



**T.C.NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**LORENZ SİSTEMİNİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRMESİ**

Saniye İNCE POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Haziran-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Saniye İNCE POLAT tarafından hazırlanan “Lorenz Sisteminin Yaklaşık Çözümlerinin Değerlendirilmesi” adlı tez çalışması 20/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Kemal AYDIN

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ali Osman ÇIBIKDİKEN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Saniye İNCE POLAT

Tarih: 20/06/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENZ SİSTEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Saniye İNCE POLAT

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2019, 29 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Dr. Öğr. Üyesi Ali Osman ÇIBIKDİKEN

Bu çalışmada, Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çözümü incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Runge-Kutta, Diferensiyel Dönüşüm ve Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metotları ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çok adımlı diferensiyel dönüşüm metodu, Değişken adım genişliği stratejisi, Diferensiyel dönüşüm metodu, Euler metodu, Lorenz sistemi, Runge-Kutta metodu

ABSTRACT

MS THESIS

EVALUATION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE LORENZ SYSTEM

Saniye İNCE POLAT

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS**

Advisor: Assistant Professor Gülnur ÇELİK KIZILKAN

2019, 29 Pages

Jury

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Assist. Prof. Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN

Assist. Prof. Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN

In this study, the solution of the Lorenz system with variable step size strategy is investigated. The results were compared with the solutions obtained with Runge-Kutta, Differential Transformation and Multi-Step Differential Methods.

Keywords: Differential Transformation Method, Euler Method, Lorenz System, Multi Step Differential Transformation Method, Runge-Kutta Method, Variable Step Size Strategy

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bilgisayar Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN yönetiminde yapılarak, Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Çalışmamı büyük bir özenle yöneten sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN' a teşekkürlerimi sunarım. Çalışmam boyunca maddi ve manevi desteğini hissettiğim ailem ve eşim Ali Kemal POLAT' a çok teşekkür ederim.

Saniye İNCE POLAT
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

<u>ÖZET</u>	iv
<u>ABSTRACT</u>	v
<u>ÖNSÖZ</u>	vi
<u>İÇİNDEKİLER</u>	vii
<u>ŞEKİLLER LİSTESİ</u>	viii
<u>TABLolar LİSTESİ</u>	ix
<u>SİMGELER VE KISALTMALAR</u>	x
<u>1. GİRİŞ</u>	1
<u>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</u>	4
<u>2.1. Lorenz Sistemi</u>	4
<u>2.2. Lorenz Sisteminin Çözümleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar</u>	6
<u>3. MATERYAL VE YÖNTEM</u>	7
<u>3.1. Nümerik Metotlar</u>	7
<u>3.1.1. Runge-Kutta Metodu</u>	7
<u>3.1.2. Diferensiyel Dönüşüm Metodu</u>	8
<u>3.1.3. Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metodu</u>	9
<u>3.2. Değişken Adım Genişliği Stratejisi</u>	9
<u>4. LORENZ SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ</u>	11
<u>4.1. Runge-Kutta Metodu ile Nümerik Çözüm</u>	11
<u>4.2. Diferensiyel Dönüşüm Metodu Nümerik Çözüm</u>	14
<u>4.3. Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Nümerik Çözüm</u>	17
<u>4.4. Değişken Adım Genişliği Stratejisi ile Nümerik Çözüm</u>	23
<u>5. SONUÇLAR</u>	26
<u>KAYNAKLAR</u>	27
<u>ÖZGEÇMİŞ</u>	29

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.1. Lorenz' in 1963 yılındaki çalışmasından hava durumu modelinin başlangıç koşullarındaki hassasiyeti gösteren grafik (Gleick, 2019)
- Şekil 1.2. Lorenz Çekicisi (Lorenz, 1963)
- Şekil 2.1. Lorenz Denklemine oluşan hava akımı (Sparrow, 1982)
- Şekil 2.2. Hopf çatallanması (Bayramlı,2019)
- Şekil 4.1. Lorenz'in RK4 ile çizilen çözüm grafikleri ($h=0.01$, $r=23.5$)
- Şekil 4.2. Lorenz'in RK4 ile çizilen faz portreleri ($h=0.01$, $r=23.5$)
- Şekil 4.3. Lorenz'in RK4 ile çizilen çözüm grafikleri ($h=0.01$, $r=28$)
- Şekil 4.4. Lorenz'in RK4 ile çizilen faz portreleri ($h=0.01$, $r=28$)
- Şekil 4.5. Lorenz Sisteminin farklı adım genişlikleri kullanılarak DTM ile elde edilen çözüm grafikleri ($r=23.5$)
- Şekil 4.6. Lorenz Sisteminin farklı adım genişlikleri kullanılarak DTM ile elde edilen çözüm grafikleri
- Şekil 4.7. Lorenz Sisteminin MsDTM ile çözüm grafikleri ($r=23.5$, $t [0, 0.05]$, $h=0.01$)
- Şekil 4.8. Lorenz Sisteminin MsDTM ile farklı alt aralıklarda çözüm grafikleri ($r=23.5$)
- Şekil 4.9. Lorenz Sisteminin MsDTM ile çözüm grafikleri ($r=28$, $t [0, 0.05]$, $h=0.01$)
- Şekil 4.10. Lorenz Sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çizilen faz portreleri ($r=23.5$)
- Şekil 4.11. Lorenz Sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çizilen faz portreleri ($r=23.5$)
- Şekil 4.12. Lorenz Sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çözüm grafikleri ($r=28$)
- Şekil 4.13. Lorenz Sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çizilen faz portreleri ($r=28$)

TABLULAR LİSTESİ

- Tablo 3.1. DTM için bazı dönüşüm fonksiyonları
- Tablo 4.1. Lorenz sisteminin RK4 ile çözümü ($h=0.01$, $r=23.5$)
- Tablo 4.2. Lorenz sisteminin RK4 ile çözümü ($h=0.01$, $r=28$)
- Tablo 4.3. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen adım genişliği ve çözümler ($r=23.5$)
- Tablo 4.4. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen adım genişliği ve çözümler ($r=28$)

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

- ν : Prandtl sayısı
 r : Rayleigh sayısı
 b : Sistemin alt ve üst tabakası arasındaki boyut
 r_H : Holf çatallanması parametresi
 a_{ij} $A=()$ matrisinin ij -inci elemanı elemanı
 X' : $AX+(t,X)$, $X(t_0)=X_0$, Cauchy probleminin i . adımdaki nümerik çözüm
 $Z(t)$: $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında $Z'(t)=AZ+(t,Z)$, $Z(t_{i-1})=X_{i-1}$ Cauchy probleminin çözümü
: Birinci mertebeden türevlenebilir lineer olmayan bir vektör fonksiyonu
:

: i . adımda oluşan lokal hata
 h^* : Pratik adım genişliği parametresi
 ϵ : İstenilen hata seviyesi

Kısaltmalar

- RK : Runge-Kutta Metodu
DTM : Diferensiyel Dönüşüm Metodu
MsDTM : Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metodu
DQM : Differential Quadrature Method
MLADM : Multistage Laplace Adomian Decomposition
PSLM : Piece-wise Successive Linearization metodu

1. GİRİŞ

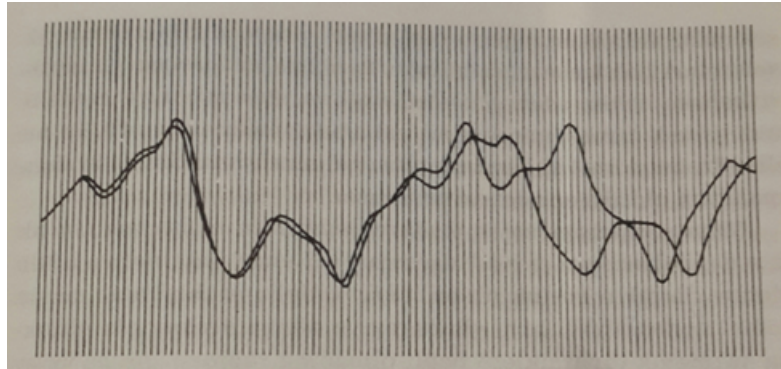
18. Yüzyılda Henry Poincare, doğadaki dinamik sistemlerde başlangıçta gerçekleşen çok küçük bir değişikliğin büyük sonuçlara neden olduğunu, bilim adamlarının böylesi durumları rastlantı olarak kabul ettiğini vurgulamıştır. Rastlantı olarak açıklanan bu olayların sonucunun da belirlenmesi mümkün değildir.

1960'lı yıllarda bilim dünyasında gelecekteki hava tahminlerinin nasıl yapılacağına dair tartışma başlamıştır. Öne sürülen üç fikir vardır. Bunlar:

- i) Dün ile sıcaklık derecesi aynı olan tarihleri belirleyerek, o tarihlerin ertesi günü havanın nasıl değiştiğini not edip, tahmin etmek,
- ii) Komşu eyaletlerin hava durumlarını inceleyip, değişkenlerini kullanarak hava durumlarını tahmin etmek,
- iii) Sıvı akışkan dinamiğini atmosfere uygulayıp, basınca bakıp tahminleri denklem olarak yazmak.

