T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Betül ERDAL KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Nisan-2023
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Betül ERDAL KOÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2023, 49 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Ali GELİŞKEN
Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Gümüş ve Öcalan'ın "The qualitative analysis of a rational system of difference equations" başlıklı makalesi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde; $A, B, C, \omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2} \in \mathbb{R}_F^+$ ve $q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\omega_{n+1} = \frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık denklemi tanımlanmış ve bu denklemin çözümleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı, Bulanık fark denklemi, Çözümlerin varlığı ve tekliği, Asimptotik davranış, Yakınsama.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE NONLINEAR FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS

Betül ERDAL KOÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2023, 49 Pages

Jury
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc. Prof. Dr. Ali GELİŞKEN
Assoc. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of five sections.

In the first section; basic definitions and theorems related to fuzzy sets, fuzzy numbers and difference equations are given.

In the second section; informations about some of the studies regarding the fuzzy difference equations studied before are given.

In the third section; Gümüş and Öcalan's article entitled “Qualitative Analysis of a Rational System of Difference Equations” is discussed.

In the fourth section; we define the fuzzy equation

$$\omega_{n+1} = \frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q},\ n \in \mathbb{N}_0$$

where $A, B, C, \omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2} \in \mathbb{R}_F^+$ and $q \in \mathbb{Z}^+$. Also, solutions of this equation are investigated.

In the fifth section, conclusions and suggestions are given.

Keywords: Fuzzy number, Fuzzy difference equation, Existence and uniqueness of solutions, Asymptotic behavior, Convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA danışmanlığında hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmam boyunca bilgi ve tecrübesi ile yanımda olup yol gösteren, desteğini her zaman hissettiğim değerli danışmanım Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya, hayatım boyunca her zaman yanımda olan çok kıymetli aileme ve hayat arkadaşım Kürşat KOÇ'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimimde "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" kapsamında destek aldığım Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Betül ERDAL KOÇ
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	:	Sıfırdan başlayan tam sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}_F$	:	Bulanık sayılar
$\mathbb{R}_F^+$	:	Pozitif bulanık sayılar
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$>$	:	Büyüktür
$<$	:	Küçüktür
$\geq$	:	Büyük eşit
$\leq$	:	Küçük eşit
$\exists$	:	Bazı
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
J_F	:	F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\overline{k}$	:	Denge noktası

1. GİRİŞ

Tanım 1.1. $X \neq \varnothing$, $A \subset X$ ve

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

olacak şekilde, $X_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın üyelik fonksiyonu adı verilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.2. $X \neq \varnothing$ ve $I = [0,1]$ ise $\mu_A : X \to I$ olacak şekilde,

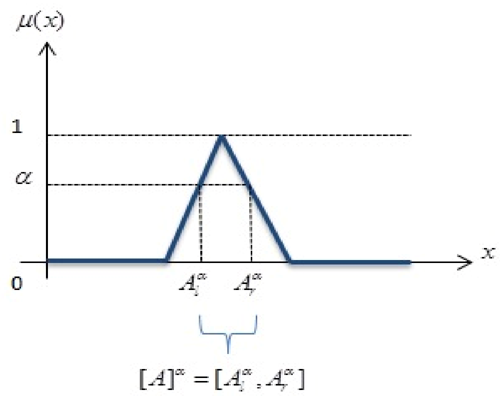
$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \tag{1.2}$$

kümesine X de bir bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.3. X de tanımlı bir *A* bulanık kümesinin $\alpha -$kesimi

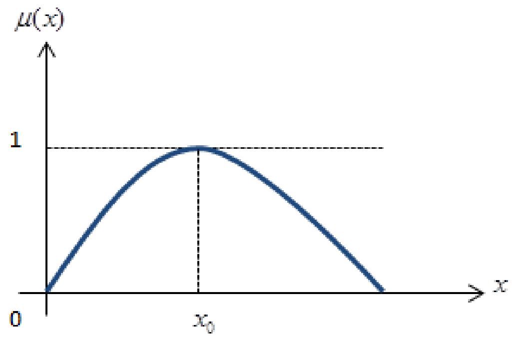
$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \ \alpha \in (0,1] \tag{1.3}$$

dır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.1. *A* bulanık kümesinin α -kesimi

Tanım 1.4. X de tanımlı A bulanık kümesi verilsin. $\exists x_0 \in X$, $\mu_A(x_0) = 1$ ise A normaldir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.2. *A* normal bulanık kümesi

Tanım 1.5. X de tanımlı A bulanık kümesinin dayanak kümesi

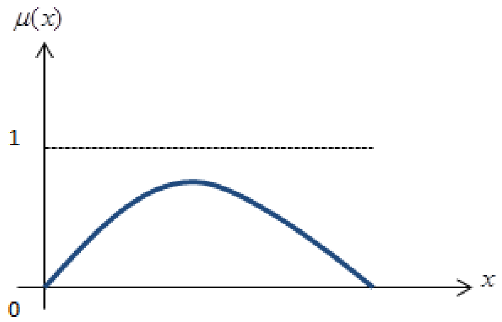
$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \tag{1.4}$$

dır (Bede, 2013).

Tanım 1.6. X de tanımlı A bulanık kümesi verilsin. $\forall \lambda \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için

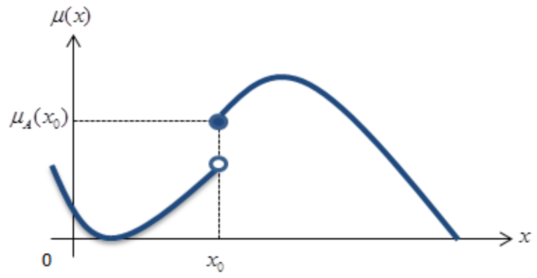
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \tag{1.5}$$

ise A bulanık dışbükeydir denir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.3. *A* bulanık dışbükey kümesi

Tanım 1.7. X de tanımlı A bulanık kümesi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını gerçekleyen $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) < \mu_A(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa A kümesi x_0'da üst-yarı süreklidir.



Şekil 1.4. Üst-yarı sürekli

Tanım 1.8. $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ olacak şekilde, μ_A ile karakterize edilen $\mathbb{R}$ de bir A bulanık kümesi;

(a) A normaldir.

(b) A bulanık dışbükeydir.

(c) μ_A üst-yarı süreklidir.

(d) $\mathrm{supp}(A)$ nın kapanışı kompakttır.

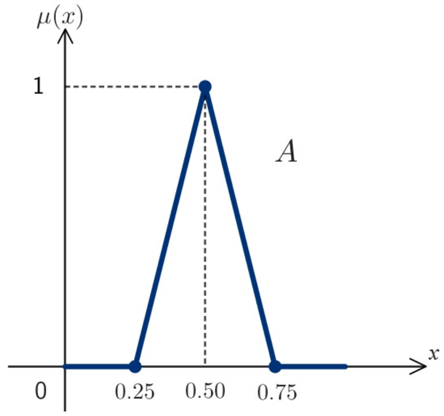
şartlarını gerçekliyorsa A ya bir bulanık sayı denir. $\mathbb{R}$ deki bütün bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F$ ile gösterilir. $\mathrm{supp}(A) \subset (0,\infty)$ ise A pozitiftir denir. Pozitif bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F^+$ ile gösterilir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

Örnek 1.1. $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ olacak şekilde,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.25 \\ 4x-1, & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3-4x, & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0, & 0.75 < x \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen A bir bulanık sayıdır.

$4x-1=\alpha$ ise $x=\dfrac{\alpha+1}{4}$ tür. $3-4x=\alpha$ ise $x=\dfrac{3-\alpha}{4}$ tür. Bu durumda, $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha] = \left[\dfrac{\alpha+1}{4}, \dfrac{3-\alpha}{4}\right]$ tür.



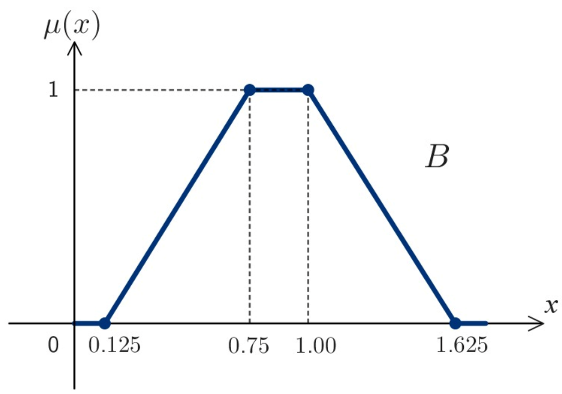
Şekil 1.5. *A* bulanık sayısı

Örnek 1.2. $\mu_B : \mathbb{R} \to [0,1]$ olacak şekilde,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.125 \\ \dfrac{8x-1}{5}, & 0.125 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0,75 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{13-8x}{5}, & 1 \leq x \leq 1,625 \\ 0, & 1,625 > x \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen B bir bulanık sayıdır.

$\dfrac{x-3}{5} = \alpha$ ise $x = 5\alpha + 3$ tür. $\dfrac{15-x}{5} = \alpha$ ise $x = 15 - 5\alpha$ dır. Bu durumda, $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha] = \left[5\alpha + 3, 15 - 5\alpha\right]$ dır.



Şekil 1.6. *B* bulanık sayısı

Tanım 1.9. $U,V\in\mathbb{R}_F$, $[U]^\alpha=[U_l^\alpha,U_r^\alpha]$ ve $[V]^\alpha=[V_l^\alpha,V_r^\alpha]$ olacak şekilde,

(a) U nun boyu, $\forall\alpha\in(0,1]$ için

$$\|U\|=\sup\left\{\max\left\{\left|U_l^\alpha\right|,\left|U_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.6}$$

ile tanımlanır.

(b) U ile V arasındaki uzaklık

$$D(U,V)=\sup\left\{\max\left\{\left|U_l^\alpha-V_l^\alpha\right|,\left|U_r^\alpha-V_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.7}$$

ile tanımlanır.

(c) (k_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $k\in\mathbb{R}_F$ olsun. $\lim_{n\to\infty}(k_n)=k$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty}D(k_n,k)=0$ olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 1.10. $U,V\in\mathbb{R}_F$, $[U]^\alpha=[U_l^\alpha,U_r^\alpha]$ ve $[V]^\alpha=[V_l^\alpha,V_r^\alpha]$ olmak üzere,

$$MIN(U,V)=\left[\min\left\{U_l^\alpha,V_l^\alpha\right\},\min\left\{U_r^\alpha,V_r^\alpha\right\}\right] \tag{1.8}$$

ve

$$MAX(U,V)=\left[\max\left\{U_l^\alpha,V_l^\alpha\right\},\max\left\{U_r^\alpha,V_r^\alpha\right\}\right] \tag{1.9}$$

ile tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

Tanım 1.11.

(a) $\forall n\geq n_0$ için $MIN(k_n,U)=U$ ve $MAX(k_n,V)=V$ olacak şekilde $U,V\in\mathbb{R}_F$ varsa (k_n) bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir.

(b) $n\in\mathbb{N}_0$ için $\left(\|k_n\|\right)$ sınırsız bir dizi ise (k_n) bulanık sayı dizisi sınırsızdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Tanım 1.12. (k_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $k \in \mathbb{R}_F$ olsun. $\forall n \geq n_0$ için

$$MIN(k_i, k) = k_i \text{ ve } MIN(k_r, k) = k \tag{1.10}$$

veya

$$MIN(k_i, k) = k \text{ ve } MIN(k_r, k) = k_r \tag{1.11}$$

olmak üzere $r, i \geq n_0$ şartını sağlayan $r, i \in \mathbb{N}_0$ varsa (k_n) dizisi k civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Lemma 1.1. $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times ... \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon ve $C_0, C_1, ..., C_k \in \mathbb{R}_F$ ise

$$\left[f(C_0, C_1, ..., C_k)\right]^\alpha = f([C_0]^\alpha, [C_1]^\alpha, ..., [C_k]^\alpha) \tag{1.12}$$

dır (Papaschinopoulos ve Stefanidou, 2003).

Tanım 1.13. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve k bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(n, k_n, k_{n+1}, ..., k_{n+i}) = 0 \tag{1.13}$$

veya

$$k_{n+i} = f(n, k_n, k_{n+1}, ..., k_{n+i-1}) \tag{1.14}$$

denklemine fark denklemi denir. k_n fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için (1.13) denklemini sağlıyor ise k_n e (1.13) denkleminin bir çözümü denir (Soykan ve ark., 2017).

Teorem 1.1. $T \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}^+$ ve $I : T^{i+1} \to T$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise

$$k_{n+1} = I\left(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_{n-i}\right),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.15}$$

denkleminin bir tek $\{k_n\}_{n=-i}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.14. (1.15) denkleminde $\bar{k} = I\left(\bar{k}, \bar{k}, \ldots, \bar{k}\right)$ ise $\bar{k}$ ye (1.15) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.15. (1.15) denkleminin bir denge noktası $\bar{k}$ olsun.

