T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

Hatice KILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Hatice KILINÇ tarafından hazırlanan "ÜÇ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI " adlı tez çalışması 12/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

Danışman
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Üye
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN
FBE Müdürü

.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Hatice KILINÇ
12.01.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

Hatice KILINÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2018, 32 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Tribonacci sayıları ve polinomlarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde Tribonacci sayıları ve polinomları ile ilgili yapılan bazı çalışmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Tribonacci polinomlarının bir genelleştirmesi olan üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları incelenmiştir. Beşinci bölümde ise bu çalışma ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Binet formülü, Tribonacci sayıları, Tribonacci polinomu, Üreteç fonksiyonu.

ABSTRACT

MS THESIS

TRIVARIATE FIBONACCI AND LUCAS POLYNOMIALS

Hatice KILINC

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
FACULTY OF SCIENCE DEPARTMENT OF MATHEMATICS SCIENCES

Advisor: Prof. Dr. Emine Gokcen KOCER

2018, 32 Pages

Jury
Prof. Dr. Emine Gokcen KOCER
Assoc. Prof. Dr. Mirac CETIN FIRENGIZ
Assist. Prof. Dr. NİHAT AKGUNES

This study consist of five sections. In the first section, definitions and some properties of Tribonacci numbers and polynomials were given.

In the second section, some studies related to Tribonacci numbers and polynomials were given. In the third section, trivariate Fibonacci and Lucas polynomials were defined and investigated some properties.

In the fourth section, incomplete trivariate Fibonacci and Lucas polynomials were investigated. In the fifth section, some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Binet's Formula, Tribonacci numbers, Tribonacci polynomial, Generating function.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim üyesi, Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ‘ ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma süresince bilimsel bilgi, düşünce ve önerileriyle bana destek olan değerli hocam Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER ‘ e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma süresince desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Hatice KILINÇ
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fibonacci dizisi ve bu dizinin çeşitli genelleştirmeleri araştırmacılar için hep ilgi odağı olmuştur. Bunun nedenlerinden biri Fibonacci dizisinin aslında doğada var olduğu ve doğada var olan bu matematiğin sanata ve mimariye nasıl yansıdığını göstermesidir. Ayrıca bu sayı dizisinin ve onun çeşitli genelleştirmelerinin sayılar teorisi ve kombinatoriyel teoride yer bulması bu sayıların her zaman bir çalışma alanı olmasını sağlamıştır. Bu nedenle günümüzde de pek çok çalışmada Fibonacci sayıları ve onun çeşitli genelleştirmeleri yer almıştır.

Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi olarak kabul edilen Tribonacci sayıları 1963 yılında henüz on dört yaşında iken M. Feinberg tarafından $n \geq 3$ için

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \tag{1.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$T_0 = 0,\ T_1 = T_2 = 1$$

başlangıç koşulları ile tanımlanmıştır. $\{T_n\}$ Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n t^n = \frac{t}{1 - t - t^2 - t^3}$$

olarak verilmiştir.

Daha sonra 1973 yılında Hoggat ve Bicknell, genelleştirilmiş Fibonacci polinomları olarak adlandırdıkları Tribonacci polinomlarını tanımlamıştır.

Tribonacci polinomları $n \geq 3$ için

$$t_n(x) = x^2 t_{n-1}(x) + x t_{n-2}(x) + t_{n-3}(x) \tag{1.2}$$

rekürans bağıntısı ve

$$t_0(x) = 0,\ t_1(x) = 1 \text{ ve } t_2(x) = x^2$$

başlangıç koşulları ile tanımlanır. Tribonacci polinomlarında $x = 1$ alınırsa (1.1) rekürans bağıntısı ile tanımlanan Tribonacci sayılarının elde edileceği açıkça görülür.

$\{T_n(x)\}$ Tribonacci polinomları dizisinin üreteç fonksiyonu

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = \frac{t}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3}$$

olarak verilmiştir (Koshy, 2001).

Tribonacci-Lucas sayıları $n \geq 3$ için

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} \tag{1.3}$$

rekürans bağıntısı ve

$$K_0 = 3,\ K_1 = 1, K_2 = 3$$

başlangıç koşulları ile verilmiştir. Benzer şekilde $n \geq 3$ için Tribonacci-Lucas polinomları

$$K_n(x) = x^2 K_{n-1}(x) + xK_{n-2}(x) + K_{n-3}(x) \tag{1.4}$$

rekürans bağıntısı ve

$$K_0(x) = 3,\ K_1(x) = x^2, K_2(x) = x^4 + 2x$$

başlangıç koşulları ile tanımlanmıştır (Yılmaz ve Taşkara, 2015).

Sonraki yıllarda Fibonacci sayıları ve Fibonacci polinomlarının genelleştirmesi olarak göz önüne alınan Tribonacci sayıları ve Tribonacci polinomları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Çalışmamızın ikinci bölümünde, yapılan bu çalışmaların bazıları hakkında bir literatür taraması verilmiştir.

Yapılan tüm bu çalışmalar incelendiğinde bu alanın hala yeni çalışmalara açık olduğu dikkat çekmektedir. Bu bilgiler ışığında yapılan bu çalışmaların devamı olarak üçüncü bölümde Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomlarının genelleştirmesi olan üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Ramirez ve Sirvent 2014 yılında yaptıkları çalışmada Tribonacci sayıları ve polinomlarını kullanarak tamamlanmamış Tribonacci sayıları ve polinomlarını incelemişlerdir. Ayrıca Yılmaz ve Taşkara tamamlanmamış Tribonacci-Lucas sayılarını ve polinomlarını tanımlamışlardır. Bu polinomların en genel halini ise çalışmamızın dördüncü bölümünde tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları adı altında inceledik.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde Tribonacci, Tribonacci-Lucas sayıları ve Tribonacci, Tribonacci-Lucas polinomları ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir.

Hoggat ve Bicknell (1973), Tribonacci, quadranacci ve $r-$bonacci polinomlarının tanımlarını vermiş ve bu polinomları üreten matrisler elde etmişlerdir. Ayrıca bu üreteç matrisleri kullanarak bu polinomların determinant özelliklerini incelemişlerdir.

McCarty (1981), analitik metotlar kullanarak Tribonacci sayıları için bazı formüller elde etmiştir.

Spickerman (1982), Tribonacci sayıları için Binet formülünü ve üreteç fonksiyonunu elde etmiştir.

Pethe (1986), Tribonacci sayıları için bazı özdeşlikler elde etmiş ve kompleks Tribonacci sayılarını tanımlamıştır.

Lin (1988), Tribonacci sayıları için De-Moivre tipi özdeşlikler elde etmiştir.

Filipponi (1996), tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca üreteç fonksiyonlarını ve bazı özelliklerini incelemiştir.

Alladi ve Hoggat (1997), Tribonacci üçgenini tanımlamış ve Tribonacci sayılarını bu üçgenden faydalanarak elde etmiştir.

Tan ve Zhang (2005), iki değişkenli Fibonacci polinomlarının bazı özelliklerini vermiştir. Ayrıca üç değişkenli Fibonacci polinomlarını tanımlamışlardır.

