T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR TAKIM DEĞİŞMELİ HALKA GRAFLARININ BASKINLIK SAYILARI ÜZERİNE

MERVE ÇAKIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

Kasım-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

MERVE ÇAKIN tarafından hazırlanan "Bir Takım Değişmeli Halka Graflarının Baskınlık Sayıları Üzerine" adlı tez çalışması 01/11/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN	
Danışman Dr. Öğret. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ	
Üye Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet AVCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

MERVE ÇAKIN

Tarih: 01.11.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR TAKIM DEĞİŞMELİ HALKA GRAFLARININ BASKINLIK SAYILARI ÜZERİNE

MERVE ÇAKIN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

2018, 37 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Graf Teori birçok alanda uygulanabilirliği olan ve karmaşık gibi görünen problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir yapıdır. 1736 yılında Euler'in Könisberg Köprüsü problemine çözüm yolu olarak ortaya çıkan Graf Teori ile ilgili çalışmalar farklı alanların da ilgisi sebebiyle günümüze kadar devam etmiştir. Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde basit graflar tanıtılmış ve kaynak araştırması sunulmuştur.

İkinci bölümde p ve q asal iken $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafı üzerinde çeşitli baskınlık sayılarına yer verilmiş ve ispatlar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde de p ve q asal iken $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının bazı baskınlık sayılarına değinilmiş ve ispatlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Graf, Graf, Graflarda Baskınlık Sayısı, Graflarda Baskınlık Sayısı Çeşitleri, Sıfır-Bölen Graflar

ABSTRACT

MS THESIS

ONE THE DOMINATION NUMBER OF SOME GRAPH OVER COMMUTATIVE RINGS

MERVE ÇAKIN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTIN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

2018, 37 Pages

Advisor: Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Jury
Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof.Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Graph Theory is a structure that can be applicable in many fields and facilitates the solution of problems that seem complex. In 1736,Euler’s Könisberg Bridge problem, which emerged as a solution to the problem of studieds related to the graph theory has continved to the present day to the interest of different areas.

This study consists of three main parts:

In the first part, simple graphs were introduced and the source research was presented.

In the second part, while the p and q are prime, the $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ring has various dominance numbers on the grap $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ and proofs made.

In the third chapter, some dominance numbers of the $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ graph are mentioned while p and q are prime proofs made.

Keywords: Algebraic graph, Graph, Domination Number in Graphs, Types of dominance in graphs, zero-divisor graphs.

ÖNSÖZ

Bir Takım Değişmeli Halka Graflarının Baskınlık sayıları Üzerine isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü üyesi, Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmış ve Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışması boyunca bilgi, tecrübe ve samimiyetini esirgemeyen, değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca hiçbir emeklerini benden esirgemeyen, beni bugünlere getiren, karşılaştığım her zorlukta sığındığım liman olan annem, babam ve kardeşime, bu süreçte desteğini ve sabrını esirgemeyen sevgili eşim Celal Emre'ye sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

MERVE ÇAKIN
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR .... **viii**

1. GİRİŞ VE GENEL TANIMLAR **1**

1.1. Graf Tanımı 2
1.2. Derece ve Uzaklık 3
1.3. Yürüyüş ve yol 4
1.4. Uzaklık ve Bağlantılılık 5
1.5. Bazı Özel Graf Çeşitleri 5
1.6. Kaynak Araştırması 9

2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ SIFIR BÖLEN GRAFININ BAZI BASKINLIK SAYILARI **11**

2.1. Baskınlık sayısı (Domination Number) 11
2.2. Toplam Baskınlık Sayısı (Total Domination Number) 14
2.3. Bağımsız Baskınlık Sayısı (Independent Domination Number) 16
2.4. Kenar Baskınlık Sayısı (Edge Domination Number) 18
2.5. *k*- Baskınlık Sayısı (*k*- Domination Number) 20

3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ GRAFININ BAZI BASKINLIK SAYILARI **23**

3.1. Baskınlık Sayısı 23
3.2. Total Baskınlık Sayısı 24
3.3. Bağımsız Baskınlık Sayısı 24
3.4. Kenar Baskınlık Sayısı 25
3.5. 2- Baskınlık Sayısı 26

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **27**

5.1 Sonuçlar 27
5.2 Öneriler 27

6.KAYNAKLAR **28**

ÖZGEÇMİŞ **29**

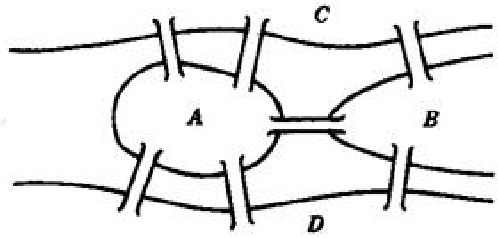
SİMGELER VE KISALTMALAR

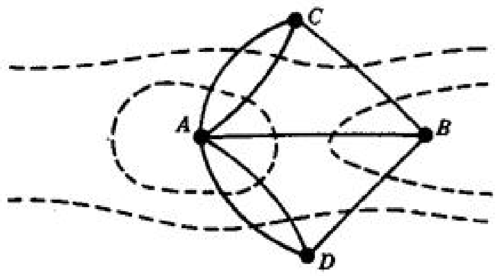
Γ	: Basit Graf
$G(V,E)$	: V köşe kümeli E kenar kümeli bir G Grafı
$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$	: Kalan sınıflarının Kartezyen çarpımı
V	: Köşe kümesi
E	: Kenar kümesi
$N(V)$	: V köşesinin açık komşuluğu
R	: V köşesinin kapalı komşuluğu
K_n	: n mertebeli tam graf
P_n	: n mertebeli yol grafı
C_n	: n mertebeli çevre grafı
W_n	: n mertebeli tekerlek graf
$\gamma(G)$	: Baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	: Toplam baskınlık sayısı
$\gamma_i(G)$	: Bağımsız baskınlık sayısı
$\gamma^{'}(G)$	: Kenar baskınlık sayısı
$\gamma_k(G)$	: k - Baskınlık sayısı

1. GİRİŞ VE GENEL TANIMLAR

Grafların asıl amacı gerekli olan bilgileri, gereksiz fazlalıktan temizlemektir. Bu sebeple graflar karmaşık problemleri daha basite indirgememizi ve sadece çözüme yardımcı olacak bilgileri kullanmamızı sağlayarak problemlerin çözümlerini kolaylaştırır. (Handbook of Graph Theory, 2004).