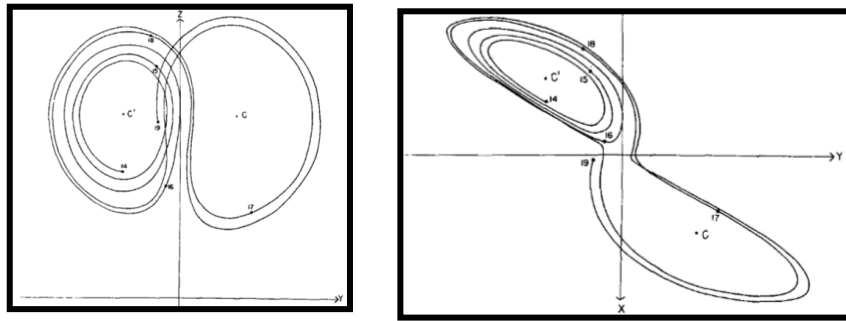
Fakat o zamanda bilgisayar kullanımında sıkıntı olmasından bu fikirler önemini kaybetmiştir (Bayramlı, 2019).

1963 yılında Amerikan meteorolog Edward Lorenz, ilk iki fikir üzerine araştırma yapmaya başlamış ve hava olaylarını oldukça karmaşık çözümler içeren diferensiyel denklem sistemi ile açıklamaya çalışmıştır. Bu denklem sisteminin çözümünde alınan başlangıç koşullarındaki çok küçük bir değişikliğin belirgin farklılıklara sebep olduğunu ifade etmiştir (Şekil 1.1.).



Şekil 1.1. Lorenz'in 1961' deki çalışmasından hava durumu modelinin başlangıç koşullarına hassasiyetini gösteren grafik (Gleick, 2019)

Lorenz, modelinde bir andaki havayı üç boyutlu faz uzayında bir nokta ile, havanın zaman içerisindeki seyrini ise bu noktalardan geçen bir yörünge ile temsil etmiştir. Bu yörüngelerin grafiğinin, kendi kendini hiç kesmediği ve iki nokta civarında yığıldığı görülmektedir. Bu yığılma noktalarına çekici denilmektedir. Bu çekiciler karmaşık bir davranış sergilemektedir. Lorenz çekicisi Şekil 1.2.' de gösterilmiştir (Lorenz, 1963; Karaçay, 2005; Koçak, 2000; Afacan ve Yardım, 2010).



Şekil 1.2. Lorenz Çekicisi (Lorenz, 1963)

Şekil (1.2.) incelendiğinde birbirini tekrar etmeyen, periyodik olmayan salınım olduğu görülmektedir. Bu özellikler Lorenz sisteminin kaotik bir yapıya sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Lorenz sistemi, kaotik davranış incelenmesinde en önemli problemlerden biri haline gelmiştir. Ünlü matematikçi Steven Smale, Lorenz sistemini 21. yy' da ele alınan 18 büyük problemlerden biri olduğunu ifade etmiştir (Ekola, 2005).

Lorenz sisteminin tam çözümü bulunamadığından nümerik çözümünün yapılması gerekmektedir. Literatürde, nümerik çözümün bulunabilmesi için birçok nümerik metot vardır. Ele alınan metotlarda Lorenz sisteminin grafik üzerinde yorumlanması yapılmıştır.

Bu çalışmada; Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilmesi ve elde edilen sonuçların literatürdeki nümerik çözümlerle karşılaştırılması amaçlanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

1.bölüm; giriş bölümüdür. Lorenz denkleminin ortaya çıkışı ve özellikleri anlatılmıştır.

2.bölümde; tez çalışması için kaynak araştırması verilmiştir.

3.bölümde; literatürde verilen nümerik metotlardan bazıları ve değişken adım genişliği stratejisi tanıtılmıştır.

4.bölüm; Lorenz sistemi için nümerik metotların uygulandığı bölümdür. Ayrıca Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile çözümleri elde edilmiştir.

5.bölümde; tez çalışması ile ilgili sonuçlar yer almaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Lorenz Sistemi

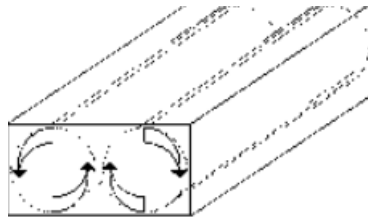
Edward Norton Lorenz 1963 yılında ele aldığı '*Deterministik Nonperiodik Flow*' adlı çalışmasından kutu deneyini ve yazdığı denklemlerin nasıl oluştuğunu ele almıştır. Atmosferin bir akışkan gibi davrandığını belirtmiş ve başlangıç koşullarına duyarlı olan non-linear diferensiyel denklem sistemi ile açıklamaya çalışmıştır. Atmosferi, alttan ısınan üstten soğuyan kapalı bir kutu gibi düşünmüştür. Kutunun içerisinde hava olduğunu varsaydığında, ısınan havanın genişleşip yukarı çıkacağını; soğuyan havanın ise aşağı doğru inerek Şekil 2.1.' de gösterildiği gibi hava akımını oluşturduğunu söylemiştir. Bu akımın yönü ve hızı, dikey ve yatay sıcaklık farkları ve ısınma şiddeti ile belirlenecektir. x ; konveksiyon (ısı iletimi) nedeni ile oluşan ısının yayılma hızı, y ; yükselen ve düşen hava arasındaki sıcaklık değişimi, z ; düşey sıcaklık değişimi olmak üzere Lorenz denklem sistemi;

$$(2.1)$$

ile vermiştir. Bu sistemin akışkan hareketinin zamana göre değişimini belirlediğini ifade etmiştir. Burada,

- α ; sıvı akışkanlığı oranını temsil eden *Prandtl sayısını*,
- r ; konveksiyonun hangi noktada başlayacağını bildiren *Rayleigh sayısını*,
- b ; sistemin fiziksel boyutunu,

ifade ettiğini belirtmiştir (Lorenz, 1963).



Şekil 2.1. Lorenz denkleminde oluşan hava akımı (Sparrow, 1982)

Ayrıca, Sparrow (1982), Ekola (2005), Afacan ve Yardım (2010) ve Reed (2014) çalışmalarında Lorenz denklemini ele almıştır ve Lorenz' in kullandığı

parametreleri tanıtmıştır. r parametresinin, alt ve üst taban arasındaki sıcaklık farkıyla orantılı olduğunu, ve b parametreleri akışkan tabakanın özelliklerine bağlı olduğunu belirtmişlerdir. r ve b 'nin 0'dan büyük reel sayılar olduğunu ifade etmişlerdir.

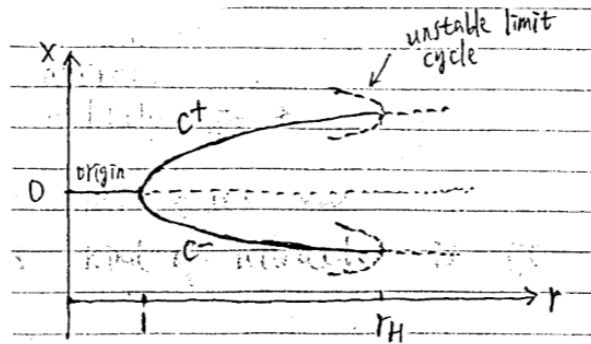
Lorenz (1963) ve Sparrow (1982), Lorenz denkleminde dünya atmosferi için ölçüm yapıldığından (2.1) ile verilen denklem sisteminde $\sigma=10$, $b=8/3$ değerlerini aldığını ve r parametresinin alacağı değerlerin sistemin davranışı hakkında bilgi vereceğini belirtmişlerdir. (2.1) denklem sisteminin denge noktalarını;

$$P_1(0,0,0), P_2(\pm, \pm, r-1) \text{ ve } P_3(\pm, \mp, r-1)$$

olarak bulup, her bir noktanın lokal davranışını incelemişlerdir. Her bir nokta için:

- $0 < r < 1$ ise P_1 asimptotik kararlı,
- $1 < r < r_H$ ise P_2 ve P_3 asimptotik kararlı ve P_1 kararsız,
- $r = r_H$ ise P_1, P_2 ve P_3 tüm kritik noktalar kararsız

olduğunu belirtmişlerdir. Burada, r_H Hopf çatallanması parametresidir (Şekil 2.2.).



Şekil 2.2. Hopf çatallanması (Bayramlı, 2019)

Lorenz (1963), Sparrow (1982) ve Afacan ve Yardım (2010) çalışmalarında, Lorenz denkleminin parametrelerinin ve başlangıç şartının genellikle $\sigma=10$, $b=8/3$ ve $(x_0, y_0, z_0) = (-15.8, -17.48, 35.64)$ alındığını ifade etmişlerdir. r parametresi,

$$r > r_H = \approx 24.74$$

olduğu zaman sistemi kaotikliğe sürüklediğini belirtmişlerdir.

Sparrow (1982)'de çalışmasında, Lorenz denkleminin başlangıç koşullarına olan duyarlılığını incelemiştir. Hesaplama kullanılan adım genişliğinin, nümerik çözüm için kullanılan nümerik metotların ve hesap yapmak için kullanılan makinelerin farklı olmasının da farklı sonuçlar bulunmasına neden olacağını vurgulamıştır.