(a) $k_0, ..., k_{-i} \in T$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\left|k_0 - \bar{k}\right| + ... + \left|k_{-i} - \bar{k}\right| < \delta$ iken $n \geq 1$ için $\left|k_n - \bar{k}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $\bar{k}$ kararlıdır.

(b) $\bar{k}$ kararlı, $k_0, ..., k_{-i} \in T$ ve $\lim_{n \to \infty} k_n = \bar{k}$ olacak şekilde $\left|k_0 - \bar{k}\right| + ... + \left|k_{-i} - \bar{k}\right| < \gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma > 0$ var ise $\bar{k}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(c) $k_0, ..., k_{-i} \in T$ iken $\lim_{n \to \infty} k_n = \bar{k}$ ise $\bar{k}$ çekim noktasıdır.

(d) $\bar{k}$ kararlı ve çekim noktası ise $\bar{k}$ global asimptotik kararlıdır.

(e) $\bar{k}$ kararlı değil ise kararsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.16. $T \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $r = 0, 1, \ldots, i$ ve $I : T^{i+1} \to T$ fonksiyonunun k_{n-r} lere göre kısmi türevlerinin $\bar{k}$ deki değerleri

$$p_r = \frac{\partial I}{\partial k_{n-r}}\left(\bar{k}, \bar{k}, \ldots, \bar{k}\right) \tag{1.16}$$

olmak üzere,

$$z_{n+1} = \sum_{r=0}^{i} p_r z_{n-r}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.17}$$

denklemine (1.15) denkleminin $\bar{k}$ civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir. (1.17) denkleminden elde edilen

$$\lambda^{i+1} - \sum_{r=0}^{i} p_r \lambda^{i-r} = 0 \tag{1.18}$$

denklemine ise (1.15) denkleminin $\bar{k}$ deki karakteristik denklemi adı verilir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) (1.18) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{k}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(b) (1.18) denkleminin mutlak değerce 1'den büyük bir kökü var ise $\bar{k}$ kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Örnek 1.3. $k_{-2}, k_{-1}, k_0, A, B, C, i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}}{B + Ck_n^i k_{n-2}^i}$$

denkleminin denge noktalarını bulup, çözümlerin davranışını inceleyelim.

Denge noktası tanımından

$$\bar{k} = \frac{A\bar{k}}{B + C\bar{k}^{2i}}$$

olup, bu denklemin çözümleri $\bar{k}_1 = 0$, $\bar{k}_2 = \left(\frac{A-B}{C}\right)^{1/2i}$ şeklindedir.

Şimdi, lineer olmayan

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}}{B + Ck_n^i k_{n-2}^i} = f(k_n, k_{n-1}, k_{n-2})$$

fark denklemini lineerleştirelim:

$$\frac{\partial f}{\partial k_n} = \frac{-iCAk_{n-1}k_n^{i-1}k_{n-2}^i}{\left(B + Ck_n^i k_{n-2}^i\right)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_{n-1}} = \frac{A}{B + Ck_n^i k_{n-2}^i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_{n-2}} = \frac{-iCAk_{n-1}k_n^i k_{n-2}^{i-1}}{\left(B + Ck_n^i k_{n-2}^i\right)^2}$$

olduğundan,

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial k_n}(\bar{k},\bar{k},\bar{k}) = \frac{-iCA\bar{k}^{2i}}{\left(B + C\bar{k}^{2i}\right)^2},$$

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial k_{n-1}}(\bar{k},\bar{k},\bar{k}) = \frac{A}{B + C\bar{k}^{2i}},$$

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial k_{n-2}}(\bar{k},\bar{k},\bar{k}) = \frac{-iCA\bar{k}^{2i}}{\left(B + C\bar{k}^{2i}\right)^2}$$

elde edilir. Bu durumda, $\bar{k}_1 = 0$ noktası civarındaki lineer denklem $p_0 = 0,\ p_1 = \frac{A}{B},\ p_2 = 0$ olduğu için

$$z_{n+1} = 0.z_n + \left(\frac{A}{B}\right).z_{n-1} + 0.z_{n-2}$$

şeklindedir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - \left(\frac{A}{B}\right).\lambda = 0$$

şeklinde olup $\frac{A}{B} < 1$ için karakteristik denklemin kökleri mutlak değerce 1 den küçük olacağından, $\bar{k}_1 = 0$ denge noktası $\frac{A}{B} < 1$ için lokal asimptotik kararlıdır.

$\bar{k}_2 = \left(\frac{A-B}{C}\right)^{1/2i}$ $(A > B)$ denge noktası civarındaki lineer denklem:

$p_0 = \frac{-i(A-B)}{A},\ p_1 = 1,\ p_2 = \frac{-i(A-B)}{A}$ olduğundan

$$z_{n+1} = \left(\frac{-i(A-B)}{A}\right).z_n + 1.z_{n-1} + \left(\frac{-i(A-B)}{A}\right).z_{n-2}$$

şeklindedir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3+\left(\frac{i(A-B)}{A}\right)\lambda^2-\lambda+\left(\frac{i(A-B)}{A}\right)=0$$

şeklinde olup karakteristik denklemin köklerinden biri -1 den küçük olduğundan, $\overline{k}_2=\left(\frac{A-B}{C}\right)^{1/2i}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.17. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $L\le k_n\le R$ olacak şekilde $L,R\in\mathbb{R}$ sayıları var ise $\{k_n\}_{n=-i}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.3. $P,S\subset\mathbb{R}$, $I_1\ :\ P^{i+1}\times S^{i+1}\to P$ ve $I_2\ :\ P^{i+1}\times S^{i+1}\to S$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise $\forall(k_{-r},l_{-r})\in P\times S$ ve $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}k_{n+1}&=I_1\left(k_n,\ldots,k_{n-i},l_n,\ldots,l_{n-i}\right)\\ l_{n+1}&=I_2\left(k_n,\ldots,k_{n-i},l_n,\ldots,l_{n-i}\right)\end{aligned}\tag{1.19}$$

sisteminin bir tek $\{(k_n,l_n)\}_{n=-i}^{\infty}$ çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

Tanım 1.18. (1.19) sisteminde

$$\overline{k}=I_1\left(\overline{k},\ldots,\overline{k},\overline{l},\ldots,\overline{l}\right),\ \overline{l}=I_2\left(\overline{k},\ldots,\overline{k},\overline{l},\ldots,\overline{l}\right)\tag{1.20}$$

ise $\left(\overline{k},\overline{l}\right)$ sıralı ikilisine (1.19) sisteminin denge noktası denir.

(1.19) sistemi, $\Phi_n=\left(k_n,\ldots,k_{n-i},l_n,\ldots,l_{n-i}\right)^T$ ve $k_n=a_n^{(0)}$, $k_{n-1}=a_n^{(1)},\ldots,$ $k_{n-i}=a_n^{(i)}$, $l_n=e_n^{(0)}$, $l_{n-1}=e_n^{(1)},\ldots,$ $l_{n-i}=e_n^{(i)}$ dönüşümleri ile $I\ :\ P^{i+1}\times S^{i+1}\to P^{i+1}\times S^{i+1}$

için

$$I\left(\begin{pmatrix} a_n^{(0)} \\ . \\ . \\ . \\ a_n^{(i)} \\ e_n^{(0)} \\ . \\ . \\ . \\ e_n^{(i)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} I_1(a_n^{(0)},...,a_n^{(i)},e_n^{(0)},...,e_n^{(i)}) \\ . \\ . \\ . \\ a_n^{(i-1)} \\ I_2(a_n^{(0)},...,a_n^{(i)},e_n^{(0)},...,e_n^{(i)}) \\ . \\ . \\ . \\ e_n^{(i-1)} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

olacak şekilde,

$$\Phi_{n+1} = I(\Phi_n),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.22}$$

vektörel formunda yazılır. (1.19) sistemi $(\bar{k},\bar{l})$ denge noktasına sahip ise (1.22) sisteminin denge noktası $\bar{\Phi} = (\bar{k},\ldots,\bar{k},\bar{l},\ldots,\bar{l})^T$ şeklindedir (Kocic ve Ladas, 1993).

Bu çalışmada, bir vektörün veya matrisin normu $\|...\|$ ile ve (1.22) sisteminin bir başlangıç şartı $\Phi_0 \in P^{i+1} \times S^{i+1}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 1.19. (1.22) sisteminin bir denge noktası $\bar{\Phi}$ olsun.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\|\Phi_0 - \bar{\Phi}\| < \delta$ ve $n \geq 1$ için $\|\Phi_n - \bar{\Phi}\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $\bar{\Phi}$ kararlıdır.

(b) $\bar{\Phi}$ kararlı ve $n \to \infty$ iken $\Phi_n \to \bar{\Phi}$ olacak şekilde $\|\Phi_0 - \bar{\Phi}\| < \gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma > 0$ var ise $\bar{\Phi}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(c) $n \to \infty$ iken $\Phi_n \to \bar{\Phi}$ ise $\bar{\Phi}$ çekim noktasıdır.

(d) $\bar{\Phi}$ hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası ise global asimptotik kararlıdır (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.22) sisteminin $\bar{\Phi}$ deki lineerleştirilmiş sistemi; I dönüşümünün $\bar{\Phi}$ deki Jacobian matrisi W_I ise

$$Z_{n+1} = W_I Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.23}$$

şeklinde olup (1.22) sisteminin $\overline{\Phi}$ civarındaki karakteristik polinomu $s_0 > 0$ olmak üzere

$$P(\lambda) = s_0 \lambda^{2(i+1)} + s_1^{2i+1} \lambda + \cdots + s_{2i+1}\lambda + s_{2(i+1)} \tag{1.24}$$

şeklindedir (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.4. (1.22) sisteminin bir denge noktası $\overline{\Phi}$ olsun. W_I Jacobian matrisinin tüm öz değerleri $\overline{\Phi}$ denge noktası için mutlak değerce 1 den küçük ise $\overline{\Phi}$ lokal asimptotik kararlıdır. Mutlak değerce 1 den büyük bir öz değer var ise $\overline{\Phi}$ kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

Örnek 1.4. $\mu, \mu_1, \mu_2, \eta, \eta_1, \eta_2, i, j, i_1, j_1$ katsayıları pozitif reel sayılar ve $k_{-2},\ k_{-1},\ k_0,\ l_{-2},\ l_{-1},\ l_0$ başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$k_{n+1} = \frac{\mu k_{n-1}}{\mu_1 + \mu_2 l_n^i l_{n-2}^j},\ l_{n+1} = \frac{\eta l_{n-1}}{\eta_1 + \eta_2 k_n^{i_1} k_{n-2}^{j_1}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin negatif olmayan denge noktalarını elde edip çözümlerinin davranışlarını inceleyelim:

$$\overline{k} = \frac{\mu \overline{k}}{\mu_1 + \mu_2 \overline{l}^{\,i+j}},\ \overline{l} = \frac{\eta \overline{l}}{\eta_1 + \eta_2 \overline{k}^{\,i_1+j_1}}$$

veya

$$\overline{k}\left(\mu_1 + \mu_2 \overline{l}^{\,i+j} - \mu\right) = 0,\ \overline{l}\left(\eta_1 + \eta_2 \overline{k}^{\,i_1+j_1} - \eta\right) = 0$$

sistemini çözmeliyiz. Açıktır ki, $\left(\overline{k}_0, \overline{l}_0\right) = (0,0)$ daima bir denge noktasıdır ve eğer $\eta_1 < \eta$ ve $\mu_1 < \mu$ ise $\left(\overline{k}_+, \overline{l}_+\right) = \left(\left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_2}\right)^{\frac{1}{i_1+j_1}}, \left(\frac{\mu - \mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{i+j}}\right)$ tek pozitif denge noktasıdır.