Feng (2011), Tribonacci sayıları ve toplamları üzerinden farklı rekürans bağıntıları vermiştir. Bu rekürans bağıntılarını ve üreteç matrislerini kullanarak bazı özdeşlikler elde etmiştir.

Taşcı, Firengiz ve Tuğlu (2012), tamamlanmamış iki değişkenli Fibonacci ve Lucas $p-$polinomlarını tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir.

Kuhapatanakul ve Sukruan (2014), Tribonacci sayılarının bir genelleştirmesini yaparak bu yeni sayılar için kapalı formül elde etmişlerdir.

Ramirez ve Sirvent (2014), Tamamlanmamış Tribonacci sayılarını ve tamamlanmamış Tribonacci polinomlarını tanımlamış ve tamamlanmamış Tribonacci sayıları için üreteç fonksiyonu elde etmişlerdir. Ancak tamamlanmamış Tribonacci polinomları için üreteç fonksiyonu elde edilmesinin açık bir soru olduğunu belirtmişlerdir.

Yılmaz ve Taşkara (2015), Tamamlanmamış Tribonacci-Lucas sayıları ve Tribonacci-Lucas polinomlarını tanımlamış ve üreteç fonksiyonlarını araştırmıştır.

Koçer ve Gedikçe (2016), Üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarını tanımlamıştır. Ayrıca bu polinomların sağladığı bazı özdeşlikleri elde etmiştir.

3. ÜÇ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomlarının bir genelleştirmesi olan üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanarak bu polinomların özellikleri incelenmiştir.

3.1. Üç Değişkenli Fibonacci Polinomları

Bu kısımda üç değişkenli Fibonacci polinomları tanımlanıp çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 3.1.1. $n \geq 3$ için

$$H_n(x,y,z) = xH_{n-1}(x,y,z) + yH_{n-2}(x,y,z) + zH_{n-3}(x,y,z) \tag{3.1.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$H_0(x,y,z) = 0, H_1(x,y,z) = 1, H_2(x,y,z) = x$$

başlangıç değerleri ile tanımlanan $H_n(x,y,z)$ polinomuna $n-$inci üç değişkenli Fibonacci polinomu denir.

Tanım 3.1.1 de $x = y = z = 1$ alırsak (1.1) rekürans bağıntısı ile tanımlanan Tribonacci sayılarını elde ederiz ($H_n(1,1,1) = T_n$). Benzer şekilde Tanım 3.1.1 de x yerine x^2, y yerine x ve $z = 1$ alırsak (1.2) rekürans bağıntısı ile tanımlı Tribonacci polinomlarını ($H_n(x^2, x, 1) = t_n(x)$) elde ederiz.

(3.1.1) ile verilen rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - x\lambda^2 - y\lambda - z = 0 \tag{3.1.2}$$

dir. Burada α, β, γ (3.1.2) denkleminin kökleri olmak üzere (3.1.1) rekürans bağıntısını sağlayan $H_n(x,y,z)$ için Binet formülü

$$H_n(x,y,z) = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \tag{3.1.3}$$

şeklindedir.

(3.1.2) karakteristik denkleminde $x = y = z = 1$ alırsak (3.1.3) ile verilen Binet formülü Tribonacci sayıları için Binet formülüne dönüşecektir. (3.1.2) karakteristik denkleminde x yerine x^2, y yerine x ve $z = 1$ alırsak (3.1.3) ile verilen Binet formülünden Tribonacci polinomları için Binet formülü elde edilir.

Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının ilk birkaç değerini aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n	$H_n(x,y,z)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+y
4	$x^3+2xy+z$
5	$x^4+3x^2y+2xz+y^2$
6	$x^5+4x^3y+3xy^2+3x^2z+2yz$
$\vdots$	$\vdots$

Tablo 3.1.1

Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonunu aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $H_n(x,y,z)$ $n-$inci üç değişkenli Fibonacci polinomu olsun. $\{H_n(x,y,z)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x,y,z)t^n=\frac{t}{1-xt-yt^2-zt^3} \tag{3.1.4}$$

dir.

İspat. Bir dizinin üreteç fonksiyonunun tanımından

$$h(t)=H_0(x,y,z)+H_1(x,y,z)t+H_2(x,y,z)t^2+\cdots$$

dir. Buradan

$$xth(t)=xH_0(x,y,z)t+xH_1(x,y,z)t^2+xH_2(x,y,z)t^3+\cdots$$

$$yt^2h(t)=yH_0(x,y,z)t^2+yH_1(x,y,z)t^3+yH_2(x,y,z)t^4+\cdots$$

$$zt^3h(t)=zH_0(x,y,z)t^3+zH_1(x,y,z)t^4+zH_2(x,y,z)t^5+\cdots$$

ifadelerini göz önüne alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$h(t)\left(1-xt-yt^2-zt^3\right)=H_0(x,y,z)+t\left(H_1(x,y,z)-xH_0(x,y,z)\right)$$
$$+t^2\left(H_2(x,y,z)-xH_1(x,y,z)-yH_0(x,y,z)\right)$$
$$+t^3\left(H_3(x,y,z)-xH_2(x,y,z)-yH_1(x,y,z)-zH_0(x,y,z)\right)+\cdots$$

olur. Tanım 3.1.1 de verilen başlangıç değerlerini kullanırsak

$$h(t)\left(1-xt-yt^2-zt^3\right)=t$$

dir. Dolayısıyla

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x,y,z)t^n=\frac{t}{1-xt-yt^2-zt^3}$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1.1 in özel durumlarını inceleyelim. (3.1.4) ifadesinde $x=y=z=1$ alınırsa Tribonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(1,1,1)t^n=\frac{t}{1-t-t^2-t^3}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.1.4) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alınırsa Tribonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(x^2,x,1\right)t^n=\frac{t}{1-x^2t-xt^2-t^3}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.2. $H_n(x,y,z)$ $n-$inci üç değişkenli Fibonacci polinomu ve $x+y+z\neq 1$ olmak üzere

$$\sum_{s=0}^{n}H_s(x,y,z)=\frac{H_{n+2}(x,y,z)+(1-x)H_{n+1}(x,y,z)+zH_n(x,y,z)-1}{x+y+z-1} \tag{3.1.5}$$

dir.

İspat. $H_n(x,y,z)$ $n-$inci üç değişkenli Fibonacci polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\sum_{s=0}^{n}H_s(x,y,z)=\sum_{s=0}^{n}\left(\frac{\alpha^{s+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^{s+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^{s+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)$$
$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\sum_{s=0}^{n}\alpha^{s+1}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\sum_{s=0}^{n}\beta^{s+1}$$
$$+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\sum_{s=0}^{n}\gamma^{s+1}$$

$$=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right)+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\left(\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\right)$$
$$+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\left(\frac{\gamma^{n+1}-1}{\gamma-1}\right)$$

olur. (3.1.2) denkleminden

$$\alpha\beta\gamma=z\,,\ \alpha+\beta+\gamma=x\,,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-y$$

olup bu bağıntılar ve (3.1.1) rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{s=0}^{n}H_s(x,y,z)=\frac{H_{n+2}(x,y,z)+(1-x)H_{n+1}(x,y,z)+zH_n(x,y,z)-1}{x+y+z-1}$$

elde edilir.