2.2. Lorenz Sisteminin Çözümleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Sermutlu (2014), Lorenz denkleminin $t \in [0, 20]$ zaman aralığında çözümünü 4. mertebeden ve 5. mertebeden Runge-Kutta metotları ile incelemiş ve 4. mertebeden Runge- Kutta metodunun (RK4) daha doğru sonuçlar ürettiğini ifade etmiştir.

Sawalha ve Noorani (2008) çalışmalarında, RK4 metodu ile Diferensiyel Dönüşüm Metodunu (DTM) kullanarak Lorenz denkleminin çözümü incelemiş ve daha büyük zaman aralığında DTM'nin RK4'e göre daha avantajlı olduğunu vurgulamışlardır.

Alaoui ve ark. (2010), DTM ile Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm (MsDTM) metotlarını kullanarak sistemin çözümlerini karşılaştırmışlar ve DTM'nin $t=0.15$ ' den sonra ıraksadığını, bu yüzden MsDTM ile çözümün yapılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Guran ve Ahmadi (2011), Eftekhari ve Jafari (2012), Lorenz sisteminin çözümü Diferensiyel Quadrute Metodu (DQM) ile RK4 ile ele almışlardır. DQM' da RK4 metoduna göre daha büyük adım genişliği seçilebileceğini ifade etmişlerdir. Lorenz sisteminde r parametre değerinin büyüdükçe kullanılan adım genişliğinin küçültülmesi gerektiğini, bunun Lorenz' in kaotik özelliğinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

Motsa (2010) çalışmasında, parçalama ve ardışık doğrusallaştırma yöntemi olarak adlandırılan Piece-wise Successive Linearitaon Method (PSLM)' unu Lorenz sistemine uygulamış ve Runge Kutta ile karşılaştırmıştır. Daha küçük adım genişliklerinde Runge-Kutta metodu ile benzer sonuçlar verdiğini ifade etmiştir.

Ebenezer ve ark. (2015), Multi-Stage Laplace Adomian Decomposition Method (MLADM) ve RK4 metodu ile Lorenz sisteminin çözümlerini karşılaştırmışlar. MLADM metodunun RK4' e göre nispeten daha tutarlı olduğunu vurgulamıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Nümerik Metotlar

Lorenz Sistemi için literatürde alınan metotlardan, 4. mertebeden Runge-Kutta Metodunu (RK4), Diferensiyel Dönüşüm Metodunu (DTM) ve Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm metodunu (MsDTM) tanıtalım.

3.1.1. Runge-Kutta Metodu

(3.1)

Cauchy probleminin çözümünde yaygın olarak kullanılan Runge-Kutta metodu;

h ; adım genişliği,

$k_1 = f(t_n, y_n)$,

$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$,

$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2)$,

$k_n = f(t_n + h, y_n + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + q_{n-1,3}k_3h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$,

$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + \dots + k_n)$

olmak üzere;

$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, y_i)$

formülü ile verilir (Treanor C. E., 1965; Kılıçman ve ark., 2013).

Özel olarak;

$n=1$ olduğunda Euler metodu;

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, y_i) \quad (3.2)$$

ile (Treanor C. E., 1965; Bradley, 2002),

$n=4$ olduğunda 4. mertebeden Runge-Kutta metodu;

- $k_1 = hf(t_n, y_n)$,
- $k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$,
- $k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2)$,
- $k_4 = hf(t_n + h, y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3))$

olmak üzere

$$x_{i+1} = x_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir (Teanor C. E., 1965; Bradley, 2002; Sermutlu, 2004; Christodoulou, 2009; Kılıçman ve ark., 2013; Reed, 2014).

3.1.2. Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Nümerik çözümlerinin bulunması için uygulanan metodlardan biri de Diferensiyel Dönüşüm Metodudur (DTM). DTM ile (3.1) Cauchy probleminin analitik çözümüne polinom şeklinde bir yaklaşım elde edilir.

$f(t)$ fonksiyonun k . mertebeden türevinin dönüşümü,

$$F(k) = (3.4)$$

ve $F(k)$ 'nin ters diferensiyel dönüşümü;

$$f(t) = (3.5)$$

şeklinde ifade edilir. (3.4) ve (3.5) denklemlerinden

$$f(t) =$$

elde edilir. $f(t)$ fonksiyonu sonlu bir seri ile ifade edilirse,

$$f(t) = u(t)$$

şeklinde yazılır. Burada N , DTM' nin adım sayısını gösterir.

Lorenz sistemi için kullanılan dönüşüm fonksiyonları Tablo (3.1.)' de verilmiştir (Sawalha ve Noorani, 2009; Alaoui ve ark., 2010; Mirzaee, 2011; Gökdoğan ve Mercan, 2013; Elzaki, 2014).

Orijinal fonksiyon	Dönüşüm fonksiyonu
$f(t)=u(t) v(t)$	$F(k)=U(k) V(k)$
$f(t)=u(t)$	$F(k)=U(k)$
$f(t)=u(t)v(t)$	$F(k)=$
$f(t)=$	$F(k)=(k+1)U(k+1)$

Tablo 3.1. Verilen fonksiyonların DTM için bazı dönüşüm fonksiyonları

3.1.3. Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metodu

DTM ile sınırlandırılmış bir bölgede seri çözümü elde ederken, çok adımlı diferensiyel dönüşüm metodu (MsDTM) daha geniş zaman aralığında çözüm imkanı sunar. $[0, T]$ aralığının M tane $[\]$ alt aralığını ele alıp her bir alt aralığa ardı ardına DTM' nin uygulanmasıyla MsDTM elde edilir. Burada $h =$ eşit adım genişlikleri kullanılarak alt aralıklar elde edilmiştir.

Öncelikle $[0,)$ aralığında DTM uygulandığında,

$$u_1(t) = , t[$$

elde edilir. Daha sonra her bir alt aralığında $()$ başlangıç şartı dikkate alınıp DTM uygulandığında,

$$u_m(t) = ^n, t[$$

elde edilir. Böylece (3.1) problemine

$$u(t) = \quad (3.6)$$

parçalı fonksiyonu ile yaklaşım elde edilir (Alaouri ve ark., 2010; Gökdoğan ve Merdan, 2013).

3.2. Değişken Adım Genişliği Stratejisi

$$X' = AX + (t, X), X(t_0) = X_0 \quad (3.7)$$

ile verilen lineer olmayan Cauchy problemi için lokal hata ve adım genişliği, $D = \{(t, x) : a, \}$ bölgesi üzerinde, (3.7) Cauchy probleminin,

i . adımdaki lokal hatası,

$$= \{N_{i-1}^{22} + N_{i-1} +_{i-1}\}$$

i . adımdaki adım genişliği,

$$h_i$$

ile ifade edilmiştir. Burada,

- istenilen hata seviyesi,
- $A = (a_{ij})$ matrisini boyutu, $C^1([t_0, -a, t_0, +a]R^N)$,
- : i . adımdaki nümerik çözüm,

- : $Z(t)=AZ(t)+Z(, [$,
- =,
- ,
- ,
-

şeklinde tanımlanmıştır (Çelik Kızıllan, 2009; Çelik Kızıllan ve Aydın, 2012).

4. LORENZ SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Literatürde hava tahmini için kullanılan Lorenz sistemi için gerçeğe uygun olan parametre değerleri $a = 10$ ve $b = 8/3$ ve başlangıç değerleri $(x_0, y_0, z_0) = (-15.8, -17.48, 35.64)$ olarak verilmiştir. Bu değerler Lorenz sistemini kaotik yapan değerlerdir. Bu kısımda, literatüre uygun parametre ve başlangıç değerleri kullanılarak Lorenz sisteminin 4. mertebeden Runge-Kutta (RK4), Diferensiyel dönüşüm metodu (DTM) ve Çok adımlı diferensiyel dönüşüm metodu (MsDTM) ile çözümleri incelenmiştir.

4.1. Runge-Kutta Metodu ile Nümerik Çözüm

(3.3) denklemi ile verilen 4. mertebeden Runge-Kutta metodu (2.1) ile verilen Lorenz Sistemine uygulandığında,

- $k_1 = hF(x_0, y_0, z_0, t_0) = hF_0$,
- $k_2 = hF(x_0 + k_1, y_0 + k_2, z_0 + k_3, t_0 + k_4) = hF_1$,
- $k_3 = hF(x_0 + k_2, y_0 + k_3, z_0 + k_4, t_0 + k_5) = hF_2$,
- $k_4 = hF(x_0 + k_3, y_0 + k_4, z_0 + k_5, t_0 + k_6) = hF_3$

olmak üzere çözüm,

$$(4.1)$$

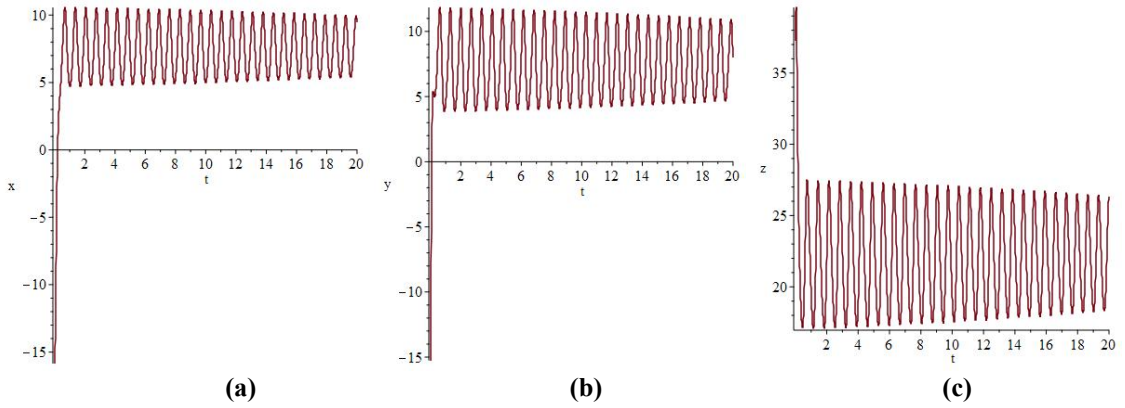
şeklinde hesaplanır.