Şimdi, $\left(\overline{k}_0, \overline{l}_0\right) = (0,0)$ denge noktasının kararlılığını araştıralım:

$$k_n = a_n^{(0)}, k_{n-1} = a_n^{(1)}, k_{n-2} = a_n^{(2)}, l_n = e_n^{(0)}, l_{n-1} = e_n^{(1)}, l_{n-2} = e_n^{(2)}$$

değişken değiştirmelerini uygulayalım. Verilen sistemde

$$I_1\left(a_n^{(0)}, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, e_n^{(0)}, e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\right) = \frac{\mu a_n^{(1)}}{\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j},$$

$$I_2\left(a_n^{(0)}, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, e_n^{(0)}, e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\right) = \frac{\eta e_n^{(1)}}{\eta_1 + \eta_2 \left(a_n^{(0)}\right)^{i_1} \left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}}$$

olup, karşılık gelen 6 boyutlu sistem

$$I\left(\begin{pmatrix} a_n^{(0)} \\ a_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ e_n^{(0)} \\ e_n^{(1)} \\ e_n^{(2)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu a_n^{(1)} / \left(\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j\right) \\ a_n^{(0)} \\ a_n^{(1)} \\ \eta e_n^{(1)} / \left(\eta_1 + \eta_2 \left(a_n^{(0)}\right)^{i_1} \left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}\right) \\ e_n^{(0)} \\ e_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre, sistem normal formda gösterilirse

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}^{(0)} \\ a_{n+1}^{(1)} \\ a_{n+1}^{(2)} \\ e_{n+1}^{(0)} \\ e_{n+1}^{(1)} \\ e_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = I\left(\begin{pmatrix} a_n^{(0)} \\ a_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ e_n^{(0)} \\ e_n^{(1)} \\ e_n^{(2)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu a_n^{(1)} / \left(\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j\right) \\ a_n^{(0)} \\ a_n^{(1)} \\ \eta e_n^{(1)} / \left(\eta_1 + \eta_2 \left(a_n^{(0)}\right)^{i_1} \left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}\right) \\ e_n^{(0)} \\ e_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu sisteminin denge noktaları $\overline{K}_0 = \left(0,...,0,0,...,0\right)^T$ ve $\overline{K}_+ = \left(\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_2}\right)^{\frac{1}{i_1+j_1}},...,\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_2}\right)^{\frac{1}{i_1+j_1}},\left(\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{i+j}},...,\left(\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{i+j}}\right)^T$ dir. Ayrıca, sistemden

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_n^{(0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_n^{(1)}} = \frac{\mu}{\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j} = A_1,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_n^{(2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial e_n^{(0)}} = -\frac{i\mu_2 \mu a_n^{(1)} \left(e_n^{(0)}\right)^{i-1} \left(e_n^{(2)}\right)^j}{\left(\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j\right)^2} = A_2,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial e_n^{(1)}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial e_n^{(2)}} = -\frac{j\mu_2 \mu a_n^{(1)} \left(e_n^{(0)}\right)^{i} \left(e_n^{(2)}\right)^{j-1}}{\left(\mu_1 + \mu_2 \left(e_n^{(0)}\right)^i \left(e_n^{(2)}\right)^j\right)^2} = A_3,$$

$$\frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial a_n^{(0)}} = 1,$$

$$\frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial a_n^{(1)}} = \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial a_n^{(2)}} = \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial e_n^{(0)}} = \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial e_n^{(1)}} = \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial e_n^{(2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial a_n^{(0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial a_n^{(1)}} = 1,$$

$$\frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial a_n^{(2)}} = \frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial e_n^{(0)}} = \frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial e_n^{(1)}} = \frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial e_n^{(2)}} = 0$$

ve

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_n^{(0)}} = -\frac{i_1\eta_2\eta e_n^{(1)}\left(a_n^{(0)}\right)^{i_1-1}\left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}}{\left(\eta_1+\eta_2\left(a_n^{(0)}\right)^{i_1}\left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}\right)^2} = A_4,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_n^{(1)}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_n^{(2)}} = -\frac{j_1\eta_2\eta e_n^{(1)}\left(a_n^{(0)}\right)^{i_1}\left(a_n^{(2)}\right)^{j_1-1}}{\left(\eta_1+\eta_2\left(a_n^{(0)}\right)^{i_1}\left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}\right)^2} = A_5,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial e_n^{(0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial e_n^{(1)}} = \frac{\eta}{\eta_1+\eta_2\left(a_n^{(0)}\right)^{i_1}\left(a_n^{(2)}\right)^{j_1}} = A_6,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial e_n^{(2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial a_n^{(0)}} = \frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial a_n^{(1)}} = \frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial a_n^{(2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial e_n^{(0)}} = 1,$$

$$\frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial e_n^{(1)}} = \frac{\partial e_n^{(0)}}{\partial e_n^{(2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial a_n^{(0)}} = \frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial a_n^{(1)}} = \frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial a_n^{(2)}} = \frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial e_n^{(0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial e_n^{(1)}} = 1,$$

$$\frac{\partial e_n^{(1)}}{\partial e_n^{(2)}} = 0$$

elde edilir ve böylece sistemin jakobiyeni

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & A_5 & 0 & A_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. W_I jakobiyen matrisinin $\bar{K}_0$ sıfır denge noktasındaki değeri

$$W_I\left(\bar{K}_0\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mu/\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta/\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\bar{K}_0$ sıfır denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistem

$$K_{n+1} = W_I\left(\bar{K}_0\right) K_n,$$

veya

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ k_n \\ k_{n-1} \\ l_{n+1} \\ l_n \\ l_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu/\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta/\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n \\ k_{n-1} \\ k_{n-2} \\ l_n \\ l_{n-1} \\ l_{n-2} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $W_I\left(\bar{K}_0\right)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2\left(\lambda^2 - \mu/\mu_1\right)\left(\lambda^2 - \eta/\eta_1\right) = 0$$

ve bu denklemin kökleri, $\lambda_1 = \left(\mu/\mu_1\right)^{1/2}$, $\lambda_2 = -\left(\mu/\mu_1\right)^{1/2}$, $\lambda_3 = \left(\eta/\eta_1\right)^{1/2}$, $\lambda_4 = -\left(\eta/\eta_1\right)^{1/2}$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ olarak bulunur. Açıkça görülür ki, eğer $\mu < \mu_1$ ve $\eta < \eta_1$ ise tüm kökler için $|\lambda| < 1$ olacağından $\bar{K}_0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. $\mu > \mu_1$ veya $\eta > \eta_1$ ise bazı kökler için $|\lambda| < 1$ olmayacağından $\bar{K}_0$ denge noktası kararsızdır ($\bar{K}_+$ pozitif denge noktasının kararlılık durumu benzer şekilde incelenebilir).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Khastan; $A, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = Ak_n(1-k_n)$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmıştır (Khastan, 2018).

Khastan ve Alijani; $A, B, C, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = A + \frac{B}{k_n}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Khastan ve Alijani, 2018).

Lavanya ve Lovenia; $i \in \{0,1,...,r\}$, $q_i \in \mathbb{R}^+$, $A_i, B_i, k_{-r}, k_{-r+1}, ..., k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \sum_{i=0}^{r} \frac{A_i k_n + k_{n-i}}{B_i k_{n-i}^{q_i}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Lavanya ve Lovenia, 2018).

Rahman ve ark.; $A, B, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{k_{n-1}}{A + Bk_{n-1}k_n}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Rahman ve ark., 2018).

Sun ve ark.; $e = \max\{r, s\}$, $k_{-e}, k_{-e+1}, ..., k_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_n = \max\left\{\frac{1}{k_{n-r}}, \frac{\mu_n}{k_{n-s}}\right\}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Sun ve ark., 2018).

Wang ve Zhang; $A, B, C, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = A + Bk_n r^{-Ck_n}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Wang ve Zhang, 2018).

Su ve ark.; $A_p, B_q, k_r \in \mathbb{R}_F^+, p \in [1,i], q \in [1,j], r \in [-e,-1], e = \max\{t,s\}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $t,s \in \mathbb{N}$ için

$$k_n = F\left(A_1,...,A_i,k_{n-t},B_1,...,B_j,k_{n-s}\right)$$

genel bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Su ve ark., 2019).

Wang ve ark.; $r \in \mathbb{Z}^+$, $A, k_{-r}, k_{-r+1},...,k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{k_n}, \frac{A}{k_{n-1}},...,\frac{A}{k_{n-(r-1)}}, k_{n-r}\right\}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Wang ve ark., 2019).

Han ve ark.; $r,s \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}(-r-s,-1)$, $A, k_i \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_n = \max\left\{A, \frac{k_{n-r-s}}{k_{n-r}}\right\}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Han ve ark., 2020).

Sun ve ark.; $r \in \mathbb{N}_1$, $k_{-r}, k_{-r+1},...,k_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_n = F(k_{n-1}, k_{n-r})$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Sun ve ark., 2020).

Wang ve Li; $A, k_{-2}, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{k_n}, \frac{A}{k_{n-1}}, k_{n-2}\right\}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Wang ve Li, 2020).

Khaliq ve ark.; $A, B, C, D, E, k_{-5}, k_{-4}, k_{-3}, k_{-2}, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}k_{n-2}}{B + Ck_{n-3} + Dk_{n-4} + Ek_{n-5}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Khaliq ve ark., 2021).

Yalçınkaya ve ark.; $A, k_{-2}, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{k_{n-2}}{A + k_{n-2}k_{n-1}k_n}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Yalçınkaya ve ark., 2021).

Wang ve ark.; $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $A, B, C, k_{-r}, k_{-r+1}, \ldots, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-r}}{B + C\prod_{i=0}^{r} k_{n-i}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Wang ve ark., 2021).

Çolak; $A, B, C, k_0 \in \mathbb{R}_F^+, n \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_n}{B + Ck_n^i}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmıştır (Çolak, 2022).

Jia ve ark.; $A, B, C, D, k_{-4}, k_{-3}, k_{-2}, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}k_{n-2} + Bk_{n-3}}{C + Dk_{n-4}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Jia ve ark., 2022).

Sun ve ark.; $A, B, k_{-r}, l_{-r} \in \mathbb{R}_F^+, r \in \mathbb{Z}(-i, -1)$ ve $n, i \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} k_n = \max\left\{A, \dfrac{l_{n-1}}{k_{n-i}}\right\}, \\ l_n = \max\left\{B, \dfrac{k_{n-1}}{l_{n-i}}\right\} \end{cases}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Sun ve ark., 2022).

Yalçınkaya ve ark.; $q \in \mathbb{Z}^+$, $A, k_{-2}, k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}}{1 + k_{n-2}^q}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Yalçınkaya ve ark., 2022).

Yalçınkaya ve ark.; $A, B, k_{-i} \in \mathbb{R}_F^+, n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{Z}^+, i = 1, 2, ..., r$ için

$$k_{n+1} = A + \frac{B}{k_{n-r}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Yalçınkaya ve ark., 2022).

Jia ve ark.; $A, B, C, k_{-6}, ..., k_{-1}, k_0 \in \mathbb{R}_F^+, n \in \mathbb{N}_0$ ve $i, j, t \in \mathbb{R}^+$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-1}}{B + Ck_{n-2}^i k_{n-4}^j k_{n-6}^t}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Jia ve ark., 2023).

Yalçınkaya ve ark.; $A, B, C, k_{-i} \in \mathbb{R}_F^+, n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{Z}^+, i = 1, 2, ..., r$ için

$$k_{n+1} = \frac{Ak_{n-r}}{B + C\prod_{i=0}^{r} k_{n-i}}$$

bulanık denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır (Yalçınkaya ve ark., 2023).

3. $k_{n+1}=\dfrac{\mu k_{n-1}}{\mu_1+\mu_2 l_n^i l_{n-2}^j},\ l_{n+1}=\dfrac{\eta l_{n-1}}{\eta_1+\eta_2 k_n^{i_1} k_{n-2}^{j_1}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde; Gümüş ve Öcalan'ın 2018 yılında yayımlanmış olan ''The qualitative analysis of a rational system of difference equations'' adlı makalesi ele alınmıştır.

Bu çalışmada; $\mu, \mu_1, \mu_2, \eta, \eta_1, \eta_2, i, j, i_1, j_1$ katsayıları pozitif reel sayılar ve $k_{-2}, k_{-1}, k_0, l_{-2}, l_{-1}, l_0$ başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$k_{n+1}=\frac{\mu k_{n-1}}{\mu_1+\mu_2 l_n^i l_{n-2}^j},\ l_{n+1}=\frac{\eta l_{n-1}}{\eta_1+\eta_2 k_n^{i_1} k_{n-2}^{j_1}} \tag{3.1}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

(3.1) fark denklem sistemi $k_n=\left(\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right)^{\frac{1}{i_1+j_1}} a_n,\ l_n=\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{i+j}} e_n,\ M=\dfrac{\mu}{\mu_1}$ ve $\mathrm{H}=\dfrac{\eta}{\eta_1}$ değişken değiştirmeleriyle

$$a_{n+1}=\frac{Ma_{n-1}}{1+e_n^i e_{n-2}^j},\ e_{n+1}=\frac{He_{n-1}}{1+a_n^{i_1} a_{n-2}^{j_1}},\ n=0,1,... \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1. (3.2) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $(\overline{a}_0,\overline{e}_0)=(0,0)$ noktası (3.2) sisteminin her zaman denge noktasıdır.

(ii) Eğer $M,H>1$ ise (3.2) sistemi $(\overline{a}_1,\overline{e}_1)=\left((H-1)^{1/(i_1+j_1)},(M-1)^{1/i+j}\right)$ denge noktasına sahiptir.

