve $3 \neq 0$ olup $s = 1$ dir.

2.3. $X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 \end{pmatrix}^T$ için *Tablo 2.2.' de 2. satır 1. sütuna göre;*

$$\frac{b_1^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{[-2,3]}{[2,3]} = [-2,3].inv[2,3] = [-2,3].\left[{}^1/_2,\ {}^1/_3\right] = \left[-\tfrac{2}{3},\ 1\right]$$

$$X_0^{(2)} = \left(\left[-\tfrac{2}{3},\ 1\right] \quad 0\right)^T$$

olur.

2.4. *Tablo 2.2.' de 2. satır 1. sütundan faydalanarak* $r_{12}^{(2)}$ *değerini hesaplayalım.*

$$r_{12}^{(2)} = \left(-\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\right) = \left(-\frac{[-2,5]}{[2,3]}\right) = [-2,5].inv\,[2,3] = -[-2,5].\left[{}^1/_2,\ {}^1/_3\right] = \left[-\tfrac{5}{3},\ \tfrac{2}{3}\right]$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{12}^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{5}{3}, \ \frac{2}{3}\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

3.Adım: $k = 3$ için $\boldsymbol{A}^{(3)}$'yi ve $\boldsymbol{b}^{(3)}$'yi hesaplayalım.

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(2)}\boldsymbol{R}^{(2)} \Rightarrow ([-1,2][0,4])\,.\begin{pmatrix} \left[-\frac{5}{3}, \ \frac{2}{3}\right] \\ 1 \end{pmatrix} = \left[-\frac{10}{3}, \ \frac{17}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{v}^{(2)} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}^{(2)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(2)} \Rightarrow ([-1,1]) - ([-1,2][0,4])\,.\begin{pmatrix} \left[-\frac{2}{3}, \ 1\right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= [-1,0] - \left[-\frac{4}{3}, 2\right] = [-1,0] + opp\left[-\frac{4}{3}, \ 2\right] = [-1,0] + \left[\frac{4}{3}, \ -2\right] = \left[\frac{1}{3}, \ -2\right]$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{b}^{(3)} = dual\left[\frac{1}{3}, \ -2\right] = \left[-2, \ \frac{1}{3}\right]$$

olup indirgenmiş sistem $\left[-\frac{10}{3}, \ \frac{17}{3}\right].\boldsymbol{X}^{(3)} = \left[-2, \ \frac{1}{3}\right]$dir.

3.1. *Tablo 2.2.' de 2. satır 2. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{b}^{(3)}}{\boldsymbol{A}^{(3)}} = \frac{\left[-2, \ \frac{1}{3}\right]}{\left[-\frac{10}{3}, \ \frac{17}{3}\right]} = \left[-2, \ \frac{1}{3}\right].inv\left[-\frac{10}{3}, \ \frac{17}{3}\right] = \left[-2, \ \frac{1}{3}\right].\left[-\frac{3}{10}, \ \frac{3}{17}\right] = \left[-\frac{6}{17}, \ \frac{3}{5}\right]$$

dir.

Çözüm;

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(1)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(2)} + \boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{R}^{(2)}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0}}^{(3)} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-2,1] \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [-1,2] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} [-\frac{2}{3}, \ 1] \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [-1,2] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \left[-\frac{5}{3}, \ \frac{2}{3}\right] \\ 1 \end{pmatrix}\left(\left[-\frac{6}{17}, \ \frac{3}{5}\right]\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ [-2,1] \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-\frac{2}{3}, \ 1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[-1, \ \frac{10}{17}\right] \\ \left[-\frac{12}{17}, \ \frac{6}{5}\right] \\ \left[-\frac{6}{17}, \ \frac{3}{5}\right] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{5}{3}, \frac{27}{17}\right] \\ \left[-\frac{46}{17}, \frac{11}{5}\right] \\ \left[-\frac{6}{17}, \frac{3}{5}\right] \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek 5.6. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-1,0] & [2,3] \\ [1,2] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,0] & [1,3] & [1,2] \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