(4.1) denklemleri ile $t \in [0, 20]$ aralığında elde edilen çözümler Tablo 4.1. ve Tablo 4.2.'de özetlenmiştir.

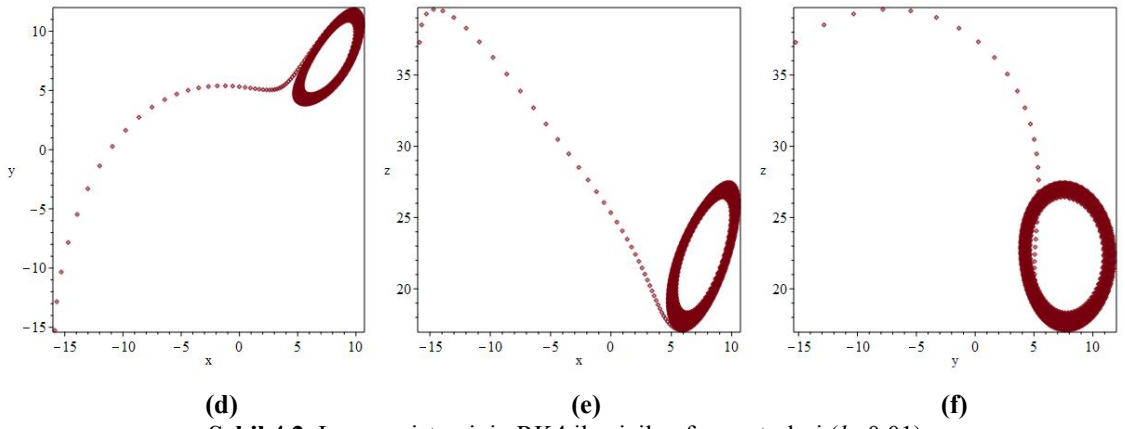
i) $r = 23.5$ parametre değeri için,

i	t_i	x_i	y_i	z_i
1	0.01	-15.85427988	-15.255673163	37.28690507
2	0.02	-15.68152956	-12.83730471	38.51285918
3	0.03	-15.28978620	-10.32862595	39.28334557
1998	19.98	9.748230174	8.723101810	26.11840223
1999	19.99	9.633985063	8.377010748	26.25080436
2000	20.00	9.497462002	8.027383257	26.33562450

Tablo 4.1. Lorenz Sisteminin RK4 ile çözümü ($h=0.01$)



Şekil 4.1. Lorenz sisteminin RK4 ile çizilen çözüm grafikleri ($h=0.01$)



Şekil 4.2. Lorenz sisteminin RK4 ile çizilen faz portreleri ($h=0.01$)

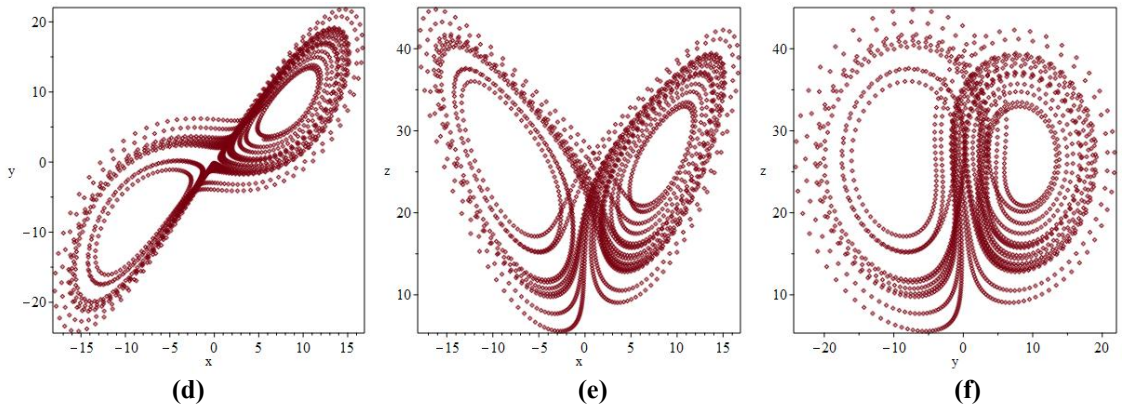
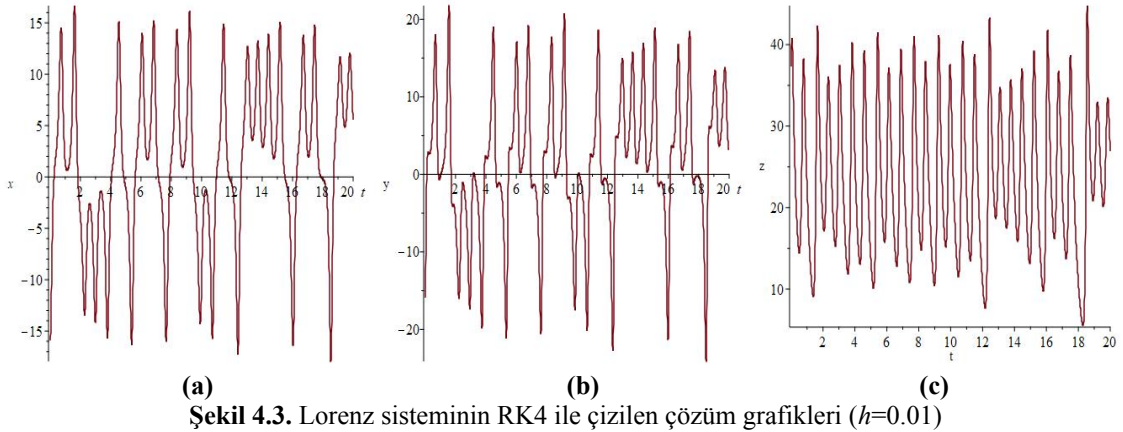
x , y ve z ' nin zamana göre çözümleri Şekil 4.1.' de sırasıyla (a), (b) ve (c) grafikleri ile verilmiştir. Grafiklerde, sistemin dengede kaldığı ve kararlı bir şekilde devam ettiği görülmektedir.

ii) $r = 28$ parametre değeri için;

i	t_i	x_i	y_i	z_i
1	0.01	-15.88853974	-15.96216741	37.34480602
2	0.02	-15.81251535	-14.21329231	38.74559092
3	0.03	-15.56901113	-12.30599076	39.79707658
1998	19.98	6.109663858	3.230397622	28.03134409
1999	19.99	5.834554204	3.212810666	27.47602862
2000	20.00	5.585473876	3.226138496	26.92696883

Tablo 4.2. Lorenz Sisteminin RK4 ile çözümü ($h=0.01$)

$r = 24.74$ olduğunda, (2.1) sisteminin kaotikliğe sürüklendiği. Şekil 4.3. ile verilen grafiklerde, sistemin dengede olmadığı, periyodik hareketler yapmadığı görülmektedir.



Şekil 4.4. ile verilen faz portrelerinde, salınım hareketinin farklı şekillerde olduğu, izlediği yörüngeyi tekrar izlemediği görülmektedir.

Tablo 4.1, Tablo 4.2' de elde edilen hesaplamalar ile Şekil 4.1, Şekil 4.2' deki grafikler elde edilmiştir.