(iii) Eğer $M>1$ ve $H=1$ ise (3.2) sistemi $(\overline{a}_2,\overline{e}_2)=\left(0,(M-1)^{1/(i+j)}\right)$ denge noktasına sahiptir.

(iv) Eğer $M=1$ ve $H>1$ ise (3.2) sistemi $(\overline{a}_3,\overline{e}_3)=\left((H-1)^{1/(i_1+j_1)},0\right)$ denge noktasına sahiptir.

(v) Eğer $M \in (0,1)$, $H = 1$ ve $\frac{1}{i+j}$ bir pozitif çift tam sayı ise (3.2) sistemi $\left(\overline{a}_4, \overline{e}_4\right) = \left(0, \left(M-1\right)^{1/(i+j)}\right)$ denge noktasına sahiptir.

(vi) Eğer $M = 1$, $H \in (0,1)$ ve $\frac{1}{i_1 + j_1}$ bir pozitif çift tam sayı ise (3.2) sistemi $\left(\overline{a}_5, \overline{e}_5\right) = \left(\left(H-1\right)^{1/(i_1+j_1)}, 0\right)$ denge noktasına sahiptir.

(vii) Eğer $M, H \in (0,1)$ ve $\frac{1}{i+j}$ ile $\frac{1}{i_1+j_1}$ bir pozitif çift tam sayı ise (3.2) sistemi $\left(\overline{a}_6, \overline{e}_6\right) = \left(\left(H-1\right)^{1/(i_1+j_1)}, \left(M-1\right)^{1/(i+j)}\right)$ pozitif denge noktasına sahiptir.

Teorem 3.2. (3.2) sisteminin bir pozitif çözümü $\left\{\left(\overline{a}_n, \overline{e}_n\right)\right\}$ ise $m \geq 0$ için

$$0 \leq a_n \leq \begin{cases} M^{m+1} a_{-1}, & n = 2m+1 \\ M^{m+1} a_0, & n = 2m+2 \end{cases}$$

ve

$$0 \leq e_n \leq \begin{cases} H^{m+1} e_{-1}, & n = 2m+1 \\ H^{m+1} e_0, & n = 2m+2 \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $m = 0$ için teoremin doğru olduğu açıktır. $m = m_0$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $m = m_0 + 1$ için

$$a_n = \begin{cases} a_{2(m_0+1)+1} \leq M a_{2(m_0+1)-1} = M a_{2m_0+1} \leq M M^{m_0+1} a_{-1}, & n = 2(m_0+1)+1 \\ a_{2(m_0+1)+2} \leq M a_{2(m_0+1)+1-1} = M a_{2m_0+2} \leq M M^{m_0+1} a_0, & n = 2(m_0+1)+2 \end{cases}$$

ve

$$e_n = \begin{cases} e_{2(m_0+1)+1} \leq H e_{2(m_0+1)-1} = H e_{2m_0+1} \leq H H^{m_0+1} e_{-1}, & n = 2(m_0+1)+1 \\ e_{2(m_0+1)+2} \leq H e_{2(m_0+1)+1-1} = H e_{2m_0+2} \leq H H^{m_0+1} e_0, & n = 2(m_0+1)+2 \end{cases}$$

elde edilir. Böylelikle tümevarımla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1. Eğer $M<1$ ve $H<1$ ise Teorem 3.2.'ye göre $\{(a_n, e_n)\}$ çözümü $(\overline{a}_0, \overline{e}_0)=(0,0)$ denge noktasına üstel olarak yakınsar.

(3.2) sisteminin lineerleştirilmiş formunu elde edelim:

$p=\dfrac{Ma_{n-1}}{1+e_n^i e_{n-2}^j}$, $p_1=a_n$, $p_2=a_{n-1}$, $q=\dfrac{He_{n-1}}{1+a_n^{i_1} a_{n-2}^{j_1}}$, $q_1=e_n$ ve $q_2=e_{n-1}$ olmak üzere,

$$(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, e_n, e_{n-1}, e_{n-2}) \rightarrow (p, p_1, p_2, q, q_1, q_2) \tag{3.3}$$

dönüşümünü ele alalım. (3.3) dönüşümü altında $M, H, i, j, i_1, j_1 \in (0,\infty)$ olmak üzere, $(\overline{a}, \overline{e})$ denge noktası civarındaki Jacobian matris

$$W(\overline{a},\overline{e})=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{M}{1+\overline{e}^{i+j}} & 0 & -\dfrac{Mi\overline{a}\,\overline{e}^{i+j-1}}{\left(1+\overline{e}^{i+j}\right)^2} & 0 & -\dfrac{Mi\overline{a}\,\overline{e}^{i+j-1}}{\left(1+\overline{e}^{i+j}\right)^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{Hi_1\overline{e}\,\overline{a}^{i_1+j_1-1}}{\left(1+\overline{a}^{i_1+j_1}\right)^2} & 0 & -\dfrac{Hi_1\overline{e}\,\overline{a}^{i_1+j_1-1}}{\left(1+\overline{a}^{i_1+j_1}\right)^2} & 0 & \dfrac{H}{1+\overline{a}^{i_1+j_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3. Eğer $M<1$ ve $H<1$ ise $(\overline{a}_0, \overline{e}_0)=(0,0)$ sıfır denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.2) sisteminin $(\overline{a}_0, \overline{e}_0)=(0,0)$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş formu

$$A_n=\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ e_n \\ e_{n-1} \\ e_{n-2} \end{pmatrix} \text{ ve } W(\overline{a}_0,\overline{e}_0)=\begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$A_{n+1} = W\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right) A_n$$

şeklindedir. Burada $W\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^6 - (M + H)\lambda^4 + MH\lambda^2 = 0$$

şeklindedir. $P(\lambda)$ polinomunun kökleri $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{M}$, $\lambda_{3,4} = 0$, $\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{H}$ şeklinde olup W Jacobian matrisinin $(0,0)$ civarındaki tüm özdeğerleri $|\lambda| < 1$ açık birim diskinin içinde bulunduğundan, $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right) = (0,0)$ sıfır denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. (i) Eğer $M > 1$ ve $H > 1$ ise $\left(\overline{a}_1, \overline{e}_1\right)$ pozitif denge noktası kararsızdır.

(ii) Eğer $M < 1$, $H < 1$ ve $\dfrac{1}{i+j}, \dfrac{1}{i_1 + j_1} \in 2\mathbb{Z}^+$ ise $\left(\overline{a}_6, \overline{e}_6\right)$ pozitif denge noktası kararsızdır.

İspat. (i) (3.2) sisteminin $\left(\overline{a}_1, \overline{e}_1\right) = \left((H-1)^{1/(i_1+j_1)}, (M-1)^{1/i+j}\right)$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş formu

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ e_n \\ e_{n-1} \\ e_{n-2} \end{pmatrix}, \; a = -\frac{(H-1)^{\frac{1}{i_1+j_1}} (M-1)^{\frac{i+j-1}{i+j}}}{M}, \; e = -\frac{(M-1)^{\frac{1}{i+j}} (H-1)^{\frac{i_1+j_1-1}{i_1+j_1}}}{H}$$

ve

$$W\left(\overline{a}_1,\overline{e}_1\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ia & 0 & ja \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ie & 0 & je & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$A_{n+1}=W\left(\overline{a}_1,\overline{e}_1\right)A_n$$

şeklindedir. Burada $W\left(\overline{a}_1,\overline{e}_1\right)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^6+(-aei^2-2)\lambda^4+(1-2ijae)\lambda^2+\left(ijae\left(aei^2+2\right)-j^2ae-ijae-ie\left(jei^2a^2+ja\right)\right.$$

şeklindedir. $M,H>1$ ve $i,j>0$ için

$$\begin{aligned} P(1) &= ijae\left(aei^2+2\right)-i^2ae-j^2ae-3ijae-ie\left(jei^2a^2+ja\right) \\ &= -ae\left(i+j\right)^2 \\ &= -\left(\frac{(H-1)^{\frac{1}{i_1+j_1}}(M-1)^{\frac{i+j-1}{i+j}}}{M}\right)\left(\frac{(M-1)^{\frac{1}{i+j}}(H-1)^{\frac{i_1+j_1-1}{i_1+j_1}}}{H}\right)\left(i+j\right)^2 \\ &= -\left(\frac{(M-1)(H-1)}{MH}\right)\left(i+j\right)^2<0 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\infty}P(\lambda)=\infty$$

olup, $P(\lambda)$ polinomunun bir kökünün $\left(1,\infty\right)$ aralığında olduğu açıktır. Böylelikle ispat tamamlanır. ((ii) nin ispatı (i) nin ispatına benzerdir.)

Teorem 3.5. (i) Eğer $M>1$ ve $H=1$ ise $\left(\overline{a}_2,\overline{e}_2\right)$ denge noktası non-hiperboliktir.

(ii) Eğer $M=1$ ve $H>1$ ise $\left(\overline{a}_3,\overline{e}_3\right)$ denge noktası non-hiperboliktir.

(iii) Eğer $M<1$, $H=1$ ve $\dfrac{1}{i+j}\in 2\mathbb{Z}^+$ ise $\left(\overline{a}_4,\overline{e}_4\right)$ denge noktası non-hiperboliktir.

(iv) Eğer $M=1$, $B<1$ ve $\dfrac{1}{i_1+j_1}\in 2\mathbb{Z}^+$ ise $(\overline{a}_5,\overline{e}_5)$ denge noktası non-hiperboliktir.

İspat. **(i)** (3.2) sisteminin $(\overline{a}_2,\overline{e}_2)=\left(0,(M-1)^{1/(i+j)}\right)$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş formu

$$A_n=\begin{pmatrix} a_n\\ a_{n-1}\\ a_{n-2}\\ e_n\\ e_{n-1}\\ e_{n-2}\end{pmatrix} \text{ ve } W(\overline{a}_2,\overline{e}_2)=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&H&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$A_{n+1}=W(\overline{a}_2,\overline{e}_2)A_n$$

şeklindedir. Burada $W(\overline{a}_2,\overline{e}_2)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^6-(H+1)\lambda^4+M\lambda^2=0$$

şeklindedir. $P(\lambda)$ polinomunun kökleri $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{H}$, $\lambda_{3,4}=0$, $\lambda_{5,6}=\pm 1$ şeklinde olup $(\overline{a}_2,\overline{e}_2)=\left(0,(M-1)^{1/(i+j)}\right)$ denge noktası non-hiperboliktir. ((ii) - (iv) ün ispatları (i) nin ispatına benzerdir.)

Teorem 3.6. Eğer $M<1$ ve $H<1$ ise $(\overline{a}_0,\overline{e}_0)$ sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.2) sisteminin $(\overline{a}_0,\overline{e}_0)$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu Teorem 3.3. ten biliyoruz. Bu nedenle, (3.2) sisteminin herhangi $\{(a_n,e_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü için

$$\lim_{n\to\infty}(a_n,e_n)=(0,0)$$

olduğunu ispatlamamız yeterli olacaktır.

$$0 \le a_{n+1} = \frac{Ma_{n-1}}{1+e_n^i e_{n-2}^j} < Ma_{n-1} \text{ ve } 0 \le e_{n+1} = \frac{He_{n-1}}{1+a_n^{i_1} a_{n-2}^{j_1}} < He_{n-1}$$

olduğundan, iterasyon ile

$$a_{2n-1} < M^n a_{-1},\ a_{2n} < M^n a_0,\ e_{2n-1} < H^n e_{-1} \text{ ve } e_{2n} < H^n e_0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, $M < 1$ ve $H < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n, e_n\right) = \left(0, 0\right)$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 3.7. Eğer $M > 1$ ve $H > 1$ ise $t \in \{0, 1, 2\}$ ve $n \ge 1$ için (3.2) sisteminin değişmez aralıkları aşağıdaki gibidir:

(i) Eğer $Z_1 = \left(0, (H-1)^{1/(i_1+j_1)}\right) \times \left((M-1)^{1/(i+j)}, \infty\right)$ ve $\left(a_{-t}, e_{-t}\right) \in Z_1$ ise $\left(a_n, e_n\right) \in Z_1$ dir.

(ii) Eğer $Z_2 = \left((H-1)^{1/(i_1+j_1)}, \infty\right) \times \left(0, (M-1)^{1/(i+j)}\right)$ ve $\left(a_{-t}, e_{-t}\right) \in Z_2$ ise $\left(a_n, e_n\right) \in Z_2$ dir.