(3.1.5) ifadesinde $x=y=z=1$ alınırsa Tribonacci sayılarının ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{s=0}^{n}T_s=\frac{T_{n+2}+T_n-1}{2}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.1.5) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alınırsa Tribonacci polinomlarının ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{s=0}^{n}T_s(x)=\frac{T_{n+2}(x)+(1-x^2)T_{n+1}(x)+T_n(x)-1}{x^2+x}$$

şeklinde bulunur.

Alladi ve Hoggat tarafından Tribonacci üçgeni tanımlanmıştır (Alladi ve Hoggat, 1997). Daha sonra Ramirez ve Sirvent Tribonacci polinomları üçgenini incelemiştir (Ramirez ve Sirvent, 2014). Benzer olarak üç değişkenli Fibonacci polinomları üçgenini aşağıdaki gibi verebiliriz.

n/i	0	1	2	3	4
0	1				
1	x	y			
2	x^2	$2xy+z$	y^2		
3	x^3	$3x^2y+2xz$	$3xy^2+2yz$	y^3	
4	x^4	$4x^3y+3x^2z$	$6x^2y^2+6xyz+z^2$	$4xy^3+3y^2z$	y^4

Tablo 3.1.2

Teorem 3.1.3. $H_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci polinomu olsun. Bu taktirde

$$H_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}x^{n-2i-j-1}y^{i-j}z^{j} \tag{3.1.6}$$

dir.

İspat. Tablo 3.1.2 de verilen üç değişkenli Fibonacci polinomları üçgeninin $n-$ inci satır ve $j-$ inci sütun elemanını $G(n,i,x,y,z)$ ile gösterirsek

$$G(n,i,x,y,z)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-j}{i}x^{n-i-j}y^{i-j}z^{j} \tag{3.1.7}$$

dir. Buradan

$$G(n+1,i,x,y,z)=xG(n,i,x,y,z)+yG(n,i-1,x,y,z)+zG(n-1,i-1,x,y,z)$$

olur. Ayrıca $G(n,0,x,y,z)=x^n$ ve $G(n,n,x,y,z)=y^n$ olduğu açıktır. Üç değişkenli Fibonacci polinomları üçgeninde köşegen üzerindeki elemanların toplamı üç değişkenli Fibonacci polinomlarını verir. Dolayısıyla

$$H_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}G(n-i-1,i,x,y,z)$$

olup (3.1.7) ifadesinden

$$H_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}x^{n-2i-j-1}y^{i-j}z^{j}$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1.3 ün özel durumlarını inceleyelim. (3.1.6) ifadesinde $x=y=z=1$ alınırsa Tribonacci sayıları için kapalı formül

$$T_n=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.1.6) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alınırsa Tribonacci polinomlarının kapalı formülü

$$T_n(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}x^{2n-3(i+j)-2}$$

dir.

Teorem 3.1.4. $H_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci polinomu olmak üzere

$$\begin{vmatrix} H_{n+2}(x,y,z) & H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) \\ H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) & H_{n-1}(x,y,z) \\ H_n(x,y,z) & H_{n-1}(x,y,z) & H_{n-2}(x,y,z) \end{vmatrix} = -z^{n-1} \tag{3.1.8}$$

dir.

İspat. Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının matris gösterimi

$$Q = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.9}$$

dir. Yazım kolaylığı olması için $H_n(x,y,z) = H_n$ alırsak

$$Q^n = \begin{pmatrix} H_{n+1} & H_n & H_{n-1} \\ yH_n + zH_{n-1} & yH_{n-1} + zH_{n-2} & yH_{n-2} + zH_{n-3} \\ zH_n & zH_{n-1} & zH_{n-2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $\det(Q) = z$ ve $\det(Q^n) = z^n$ dir. Q ve Q^n matrislerinin determinantları kullanılarak

$$\begin{vmatrix} H_{n+1} & H_n & H_{n-1} \\ yH_n + zH_{n-1} & yH_{n-1} + zH_{n-2} & yH_{n-2} + zH_{n-3} \\ zH_n & zH_{n-1} & zH_{n-2} \end{vmatrix} = z^n \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (3.1.10) da matrisin ilk satırını x ile çarpıp ikinci satıra eklersek ve daha sonra ilk iki satırın yerlerini değiştirirsek

$$\begin{vmatrix} H_{n+2}(x,y,z) & H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) \\ H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) & H_{n-1}(x,y,z) \\ zH_n(x,y,z) & zH_{n-1}(x,y,z) & zH_{n-2}(x,y,z) \end{vmatrix} = -z^n$$

olur. Determinantın özellikleri kullanılırsa

$$\begin{vmatrix} H_{n+2}(x,y,z) & H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) \\ H_{n+1}(x,y,z) & H_n(x,y,z) & H_{n-1}(x,y,z) \\ H_n(x,y,z) & H_{n-1}(x,y,z) & H_{n-2}(x,y,z) \end{vmatrix} = -z^{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5. $H_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci polinomu, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} H_{m+n}(x,y,z) &= H_{m+1}(x,y,z)H_n(x,y,z)+H_m(x,y,z)H_{n+1}(x,y,z) \\ &\quad +zH_{m-1}(x,y,z)H_{n-1}(x,y,z)-xH_m(x,y,z)H_n(x,y,z) \end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.1.9) ile verilen Q matrisi ve $Q^{n+m}=Q^nQ^m$ eşitliği kullanılırsa sonuç açıktır.

Teorem 3.1.5 de m ve n pozitif tam sayılarını özel olarak seçersek aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.1.1. $H_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci polinomu ve n pozitif tam sayı olmak üzere

$$H_{2n}(x,y,z)=zH_{n-1}^2(x,y,z)-xH_n^2(x,y,z)+2H_{n+1}(x,y,z)H_n(x,y,z)$$

dir.

Sonuç 3.1.2. $H_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci polinomu ve n pozitif tam sayı olmak üzere

$$H_{2n+1}(x,y,z)=H_{n+1}^2(x,y,z)+yH_n^2(x,y,z)+2zH_n(x,y,z)H_{n-1}(x,y,z)$$

dir.

3.2. Üç Değişkenli Lucas Polinomları

Tanım 3.2.1. $n \geq 3$ için

$$K_n(x,y,z) = xK_{n-1}(x,y,z) + yK_{n-2}(x,y,z) + zK_{n-3}(x,y,z) \qquad (3.2.1)$$

reküranс bağıntısı ve

$$K_0(x,y,z) = 3\,,\, K_1(x,y,z) = x\,,\, K_2(x,y,z) = x^2 + 2y$$

başlangıç değerleri ile tanımlanan $K_n(x,y,z)$ polinomuna $n-$inci üç değişkenli Lucas polinomu denir.

Tanım 3.2.1 de $x = y = z = 1$ alırsak (1.3) rekürans bağıntısı ile tanımlanan Tribonacci-Lucas sayılarını elde ederiz ($K_n(1,1,1) = K_n$). Benzer şekilde Tanım 3.2.1 de x yerine x^2, y yerine x ve $z = 1$ alırsak (1.4) rekürans bağıntısı ile tanımlı Tribonacci-Lucas polinomlarını $\left(K_n(x^2,x,1) = K_n(x)\right)$ elde ederiz.