Graf teori, 1736 yılında Leonard Euler'in Könisberg Köprüsü problemine çözüm yolu olarak ortaya çıkmıştır. Problemi şöyle ifade edebiliriz: Königsberg'de (şuan Rusya'daki Kaliningrad) Pregel Nehri boyunca uzanan iki ada, birbirleri ve kıyılar ile yedi köprü aracılığıyla bağlantılıdır, Şekil 1.a'da gösterildiği gibi. Çözümü bulunmak istenen ise A,B,C ya da D noktalarından birinden başlanarak her köprüden yalnızca bir kez geçme şartı ile tekrardan başlangıç noktasına gelmektedir..





Şekil 1.a **Şekil 1.b**

Köprü yapısı; köşeler, yerleri ve kenarlar, köprüleri temsil etmek üzere Şekil 1.b'deki gibi bir graf olarak modellenmiştir.

Esasında graf teorinin ortaya çıkışında büyük bir etkisi olan Königsberg Köprüsü probleminde amaçlanan bir yürüyüş sorunu gibi gözükse de graf teoriye günümüz zamanında olan ilginin sebeplerinden bir tanesi de farklı alanlarda kullanılabilir oluşudur. Graf teori ile ilgili ilk çalışma 1736 yılında olmuştur bunun yanında daha önemli sonuçlar 19.yüzyılda bulunmuştur. Graf teori üzerine ilk kitabı (Theorie der endlichen und unendlichen Graphen) 1939 yılında Macar asıllı Denes König yazmıştır.

Çalışmamıza temel grafların terim bilgisi ve örnekleri ile başlayacağız. Ardından bazı graf çeşitleri üzerine çalışmaları göreceğiz. Bu bölümde kullanılan tanımlar Gross ve Yellen'in Handbook of Graph Theory (Gross ve Yellen, 2004) ve (Buckley ve Harary 1990), kitaplarından alınmıştır.

1.1. Graf Tanımı

Tanım 1.1.1 Sonlu noktalar kümesindeki noktalar arasında belli bir kurala göre bağlantı kuran kenarlar topluluğuna **graf** denir.

Tanım 1.1.2 Bir graftaki bağlantıların yönü yok ise **yönsüz graf** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.3 Bir G grafı $G=(V,E)$; V ve E şeklinde iki küme ifade eder. V kümesi **köşeleri** (vertices), V kümesi ise **kenarları** (edges) temsil eder. Bu şekilde ifade edilen $G=(V,E)$ ikililere **graf** (graph) denir.

Tanım 1.1.4 Bütün kenarlar bir veya iki köşe ile bağlanır. Bu köşeler **bitiş noktaları** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5 Köşe ve kenar kümelerinin eleman sayıları sonlu olan graflara **sonlu graf** denir. Sonlu grafların köşe kümesi $V=\{v_1, v_2, \ldots ,v_n\}$ ve $|V|=n$ sayısına **grafın mertebesi** (order); kenar kümesi $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ olacak şekilde $|E|=m$ sayısı ise **grafın boyutu** (size) olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.6 Eğer u ve v köşeleri bir kenarla birleşiyor ise u köşesi ile v köşesi **komşu köşeler** olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.7 Bitiş noktaları aynı olan iki kenara ise **komşu kenarlar** denir.

Tanım 1.1.8 Grafın köşeleri arasında tam bir kenar var ise bu graftaki komşuluklara **basit komşuluk** (simple adjacency) denir.

Tanım 1.1.9 Yalnız bir bitiş noktası ile tekrar kendine bağlanan kenara **ilmek** (loop) denir.

Tanım 1.1.10 Bir grafta ilmek ve çoklu-kenar bulunmuyor ise bu graflar **basit graf** olarak ifade edilir. Aksi durumda bu graf **çoklu graf** olarak adlandırılır.

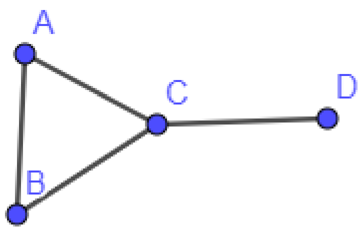
Tanım 1.1.11 Grafın köşe kümesi ve kenar kümesi boş küme oluşturuyor ise bu graflara **boş graf** (null graph) denir.

1.2. Derece ve Uzaklık

Graf teoride çokça kullanılan önemli temel kavramlardan biri köşe derecesi ve diğeri ise iki köşe arasındaki uzaklıktır.

Tanım 1.2.1 Grafta seçilen bir köşeye komşu olan köşelerin sayısına o **köşenin derecesi** denir ve $\boldsymbol{d_G(v_i)}$ ile gösterilir. Grafta bir köşe komşu olduğu her köşeye *1* derece kazandırır. İlmekte de köşe kendisine de komşu olduğundan dolayı köşeye *2* derece kazandırır. Bir grafta derecesi *1* olan her köşeye **uç** (pendant) köşe, derecesi *0* olan köşelerde **izole** (isolated) köşe olarak isimlendirilir.

Örnek 1.2.2



Şekil 1.2 Basit Graf örneği

Tanım 1.2.3 *G* grafının en az sayılı dereceli köşesine **minimum dereceli** denir ve derece sayısı $\boldsymbol{\sigma(G)}$ ile gösterilir ve en çok sayılı dereceli köşesine de **maksimum dereceli** denir ve bu köşenin derece sayısı $\boldsymbol{\Delta(G)}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.4 Şekil 1.2 deki basit graf örneğinde $\sigma(G)$=1 ve $\Delta(G)$=3 tür.

Teorem 1.2.5 Sonlu bir *G* grafının köşe kümesi $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kenar kümesi de $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik mevcuttur: (Gross ve Yellen, 2004).

$$\sum d_G(v_i)=2m$$

Sonuç 1.2.6 Bir *G* grafındaki bütün köşelerin dereceleri toplamı çifttir, (Gross ve Yellen, 2004).

1.3. Yürüyüş ve yol

Tanım 1.3.1 Bir grafta köşe kümesi $V = \{a, b, c, ..., y, z\}$ olsun. G grafın kenarlarının ab, bc,cd , … , yz şeklindeki sıralanışına **yürüyüş** denir.