İspat. (i) $t \in \{0, 1, 2\}$ için $\left(x_{-t}, y_{-t}\right) \in Z_1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.2) sisteminden

$$a_1 = \frac{Ma_{-1}}{1+e_0^i e_{-2}^j} < \frac{M\overline{a}_1}{1+\overline{e}_1^{i+j}} = \overline{a}_1 = (H-1)^{1/(i_1+j_1)}$$

ve

$$e_1 = \frac{He_{-1}}{1+a_0^{i_1} a_{-2}^{j_1}} > \frac{H\overline{e}_1}{1+\overline{a}_1^{i_1+j_1}} = \overline{e}_1 = (M-1)^{1/(i+j)}$$

elde edilir. İterasyon ile, her $n > 1$ için

$$\left(a_n, e_n\right) \in Z_1 = \left(0, (H-1)^{1/(i_1+j_1)}\right) \times \left((M-1)^{1/(i+j)}, \infty\right) \tag{3.4}$$

olduğunu ispat edebiliriz. (3.4) ün $n = m > 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O halde, (3.2) sisteminden,

$$a_{m+1} = \frac{Ma_{m-1}}{1+e_m^i e_{m-2}^i} < \frac{M\overline{a}_1}{1+\overline{e}_1^{i+j}} = \overline{a}_1 = (H-1)^{1/(i_1+j_1)}$$

ve

$$e_{m+1} = \frac{He_{m-1}}{1+a_m^{i_1} a_{m-2}^{j_1}} > \frac{H\overline{e}_1}{1+\overline{a}_1^{i_1+j_1}} = \overline{e}_1 = (M-1)^{1/(i+j)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $n \geq -2$ için (3.4) doğrudur. Böylelikle (i) nin ispatı tamamlanmış olur. ((ii) nin ispatı (i) nin ispatına benzerdir.)

Sonuç 3.2. Eğer $M < 1$, $H < 1$ ve $\frac{1}{i+j}, \frac{1}{i_1+j_1} \in 2\mathbb{Z}^+$ ise $t \in \{0, 1, 2\}$ ve $n \geq 1$ için (3.2) sisteminin değişmez aralıkları aşağıdaki gibidir:

(i) Eğer $Z_1 = \left(0, (H-1)^{1/(i_1+j_1)}\right) \times \left((M-1)^{1/(i+j)}, \infty\right)$ ve $(a_{-t}, e_{-t}) \in Z_1$ ise $(a_n, e_n) \in Z_1$ dir.

(ii) Eğer $Z_2 = \left((H-1)^{1/(i_1+j_1)}, \infty\right) \times \left(0, (M-1)^{1/(i+j)}\right)$ ve $(a_{-t}, e_{-t}) \in Z_2$ ise $(a_n, e_n) \in Z_2$ dir.

Teorem 3.8. Eğer $M, H \in (1, \infty)$ ise (3.2) sisteminin sınırsız çözümleri vardır.

İspat. Genelliği bozmaksızın, Teorem 3.7 den (3.2) sisteminin $\{a_n, e_n\}$ çözümünün $n \geq -2$ için

$$a_n < \overline{a}_1 = (H-1)^{1/(i_1+j_1)} \text{ ve } e_n > \overline{e}_1 = (M-1)^{1/(i+j)}$$

eşitsizliklerini sağladığını kabul edelim. Bu durumda,

$$a_{n+1} = \frac{Ma_{n-1}}{1+e_n^i e_{n-2}^j} < \frac{Ma_{n-1}}{1+(M-1)} = a_{n-1}$$

ve

$$e_{n+1} = \frac{He_{n-1}}{1 + a_n^{i_1} a_{n-2}^{j_1}} > \frac{He_{n-1}}{1 + (H-1)} = e_{n-1}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} e_n = \infty$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3. Eğer $M, H \in (0,1)$ ve $\frac{1}{i+j}, \frac{1}{i_1+j_1} \in 2\mathbb{Z}^+$ ise (3.2) sisteminin sınırsız çözümleri vardır.

4. $\omega_{n+1} = \dfrac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q}$ BULANIK FARK DENKLEMİ

Bu bölümde; A, B, C parametreleri ile başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı ve (ω_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olacak şekilde,

$$\omega_{n+1} = \frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q} \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığı ve asimptotik davranışı üzerine inceleme yapılmıştır. Bu denklem kapsamlı bir literatür taramasından sonra tanımlanmıştır.

Teorem 4.1. A, B, C parametreleri ve $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar ise (4.1) bulanık fark denkleminin bir tek pozitif (ω_n) çözümü mevcuttur.

İspat. $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları için (4.1) denklemini sağlayan bir (ω_n) bulanık sayı dizisinin mevcut olduğunu varsayalım. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[\omega_n]^\alpha = [L_n^\alpha, R_n^\alpha], \; n = -2, -1 ... \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} [A]^\alpha &= [A_l^\alpha, A_r^\alpha], \\ [B]^\alpha &= [B_l^\alpha, B_r^\alpha], \\ [C]^\alpha &= [C_l^\alpha, C_r^\alpha] \end{aligned} \tag{4.3}$$

olsun. Öyleyse, (4.1) – (4.3) ve Lemma 1.1 den

$$[\omega_{n+1}]^\alpha = \left[\frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha [\omega_{n-1}]^\alpha}{[B]^\alpha + [C]^\alpha \left[\omega_n^q\right]^\alpha \left[\omega_{n-2}^q\right]^\alpha}$$

$$= \frac{[A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha, A_r^\alpha R_{n-1}^\alpha]}{[B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_n^\alpha)^q (L_{n-2}^\alpha)^q, B_r^\alpha + C_r^\alpha (R_n^\alpha)^q (R_{n-2}^\alpha)^q]}$$

$$= \left[\frac{A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (R_n^\alpha)^q (R_{n-2}^\alpha)^q}, \frac{A_r^\alpha R_{n-1}^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_n^\alpha)^q (L_{n-2}^\alpha)^q} \right]$$

olup, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$L_{n+1}^\alpha = \frac{A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (R_n^\alpha)^q (R_{n-2}^\alpha)^q}, \quad R_{n+1}^\alpha = \frac{A_r^\alpha R_{n-1}^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_n^\alpha)^q (L_{n-2}^\alpha)^q} \tag{4.4}$$

elde edilir. $j = -2, -1, 0$ olmak üzere, (L_j^α, R_j^α) başlangıç koşulları ve $\alpha \in (0,1]$ için (4.4) sisteminin bir tek (L_n^α, R_n^α) çözümünün mevcut olduğu açıktır.

(4.4) sisteminin çözümü (L_n^α, R_n^α) olmak üzere, (L_n^α, R_n^α) nın $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları için (4.1) denkleminin (ω_n) çözümünü oluşturduğunu, yani $n = -2, -1, \ldots$ için

$$[\omega_n]^\alpha = [L_n^\alpha, R_n^\alpha] \tag{4.5}$$

olduğunu ispatlayalım.

A, B, C parametreleri ve $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$, $\alpha_1 \le \alpha_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &0 < A_l^{\alpha_1} \le A_l^{\alpha_2} \le A_r^{\alpha_2} \le A_r^{\alpha_1}, \\ &0 < B_l^{\alpha_1} \le B_l^{\alpha_2} \le B_r^{\alpha_2} \le B_r^{\alpha_1}, \\ &0 < C_l^{\alpha_1} \le C_l^{\alpha_2} \le C_r^{\alpha_2} \le C_r^{\alpha_1}, \\ &0 < L_{-2}^{\alpha_1} \le L_{-2}^{\alpha_2} \le R_{-2}^{\alpha_2} \le R_{-2}^{\alpha_1}, \\ &0 < L_{-1}^{\alpha_1} \le L_{-1}^{\alpha_2} \le R_{-1}^{\alpha_2} \le R_{-1}^{\alpha_1}, \\ &0 < L_0^{\alpha_1} \le L_0^{\alpha_2} \le R_0^{\alpha_2} \le R_0^{\alpha_1} \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < L_n^{\alpha_1} \le L_n^{\alpha_2} \le R_n^{\alpha_2} \le R_n^{\alpha_1} \tag{4.7}$$

olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. (4.6) dan $n=-2,-1,0$ için (4.7) nin doğru olduğu açıktır. Öyleyse; (4.7) nin $k\in\mathbb{N}$ ve $n\le k$ için doğru olduğunu varsayıp, $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. (4.4), (4.6) ve (4.7) den

$$L_{k+1}^{\alpha_1}=\frac{A_l^{\alpha_1}L_{k-1}^{\alpha_1}}{B_r^{\alpha_1}+C_r^{\alpha_1}(R_k^{\alpha_1})^q(R_{k-2}^{\alpha_1})^q}\le\frac{A_l^{\alpha_2}L_{k-1}^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2}+C_r^{\alpha_2}(R_k^{\alpha_2})^q(R_{k-2}^{\alpha_2})^q}=L_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$L_{k+1}^{\alpha_2}=\frac{A_l^{\alpha_2}L_{k-1}^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2}+C_r^{\alpha_2}(R_k^{\alpha_2})^q(R_{k-2}^{\alpha_2})^q}\le\frac{A_r^{\alpha_2}R_{k-1}^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2}+C_l^{\alpha_2}(L_k^{\alpha_2})^q(L_{k-2}^{\alpha_2})^q}=R_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$R_{k+1}^{\alpha_2}=\frac{A_r^{\alpha_2}R_{k-1}^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2}+C_l^{\alpha_2}(L_k^{\alpha_2})^q(L_{k-2}^{\alpha_2})^q}\le\frac{A_r^{\alpha_1}R_{k-1}^{\alpha_1}}{B_l^{\alpha_1}+C_l^{\alpha_1}(L_k^{\alpha_1})^q(L_{k-2}^{\alpha_1})^q}=R_{k+1}^{\alpha_1}$$

olduğundan $L_{k+1}^{\alpha_1}\le L_{k+1}^{\alpha_2}\le R_{k+1}^{\alpha_2}\le R_{k+1}^{\alpha_1}$ eşitsizliğine ulaşılır. Böylelikle (4.7) ifadesi elde edilir. (4.4) ten $\alpha\in(0,1]$ için

$$L_1^{\alpha}=\frac{A_l^{\alpha}L_{-1}^{\alpha}}{B_r^{\alpha}+C_r^{\alpha}(R_0^{\alpha})^q(R_{-2}^{\alpha})^q},\ R_1^{\alpha}=\frac{A_r^{\alpha}R_{-1}^{\alpha}}{B_l^{\alpha}+C_l^{\alpha}(L_0^{\alpha})^q(L_{-2}^{\alpha})^q}\tag{4.8}$$

eşitlikleri sağlanır. A, B, C değişkenleri ve $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olduğu için A_l^{α}, A_r^{α}, B_l^{α}, B_r^{α}, C_l^{α}, C_r^{α}, L_0^{α}, R_0^{α}, L_{-1}^{α}, R_{-1}^{α}, L_{-2}^{α}, R_{-2}^{α} sol süreklidir. (4.8) den $L_1^{\alpha},R_1^{\alpha}$ nın da sol sürekli olduğu açıktır. İterasyon ile kolayca $n\in\mathbb{N}$ için $L_n^{\alpha},R_n^{\alpha}$ nın sol sürekli olduğu görülür.

Şimdi $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_n^{\alpha},R_n^{\alpha}]}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için $\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_n^{\alpha},R_n^{\alpha}]$ nın sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. $n=1$ olduğunu varsayalım. A, B, C parametreleri ve $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olduğundan

$$\begin{aligned}&[A_l^{\alpha},A_r^{\alpha}]\subset[M_A,N_A],\\&[B_l^{\alpha},B_r^{\alpha}]\subset[M_B,N_B],\\&[C_l^{\alpha},C_r^{\alpha}]\subset[M_C,N_C],\\&[L_{-2}^{\alpha},R_{-2}^{\alpha}]\subset[M_{-2},N_{-2}],\\&[L_{-1}^{\alpha},R_{-1}^{\alpha}]\subset[M_{-1},N_{-1}],\\&[L_0^{\alpha},R_0^{\alpha}]\subset[M_0,N_0]\end{aligned}\tag{4.9}$$

olacak şekilde

$$M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_{-2}, N_{-2}, M_{-1}, N_{-1}, M_0, N_0 > 0$$

eşitsizliğini sağlayan sabitler vardır. (4.8) ve (4.9) dan $\alpha \in (0,1]$ için

$$[L_1^\alpha, R_1^\alpha] \subset \left[\frac{M_A M_{-1}}{N_B + N_C N_0^q N_{-2}^q}, \frac{N_A N_{-1}}{M_B + M_C M_0^q M_{-2}^q} \right] \tag{4.10}$$

İfadesine kolayca ulaşılır. Dolayısıyla, $\alpha \in (0,1]$ için

$$\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [L_1^\alpha, R_1^\alpha] \subset \left[\frac{M_A M_{-1}}{N_B + N_C N_0^q N_{-2}^q}, \frac{N_A N_{-1}}{M_B + M_C M_0^q M_{-2}^q} \right] \tag{4.11}$$

olduğu ispatlanabilir. (4.11) den $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [L_1^\alpha, R_1^\alpha]}$ kompakt ve $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [L_1^\alpha, R_1^\alpha]} \subset (0,\infty)$ olduğu açıktır. Benzer biçimde, iterasyon ile $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [L_n^\alpha, R_n^\alpha]} \text{ kompakt ve } \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [L_n^\alpha, R_n^\alpha]} \subset (0,\infty) \tag{4.12}$$

olduğu görülür. (4.7), (4.12) ve L_n^α, R_n^α sol sürekli olduğundan $[L_n^\alpha, R_n^\alpha]$ (4.5) eşitliğindeki (ω_n) pozitif bulanık sayı dizisini oluşturur.