(3.2.1) bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - x\lambda^2 - y\lambda - z = 0 \qquad (3.2.2)$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri α, β ve γ olmak üzere üç değişkenli Lucas polinomlarının Binet formülü

$$K_n(x,y,z) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

dir.

$K_n(x,y,z)$ üç değişkenli Lucas polinomunun ilk birkaç terimini aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n	$K_n(x,y,z)$
0	3
1	x
2	x^2+2y
3	$x^3+3xy+3z$
4	$x^4+4x^2y+4xz+2y^2$
5	$x^5+5x^3y+5xy^2+5x^2z+5yz$
6	$x^6+6x^4y+9x^2y^2+6x^3z+12xyz+2y^3+3z^2$
$\vdots$	$\vdots$

Tablo 3.2.1

Teorem 3.2.1. $K_n(x,y,z)$ $n-$inci üç değişkenli Lucas polinomu olsun. $\{K_n(x,y,z)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,y,z)t^n=\frac{3-2xt-yt^2}{1-xt-yt^2-zt^3} \qquad (3.2.3)$$

dir.

İspat. Bir dizinin üreteç fonksiyonu tanımından

$$k(t)=K_0(x,y,z)+K_1(x,y,z)t+K_2(x,y,z)t^2+\ldots$$

dir. Buradan

$$xtk(t)=xK_0(x,y,z)t+xK_1(x,y,z)t^2+xK_2(x,y,z)t^3+\ldots$$

$$yt^2k(t)=yK_0(x,y,z)t^2+yK_1(x,y,z)t^3+yK_2(x,y,z)t^4+\ldots$$

$$zt^3k(t)=zK_0(x,y,z)t^3+zK_1(x,y,z)t^4+zK_2(x,y,z)t^5+\ldots$$

ifadelerini göz önüne alarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} k(t)\left(1-xt-yt^2-zt^3\right)=&K_0(x,y,z)+t\left(K_1(x,y,z)-xK_0(x,y,z)\right)\\ &+t^2\left(K_2(x,y,z)-xK_1(x,y,z)-yK_0(x,y,z)\right)\\ &+t^3\left(K_3(x,y,z)-xK_2(x,y,z)-yK_1(x,y,z)-zK_0(x,y,z)\right)\\ &+\cdots \end{aligned}$$

dir. Tanım 3.2.1 de verilen başlangıç değerlerini kullanarak yukarıdaki eşitlikleri düzenlersek

$$k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,y,z)t^n=\frac{3-2xt-yt^2}{1-xt-yt^2-zt^3}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 kullanılarak Tribonacci-Lucas sayıları ve polinomlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_nt^n=\frac{3-2t-t^2}{1-t-t^2-t^3}$$

ve

$$k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x)t^n=\frac{3-2x^2t-xt^2}{1-x^2t-xt^2-t^3}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.2. $H_n(x,y,z)$ ve $K_n(x,y,z)$ sırasıyla $n-$ inci üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$K_n(x,y,z) = xH_n(x,y,z) + 2yH_{n-1}(x,y,z) + 3zH_{n-2}(x,y,z) \tag{3.2.4}$$

dir.

İspat. Teorem 3.2.1 de verilen $\{K_n(x,y,z)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x,y,z)t^n = \frac{3-2xt-yt^2}{1-xt-yt^2-zt^3}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x,y,z)t^n &= 3\frac{1}{1-xt-yt^2-zt^3} - 2x\frac{t}{1-xt-yt^2-zt^3} - y\frac{t^2}{1-xt-yt^2-zt^3} \\ &= 3\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x,y,z)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y,z)t^n - y\sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1}(x,y,z)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(3H_{n+1}(x,y,z) - 2xH_n(x,y,z) - yH_{n-1}(x,y,z)\right)t^n\end{aligned}$$

olur. (3.2.1) rekürans bağıntısından

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x,y,z)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(xH_n(x,y,z) + 2yH_{n-1}(x,y,z) + 3zH_{n-2}(x,y,z)\right)t^n$$

yazılır. Buradan

$$K_n(x,y,z) = xH_n(x,y,z) + 2yH_{n-1}(x,y,z) + 3zH_{n-2}(x,y,z)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. $K_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Lucas polinomu ve $x+y+z \neq 1$ olmak üzere

$$\sum_{s=0}^{n} K_s(x,y,z) = \frac{K_{n+2}(x,y,z) + (x-1)K_{n+1}(x,y,z) + zK_n(x,y,z) - (3-2x-y)}{x+y+z-1}$$

dir.

İspat. $K_n(x,y,z)$ $n-$inci üç değişkenli Lucas polinomunun Binet formülünü kullanırsak

$$\sum_{s=0}^{n} K_s(x,y,z) = \sum_{s=0}^{n} \left(\alpha^s + \beta^s + \gamma^s\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \alpha^s + \sum_{s=0}^{n} \beta^s + \sum_{s=0}^{n} \gamma^s$$

$$\sum_{s=0}^{n} K_s(x,y,z) = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} + \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1} + \frac{\gamma^{n+1}-1}{\gamma-1}$$

olur. (3.2.2) karakteristik denkleminin kökleri arasındaki

$$\alpha\beta\gamma = z\,,\ \alpha+\beta+\gamma = x\,,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -y$$

bağıntıları ve (3.2.1) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{s=0}^{n} K_s(x,y,z) = \frac{K_{n+2}(x,y,z) + (x-1)K_{n+1}(x,y,z) + zK_n(x,y,z) - (3-2x-y)}{x+y+z-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 de $x=y=z=1$ alınırsa Tribonacci-Lucas sayılarının ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{s=0}^{n} K_s = \frac{K_{n+2}+K_n}{2}$$

olarak elde edilir. Ayrıca x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alınırsa Tribonacci-Lucas polinomlarının ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{s=0}^{n} K_s(x) = \frac{K_{n+2}(x) + (x^2-1)K_{n+1}(x) + K_n(x) - (3-2x^2-x)}{x^2+x}$$

şeklinde bulunur.

Tablo 3.1.2 de verilen üç değişkenli Fibonacci polinomları üçgenine benzer olarak üç değişkenli Lucas polinomları üçgenini aşağıdaki gibi verebiliriz.

n/i	0	1	2	3	4
0	3				
1	x	$2y$			
2	x^2	$3xy+3z$	$2y^2$		
3	x^3	$4x^2y+4xz$	$5xy^2+5yz$	$2y^3$	
4	x^4	$5x^3y+5x^2z$	$9x^2y^2+12xyz+3z^2$	$7xy^3+7y^2z$	$2y^4$

Tablo 3.2.2

Teorem 3.2.4. $K_n(x,y,z)$ $n-$ inci üç değişkenli Lucas polinomu olmak üzere

$$K_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j} \tag{3.2.5}$$

dir.