Başlangıç köşesi ile bitiş köşesi aynı ise bu yürüyüş **kapalı yürüyüş** olarak isimlendirilir.

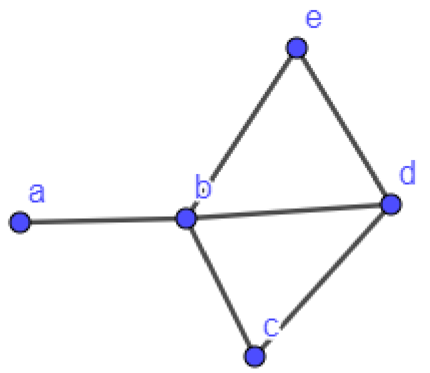
Tanım 1.3.2 Yürüyüş uzunluğu aynı zamanda **(length of a walk)** kenarların numarası olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.3 Bir grafta**,** kenarların birden fazla kez geçilmediği yürüyüşe **iz (trail)** denir.

Tanım 1.3.4 Bir yürümede hiçbir köşeden tekrar etmiyor ise bu yürüme **yol (path)** olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.5 Başlangıç ve bitiş noktası haricindeki kalan tüm köşeleri ve kenarları farklı olan kapalı yürüyüş ise **devir** olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.7 Şekil 1.3 te görüldüğü gibi *abdbc* 4 uzunluklu bir yürümedir fakat bir gezi değildir. Aynı zamanda *abdebc* bir gezi fakat yol değildir, *abde* bir yoldur.*bcdb* devirdir.



Şekil 1.3 G grafı

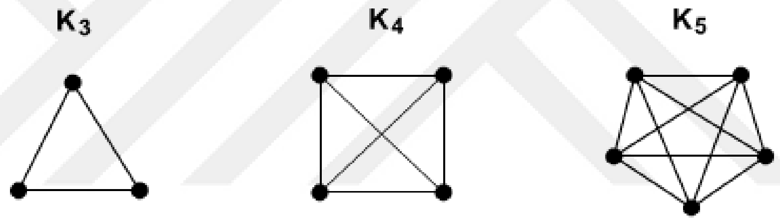
1.4. Uzaklık ve Bağlantılılık

Tanım 1.4.1 Bir grafta seçilen iki köşe x ve y olsun, bunlar arasındaki **uzaklık (distance)** bu iki köşe arasındaki en kısa yürüyüşün uzunluğudur ve $d(x,y)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.4.2 Bir graftaki her iki köşe arasında bir yürüyüş var ise bu grafa **bağlantılı (connected) graf** denir. Aksi olduğu zaman bu graf **bağlantısız (disconnected) graf** olarak alandırılır. Bağlantısız graflarda ise iki köşe arasında herhangi bir yürüyüş mevcut değil ise bu graflar aralarındaki uzaklığa sonsuzdur denir.

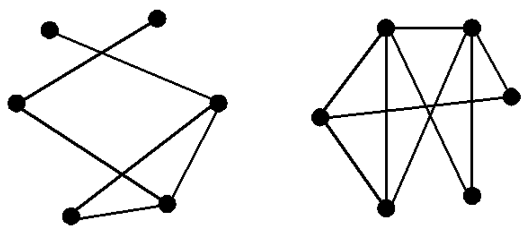
1.5. Bazı Özel Graf Çeşitleri

Tanım 1.5.1 Bir *G* grafında bulunan köşelerin her ikisi birbiri ile komşu ise *G* ye **tam graf** (complete graph) denir ve *n* mertebeli bir graf K_n ile gösterilir.



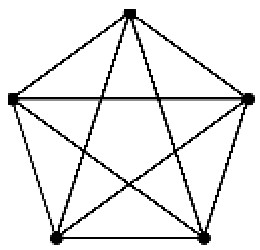
Şekil 1.5.1 $n=3$, 4 ve 5 için tam graflar

Tanım 1.5.2 Köşe kümesi *G* grafında bulunan köşe kümesi ile aynı, kenar kümeside *G* grafında bulunmayan kenarlardan oluşan ve bu sebeple komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yapan grafa ***G* grafının tamamlayıcı (tümleyen) grafı** denir.



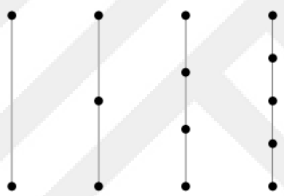
Şekil 1.6.2 Bir graf ve bu grafın tamamlayıcı grafı

Tanım 1.5.3 Bir grafta bulunan tüm köşeler aynı *r* dereceye sahip ise bu graflar **r-düzgün graflar** olarak adlandırılır.



Şekil 1.5.3 4-düzgün graf

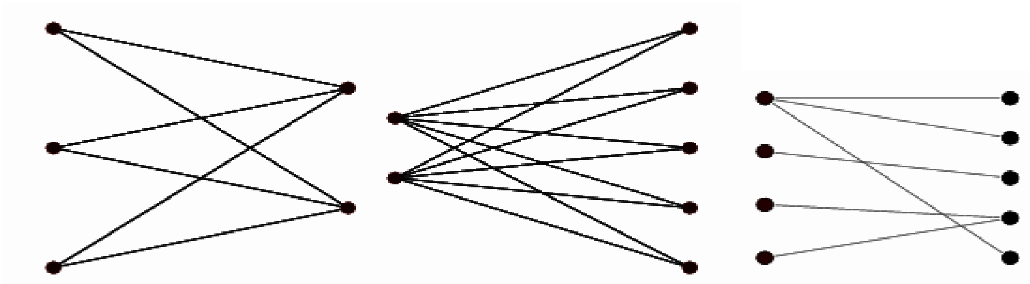
Tanım 1.5.4 Bir Γ grafında başlangıç ve bitiş köşelerinin derecesi *1* ve diğer köşelerinin derecesi *2* oluyorsa bu graflara **yol (path) graf** denir. Mertebesi *n* olan bir yol grafı ise P_n ile gösterilir.