4.2. Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Nümerik Çözüm

(2.1) ile verilen Lorenz denkleminde, $x(t) \rightarrow X(k)$, $y(t) \rightarrow Y(k)$ ve $z(t) \rightarrow Z(k)$ dönüşüm fonksiyonları olmak üzere Tablo 3.1.' de verilen dönüşümler uygulandığında;

$$(4.2)$$

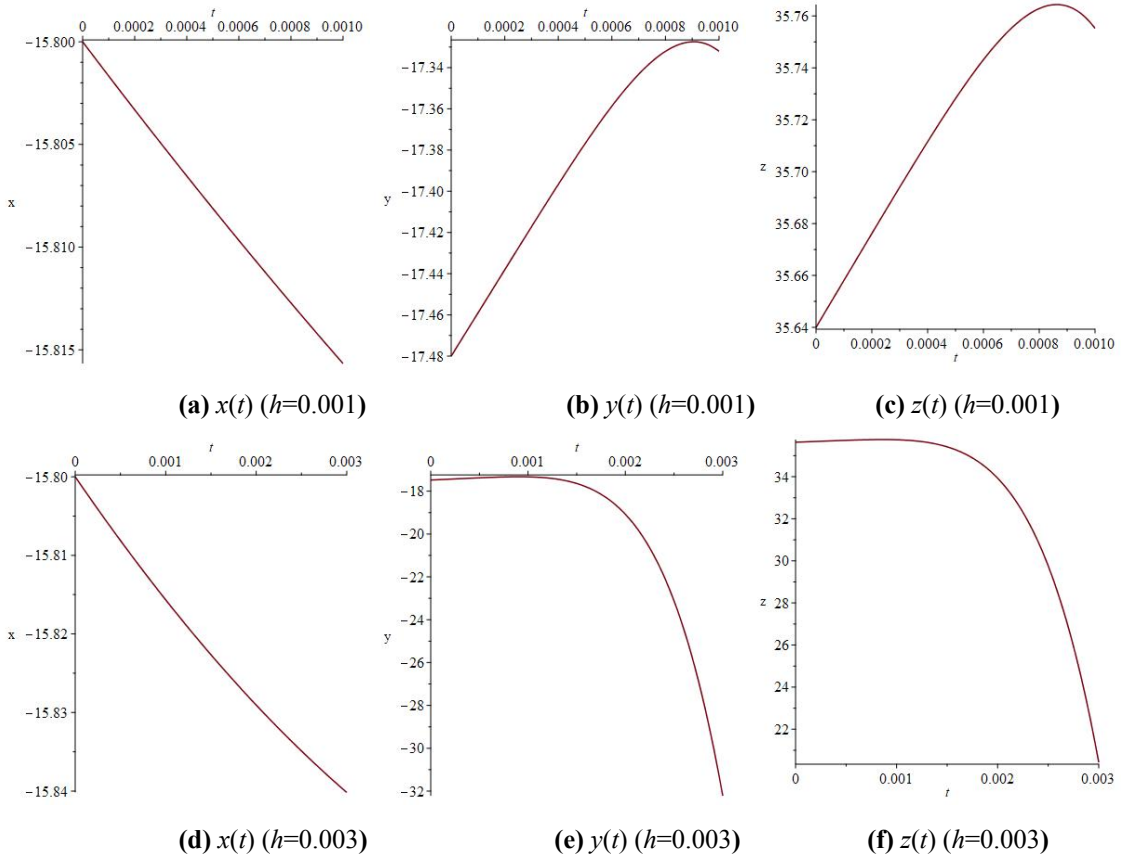
elde edilir. Burada k ; adım sayısıdır (Sawalha ve Noorani, 2008; Alaoui ve ark., 2010; Gökdoğan ve Mercan, 2013; Elzaki, 2014).

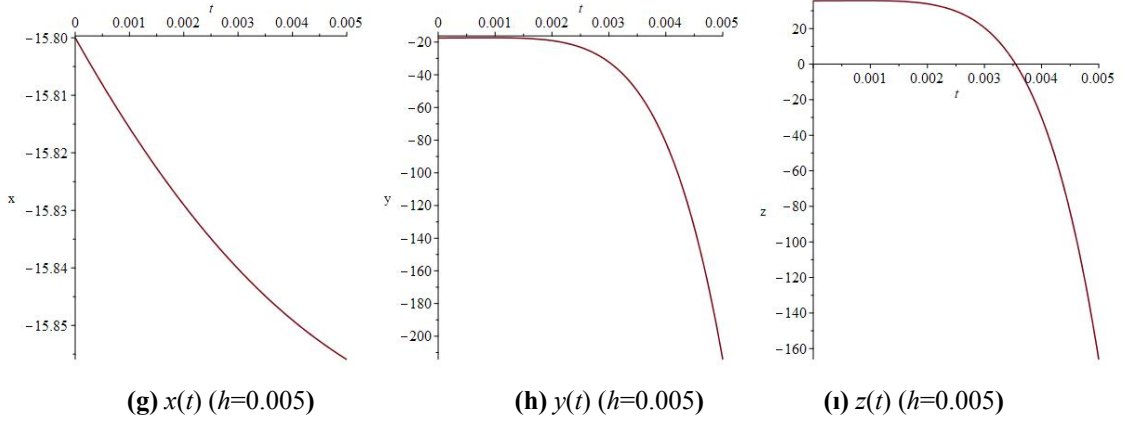
$k = 5$ için (4.2) denklemlerinden elde edilen çözümleri inceleyelim.

i) $r = 23.5$ parametre değeri için,

yaklaşım polinomları elde edilir.

Şekil 4.5.' te Lorenz sisteminin farklı adım genişlikleri ile DTM ile elde edilen çözüm grafikleri verilmiştir. Zaman aralığı arttıkça çözümün ıraksadığı grafiklerde görülmektedir.

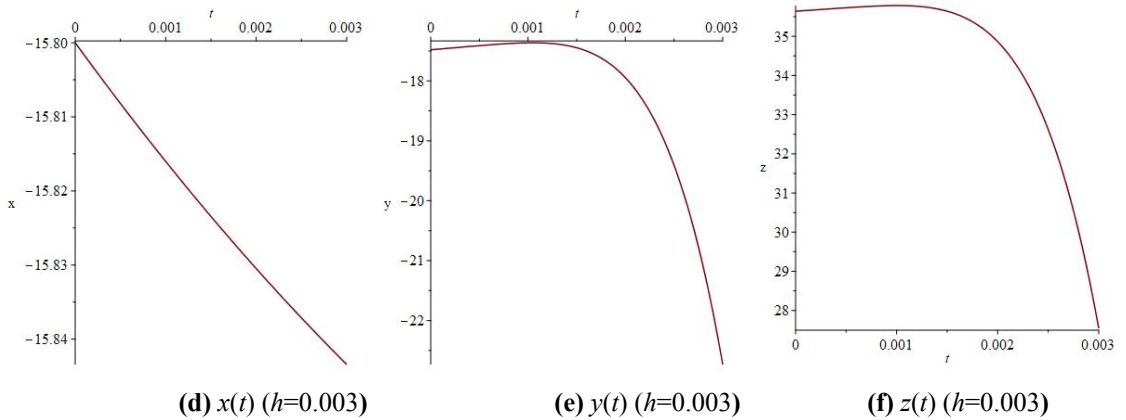
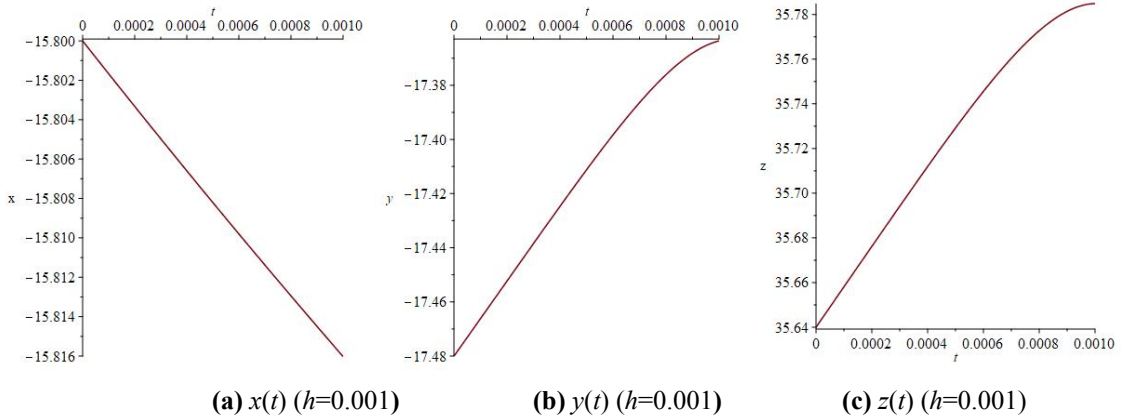


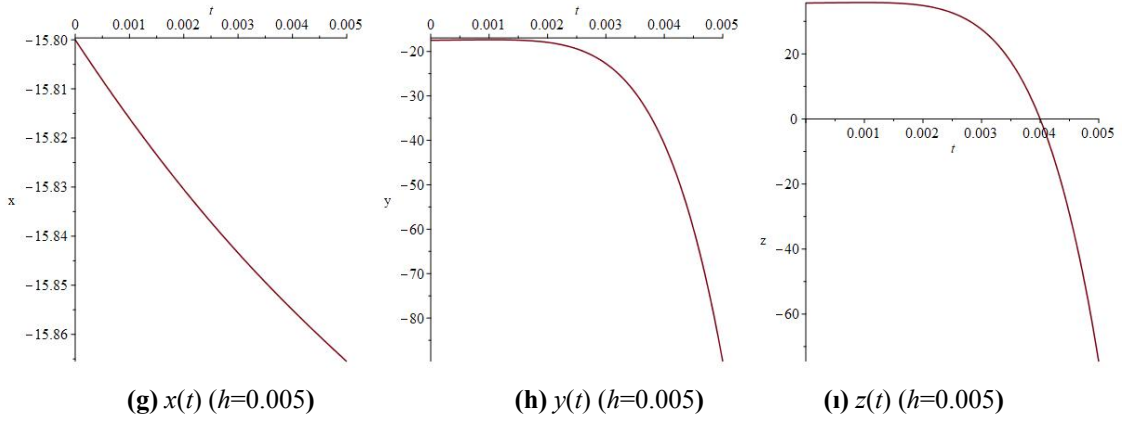


Şekil 4.5. Lorenz Sisteminin farklı adım genişlikleri kullanılarak DTM ile elde edilen çözüm grafikleri ($r=23.5$)

ii) $r = 28$ parametre değeri için,

yaklaşım polinomları elde edilir.