İspat. Tablo 3.2.2 de verilen üç değişkenli Lucas polinomları üçgeninin $n-$ inci satır ve $j-$ inci sütun elemanını $B(n,i,x,y,z)$ ile gösterirsek

$$B(n,i,x,y,z)=\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j} \tag{3.2.6}$$

dir. Buradan

$$B(n+1,i,x,y,z)=xB(n,i,x,y,z)+yB(n,i-1,x,y,z)+zB(n-1,i-1,x,y,z)$$

yazabiliriz. Tablo 3.2.2 den $B(n,0,x,y,z)=x^n$ ve $B(n,n,x,y,z)=2y^n$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Üç değişkenli Lucas polinomları üçgeninde köşegen üzerindeki elemanların toplamı $K_n(x,y,z)$ üç değişkenli Lucas polinomlarını verir. Yani

$$K_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}B(n-i,i,x,y,z)$$

dir. Burada (3.2.6) ifadesi kullanılırsa üç değişkenli Lucas polinomlarının kapalı formülü

$$K_n(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}$$

olarak elde edilir.

Şimdi Teorem 3.2.4 ün özel durumlarını inceleyelim. (3.2.5) ifadesinde $x=y=z=1$ alınırsa Tribonacci-Lucas sayıları için kapalı formül

$$K_n=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}.$$

dir. Ayrıca (3.2.5) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alınırsa Tribonacci-Lucas polinomlarının kapalı formülü

$$K_n(x)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{2n-3i-3j}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.5. $H_n(x,y,z)$ ve $K_n(x,y,z)$ sırasıyla $n-$inci üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları olmak üzere

$$x\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial y}+z\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial z}=nH_{n+1}(x,y,z)$$

dir.

İspat. $K_n(x,y,z)$ üç değişkenli Lucas polinomlarının kapalı formülünü göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}\right)\\&=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}(n-2i-j)\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j-1}y^{i-j}z^{j}\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial x}&=n\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}x^{n-2i-j-1}y^{i-j}z^{j}\\&=nH_n(x,y,z)\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde işlemler yaparak

$$y\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial y}=nH_{n-1}(x,y,z).$$

ve

$$z\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial z}=nH_{n-2}(x,y,z).$$

elde edilir. (3.2.1) rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$x\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial y}+z\frac{\partial K_n(x,y,z)}{\partial z}=nH_{n+1}(x,y,z)$$

olur.

Teorem 3.2.6. $H_n(x,y,z)$ ve $K_n(x,y,z)$ sırasıyla $n-$inci üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları olmak üzere

$$\begin{vmatrix} H_{n+1} & H_n & H_{n-1} \\ K_{n+1}-zH_{n-1} & K_n-zH_{n-2} & K_{n-1}-zH_{n-3} \\ zH_n & zH_{n-1} & zH_{n-2} \end{vmatrix} = 2z^n$$

dir.

İspat. Teorem 3.2.2. ve (3.1.9) bağıntısından sonuç açıktır.

4. TAMAMLANMAMIŞ ÜÇ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde Ramirez ve Sirvent tarafından tanımlanan tamamlanmamış Tribonacci sayıları ve polinomlarının, ayrıca Yılmaz ve Taşkara tarafından tanımlanan tamamlanmamış Tribonacci-Lucas sayıları ve polinomlarının bir genelleştirmesi olan tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanarak bazı özellikleri incelenecektir.

4.1. Tamamlanmamış Üç Değişkenli Fibonacci Polinomları

Tanım 4.1.1. $n \geq 1$ ve $0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ için

$$H_n^{(s)}(x,y,z) = \sum_{i=0}^{s} B(n-1-i,i)(x,y,z) \tag{4.1.1}$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-j-1}{i} x^{n-2i-j-1} y^{i-j} z^{j} \tag{4.1.2}$$

bağıntısıyla verilen polinomlara tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci polinomları denir.

(4.1.2) ifadesinde $x = y = z = 1$ alınırsa $H_n^{(s)}(1,1,1)$ tamamlanmamış Tribonacci sayıları, (4.1.2) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z = 1$ alırsak $H_n^{(s)}(x^2,x,1)$ tamamlanmamış Tribonacci polinomları elde edilir.

$0 \leq s \leq 3$ ve $1 \leq n \leq 8$ için $H_n^{(s)}(x,y,z)$ polinomlarını aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n/s	0	1	2	3
1	1			
2	x	y		
3	x^2	$2xy+z$	y^2	
4	x^3	$3x^2y+2xz$	$3xy^2+2yz$	y^3
5	x^4	$4x^3y+3x^2z$	$6x^2y^2+6xyz+z^2$	$4xy^3+3y^2z$
6	x^5	$5x^4y+4x^3z$	$10x^3y^2+12x^2yz+3xz^2$	$10x^2y^3+12xy^2z+3yz^2$
7	x^6	$6x^5y+5x^4z$	$15x^4y^2+20x^3yz+6x^2z^2$	$20x^3y^3+30x^2y^2z+12xyz^2$
8	x^7	$7x^6y+6x^5z$	$21x^5y^2+30x^4yz+10x^3z^2$	$35x^4y^3+60x^3y^2z+30x^2yz^2$

Tablo 4.1.1

Bu tabloya göre;

$$H_n^{(0)}(x,y,z)=x^{n-1} \quad (n\geq 1) \tag{4.1.3}$$

$$H_n^{(1)}(x,y,z)=x^{n-1}+(n-2)x^{n-3}y+(n-3)x^{n-4}z \quad (n\geq 3) \tag{4.1.4}$$

$$H_n^{\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor\right)}(x,y,z)=H_n(x,y,z) \quad (n\geq 1) \tag{4.1.5}$$

$$H_n^{\left(\left\lfloor \frac{n-3}{2}\right\rfloor\right)}(x,y,z)=\begin{cases} H_n(x,y,z)-y^{\frac{n-1}{2}}, n\geq 3 \, ve \, n \text{ tek sayı} \\ H_n(x,y,z)-\left(\frac{n}{2}xy^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n-2}{2}zy^{\frac{n-4}{2}}+\frac{(n-8)(n-6)(n-4)}{48}z^3y^{\frac{n-10}{2}}\right), n\geq 3 \, ve \, n \text{ çift sayı} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

eşitlikleri elde edilir.

Önerme 4.1.1. Doğrusal olmayan tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısı $0\leq s\leq \left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor$ için

$$H_{n+3}^{(s+1)}(x,y,z)=xH_{n+2}^{(s+1)}(x,y,z)+yH_{n+1}^{(s)}(x,y,z)+zH_n^{(s)}(x,y,z) \tag{4.1.7}$$

dir. Bu bağıntı homojen olmayan aşağıdaki rekürans bağıntısına dönüştürülebilir,

$$\begin{aligned} H_{n+3}^{(s)}(x,y,z)&=xH_{n+2}^{(s)}(x,y,z)+yH_{n+1}^{(s)}(x,y,z)+zH_n^{(s)}(x,y,z) \\ &\quad -\big(yB(n-s,s)(x,y,z)+zB(n-1-s,s)(x,y,z)\big). \end{aligned}$$

İspat. Tanım 4.1.1 i kullanarak (4.1.7) ifadesinin sağ yanı

$$\begin{aligned} SY&=x\sum_{i=0}^{s+1}B(n+1-i,i)(x,y,z)+y\sum_{i=0}^{s}B(n-i,i)(x,y,z) \\ &\quad +z\sum_{i=0}^{s}B(n-1-i,i)(x,y,z) \end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned} SY&=x\sum_{i=0}^{s+1}B(n+1-i,i)(x,y,z)+y\sum_{i=1}^{s+1}B(n-i+1,i-1)(x,y,z) \\ &\quad +z\sum_{i=1}^{s+1}B(n-i,i-1)(x,y,z) \\ &=\sum_{i=0}^{s+1}\begin{pmatrix} xB(n+1-i,i)(x,y,z)+yB(n-i+1,i-1)(x,y,z)+ \\ zB(n-i,i-1)(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &\quad -\big(yB(n+1,-1)(x,y,z)+zB(n,-1)(x,y,z)\big) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{s+1} B(n+2-i,i)(x,y,z)$$

$$= H_{n+3}^{(s+1)}(x,y,z)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.2. $\ell = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ olmak üzere

$$\sum_{s=0}^{\ell} H_n^{(s)}(x,y,z) = (\ell+1)H_n(x,y,z) - \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{i} i\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i} x^{n-2i-j-1} y^{i-j} z^{j}$$

dir.