1. $k = 1$ için

$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}$

1.1. $\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}$, $\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})}$, $\boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})}$ ve $\boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})}$'i oluşturalım.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} = ([0,1] \quad [-1,0] \quad [2,3])$, $\boldsymbol{u}^{(\mathbf{1})} = ([1,2])$

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,0] & [1,3] & [1,2] \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$

1.2. $\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})} = [2,3]$, $2 \neq 0$ ve $3 \neq 0$ olup $\boldsymbol{s} = \mathbf{3}$ dır.

1.3. $\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ için *Tablo 2.2.' de 1. satır 1. sütuna göre;*

$$\frac{\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}^{(\mathbf{1})}} = \frac{[1, \; 2]}{[2, \; 3]} = [1,2].\,inv[2,3] = [1,2].\left[{}^{1}/_{2}, \; {}^{1}/_{3}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{1})} = \left(\mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]\right)^{\boldsymbol{T}}$$

olur.

1.4. $\boldsymbol{R}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

2. $k = 2$ için $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$ ve $\boldsymbol{b}^{(\mathbf{2})}$' yi hesaplayalım.

$$A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,0] & [1,3] & [1,2] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,2] \\ [-1,0] & [1,3] \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = v^{(1)} - A_2^{(1)} X_0^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,0] & [1,3] & [1,2] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + opp\left[0, \frac{2}{3}\right] \\ [-1,1] + opp\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,0] + \left[0, -\frac{2}{3}\right] \\ [-1,1] + \left[-\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[-1, -\frac{2}{3}\right] \\ \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \end{pmatrix}$$

olup indirgenmiş sistem $\begin{pmatrix} [1,2] & [-1,2] \\ [-1,0] & [1,3] \end{pmatrix} . X^{(2)} = \begin{pmatrix} \left[-1, -\frac{2}{3}\right] \\ \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \end{pmatrix}$ dir.

2.1. $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, $u^{(2)}$ ve $v^{(2)}$'i oluşturalım.

$$A_1^{(2)} = ([1,2][-1,2])\ ,\ u^{(2)} = \left(\left[-1, -\frac{2}{3}\right]\right)$$
$$A_2^{(2)} = ([-1,0][1,3])\ ,\ v^{(2)} = \left(\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right]\right)$$

2.2. $a_{11}^{(2)} = [1,2],\ 1 \neq 0$ ve $2 \neq 0$ olup $s = 1$ dir.

2.3. $X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} & 0 \end{pmatrix}^T$ için *Tablo 2.2.' de 3. satır 1. sütuna göre;*

$$\frac{b_1^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} = \frac{\left[-1,-\frac{2}{3}\right]}{[1,2]} = \left[-1, -\frac{2}{3}\right].inv[1,2] = \left[-1, -\frac{2}{3}\right].\left[1/_1, 1/_2\right] = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right]$$

$$dual\ \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right] = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow X_0^{(2)} = \left(\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right] \quad 0\right)^T$$

olur.

2.4. *Tablo 2.2.' de 2. satır 1. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{r_{12}^{(2)}}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{r_{12}^{(2)}} = \left(-\frac{\boldsymbol{a_{12}^{(2)}}}{\boldsymbol{a_{11}^{(2)}}}\right) = \left(-\frac{[-1,\ 2]}{[1,\ 2]}\right) = [-1,2].inv\,[1,2] = -[-1,2].\left[{}^{1}/_{1},\ {}^{1}/_{2}\right] = \left[-1,\ \tfrac{1}{2}\right]$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{R^{(2)}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_{12}^{(2)}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[-1,\ \frac{1}{2}\right] \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dır.}$$

3. $k = 3$ için $\boldsymbol{A^{(3)}}$ ve $\boldsymbol{b^{(3)}}$'yi hesaplayalım.