Şekil 4.6. Lorenz Sisteminin farklı adım genişlikleri kullanılarak DTM ile elde edilen çözüm grafikleri ($r=28$)

Şekil 4.6.' da Lorenz sisteminin farklı adım genişlikleri ile DTM ile elde edilen çözüm grafikleri verilmiştir. Zaman aralığı arttıkça çözümün ıraksadığı grafiklerde görülmektedir.

4.3. Çok Adımlı Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Nümerik Çözüm

Lorenz sistemini MsDTM ile çözelim. Dönüşüm denklemleri,

$$(k+1)X_i(k) = (Y_i(k) - X_i(k))$$

$$(k+1)Y_i(k) = rX_i(k) - Y_i(k) -$$

$$(k+1)Z_i(k) = -bZ_i(k)$$

Şeklinde elde edilir. Burada k , adım sayısı, i ' ler alt aralıkların sayısıdır (Guran ve Ahmadi, 2011; Eftekhari ve Jafari, 2012).

$[0, T]$ aralığını 5 alt aralığa bölüp, 5 adımlı metot için aşağıdaki yaklaşım polinomları elde edilmiştir.

i) $r = 23.5$ parametresi için:

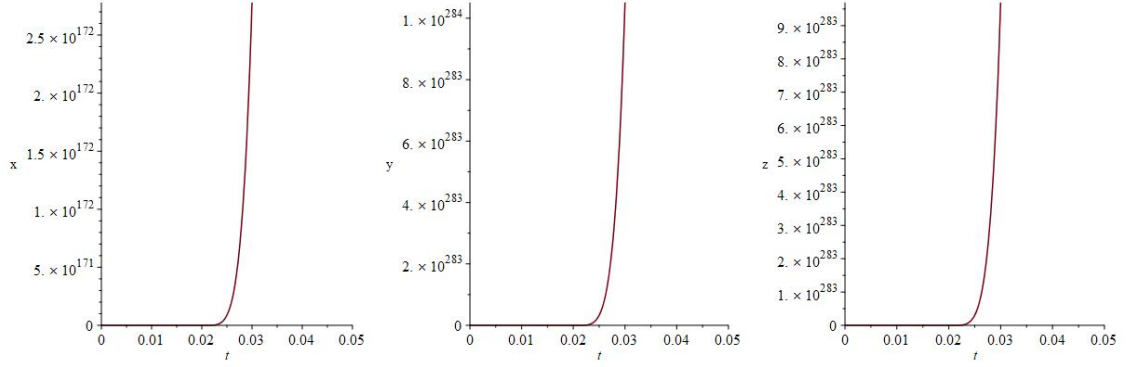
$$x(t) =$$

$$y(t) =$$

$$z(t)=$$

çözümleri parçalı fonksiyon şeklinde elde edildi.

Elde edilen yaklaşım polinomlarının grafikleri Şekil 4.7.'de verilmiştir.



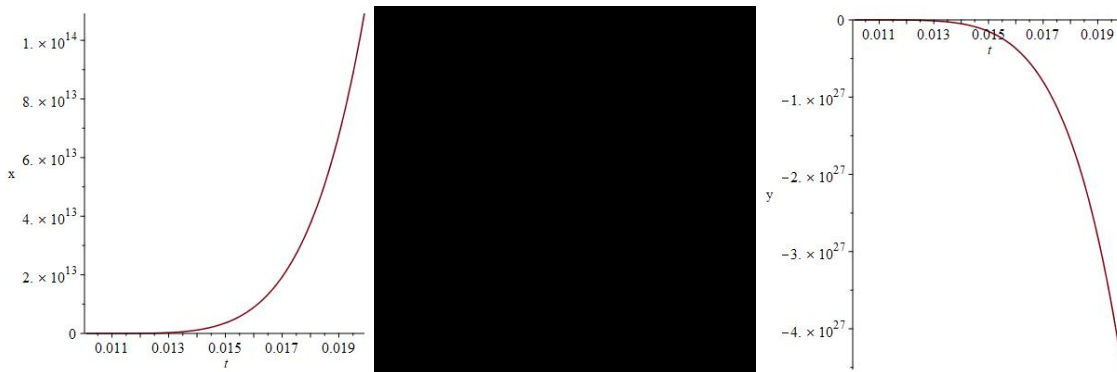
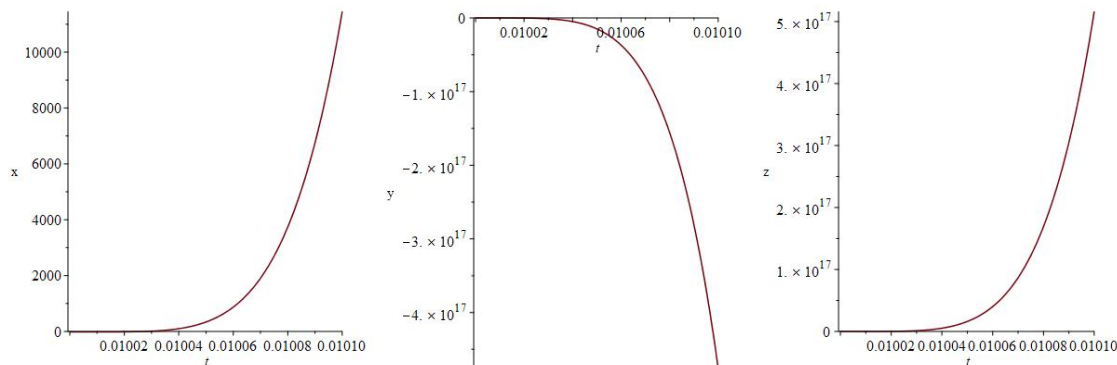
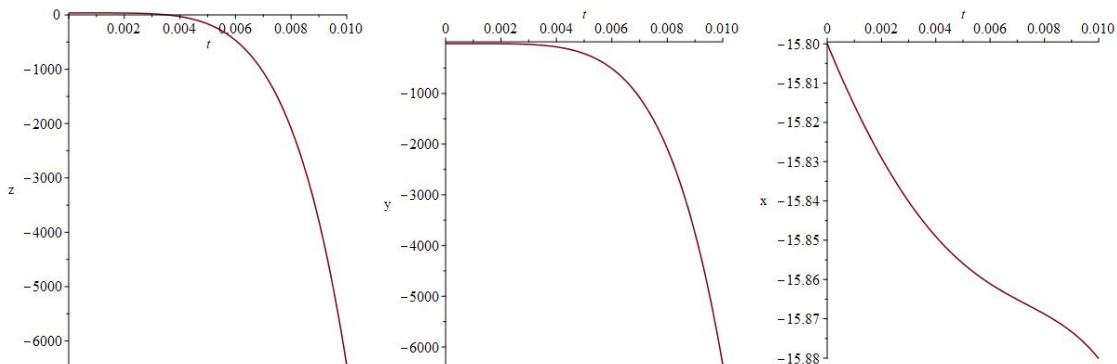
(a)

(b)

(c)

Şekil 4.7. Lorenz Sisteminin MsDTM ile çözüm grafikleri ($r=23.5$,

Şekil 4.7.'de verilen $[0, 0.05]$ aralığında değişimi tam olarak görülmektedir. Dolayısıyla her bir fonksiyonun grafiğinin birkaç alt aralıktaki görüntüsü Şekil 4.8.'de verilmiştir. Şekil 4.8.'de $t > 0.015$ için yaklaşım polinomlarının iraksadığı görülmektedir.