İspat. Tanım 4.1.1 den

$$H_n^{(s)}(x,y,z) = \sum_{i=0}^{s} B(n-1-i,i)(x,y,z)$$

dir. Bu ifade açılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\ell} H_n^{(s)}(x,y,z) = {} & B(n-1-0,0)(x,y,z) \\
& + \big(B(n-1-0,0)(x,y,z) + B(n-1-1,1)(x,y,z)\big) + \ldots \\
& + \begin{pmatrix} B(n-1-0,0)(x,y,z) + B(n-1-1,1)(x,y,z) + \ldots + \\ B(n-1-\ell,\ell)(x,y,z) \end{pmatrix} \\
= {} & (\ell+1)B(n-1-0,0)(x,y,z) \\
& + \ell B(n-1-1,1)(x,y,z) + \ldots + B(n-1-\ell,\ell)(x,y,z)
\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\ell} H_n^{(s)}(x,y,z) &= \sum_{i=0}^{\ell} (\ell+1-i) B(n-i-1,i)(x,y,z) \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} (\ell+1) B(n-i-1,i)(x,y,z) - \sum_{i=0}^{\ell} iB(n-i-1,i)(x,y,z) \\
&= (\ell+1)H_n(x,y,z) - \sum_{i=0}^{\ell} iB(n-i-1,i)(x,y,z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.2 de x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alırsak $H_n^{(s)}(x^2,x,1)$ tamamlanmamış Tribonacci polinomlarının $n-$inci satır toplamını bulabiliriz.

Lemma 4.1.1. $n \geq 2$ için $\{S_n\}$ homojen ve lineer olmayan dizisinin rekürans bağıntısı

$$S_n = xS_{n-1} + yS_{n-2} + zS_{n-3} + R_n$$

olsun. Burada $\{R_n\}$ dizisi kompleks bir dizi, $\{S_n\}$ ve $\{R_n\}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları da sırası ile $U(t)$ ve $G(t)$ olmak üzere $\{S_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$U(t) = \frac{G(t) + S_0 - R_0 + (S_1 - xS_0 - R_1)t + (S_2 - xS_1 - yS_0 - R_2)t^2}{1 - xt - yt^2 - zt^3} \tag{4.1.8}$$

dir.

İspat. $\{S_n\}$ ve $\{R_n\}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırası ile $U(t)$ ve $G(t)$ olmak üzere

$$U(t) = S_0 + S_1t + S_2t^2 + \ldots + S_kt^k + \ldots$$

ve

$$G(t) = R_0 + R_1t + R_2t^2 + \ldots + R_kt^k + \ldots$$

dir. Buradan

$$xtU(t) = xS_0t + xS_1t^2 + xS_2t^3 + \ldots + xS_kt^{k+1} + \ldots$$

$$yt^2U(t) = yS_0t^2 + yS_1t^3 + yS_2t^4 + \ldots + yS_kt^{k+2} + \ldots$$

$$zt^3U(t) = zS_0t^3 + zS_1t^4 + zS_2t^5 + \ldots + zS_kt^{k+3} + \ldots$$

olup

$$\begin{aligned}(1 - xt - yt^2 - zt^3)U(t) - G(t) = (S_0 - R_0) + (S_1 - xS_0 - R_1)t + (S_2 - xS_1 - yS_0 - R_2)t^2 \\ + (S_3 - xS_2 - yS_1 - zS_0 - R_3)t^3 + \cdots\end{aligned}$$

dir. $\{S_n\}$ dizisinin rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$U(t) = \frac{G(t) + S_0 - R_0 + (S_1 - xS_0 - R_1)t + (S_2 - xS_1 - yS_0 - R_2)t^2}{1 - xt - yt^2 - zt^3}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. $\left\{H_n^{(s)}\left(x,y,z\right)\right\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $Q_s\left(x,y,z,t\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}Q_s\left(x,y,z,t\right)\left(1-xt-yt^2-zt^3\right)&=H_{2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)+\left(H_{2s+2}^{(s)}\left(x,y,z\right)-xH_{2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)\right)t\\&+\left(H_{2s+3}^{(s)}\left(x,y,z\right)-xH_{2s+2}^{(s)}\left(x,y,z\right)-yH_{2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)-y^s\right)t^2\\&-\left(t^2+t^3\right)\frac{\left(y+zt\right)^s}{\left(1-xt\right)^{s+1}}\end{aligned}$$

dir.

İspat. Bir dizinin üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}Q_s\left(x,y,z,t\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(s)}\left(x,y,z\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}x^{n-2i-j-1}y^{i-j}z^j\right)t^n\end{aligned}$$

dir. $0\le n\le 2s+1$ için

$$H_{2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)=H_{2s+1}\left(x,y,z\right)$$

$$H_{2s+2}^{(s)}\left(x,y,z\right)=H_{2s+2}\left(x,y,z\right)$$

$$H_{2s+3}^{(s)}\left(x,y,z\right)=H_{2s+3}\left(x,y,z\right)-y^{s+1}$$

ve

$$\begin{aligned}H_{n+3}^{(s)}\left(x,y,z\right)&=xH_{n+2}^{(s)}\left(x,y,z\right)+yH_{n+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)+zH_n^{(s)}\left(x,y,z\right)\\&-\left(yB\left(n-s,s\right)\left(x,y,z\right)+zB\left(n-1-s,s\right)\left(x,y,z\right)\right)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}S_0&=H_{2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)\\S_1&=H_{2s+2}^{(s)}\left(x,y,z\right)\\S_2&=H_{2s+3}^{(s)}\left(x,y,z\right)\\&\vdots\\S_n&=H_{n+2s+1}^{(s)}\left(x,y,z\right)\end{aligned}$$

ve $R_0=R_1=0$, $R_2=y^s$ olsun.