Şimdi; $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları için (ω_n) bulanık sayı dizisinin (4.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterelim. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[\omega_{n+1}]^\alpha = [L_{n+1}^\alpha, R_{n+1}^\alpha] = \left[\frac{A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (R_n^\alpha)^q (R_{n-2}^\alpha)^q}, \frac{A_r^\alpha R_{n-1}^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_n^\alpha)^q (L_{n-2}^\alpha)^q} \right] = \left[\frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q} \right]^\alpha$$

eşitliğinden (ω_n) bulanık sayı dizisi (4.1) denkleminin tek çözümüdür. Böylelikle ispat biter.

Teorem 4.2. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ ise (4.1) bulanık fark denkleminin tüm pozitif çözümleri sıfıra yakınsar.

İspat. (4.1) denkleminin (4.2) yi sağlayan bir çözümü (ω_n) dizisi ve her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ olsun. Bu durumda, $a_{-2}, a_{-1}, a_0, e_{-2}, e_{-1}, e_0$ başlangıç koşulları $a_{-j} < e_{-j}$ eşitsizliğini sağlarsa, (4.4) sistemi üzerinde Teorem 3.6 çalışılabilir ve

$$\lim_{n\to\infty} L_n^\alpha = \lim_{n\to\infty} R_n^\alpha = 0 \tag{4.13}$$

ifadesine ulaşılır. Bu durumda, (4.13) ten

$$\lim_{n\to\infty} D(\omega_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \sup\{\max\{|L_n^\alpha - 0|, |R_n^\alpha - 0|\}\} = 0 \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle ispat biter.

Örnek 4.1. (4.1) bulanık fark denklemi için

$$A = \begin{cases} 2x-4, & 2 \le x \le 2.5, \\ 6-2x, & 2.5 \le x \le 3, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{x-5}{2}, & 5 \le x \le 7, \\ \dfrac{9-x}{2}, & 7 \le x \le 9, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 5x-4, & 0.8 \le x \le 1, \\ 6-5x, & 1 \le x \le 1.2, \end{cases}$$

$$\omega_{-2} = \begin{cases} \dfrac{10x-9}{18}, & 0.9 \le x \le 2.7, \\ \dfrac{45-10x}{18}, & 2.7 \le x \le 4.5, \end{cases}$$

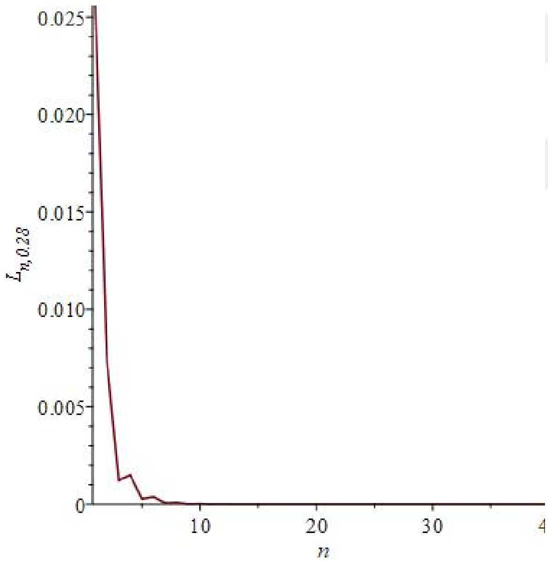
$$\omega_{-1} = \begin{cases} \dfrac{2x-11}{2}, & 5.5 \le x \le 6.5, \\ \dfrac{15-2x}{2}, & 6.5 \le x \le 7.5, \end{cases}$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{4x-6}{3}, & 1.5 \le x \le 2.25, \\ \dfrac{12-4x}{3}, & 2.25 \le x \le 3 \end{cases}$$

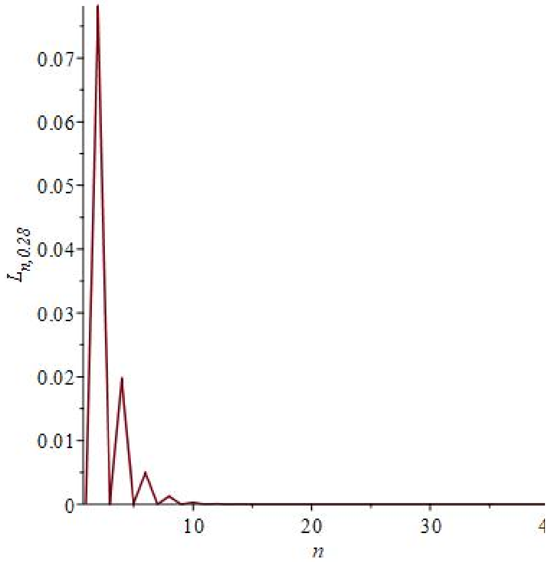
şeklinde olsun. Bu durumda,

$[A]^\alpha = \left[\dfrac{\alpha+4}{2}, \dfrac{6-\alpha}{2}\right]$ ve $[B]^\alpha = [2\alpha+5, 9-2\alpha]$ elde edilir.

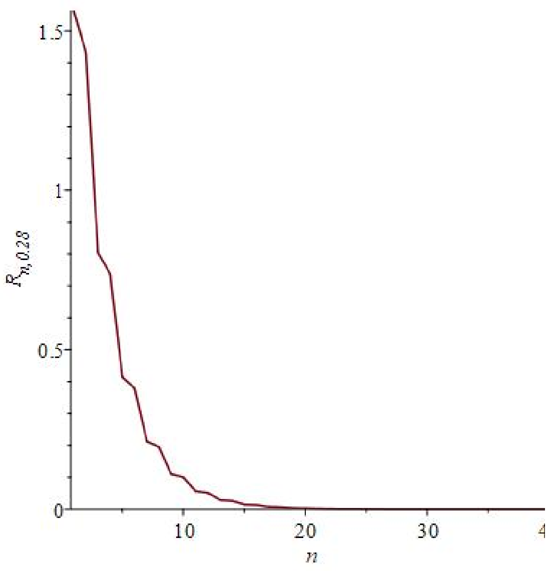
Her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ olup, Teorem 4.2'ye ait koşulun sağlandığı görülmektedir. Yani (4.1) bulanık fark denkleminin verilen parametreler için her pozitif çözümü sıfıra yakınsar.



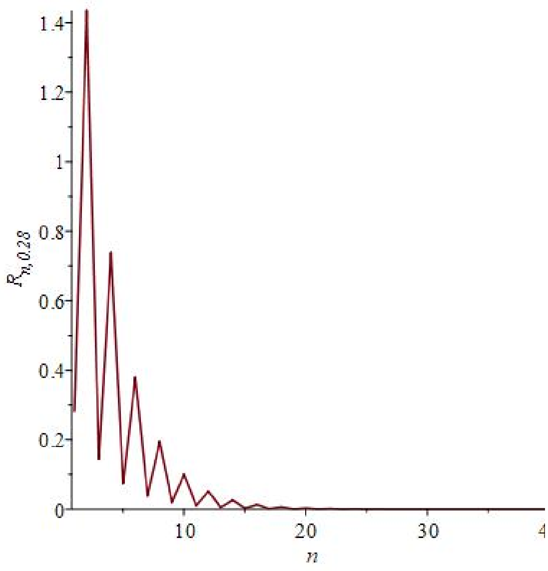
Şekil 4.1. $q = 2.5$ için $L_n^{0.28}$ değerleri



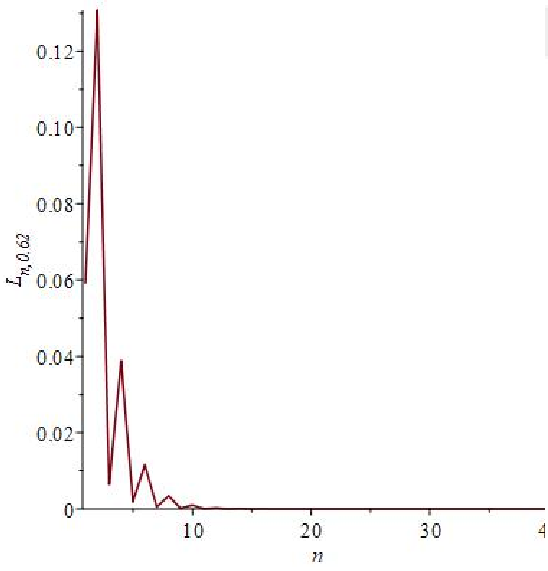
Şekil 4.2. $q = 5$ için $L_n^{0.28}$ değerleri



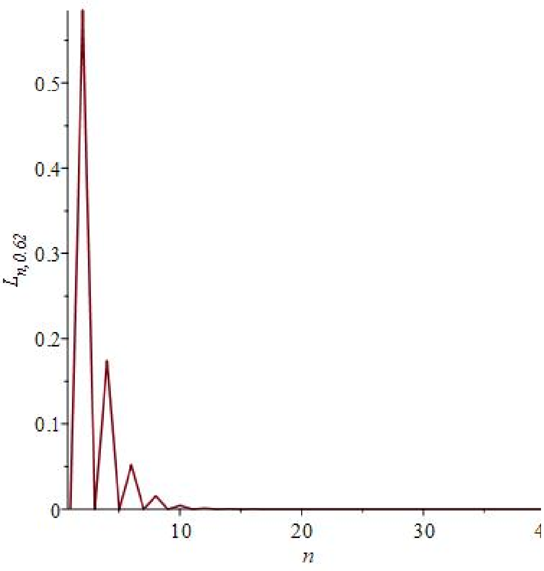
Şekil 4.3. $q = 2.5$ için $R_n^{0.28}$ değerleri



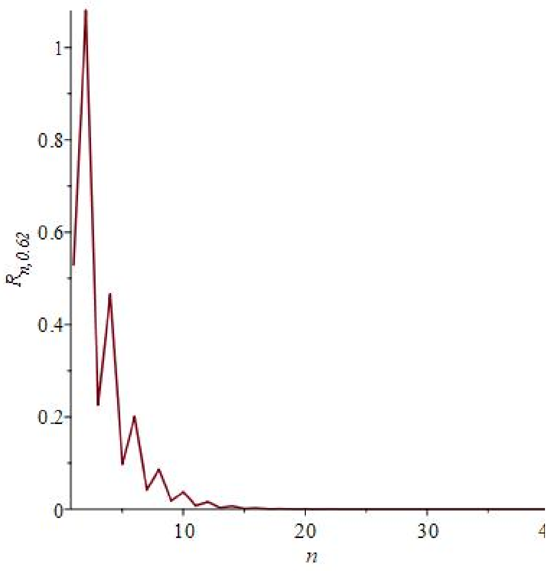
Şekil 4.4. $q = 5$ için $R_n^{0.28}$ değerleri



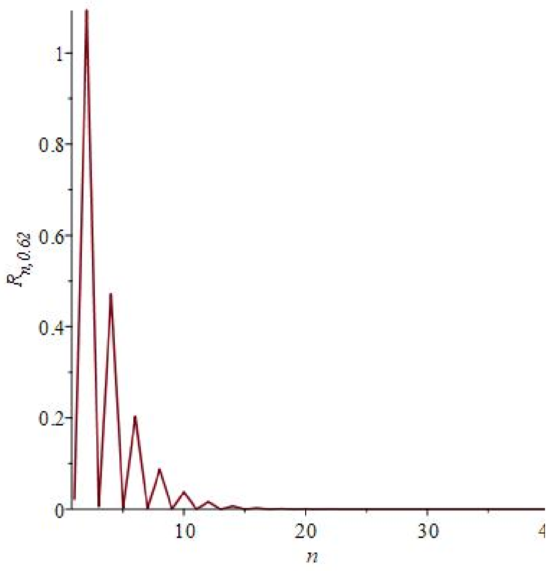
Şekil 4.5. $q = 2.5$ için $L_n^{0.62}$ değerleri