(g) $x(t)$ (h) $y(t)$ (i) $z(t)$

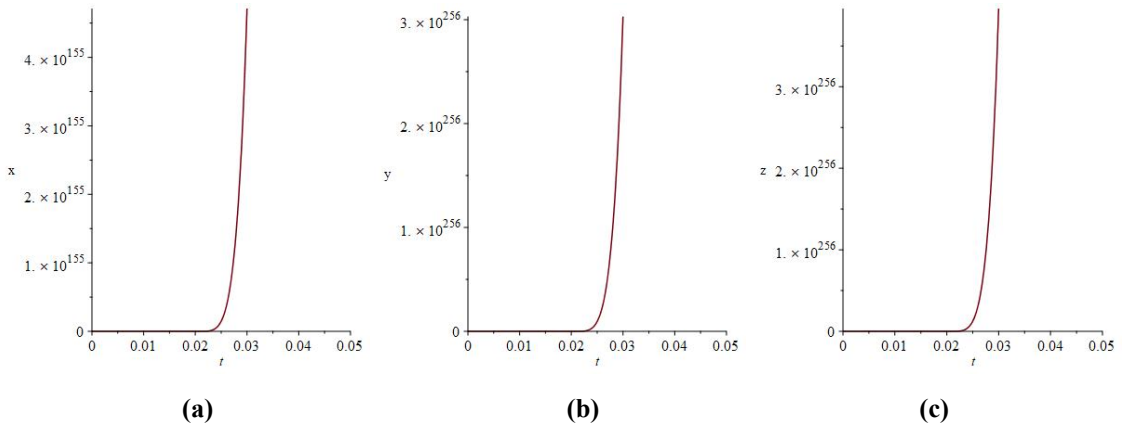
Şekil 4.8. Lorenz Sisteminin MsDTM ile farklı alt aralıklarındaki çözüm grafikleri ($r=23.5$)

ii) $r = 28$ parametre değeri için:

$$x(t)=$$

$$y(t)=$$

$$z(t)=$$



Şekil 4.9. Lorenz Sisteminin MsDTM ile çözüm grafikleri ($r=28$,

Şekil 4.9.' da elde edilen yaklaşım polinomlarının çözüm grafikleri verilmiştir. Elde edilen sonuçlar $r = 23.5$ olması durumuyla benzerdir.

4.4. Değişken Adım Genişliği Stratejisi ile Nümerik Çözüm

Lorenz sisteminin çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (3.7) formunda yazalım:

$$X' = AX + f(X)$$

Burada, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\sigma & \rho & 0 \\ \sigma & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(X) = \begin{pmatrix} rX - YZ \\ X(Y - Z) \\ XY - Z \end{pmatrix}$ dir. Nümerik iterasyonun her bir adımıdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = \max\{\sigma, \rho, r\}$,
- $\beta = \max\{1, \rho, r\}$,
- $\gamma = \max\{1, \rho, r\}$,
- $\delta = \max\{1, \rho, r\}$

Buna göre i . adımdaki adım genişliği,

$$h_i$$

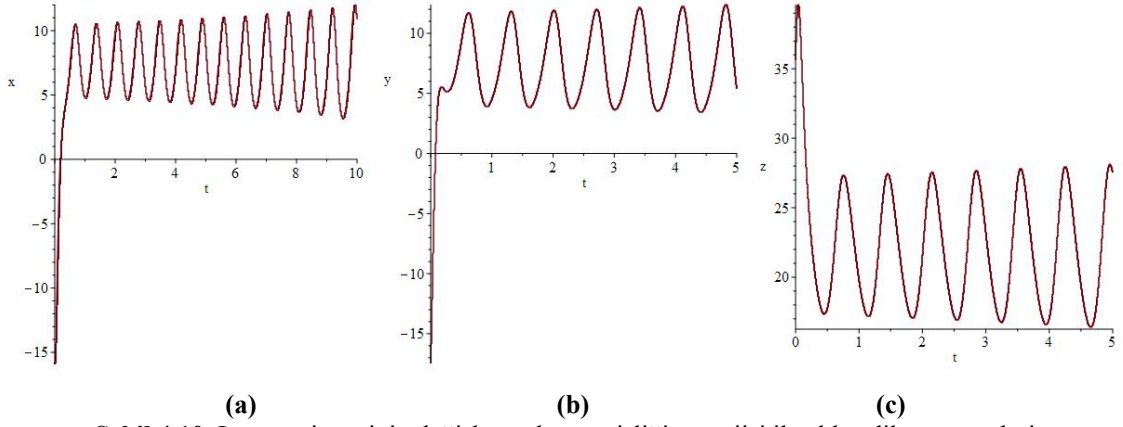
şeklindedir.

Lorenz sisteminin $t \in [0, 5]$ aralığında, $\alpha = 10^{-1}$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi ile nümerik çözümlerini inceleyelim.

i) $r = 23.5$ parametresi için her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümler Tablo 4.3. ve Şekil 4.10' da özetlenmiştir.

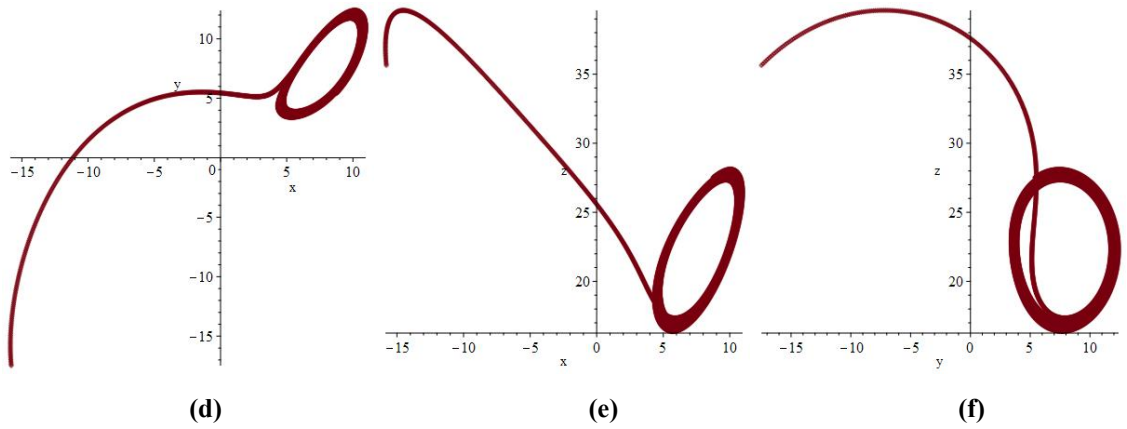
i	$t(i)$	$h(i)$	$x(i)$	$y(i)$	$z(i)$
1	0.0006068979817	0.0006068979817	-15.81019589	-17.35298111	35.74993593
2	0.001212911911	0.0006060139289	-15.81954538	-17.22509589	35.85842507
3	0.001818061435	0.0006051495243	-15.82805106	-17.09636258	35.96545830
6107	4.998853596	0.00072268277922	8.777167888	5.441520661	27.54517182
6108	4.99958789	0.0007271931580	8.752911290	5.411744521	27.52648830
6109	5.00000000	0.000419211	8.738904751	5.394701397	27.51557395

Tablo4.3. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği strateji ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri ($r=23.5$)



Şekil 4.10. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen çözümleri

Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen faz portreleri Şekil 4.11.'de verilmiştir.



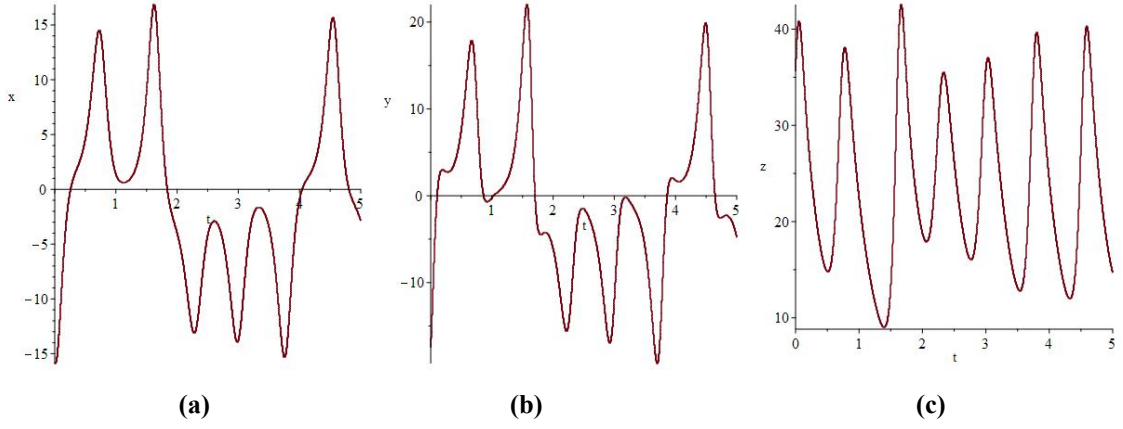
Şekil 4.11. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen faz portreleri

ii) $r = 28$ parametresi için her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümler Tablo 4.4. ve Şekil 4.12'de özetlenmiştir.

i	$t(i)$	$h(i)$	$x(i)$	$y(i)$	$z(i)$
1	0.0006068979817	0.0006068979817	-15.81019589	-17.39613155	35.74993593
2	0.001212886651	0.0006059886692	-15.81980648	-17.31135911	35.85883396
3	0.001817981435	0.0006050947836	-15.82883167	-17.22563556	35.96668513
6225	4.998928686	0.001030960254	-2.859875039	-4.757822386	14.72348329
6226	4.999960429	0.001031743150	-2.879456981	-4.792087975	14.69701305
6227	5.000000000	0.000039571	-2.880213828	-4.793414129	14.69600821

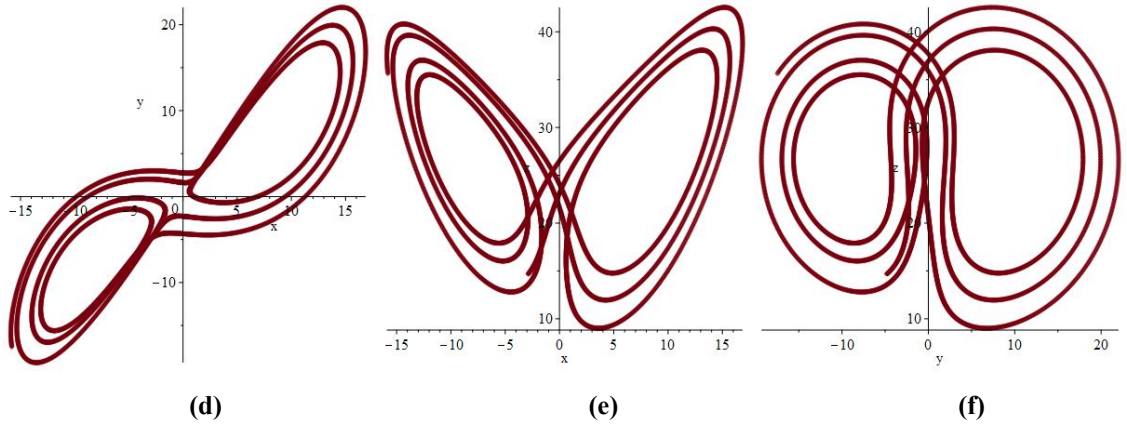
Tablo4.4. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği strateji ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

($r=28$)



Şekil 4.12. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen çözümleri

Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen faz portreleri Şekil 4.13.' de verilmiştir.