$$\boldsymbol{A^{(3)}} = \boldsymbol{A_2^{(2)}R^{(2)}} \Rightarrow ([-1,0][1,3]) .\begin{pmatrix} \left[-1,\ \frac{1}{2}\right] \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\tfrac{1}{2},\ 4\right]$$

$$\boldsymbol{b^{(3)}} = \boldsymbol{v^{(2)}} - \boldsymbol{A_2^{(2)}X_0^{(2)}} \Rightarrow \left(\left[-\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{3}\right]\right) - ([-1,0][1,3]).\begin{pmatrix} \left[-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[-\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{3}\right] - \left[0,\ \tfrac{2}{3}\right]$$

$$= \left[-\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{3}\right] + opp\left[0,\ \tfrac{2}{3}\right] = \left[-\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{3}\right] + \left[0,\ -\tfrac{2}{3}\right] = \left[-\tfrac{3}{2},\ -1\right]$$

olup indirgenmiş sistem $\left[\frac{1}{2},\ 4\right].\boldsymbol{X^{(3)}} = \left[-\frac{3}{2},\ -1\right]$ dir.

3.1. *Tablo 2.2.' de 3. satır 1. sütundan faydalanarak* $\boldsymbol{X_0^{(3)}}$ *değerini hesaplayalım.*

$$\boldsymbol{X_0^{(3)}} = \frac{\boldsymbol{b^{(3)}}}{\boldsymbol{A^{(3)}}} = \frac{\left[-\frac{3}{2},\ -1\right]}{\left[\frac{1}{2},\ 4\right]} = \left[-\tfrac{3}{2},\ -1\right] .inv\left[\tfrac{1}{2},\ 4\right] = \left[-\tfrac{3}{2},\ -1\right].\left[2,\ \tfrac{1}{4}\right] = \left[-\tfrac{3}{8},\ -2\right]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X_0^{(3)}} = dual\left[-\tfrac{3}{8},\ -2\right] = \left[-2, -\tfrac{3}{8}\right]$$

dir.

Çözüm;

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_0^{(1)}} + \boldsymbol{R^{(1)}X_0^{(2)}} + \boldsymbol{R^{(1)}R^{(2)}X_0^{(3)}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\begin{pmatrix} \left[-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right] \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\begin{pmatrix} \left[-1,\ \frac{1}{2}\right] \\ 1 \end{pmatrix}\left(\left[-2, -\tfrac{3}{8}\right]\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-1, 2] \\ \left[-2, -\frac{3}{8}\right] \\ \left[-2, -\frac{3}{8}\right] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}\right] \\ \left[-2, -\frac{3}{8}\right] \\ \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{24}\right] \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 5.7. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-1,0] & [0,2] \\ [1,2] & [-1,2] & [0,1] \\ [-1,0] & [1,3] & [1,2] \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [-1,0] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$ interval lineer denklem sistemini çözelim.

İlk satırın bütün elemanları sıfır içerliği için IDDM yöntemini uygulayamayız.

6. SONUÇLAR

Uygulamalı matematiğin her alanında olduğu gibi, lineer cebirin temel problemi olan $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümünde de hem yaklaşık çözüm yöntemlerinin kullanılmasından, hem de hesaplama hatalarından dolayı intervallerle karşılaşılır. Bu sebeple, bu tez çalışmasında interval lineer denklem sistemleri ele alınmıştır. İnterval lineer denklem sistemleri için verilen, doğrudan çözüm, Cramer, Gauss eliminasyon ve LU ayrıştırma yöntemleri incelenmiştir. Ayrıca Keskin ve Aydın (2007) tarafından verilmiş olan iteratif boyut indirgeme yöntemini kullanarak interval lineer denklem sisteminin çözümü elde edilmiştir.

İntervaller her ne kadar reel sayıların bir alt kümesi olsa da, intervallerle işlem yaparken artık reel sayılarla değil, kümelerle işlem yapılmaktadır. Bu nedenle, literatürde intervaller için klasik interval aritmetiği, modifiye interval aritmetiği, Kaucher interval aritmetiği gibi kavramlara rastlanılmıştır. Bu çalışmada, Kaucher aritmetiği kullanılmıştır.