P_2 P_3 P_4 P_5

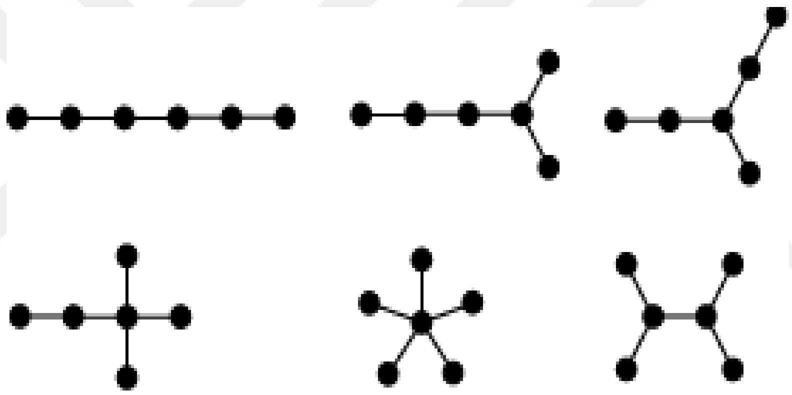
Şekil 1.5.4 Yol Graf Örneği

Tanım 1.5.5 Bir grafta *A* ve *B* şeklinde köşe kümeleri ayrılmış olsun, *A* köşesi ile *B* köşelerinin birleşmesiyle kenarlar oluşuyor ise bu graflar **iki parçalı graf** (bipartite graph) olarak adlandırılırlar. Köşe kümeleri *A* ve *B* olan iki parçalı bir grafta, tüm köşeler karşılıklı olarak birbirlerine komşu oluyorlar ise bu grafa **iki parçalı tam graf** (bipartite complete graph) denir. İki parçalı graflar $|A|=m$ ve $|B|=n$ olmak üzere $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir.



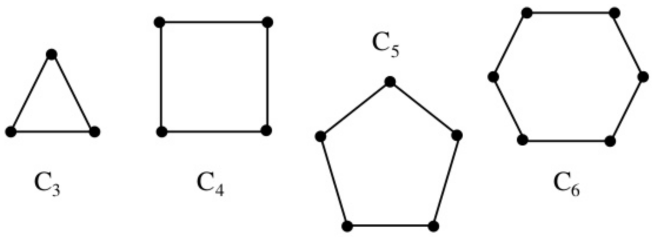
Şekil 1.5.5 İki parçalı tam graf örneği

Tanım 1.5.6 Bağlantılı bir grafta devir bulunmuyorsa grafa **ağaç graf** denir ve ağaç graf *T* ile gösterilir.



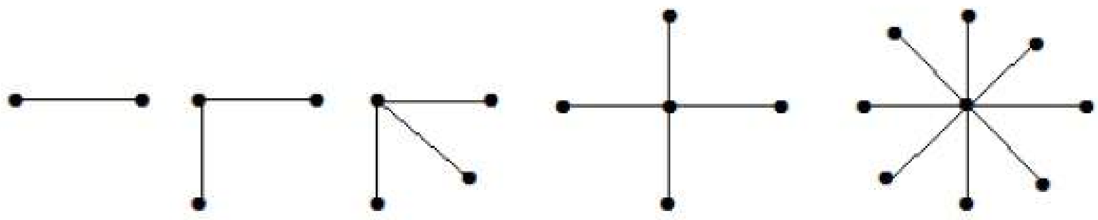
Şekil 1.5.6 Bazı ağaç graf çeşitleri

Tanım 1.5.7 Bir grafta başlangıç noktası ile bitiş noktası aynı ve tüm köşelerinin derecesi *2* ise bu çeşit graflara **çevre (cycle) graf** denir. *n* köşeli bir çevre graf $\boldsymbol{C_n}$ ile ifade edilir.



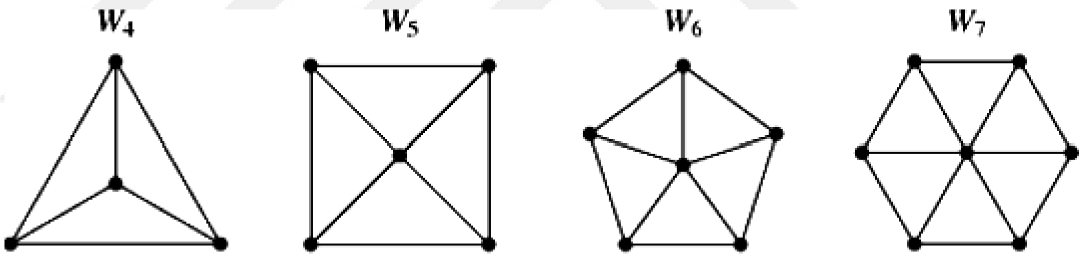
Şekil 1.5.7 Çevre graf

Tanım 1.5.8 *n* köşesi bulunan bir ağaç grafta, yalnızca bir köşesinin derecesi *n-1,* diğer köşelerinin dereceleri 1 olan graflar **yıldız graf** olarak adlandırılır. Yıldız graflar S_n ile temsil edilir. Aynı zamanda yıldız graflara tam iki parçalı grafta denir.



Şekil 1.5.8 Yıldız graflar

Tanım 1.5.9 S_n yıldız grafında art arda gelen çevre köşelerin herbirinin bir kenarla birleşmesi ile oluşan graflar **tekerlek (wheel) graf** olarak adlandırılırlar. Tekerlek graflar $\boldsymbol{W_n}$ ile gösterilir.



Şekil 1.5.9 Bazı Tekerlek graflar

1.6. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında birçok araştırmacının çalışma konusu olmuş graf baskınlık sayıları üzerine literatürde var olan bazı çalışmalardan bahsedeceğiz.

Anderson ve Livingston (1999) "*The Zero-divisor Graph of Commutative Ring*" isimli araştırmasında değişmeli halkaların sıfır-bölen grafları için birçok temel sonuç ortaya koymuşlardır.

Gross ve Yellen (2004), "*Handbook of Graph Theory*" adlı eserlerinde graf teorisinin temel terim bilgisi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

DeMeyer ve ark. (2010), "*The Zero-Divisor Graph Associated to a Semigroup*" isimli çalışmalarında hem graf hem de cebirsel teoriyi kullanarak sıfır bölen grafları tanımak için gerekli olan kenar sayısının alt sınırı elde edilmiştir.

Beck (1988), " *Coloring of Commutating Rings*" adlı eseri sıfır-bölen grafların başlangıç noktasıdır. Bu çalışmasında yazar halkaların sıfır-bölen grafını tanımlamış ve bu grafın renklendirmesi problemi üzerinde durmuştur.