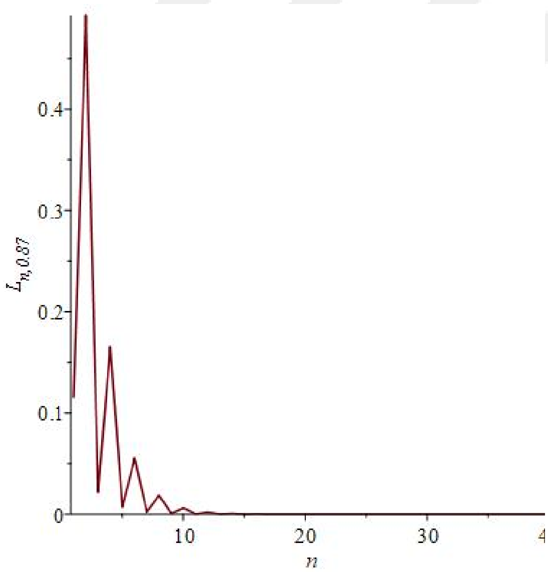
Şekil 4.6. $q = 5$ için $L_n^{0.62}$ değerleri



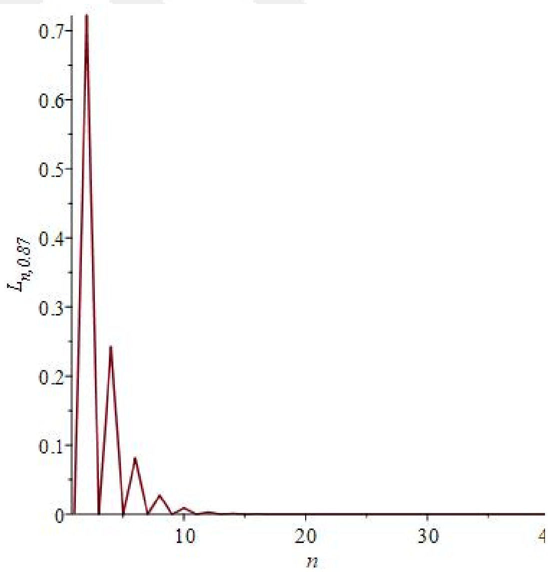
Şekil 4.7. $q = 2.5$ için $R_n^{0.62}$ değerleri



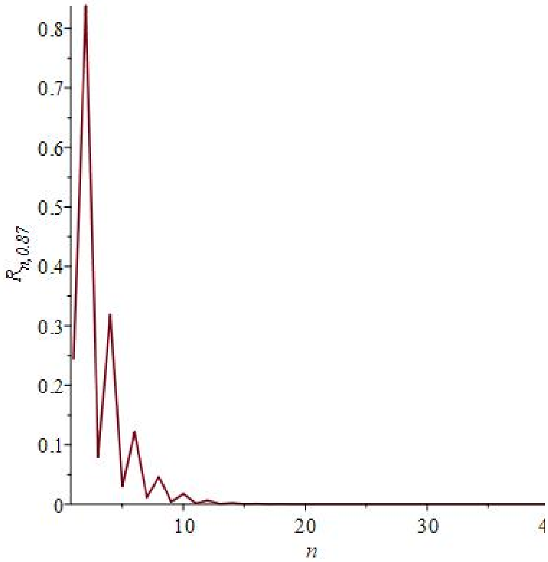
Şekil 4.8. $q = 5$ için $R_n^{0.62}$ değerleri



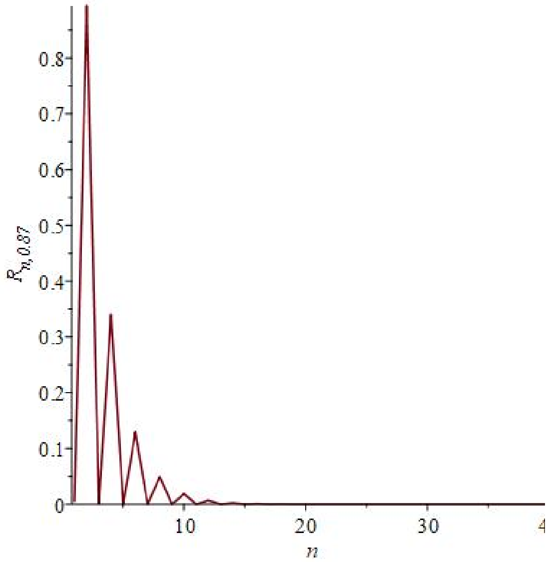
Şekil 4.9. $q = 2.5$ için $L_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.10. $q = 5$ için $L_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.11. $q = 2.5$ için $R_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.12. $q = 5$ için $R_n^{0.87}$ değerleri

Teorem 4.3 $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ var ise (4.1) bulanık fark denkleminin sınırsız çözümleri vardır.

İspat. $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ nin mevcut olduğunu varsayalım. $n = -2, -1...$ için $M = \dfrac{A_l^{\bar{\alpha}}}{B_r^{\bar{\alpha}}}$, $H = \dfrac{A_r^{\bar{\alpha}}}{B_l^{\bar{\alpha}}}$, $a_n = L_n^{\bar{\alpha}}, e_n = R_n^{\bar{\alpha}}$ eşitlikleri sağlanıyor ise (4.4) sistemi üzerinde Teorem 3.8 çalışılabilir. $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olmak üzere $\bar{\alpha} \in (0,1]$ varsa $\bar{\alpha} = \alpha$ için (4.4) sisteminin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} e_n = \infty \tag{4.15}$$

olacak şekilde (a_n, e_n) çözümü mevcuttur. Ayrıca $a_{-2}, a_{-1}, a_0, e_{-2}, e_{-1}, e_0$ başlangıç koşulları $a_{-j} < e_{-j}$ eşitsizliğini sağlarsa, $j = -2, -1, 0$ için

$$\begin{aligned} [\omega_j]^\alpha &= [L_j^\alpha, R_j^\alpha],\ \alpha \in (0,1] \\ [\omega_j]^{\bar{\alpha}} &= [L_j^{\bar{\alpha}}, R_j^{\bar{\alpha}}] = [a_j, e_j] \end{aligned} \tag{4.16}$$

olmak üzere ω_j pozitif bulanık sayıları elde edilebilir. $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ başlangıç koşulları ve $\alpha \in (0,1]$ için $[\omega_n]^\alpha = [L_n^\alpha, R_n^\alpha]$ olacak şekilde, (ω_n) in (4.1) denkleminin çözümü olduğunu varsayalım. (4.16) sağlanıyorsa ve (4.4) sisteminin çözümü (L_n^α, R_n^α) ise

$$[\omega_n]^{\bar{\alpha}} = [L_n^{\bar{\alpha}}, R_n^{\bar{\alpha}}] = [x_n, y_n] \tag{4.17}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece; (4.15), (4.17) den ve

$$\|\omega_n\| = \sup \max\{|L_n^\alpha|, |R_n^\alpha|\} \geq \max\{|L_n^{\bar{\alpha}}|, |R_n^{\bar{\alpha}}|\} = R_n^{\bar{\alpha}} \tag{4.18}$$

olduğundan her $\alpha \in (0,1]$ için (ω_n) in sınırsız olduğu elde edilir. Böylelikle ispat biter.

Örnek 4.2. (4.1) bulanık fark denklemi için

$$A = \begin{cases} \dfrac{x-7}{4}, & 7 \leq x \leq 11, \\ \dfrac{15-x}{4}, & 11 \leq x \leq 15, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{5x-12}{3}, & 2.4 \leq x \leq 3, \\ \dfrac{18-5x}{3}, & 3 \leq x \leq 3.6, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 5x-4, & 0.8 \leq x \leq 1, \\ 6-5x, & 1 \leq x \leq 1.2, \end{cases}$$

$$\omega_{-2} = \begin{cases} \dfrac{10x-9}{18}, & 0.9 \leq x \leq 2.7, \\ \dfrac{45-10x}{18}, & 2.7 \leq x \leq 4.5, \end{cases}$$

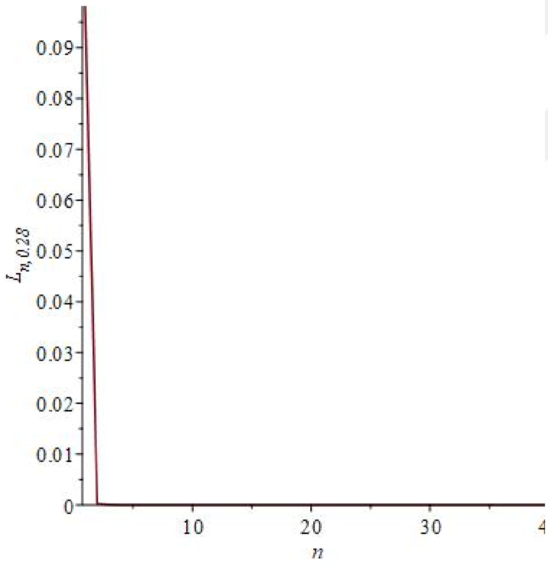
$$\omega_{-1} = \begin{cases} \dfrac{2x-11}{2}, & 5.5 \leq x \leq 6.5, \\ \dfrac{15-2x}{2}, & 6.5 \leq x \leq 7.5, \end{cases}$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{4x-6}{3}, & 1.5 \le x \le 2.25, \\ \dfrac{12-4x}{3}, & 2.25 \le x \le 3 \end{cases}$$

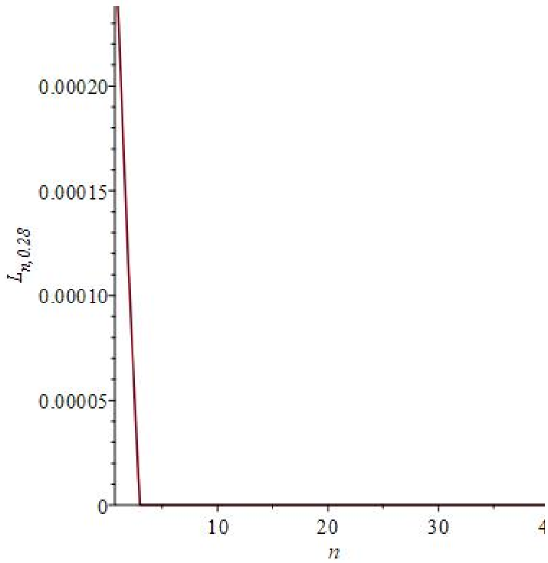
şeklinde olsun. Bu durumda,

$[A]^{\alpha} = \left[4\alpha+7, 15-4\alpha\right]$ ve $[B]^{\alpha} = \left[\dfrac{3\alpha+12}{5}, \dfrac{18-3\alpha}{5}\right]$ elde edilir.

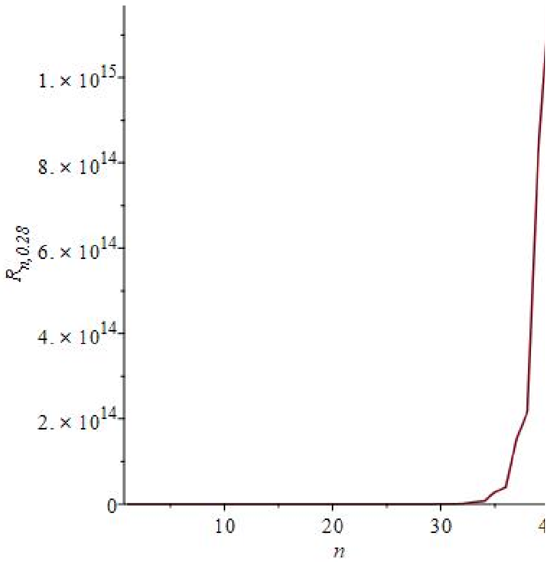
Her $\alpha \in (0,1]$ için $B_r^{\alpha} < A_l^{\alpha}$ olup, Teorem 4.3'e ait koşulun sağlandığı görülmektedir. Yani (4.1) bulanık fark denklemi verilen parametreler için sınırsız çözümlere sahiptir.