$$\begin{aligned}R_n&=B\left(n+s-2,s\right)\left(x,y,z\right)+B\left(n+s-3,s\right)\left(x,y,z\right)\\&=\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\binom{n+s-2-j}{s}x^{n+s-2-j-s}y^{s-j}z^j+\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\binom{n+s-3-j}{s}x^{n+s-3-j-s}y^{s-j}z^j\end{aligned}$$

olup $\left\{R_n\right\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \ldots$$

$$= \left(B(s,s) + B(s-1,s)\right)t^2 + \left(B(s+1,s) + B(s,s)\right)t^3 + \ldots$$

$$= B(s-1,s)t^2 + B(s,s)\left(t^2+t^3\right) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B(n+s,s)\left(t^{n+2}+t^{n+3}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\binom{n+s-j}{s}x^{n-j}y^{s-j}z^j\right]t^n\left(t^2+t^3\right)$$

dir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{0}\binom{n+s}{s}x^n y^s t^n\left(t^2+t^3\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{1}\binom{n+s-1}{s}x^{n-1}y^{s-1}zt^n\left(t^2+t^3\right)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{2}\binom{n+s-2}{s}x^{n-2}y^{s-2}z^2t^n\left(t^2+t^3\right) + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{s}\binom{n}{s}x^{n-s}z^s t^n\left(t^2+t^3\right)$$

olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n = \binom{s}{0}y^s\left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s}{s}x^n t^n + \binom{s}{1}y^{s-1}z\left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s-1}{s}x^{n-1}t^n$$
$$+\ldots+\binom{s}{s}z^s\left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{s}x^{n-s}t^n$$

$$= \binom{s}{0}y^s\left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s}{s}(xt)^n + \binom{s}{1}y^{s-1}z\left(t^2+t^3\right)t\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s-1}{s}(xt)^{n-1}$$
$$+\cdots+\binom{s}{s}z^s\left(t^2+t^3\right)t^s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{s}(xt)^{n-s}$$

$$= \left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s}{s}(xt)^n\left[\binom{s}{0}y^s + \binom{s}{1}y^{s-1}zt + \ldots + \binom{s}{s}z^s t^s\right]$$

$$= \left(t^2+t^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+s}{s}(xt)^n\left[(y+zt)^s\right]$$

$$= \left(t^2+t^3\right)\frac{(y+zt)^s}{(1-xt)^{s+1}}$$

olduğundan $\left\{H_n^{(s)}(x,y,z)\right\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$Q_s(x,y,z,t)\left(1-xt-yt^2-zt^3\right)=H_{2s+1}^{(s)}(x,y,z)+\left(H_{2s+2}^{(s)}(x,y,z)-xH_{2s+1}^{(s)}(x,y,z)\right)t$$
$$+\left(H_{2s+3}^{(s)}(x,y,z)-xH_{2s+2}^{(s)}(x,y,z)-yH_{2s+1}^{(s)}(x,y,z)-y^s\right)t^2$$
$$-\left(t^2+t^3\right)\frac{(y+zt)^s}{(1-xt)^{s+1}}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.1 de x, y ve z nin özel değerleri için Ramirez ve Sirvent tarafından verilen tamamlanmamış Tribonacci sayı ve polinom dizilerinin üreteç fonksiyonları elde edilir.

4.2. Tamamlanmamış Üç Değişkenli Lucas Polinomları

Tanım 4.2.1. $0 \le s \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere

$$K_n^{(s)}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{s} B(n-i,i)(x,y,z) \tag{4.2.1}$$
$$=\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}\frac{n}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}$$

denklemi ile verilen $K_n^{(s)}(x,y,z)$ polinomlarına tamamlanmamış üç değişkenli Lucas polinomları denir.

(4.2.1) ifadesinde $x=y=z=1$ alırsak $K_n^{(s)}(1,1,1)$ tamamlanmamış Tribonacci-Lucas sayılarını, (4.2.1) ifadesinde x yerine x^2, y yerine x ve $z=1$ alırsak $K_n^{(s)}(x^2,x,1)$ tamamlanmamış Tribonacci-Lucas polinomlarını elde ederiz.

$0 \le n \le 6$ ve $0 \le s \le 3$ için tamamlanmamış üç değişkenli Lucas polinomlarını aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n/s	0	1	2	3
1	x			
2	x^2	x^2+2y		
3	x^3	$x^3+3xy+3z$		
4	x^4	x^4+4x^2y+4xz	$x^4+4x^2y+4xz+2y^2$	
5	x^5	$x^5+5x^3y+5x^2z$	$x^5+5x^3y+5x^2z+5xy^2+5yz$	
6	x^6	$x^6+6x^4y+6x^3z$	$x^6+6x^4y+6x^3z+9x^2y^2+12xyz+3z^2$	$x^6+6x^4y+6x^3z+$ $9x^2y^2+12xyz+$ $3z^2+2y^3$

Tablo 4.2.1

Tablo 4.2.1 kullanılırsa

$$K_n^{(0)}(x,y,z)=x^n \tag{4.2.2}$$

$$K_n^{(1)}(x,y,z)=x^n+nx^{n-2}y+nx^{n-3}z \qquad (n\ge 3) \tag{4.2.3}$$

$$K_n^{\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)}(x,y,z)=K_n(x,y,z) \tag{4.2.4}$$

$$K_n^{\left(\left\lfloor \frac{n-2}{2}\right\rfloor\right)}(x,y,z)=K_n(x,y,z)-2y^{\frac{n}{2}},\ n\ge 2\,ve\ çift \tag{4.2.5}$$

ifadeleri elde edilir.

Önerme 4.2.1. $\ell=\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ için

$$\sum_{s=0}^{\ell} K_n^{(s)}(x,y,z)=(\ell+1)K_n(x,y,z)-\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{i}\frac{in}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}$$

dir.

İspat. Tanım 4.2.1 den

$$K_n^{(s)}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{s}B(n-i,i)(x,y,z)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\ell}K_n^{(s)}(x,y,z)&=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{i=0}^{s}B(n-i,i)(x,y,z)\\&=(\ell+1)B(n,0)(x,y,z)+\ell B(n-1,1)(x,y,z)\\&\quad+...+B(n-\ell,\ell)(x,y,z)\\&=\sum_{i=0}^{\ell}(\ell+1-i)B(n-i,i)(x,y,z)\\&=\sum_{i=0}^{\ell}(\ell+1)B(n-i,i)(x,y,z)-\sum_{i=0}^{\ell}iB(n-i,i)(x,y,z)\\&=(\ell+1)K_n^{\ell}(x,y,z)-\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{i}\frac{in}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}\end{aligned}$$

olur. $\ell=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ olduğundan

$$\sum_{s=0}^{\ell}K_n^{(s)}(x,y,z)=(\ell+1)K_n(x,y,z)-\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{i}\frac{in}{n-i-j}\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i}x^{n-2i-j}y^{i-j}z^{j}$$

elde edilir.

Önerme 4.2.2. $0\le s\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere

1. Tamamlanmamış üç değişkenli Lucas polinomlarının homojen rekürans bağıntısı

$$K_{n+3}^{(s+1)}(x,y,z)=xK_{n+2}^{(s+1)}(x,y,z)+yK_{n+1}^{(s)}(x,y,z)+zK_n^{(s)}(x,y,z) \tag{4.2.6}$$

dir.

2. Tamamlanmamış üç değişkenli Lucas polinomlarının homojen olmayan rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned}K_{n+3}^{(s)}(x,y,z)&=xK_{n+2}^{(s+1)}(x,y,z)+yK_{n+1}^{(s)}(x,y,z)+zK_n^{(s)}(x,y,z)\\&\quad-\left(yB(n+1-s,s)+zB(n-s,s)\right)\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

dir.