Akgüneş (2013), "*Graf Parametleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar*" isimli doktora tezinde düzensizlik indeksi kullanılarak bir grafın yarıçapı için kuvvetli bir sınır elde etmiştir. Ayrıca monojenik yarıgruplar üzerinde tanımlanan özel grafların topolojik indekslerinin monojenik yarıgrubun mertebesi ile ifade edileceği gösterilmiştir.

Akgüneş (2012) "*Analyzing special parameters over zero-divisor graphs*" isimli çalışmasında p ve q farkı asalları için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen graflarının çeşitli parametrelerini yalnızca p ve q ya bağlı olarak bulmuştur.

Anderson ve Badawi (2008), "*On the Zero-Divisor Graph of a Ring*" çalışmalarından R halkasının sıfırdan farklı olan sıfır bölenleri ile halkanın elemanları arasında kesin bölünebilme koşulları ya da R nin idealleri ya da asal idealleri arasında karşılaştırılabilirlik koşullarını sağlayan R halkasının sıfır bölen grafı incelenmiştir.

Mitchell ve Hedetniemi (1977),"*Edge Domination In Trees*" adlı çalışmalarında kenar baskınlık sayısı üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Mitchell ve Hedetniemi (1977),"Independent Domination In Trees" çalışmalarında bağımsız baskınlık sayısı tanımını vermiş ve graf teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Allan ve Laskar (1978), "*On Domination and Independent Dominaton Numbers Of a Graph*" çalışmada graflar üzerinde baskınlık ve bağımsız baskınlık sayılarına değinilerek bir çalışma yapılmıştır.

Aykaç(2018), "*Özel Halkalar Üzerine Özel Graflar* " adlı yüksek lisans tezinde Sıfır bölen grafların bazı spektral özelliklerine yer verilmiştir.

Fink ve Jacobson(1984), "*n-Domination In Graphs, Graph Theory With Applications to Algorithms and Computer Science*" çalışmalarında *k*- baskınlık sayısına değinerek bir çalışma yapmışlardır.

Atapour ve Soltankhah (2009), " On Total Dominating Sets In Graphs " çalışmalarında baskınlık sayısı kümelerini konu alarak bir çalışma yapmışlardır.

Arumugam ve Velammal (1998), " Edge Domination In Graphs " makalelerinde kenar baskınlık sayısını graf teoriye katmış bunun üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Buckley ve Harary (1990), " Distance in Graphs " adlı eserlerinde graf teorisinin temel terim bilgisi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

2. $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ SIFIR BÖLEN GRAFININ BAZI BASKINLIK SAYILARI

Sıfır-Bölen Graflar cebirsel graflarda önemli bir yere sahiptir. Bu kısımda *p* ve *q* farklı asal sayılar olmak üzere $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, $\Gamma(R)$ grafının bazı özel baskınlık sayılarını inceleyeceğiz ve ayrıca graflarda baskınlık sayısı ile ilgili literatürdeki temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım: Değişmeli bir R halkasında, sıfırdan farklı her x için $x \cdot y = 0$ olmak şartı ile $y \in R - \{0\}$ elemanı mevcut ise x elemanına sıfır bölen denir. *R,* sıfır elemanını bulunduran komütatif bir halka ve $\mathbb{Z}(R)$, *R* halkasının sıfır bölenlerinin bulunduğu küme olsun. Sıfır-Bölen graf $\Gamma(R)$, köşe kümesi $x \cdot y = 0$ koşulunu sağlayan $x, \mathrm{y} \in \mathbb{Z}(R)^* = \mathbb{Z}(R) \backslash \{0\}$ elemanlarından oluşan (Bu koşulun aynı zamanda kenar oluşturma koşulu olduğu açıktır.) graflar sıfır bölen graf olarak adlandırılır. (Beck,1988)

2.1. Baskınlık sayısı (Domination Number)

Baskınlık sayısı graf teoride geniş bir araştırma alanına sahiptir. (Haynes ve ark. 1998), bu alandaki yayınları bir araya getirerek bir kitap yayınlamışlardır. Genel olarak da bir graftaki baskınlık sayısı *D* kümesi olmak üzere her bir küme, *D* deki her bir noktayla ya da *D* deki bir noktaya komşu olarak ifade edilmiştir. (Dündar ve Taçkın,2006)

Tanım 2.1.1 *D*, köşe kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $\forall x \in V/D$ için, *x* ler *D* de en az bir köşeye komşu ise *D* kümesi baskınlık kümesi (dominating set) olarak adlandırılır. Baskınlık sayısı ise bu kümeler arasında kardinalitesi en küçük olan (en az köşe sayısına sahip olan) ile bulunur ve *γ(G)* ile gösterilir. (Gross ve Yellen,2004)

Sonuç 2.1.2 K_n **,** *n* mertebeli tam graf olsun. K_n tam grafının baskınlık sayısı 1 dir. (Gross ve Yellen,2004)

Teorem 2.1.3 P_n , n mertebeli yol graf olsun. P_n yol grafının baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ tür.

(Gross ve Yellen,2004)

Örnek 2.1.4 P_2 grafını ele alalım.

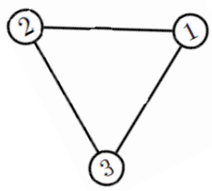
Baskınlık kümesi için köşelerden sadece birini almak yeterli olur. Bu yüzden baskınlık sayısı 1 olur diyebiliriz. Aynı zaman da $\left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$ olup teoremi sağlar.

P_4 grafını inceleyelim.

Baskınlık kümesi için ortadaki iki köşeyi seçeriz böylece baskınlık kümesi içindeki tüm köşeler diğerleri ile komşu olur. Dolayısıyla baskınlık sayısı 2 olur. Teoremi de uygularsak $\left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil = 1$ olur.

Teorem 2.1.5 C_n , n mertebeli çevre graf olsun. Çevre grafının baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ tür.(Gross ve Yellen,2004)

Örnek 2.1.6 C_3 grafını inceleyelim.



Baskınlık kümesi için üç köşeden herhangi biri seçilirse şart sağlanmış olur dolayısıyla baskınlık sayısı 1 olur. Teorem 2.1.5 ten uygularsak $\left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$ bulunur.