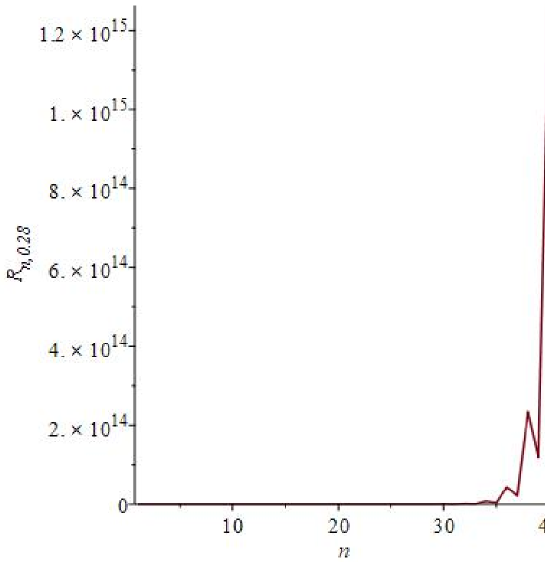
Şekil 4.13. $q = 2.5$ için $L_n^{0.28}$ değerleri



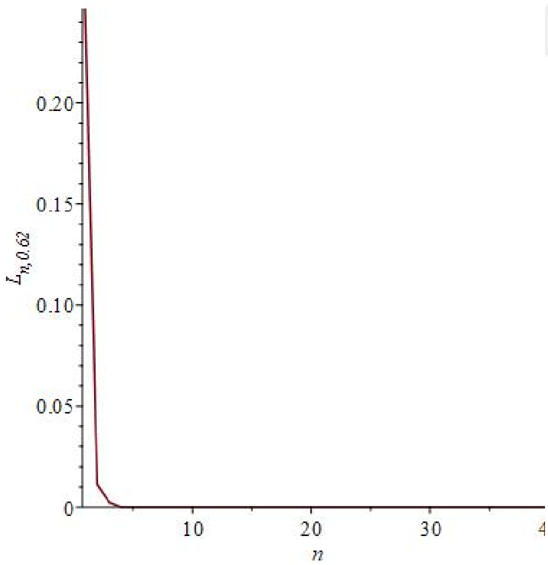
Şekil 4.14. $q = 5$ için $L_n^{0.28}$ değerleri



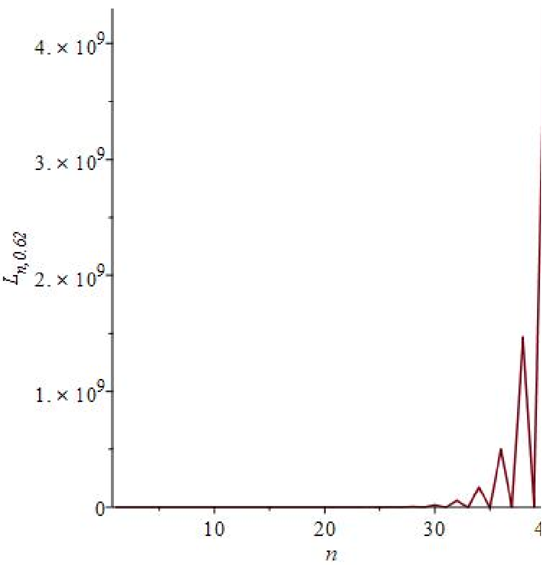
Şekil 4.15. $q = 2.5$ için $R_n^{0.28}$ değerleri



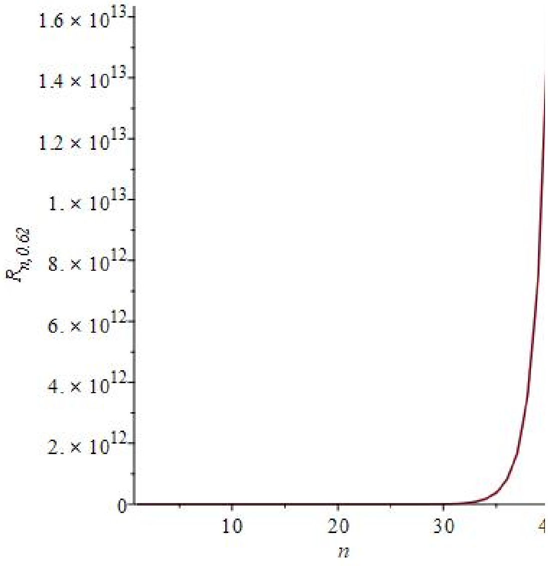
Şekil 4.16. $q = 5$ için $R_n^{0.28}$ değerleri



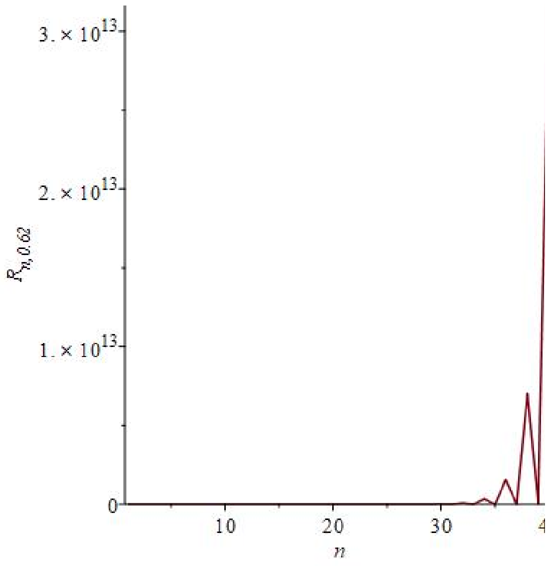
Şekil 4.17. $q = 2.5$ için $L_n^{0.62}$ değerleri



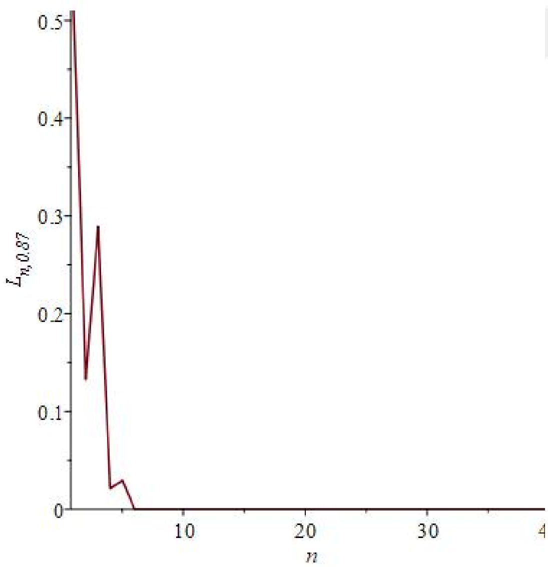
Şekil 4.18. $q = 5$ için $L_n^{0.62}$ değerleri



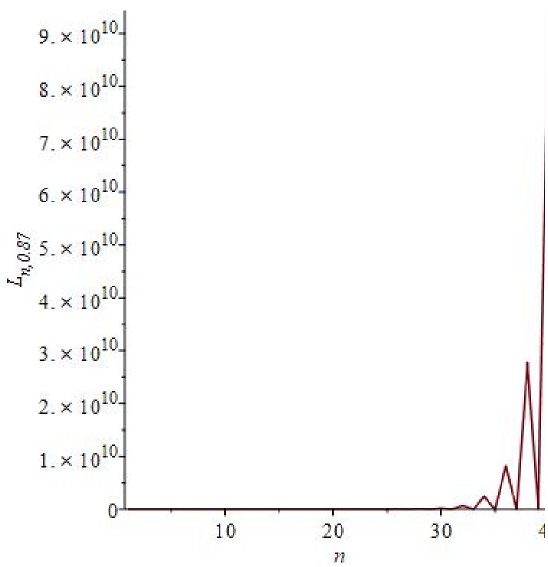
Şekil 4.19. $q = 2.5$ için $R_n^{0.62}$ değerleri



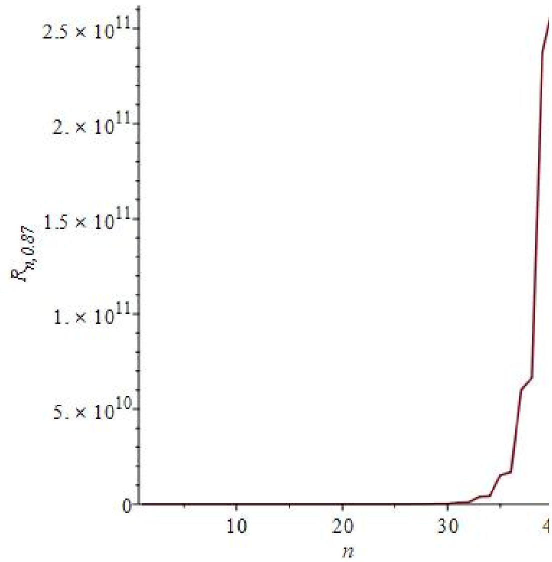
Şekil 4.20. $q = 5$ için $R_n^{0.62}$ değerleri



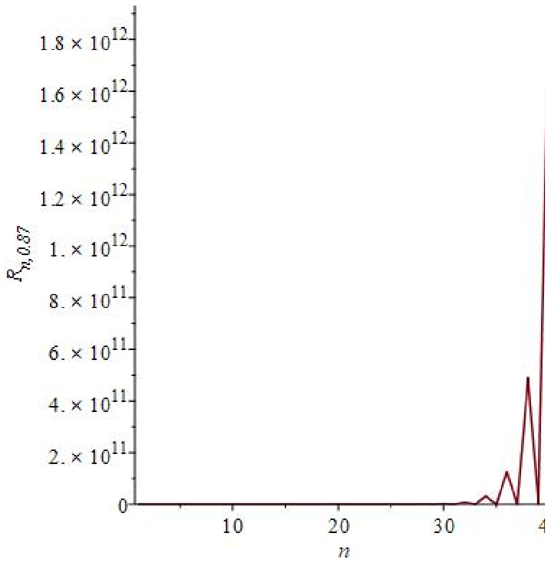
Şekil 4.21. $q = 2.5$ için $L_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.22. $q = 5$ için $L_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.23. $q = 2.5$ için $R_n^{0.87}$ değerleri



Şekil 4.24. $q = 5$ için $R_n^{0.87}$ değerleri

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez, fark denklemleri ile ilgili literatürdeki günümüze kadar yapılan birçok çalışmanın incelenmesi ile oluşturuldu. Edinilen bilgiler ışığında A, B, C değişkenleri ile başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı ve (ω_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olacak şekilde,

$$\omega_{n+1} = \frac{A\omega_{n-1}}{B + C\omega_n^q \omega_{n-2}^q} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denklemi oluşturuldu. Oluşturulan bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, ve asimptotik davranışı incelendi.

Üzerinde çalışılan bu denklemin basamağı artırılarak veya farklı parametreler, başlangıç koşulları ve terimler eklenerek ya da çıkarılarak yeni denklemler tanımlanabilir. Benzer şekilde denklemin çözümlerinin varlığı ve asimptotik davranışları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bede, B., 2013, Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic, *Springer*, New York.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Çolak, S. A., 2022, Birinci mertebeden bulanık fark denklemleri üzerine bir çalışma, Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya

Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric spaces of fuzzy sets, World Scientific, Singapore.

Elabbasy, E. M. and Eleissawy, S. M., 2013, Asymptotic behavior of two dimensional rational system of difference equations, *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, 20, 221-235.

Gumus, M. and Ocalan, O., 2018, The qualitative analysis of a rational system of difference equations, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, *9*(2), 113-126.

Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$, *Advances in Difference Equations,* 673, 10 pages.

Jia, L., Wang, C., Zhao, X. and Wei, W., 2022, Dynamic behavior of a fractional-type fuzzy difference system, *Symmetry*, 14, 1337, 21 pages.

Jia, L., Zhao, X., Wang, C. and Wang, Q., 2023, Dynamic behavior of a seven-order fuzzy difference equation, *Journal of Applied Analysis & Computation*, *13*(1), 486-501.

Khaliq, A., Adnan, M. and Khan, A. Q., 2021, Global dynamics of sixth-order fuzzy difference equation, *Mathematical Problems in Engineering*, *2021*, 1-16.

Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.

Khastan, A. and Alijani, Z., 2018, On the new solutions to the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Fuzzy Sets and Systems*, *358*, 64-83.

Klir, G. and Yuan, B., 1995, Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications, Prentice Hall, New Jersey.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Lavanya, A. P. and Lovenia, J. D. L., 2018, Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations, *Tamsui Oxford Journal of Informational and Mathematical Sciences,* 32(2), 27-37.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Soft Computing*, 6, 456-461.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$, *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.

Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer fark denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.

Su, G., Sun, T. and Qin, B., 2019, Global behavior of a higher order fuzzy difference equation, *Mathematics*, *7*(10), 938.

Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1/z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.

Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.

Sun, T., Su, G., Han, C., Zeng, F. and Qin, B., 2022, Eventual periodicity of a system of max-type fuzzy difference equations of higher order, *Fuzzy Sets and Systems*, *443*, 286-303.

Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.

Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications,* 7(2), 13-18.

Wang, C. and Li, J., 2020, Periodic solution for a max-type fuzzy difference equation, *Hindawi Journal of Mathematics*, 3094391, 12 pages.

Wang, C., Li, J. and Jia, L., 2021, Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equations, *Journal of Applied Analysis and Computation,* 11(1), 404-421.

Yalçınkaya, İ., Atak, N. and Tollu, D. T., 2021, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 17(1), 59-69.

Yalçınkaya, İ., Çalışkan, V. and Tollu, D. T., 2022, On a nonlinear fuzzy difference equation, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics,* 71(1), 68-78.

Yalcinkaya, I., El-Metwally, H., Tollu, D. T. and Ahmad, H., 2023, Behavior of solutions to the fuzzy difference equation $z_{n+1} = A + B / z_{n-m}$, *Mathematical Notes*, in press.

Yalçınkaya, İ., Tollu, D. T., Khastan, A., Ahmad, H. and Botmart, T., 2023, Qualitative behavior of a higher-order fuzzy difference equation, *AIMS Mathematics*, *8*(3), 6309-6322.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.