İspat. 1. Tanım 4.2.1 den (4.2.6) ifadesinin sağ yanı

$$SY = x\sum_{i=0}^{s+1} B(n+2-i,i)(x,y,z) + y\sum_{i=0}^{s} B(n+1-i,i)(x,y,z) + z\sum_{i=0}^{s} B(n-i,i)(x,y,z)$$
$$= x\sum_{i=0}^{s+1} B(n+2-i,i)(x,y,z) + y\sum_{i=1}^{s+1} B(n+2-i,i-1)(x,y,z)$$
$$+ z\sum_{i=1}^{s+1} B(n+1-i,i-1)(x,y,z)$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$SY = \sum_{i=0}^{s+1}\begin{pmatrix} xB(n+2-i,i)(x,y,z) + yB(n+2-i,i-1)(x,y,z) + \\ zB(n+1-i,i-1)(x,y,z) \end{pmatrix}$$
$$- yB(n+2,-1)(x,y,z) - zB(n+1,-1)(x,y,z)$$
$$= \sum_{i=0}^{s+1} B(n+3-i,i)(x,y,z) = K_{n+3}^{(s+1)}(x,y,z)$$

elde edilir.

2. (4.2.1), (4.2.6) ve

$$B(n+1,i)(x,y,z) = xB(n,i)(x,y,z) + yB(n,i-1)(x,y,z) + zB(n-1,i-1)(x,y,z)$$

ifadelerini göz önüne alırsak

$$\sum_{i=0}^{s+1} B(n+3-i,i)(x,y,z) = x\sum_{i=0}^{s+1} B(n+2-i,i)(x,y,z) +$$
$$y\sum_{i=0}^{s} B(n+1-i,i)(x,y,z) + z\sum_{i=0}^{s} B(n-i,i)(x,y,z)$$

olup tekrar gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i=0}^{s} B(n+3-i,i)(x,y,z) = x\sum_{i=0}^{s} B(n+2-i,i)(x,y,z) + y\sum_{i=0}^{s} B(n+1-i,i)(x,y,z)$$
$$+ z\sum_{i=0}^{s} B(n-i,i)(x,y,z) - zB(n+2-s,s+1)(x,y,z)$$
$$+ xB(n+1-s,s+1)(x,y,z)$$

elde edilir. Buradan

$$K_{n+3}^{(s)}(x,y,z) = xK_{n+2}^{(s)}(x,y,z) + yK_{n+1}^{(s)}(x,y,z) + zK_{n}^{(s)}(x,y,z)$$
$$-\left(yB(n+1-s,s)(x,y,z) + zB(n-s,s)(x,y,z)\right)$$

olur.

Önerme 4.2.3. $1 \le s \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ve $n \ge 3$ olmak üzere

$$K_n^{(s)}(x,y,z) = H_{n+1}^{(s)}(x,y,z) + yH_{n-1}^{(s-1)}(x,y,z) + 2zH_{n-2}^{(s-1)}(x,y,z) \qquad (4.2.8)$$

dir.

İspat. Tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının tanımları kullanılırsa sonuç açıktır.

Teorem 4.2.1. $Q_s(x,y,z,t)$ tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci polinom dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere $\{K_n^s(x,y,z)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$W_s(x,y,z,t) = t^{-1}Q_s(x,y,z,t) + \left(yt + 2zt^2\right)Q_{s-1}(x,y,z,t)$$

dir.

İspat. $\{K_n^s(x,y,z)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$W_s(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(s)}(x,y,z,t)t^n$$

dir. (4.2.8) ifadesinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(s)}(x,y,z,t)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(H_{n+1}^{(s)}(x,y,z) + yH_{n-1}^{(s-1)}(x,y,z) + 2zH_{n-2}^{(s-1)}(x,y,z)\right)t^n$$

yazılır. Teorem 4.1.1 ve toplamın özelliği kullanılarak

$$W_s(x,y,z,t) = t^{-1}Q_s(x,y,z,t) + \left(yt + 2zt^2\right)Q_{s-1}(x,y,z,t)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomlarının bir genelleştirmesi olan üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların matris gösterimleri, üreteç fonksiyonları ve bu polinomlarla ilgili özdeşlikler elde edilmiştir. Tanımlanan bu polinomlar kullanılarak tamamlanmamış üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada tanımladığımız üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının farklı özellikleri incelebilir. Ayrıca üç değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının bazı genelleştirmeleri tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

Alladi,K., Hoggat, V.E., 1997, On Tribonacci Numbers and Related Functions, *Fibonacci Quaterly*, 15, 42-45.

Feng, J., 2011, More Identities on the Tribonacci Numbers, Ars Combinatoria, 100, 73-78.

Filipponi, P., 1996, Incomplete Fibonacci and Lucas numbers, Rend. Circ. Mat. Palerma (series), 45, 37-56.

Hoggatt, V.E., Bicknell, M., 1973, Generalized Fibonacci polynomials, *The Fibonacci Quarterly,* 11, 457–465.

Kocer, E. G., Gedikce, H., 2016, Trivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, *Konuralp Journal of Mathematics,* 4(2), 247-254.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication.

Kuhapatanakul, K., Sukruan, L., 2014, The Generalized Tribonacci Numbers with Negative Subscripts, *İnteger* 14.

Lin, P.Y., 1988, De Moivre-Type Identities for the Tribonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 26 (2), 131-134.

McCarty, P., 1981, A Formula for Tribonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly,* 19(5), 391-393.

Pethe, S., 1986, Some Identities for Tribonacci Sequences, *The Fibonacci Quarterly,* 26, 144-151.

Ramirez, J.L., Sirvent, V.F., 2014, Incomplete Tribonacci numbers and Polynomials, *Journal of Integer Seuences,* 17 Article 14.4.2.

Spickerman, W.R., 1982, Binet's Formula for the Tribonacci Sequence, *The Fibonacci Quarterly,* 20(2), 118-120.

Tan, M., Zhang, Y., A, 2005, Note on Bivariate and Trivariate Fibonacci Polynomials, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 29, 975-990.

Tasci, D., Firengiz, M. C., Tuglu, N., 2012, Incomplete bivariate Fibonacci and Lucas p- polynomials, Discrete Dynam. Mat. Soc., article id 840345.

Yılmaz, N., Taskara, N., 2015, Incomplete Tribonacci- Lucas Numbers and Polynomials, Advances in Applied Clifford Algebras, 25(3), 741-753.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Hatice Kılınç
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Mersin- 25/01/1992
Telefon	**:**	05398532115
e-mail	**:**	haticegedikce.mat09@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :	19 Mayıs Anadolu Lisesi, Toroslar, Mersin	2009
Üniversite :	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2014
Yüksek Lisans:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2016	Karapınar İbrahim Gündüz Anadolu Lisesi	Öğretmen
2016-	İskenderun Demir Çelik Anadolu Lisesi	Öğretmen

YABANCI DİLLER
İngilizce

YAYINLAR
Kocer, E. G., Gedikce, H., 2016, Trivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, *Konuralp Journal of Mathematics,* 4(2), 247-254.