Sonuç 2.1.7 W_n , n mertebeli tekerlek graf olsun. Tekerlek grafının baskınlık sayısı 1 dir. (Gross ve Yellen,2004)

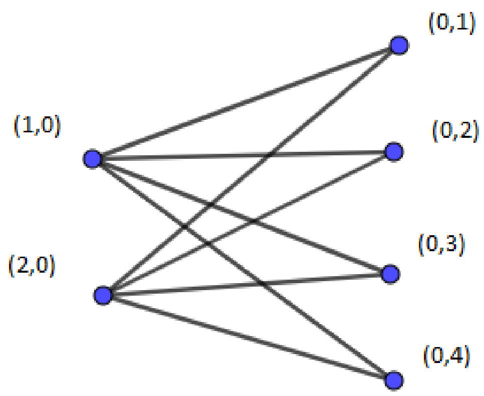
Çalışmamızın ilk temel sonucu $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ grafının baskınlık sayısı hakkındadır. Şimdi bu teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1.8 p ve q farklı asallar olmak üzere $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ grafının baskınlık sayısı 2 dir.

İspat: $D = \{(0,1),(1,0)\}$ olsun. $(0, j)$ köşelerinin hepsine komşu olan bir köşe olarak $(1,0)$ köşesini, $(i,0)$ köşelerinin hepsine komşu olan köşeyi de $(0,1)$ olarak seçelim. Bu iki eleman grafın tüm köşelerine komşu olduğundan baskınlık kümesinin minimum eleman sayısı 2 olur.

Örnek 2.1.9 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ grafını inceleyelim.

$\mathbb{Z}_3 = \{(1,0),(2,0)\}$, $\mathbb{Z}_5 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ köşe kümeleridir. Komşu noktalar aşağıda şekilde verilmiştir.



Şekil 2.1.8 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ grafı

Baskınlık kümesi için $(1,0)$ ve $(0,1)$ noktalarını seçersek tüm noktalara komşu olduğu açıktır ve baskınlık sayısı 2 dir.

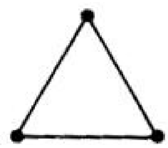
2.2. Toplam Baskınlık Sayısı (Total Domination Number)

Bu kısımda graf teorinin önemli çalışma alanlarından baskınlık sayılarının bir türü olan toplam baskınlık sayısını inceleyeceğiz. Haynes ve Slater (1998) yılında total baskınlık sayısı tanımı yapmış ve üzerine Atapour ve Soltankhah (2009) gibi birçok araştırmacı çalışmalarında total baskınlık sayısına çalışmalarında yer vermişlerdir.

Tanım 2.2.1 $S \subseteq V(G)$ kümesi için, *V*'deki her tepe, *S* nin bir köşesine bitişik ise *S* kümesine, *G* nin bir total baskın kümesi denir. *V* kümesinin *S* ile total olarak domine edildiği söylenir. Benzeri bir ifadeyle $N(S)=V(G)$ oluyorsa *S* kümesine *G* nin Total baskınlık kümesi denir. $\gamma_t(G)$ ile gösterilir. (Haynes ve Slater,1998)

Teorem 2.2.2 K_n, n mertebeli tam graf olsun. K_n tam grafının toplam baskınlık sayısı 2 dir. (Haynes ve Slater,1998)

Örnek 2.2.3 K_3 grafını inceleyelim.



K_3

Total baskınlık kümesi için herhangi bir köşeyi seçelim. Grafta hiçbir köşe kendi kendine komşu olmadığından yani döngü bulunmadığından bir başka köşe daha seçmeliyiz. Dolayısı ile total baskınlık kümesi en az 2 elemandan oluşur ve total baskınlık sayısı 2 olur.

Teorem 2.2.4 Herhangi bir P_n grafı için total baskınlık sayısı
$n \geq 3$ olmak üzere,

$$\gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 (\text{mod } 4) \\ \frac{n+2}{2}, & n \equiv 2 (\text{mod } 4) \\ \frac{n+1}{2}, & (\text{diğer tüm durumlar}) \end{cases}$$

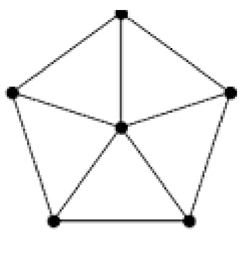
(Cockayne ve ark.1980)

Örnek 2.2.6 P_4 yol grafını inceleyelim.

2 ve 3 numaralı köşeleri total baskınlık kümesi olarak seçebiliriz. Böylece total baskınlık sayısı 2 olur. Teoremden yola çıkarsak $n=4$ olduğundan $\frac{n}{2}$ ifadesini kullanmamız gerekir. O yüzden buradan da total baskınlık sayısı 2 olarak elde edilir.

Sonuç 2.2.5 W_n, n mertebeli tekerlek graf olsun. W_n tekerlek grafının toplam baskınlık sayısı 2 dir .(Haynes ve Slater,1998)

Örnek 2.2.7 W_6 tekerlek grafını göz önüne alalım.



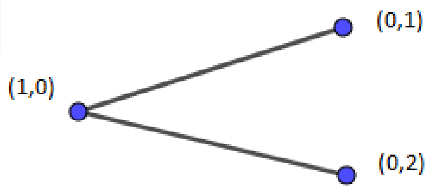
W_6 tekerlek grafında tam ortadaki köşeyi seçersek bütün kenarlara komşu olan köşeyi almış oluruz ancak total baskınlık kümesi tanımına göre tam ortadaki köşeye komşu olan bir köşe daha almalıyız. Dolayısıyla total baskınlık kümesi 2 elemandan oluşur ve total baskınlık sayısı 2 olur.

Diğer teoremimiz baskınlık sayısı ile ilgilidir. p ve q farklı asallar olmak üzere $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafının toplam baskınlık sayısı teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.2.8 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafının toplam baskınlık sayısı 2 dir.

İspat: (1,0) köşesi ve (0,1) köşesini göz önüne alalım. (1,0) köşesinin komşulukları $(0,j)$ köşeleridir. Aynı şekilde (0,1) köşesinin komşu olduğu köşelerde $(i,0)$ köşeleridir. (1,0) ve (0,1) köşelerinin komşulukları bize grafın tüm köşe elemanlarını verir ve bu iki köşe birbirine de komşu olduğu için tanım gereği total baskınlık sayısı 2 dir.

Örnek 2.2.9 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3\right)$ grafının toplam baskınlık sayısı 2 dir.



(1,0) ve (0,1) köşelerini alalım bu iki köşe birbirine de komşu olduğundan dolayı total baskınlık kümesi en az 2 elemanlı olup, toplam baskınlık sayısı 2 dir.