Şekil 4.13. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile elde edilen faz portreleri

5. SONUÇLAR

Literatürde Lorenz Sistemi gibi kaotik yapıya sahip dinamik sistemlerin çözümleri için genellikle RK4, DTM ve MsDTM metotlarının kullanıldığı görülmüştür. Bu nedenle bu çalışmada Lorenz sisteminin çözümüne bir yaklaşım elde etmek için RK4, DTM ve MsDTM metotları ele alınmıştır. Bu incelemelerin sonucunda yapılan tespitler aşağıda sıralanmıştır.

1. Lorenz sistemi için RK4 metodu ile elde edilen çözümlerin davranışı literatürdekine benzer şekildedir.
2. DTM metodu ile çok küçük bir zaman aralığında hesaplama yapılabilmektedir. Aksi halde elde edilen yaklaşım polinomları ıraksar.
3. MsDTM, DTM' ye göre biraz daha büyük zaman aralığında hesaplama olanağı sunar. Ancak, yine de zaman aralığı büyüdüğünde çözüm ıraksar.
4. MsDTM, DTM' nin her bir alt aralıkta ard arda uygulanmasıyla elde edildiğinde hesaplama işlemi oldukça zordur.

Literatürde Lorenz sistemi için tercih edilen nümerik metotların haricinde (Çelik Kızılkın, 2009) ve (Çelik Kızılkın ve Aydın, 2012) de verilen değişken adım genişliği stratejisi ile Lorenz sisteminin nümerik çözümü incelenmiştir. Değişken adım genişliği stratejisi, hatası diğer metotlara göre daha büyük olan Euler metodu ile çözüm yapmaktadır. Lorenz sisteminin değişken adım genişliği stratejisi ile analizi sonucunda yapılan tespitler şunlardır:

1. Lorenz sistemi kaotik yapıya sahip olduğunda strateji çok küçük adım genişlikleri üretmektedir.
2. Hesaplama işlemi diğer metotlara göre oldukça kolaydır.
3. Elde edilen çözümlerin değişimi literatürdekine uygundur.

Sonuç olarak; Lorenz sisteminin nümerik çözümleri için DTM ve MsDTM gibi polinom yaklaşımı yapan metotlar uygun değildir. Değişken adım genişliği stratejisi ve RK4 nümerik çözüm için tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

- Alaoui M. A. A., Odibat Z. M., Bertelle C., Duchamp G. H. E., 2010, A Multi-Step Differential Transform Method and Application to Non-Chaotic or Chaotic Systems, *Contest Lists Available at ScienceDirect*, 59, 1462-1472.
- Afacan E., Yardım F. E., 2010, Lorenz Tabanlı Diferenaiyel Kaos Kaydırmalı Anahtarlama (DCSK) Modeli Kullanarak Kaotik Bir Haberleşme Sisteminin Simülasyonu, *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Ankara, 25(1):101-110.
- Ahmadi G., Guran A., 2012, An Enhanced Numerical Solution Of The Lorenz System By Means Of The Differential Quadrature Method, *ResearchGate*, Canada.
- Bradley L., 2002, Numerical Solution of Differential Equations, *Department of Computer Science University of Colorado*.
- Burak, B., 2019, https://burakbayramli.github.io/dersblog/chaos/chaos_17/ders_17.html [Ziyaret Tarihi: 21 Nisan 2019].
- Christodoulou N., 2009, An Algorithm Using Runge-Kutta Methods of Order 4 and 5 for Systems of ODEs, *International Journal of Numerical Methods and Applications*, 2(1), 47-57.
- Çelik Kızıllan G., 2009, Diferensiyel Denklemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Stratejisi, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Çelik Kızıllan G., Aydın K., 2012, Step Size Strategies for the Numerical Integration of Systems Differential Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(15), 3805-3816.
- Ebenezer, B., Kolebaje O. T., Werekoh K. A., 2016, Using Multistage Laplace Adomian Decomposition Method to Solve Chaotic Financial System, *SCIENCEDOMAIN international*, 13(4), 1-14
- Eftekhari S. A., Jafari A. A., 2012, Numerical Simulation of Chaotic Dynamical Systems by the Method of Differential Quadrature, *Scientia Iranica*, 19(5):1299-1315.
- Ekola T., 2005, A Numerical Study of the Lorenz and Lorenz Stenflo Systems, Doktora Tezi, *KTH, School of Engineering Sciences, Mathematics (Dept)*, Stockholm, Swedwn.
- Elzaki S.M., 2014, Solution of General Lorenz Model using Differential Transform Method, *International Journal of Innovation in Science and Mathematics*, 2(5), 2347-9051.

- Gleick, J., 2019, <https://www.slideshare.net/dvidby0/edward-lorenz-the-butterfly-man> [Ziyaret Tarihi: 25 Nisan 2019].
- Gökdoğan A., Merdan M., 2013, Adaptive Multi-Step Differential Transformation Method to Solve ODE Systems, *Kuwait Journal Science*, 40(1), 35-55.
- Karaçay T., 2005, Determinizm ve Kaos, *Paper presented at Mantık, Matematik ve Felsefe II. Ulusal Sempozyumu*, Assos.
- Kılıçman A., Roslan U., Salleh Z., 2013, Solving Zhou Chaotic System Using Fourth-Order- Runge-Kutta Method, *World Applied Sciences Journal*, 21(6), 939-944.
- Koçak, K., 2000, Kaos ve Atmosfer, *Tübitak Bilim ve Teknik*, 2000(391), 94-97.
- Lorenz E. N., 1963, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.
- Mirzaee F., 2011, Differential Transform Method for Solving Linear and NonLinear Systems of Ordinary Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 5(70), 3465-3472.
- Motsa S.S., 2012, A new Piecewise Quasilinearization Method for the Solving Chaotic Systems of Initial Value Problems, *Central European Journal of Physics*, 10(4), 936-946.
- Pamuk N., 2013, Dinamik Sistemlerde Kaotik Zaman Dizilerinin Tespiti, *BAÜ Fen Bilimler Entitüsü Dergisi*, 15(1), 77-91
- Reed, B., 2014, Evaluating the Lorenz Attractornusing Runge-Kutta methods, *IMPACS, Aberystwyth University*.
- Sawalha M. M., Noorani, MSM., 2009, A Numeric-Analytic Method for Approximating the Chaotic Chen system, *Contents Lists Available at ScienceDirect*, 42, 1784-1791.
- Sawalha M. M., Noorani, M. S. M., 2008, On Solving the Lorenz System by Differential Transformation Method, *ChinPhys.Lett.*, 25(4):1-3.
- Sermutlu E., 2004, Comparison of Runge-Kutta Methods Order 4 and 5 on Lorenz Equations, *Çankaya Üniversitesi, Ankara*, 2004.
- Sparrow C., 1982, The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, *Applied Mathematical Science*, Vol 41, Springer-Verlay.
- Treanor C. E., 1965, A Method for the Numerical Integration of coupled First-Order Differential Equations with Different time Constants, *American Mathematical Society*, Vol 20, 39-45.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER**Adı Soyadı :**Saniye İNCE POLAT**Uyruđu :**T.C.**Dođum Yeri ve Tarihi :** Cihanbeyli, 29/08/1992**Telefon :** 05346642322**Faks :** -**e-mail :** saniye.ince.1992@gmail.com**EĞİTİM****Derece: Adı, İlçe, İl****Lise :** Selçuklu Cumhuriyet Lisesi, Selçuklu/KONYA**Üniversite :** Necmettin Erbakan Üniversitesi , Meram/KONYA**Yüksek Lisans :** Necmettin Erbakan Üniversitesi ,Meram/KONYA**Doktora:****Bitirme Yılı**

2010

2014

İŞ DENEYİMLERİ**Yıl:** 2014 -**Kurum:** MEB**Görevi:** Öğretmen**UZMANLIK ALANI****YABANCI DİLLER****BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER****YAYINLAR**