7. KAYNAKLAR

Abolmasoumi, S., 2014, A Method for Calculating Interval Inverse Matrix, *Journal of Mathematics and Computer Science*, 10, 228-234.

Abolmasoumi, S., Alavi, M., 2014, A Method for Calculating Interval Linear System, *Journal of Mathematics and Computer Science*, 8, 193-204.

Adabitabar Firozja, M., Babakordi, F. ve Shahhosseini, M., 2011, Gauss Elimination Algorithm for Interval Matrix, *Int. J. Industrial Mathematics*, 3(1), 9-15.

Allahdadi, M., ve Khorram Z., 2015, Solving Interval Linear Equations with Modified Interval Arithmetic, *British Journal of Mathematics and Computer Science,* 10(2), 1-8.

Bolat, C., 2010, Bileşenleri Reel Aralıklar Olan Matrislerin Karakteristikleri, Yüksek Lisans Tezi, *T.C. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Hatay, 21.

Erdal, Ç.K., 2005, Lineer İnterval Denklem Sistemleri için Çözüm Yolları, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 11-24.

Garloff, J., 2009, Interval Gaussian Elimination with Pivot Tightening, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 30(4), 1761-1772.

Ganesan, K., 2007, On Some Properties of Interval Matrices, *International Jaurnal of Mathematics Sciences*, 1(2), 92-99.

Hansen, E., Walster, G.W., 2004, Global Optimization Using Interval Analysis, *Taft, E.J., Nashed, Z.,* New York- Basel, 35-41.

Horacek, J., Hladik,M. ve Matejka, J., 2017, Determinants of Interval Matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 33, 99-112.

Kaucher, E., Interval Analysis in the Extended Interval Space IR*, Computing Supplement,* 2, 1980, 1–49.

Keskin, T., Aydın, K., 2007, Iterative Decreasing Dimension Algorithm, *Computers and Mathematics with Applications,*53, 1153-1158.

Köse, H., *Lineer Cebir [online],* Ahievran Üniversitesi, https://akademik.ahievran.edu.tr/kullanicidosyalar/files/Lineer%20cebir%206_hafta.pdf [Ziyaret Tarihi : 22 Şubat 2022]

Lakeyev, A. V., On the Computational Complexity of the Solution of Linear Systems with Moduli*, Reliable Computing*, 2 (1996), No. 2, pp. 125–131.

Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S. ve Ganesan, K., 2011, Inverse Interval Matrix: A New Approach, *Applied Mathematical Sciences*, 5(13), 607-624.

Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S. ve Ganesan, K., 2013, The Determinant of An Interval Matrix Using Gaussian Elimination Method, *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 88(1), 15-34.

Nirmala, T., ve Ganesan, K., 2018, Modified Crout's Method for an LU Decomposition of an Interval Matrix, *National Conference on Mathematical Techniques and Its Applications,* 1000.

Nirmala, T., ve Ganesan, K., 2021, Solving System of Interval Linear Equations by Gauss Jordan Method Using Generalized Interval Arithmetic*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* 1130.

Majumdar, S., Chakraverty, S., 2012, A Method for the Solution of Interval System of Linear Equation, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 4(2), 67-70.

Pasca, I., 2010, Formally Verified Conditions for Regularity of Interval Matrices, *Symposium on the Integration of Symbolic Computation and Mechanised Reasoning*, Paris, France, 219-233.

Sabuncuoğlu, A., 2014, Lineer Cebir, Nobel Yayınları, No; I, Ankara, 292-307.

Shary, S.P., 2019, Numerical Computation of Formal Solutions to Interval Linear Systems of Equations, *Institute of Computational Technologies SB RAS and Novosibirsk State University,* 1903.10272v1, 1-9.