2.3. Bağımsız Baskınlık Sayısı (Independent Domination Number)

Graf teoride bağımsız baskınlık sayısı ifadesini Mitchell ve arkadaşı Hedetniemi (1977) kullanmıştır ve ardından Allan ve Laskar (1978) gibi birçok araştırmacının katkıları olmuştur. Şimdi bağımsız baskınlık sayısı tanımını verelim.

Tanım 2.3.1 *I,* bağımsız baskınlık kümesini göstermek üzere, $\forall(u,v)\in I$ için $N(u)\cap\{v\}=\varnothing$ oluyor ise I kümesi bağımsız baskınlık kümesidir. Yani baskınlık kümesi ile ilişkilendirecek olursak, baskınlık kümesindeki herhangi iki köşenin birbiri ile komşu olmaması gerektiği sonucunu elde ederiz. Elde edilen kümeler arasından kardinalitesi en küçük olan bağımsız baskınlık sayısına eşittir ve $i(G)$ ile gösterilir. (Mitchell ve Hedetniemi,1977)

Teorem 2.3.2 K_n, n mertebeli tam graf olsun. K_n tam grafının bağımsız baskınlık sayısı 0 dır. (Mitchell ve Hedetniemi,1977)

İspat: Herhangi bir K_n grafı için bağımsız baskınlık kümesi oluşturacak küme elde etmeye çalışalım. Bu küme için seçilen herhangi iki köşenin birbiri ile komşu olmaması gerekmektedir. Ancak tam graf yapılarında bütün kenarlar birbiri ile komşu olduğundan dolayı bu şartı sağlayan herhangi bir küme elde edeceğiz. Dolayısı ile bağımsız baskınlık sayısı sıfır olarak elde edilmiş olur.

Teorem 2.3.3 P_n , n mertebeli yol graf olsun. P_n yol grafının bağımsız baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ dir. (Mitchell ve Hedetniemi,1977)

Örnek 2.3.4 P_4 grafını inceleyelim.

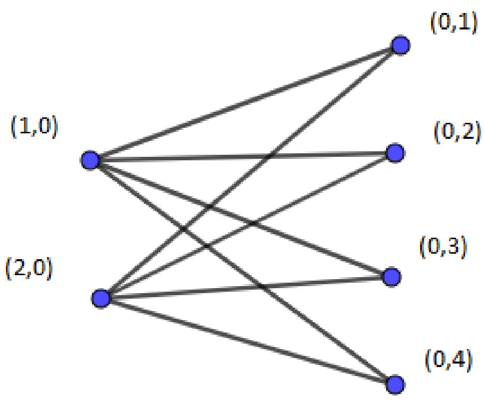
Bağımsız baskınlık kümesi için baştan 1. ve 3. köşeleri seçersek, baskınlık kümesi şartı sağlanmış olur ve aynı zamanda bu iki köşe birbirine komşu olmadığından bağımsız baskınlık kümesinin şartı da sağlanmış olur. Ayrıca Teorem 2.3.3 den yola çıkarsak $\left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil = 2$ sonucunu elde edilir.

Şimdi $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafı için bağımsız baskınlık sayısı ile ilgili teoremimizi ve ispatını verelim.

Teorem 2.3.5 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafının bağımsız baskınlık sayısı $p-1$ dir.

İspat: (1,0) ,(0,j) ler ile komşu olduğundan bu şekilde elde edilen tüm $\left[(1,0):\ (0,j)\right]$ kenarları (1,0) a komşu, (2,0) ile (0,*j*) ler komşu olduğundan bu şekilde elde edilen tüm $\left[(2,0):\ (0,j)\right]$ kenarları (2,0) a komşu olur. Bu şekilde devam edersek (*p*−1,0) ile (0,*j*) ler komşu olduğundan yine aynı şekilde tüm $\left[(p-1,0):\ (0,j)\right]$ kenarları (*p*−1,0) a komşu olup bağımsız baskınlık sayısı $p-1$ dir.

Örnek 2.3.6 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5\right)$ grafının bağımsız baskınlık sayısı 2 dir.



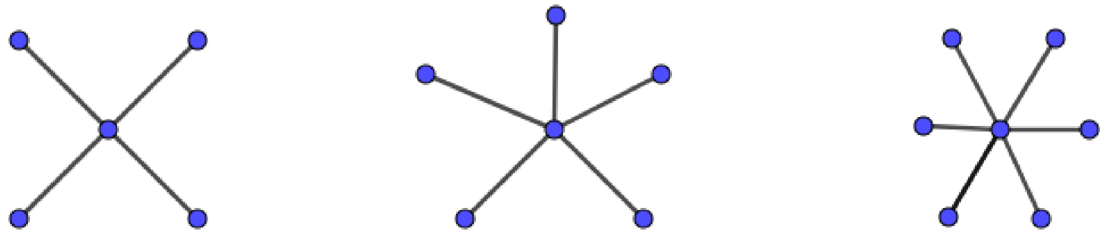
2.4. Kenar Baskınlık Sayısı (Edge Domination Number)

Aşağıdaki diğer temel teoremimiz kenar baskınlık sayısı ile ilgilidir. Öncelikle kenar baskınlık sayısının tanımını verelim. Tanım için Mitchell ve arkadaşı Hedetniemi (1977), Arumugam ve Velammal (1998) çalışmaları incelenmiştir.

Tanım 2.4.1 *X*, *E* kenar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, *X* kümesinde bulunan kenarlar dışındaki her kenar, *X* kümesinde olan bazı kenarlara komşu ise bu kümeye kenar baskınlık kümesi denir. Bu kümeler içinden kardinalitesi en küçük olan kenar baskınlık sayısı olarak alınır ve $\gamma'(G)$ ile gösterilir. (Mitchell ve Hedetniemi,1977)

Sonuç 2.4.2 S_n, n mertebeli yıldız graf olsun. S_n yıldız grafının kenar baskınlık sayısı 1 dir. (Mitchell ve Hedetniemi,1977)

Örnek 2.4.3 S_5, S_6 ve S_7 yıldız graflarını göz önüne alalım.



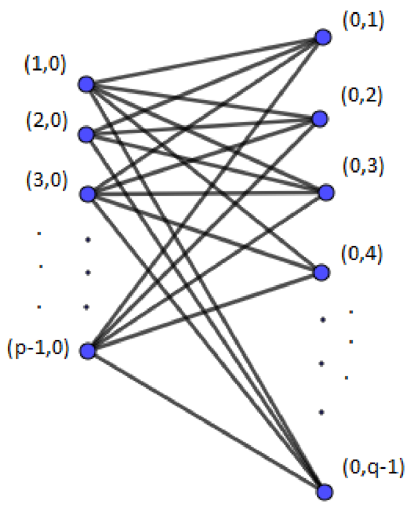
S_5 S_6 S_7

Yıldız grafların şekilleri gereği orta noktalar diğer köşelere komşu olup kenar oluştururlar. En az nokta ile kenar kümesi oluşturdukları için kenar baskınlık sayıları 1 dir.

Yukarıda tanım ve örneğini verdiğimiz kenar baskınlık sayısı ile ilgili temel teoremimizi verelim.

Teorem 2.4.4 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafının kenar baskınlık sayısı $p-1$ dir.

İspat:



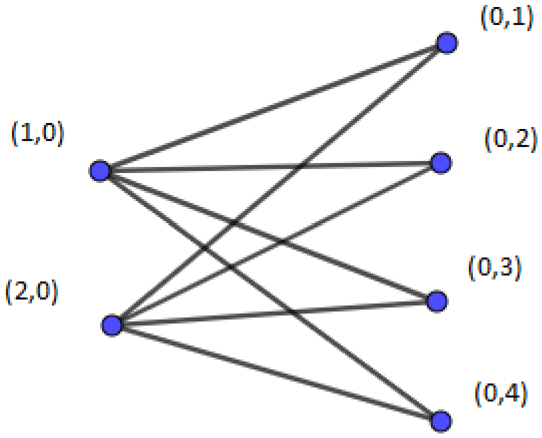
Kenar baskınlık kümesini minimum olarak

$\left[(1,0),(2,0),(3,0)\ldots(p-1,0)\right]$

köşeleri seçelim. Diğer köşeleri de
$\left[(0,1),(0,2),(0,3)...(0,q-1)\right]$
olan kenarlar olarak alırsak kenar baskınlık sayısı $p-1$ olarak bulunur.

Şimdi de teoremimizi $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ grafı örneği ile görelim.

Örnek 2.4.5 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ grafı için kenar baskınlık sayısını inceleyelim.



Kenar kümesi olarak $\{(1,0),(2,0)\}$ alalım. Kenar kümesinin komşu olduğu diğer noktaları da $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ seçelim. Kenar baskınlık sayısı 2 dir.

2.5. *k*- Baskınlık Sayısı (*k*- Domination Number)

Bu bölümde *k*- baskınlık sayısı tanımını ve tezimizin *k*- baskınlık sayısı ile ilgili temel teoremimizi vereceğiz. Öncelikle *k*- baskınlık sayısı tanımını verelim.

Bu kısımda (Fink ve Jacobson,1984) ve (Caro ve Roditty) çalışmalarındaki literatüre kazandırılmış temel tanımlardan faydalanılmıştır.

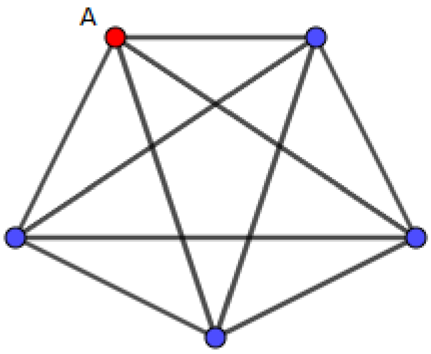
Tanım 2.5.1 Bir G grafında V köşe kümesi, S de köşe kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $\forall x \in S$ için x ler $(V-S)$ kümesinde en az k tanesine komşu ise en küçük k komşuluk kümesinin eleman sayısına k -baskınlık sayısı denir ve $\gamma_k(G)$ ile gösterilir. (Fink ve Jacobson.1984)

Şimdide tezimizin *k*-baskınlık sayısı ile ilgili sonuç ve teoremimizin ispatlarını verelim.

Sonuç 2.5.2 K_n , n mertebeli tam graf olsun. K_n tam grafının k - baskınlık sayısı 1 dir.

İspat: n köşeli K_n grafında bütün kenarları birbiriyle komşu olduğu tanımından açıktır. S kümesini herhangi bir köşe kümesinin alt kümesi olarak seçelim bu bir köşe diğer köşelerle komşu olup en az k tane komşuluk oluşturduğu için k baskınlık sayısı 1 dir.

Örnek 2.5.3 K_5 grafını inceleyelim.



S kümesi olarak A köşesi seçilsin. A köşesi $(V-S)$ deki bütün köşelere komşu olduğundan k baskınlık sayısı 1 olur.

Teorem 2.5.4 $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ grafının k - baskınlık sayısı k dır.

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ grafının tanımı gereği, k - baskınlık sayısı tanımını göz önüne alırsak

2- baskınlık sayısının 2,

3- baskınlık sayısının 3,

.

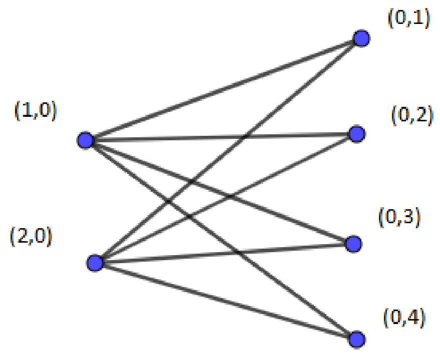
.

.

k-baskınlık sayısının *k* olduğu açıkça görülür.

Teoremin ifadelerini pekiştirmek ve sağladığı kolaylıkları görmek bakımından aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.5.6 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ grafı için $S = \{(1,0),(2,0)\}$, $V - S = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$



olsun.

Şekilde görüldüğü gibi $(V - S) \sim S$ en az 2 tanesine komşudur.

γ_2 için 2 tane komşuluk vardır ve 2- baskınlık sayısı 2 dir.

3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ GRAFININ BAZI BASKINLIK SAYILARI

Bu bölümde p ve q asal iken $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için bir önceki bölümde tanımlarını verdiğimiz baskınlık sayısı, total baskınlık sayısı, bağımsız baskınlık sayısı, kenar baskınlık sayısı ve son olarak 2- baskınlık sayısı teoremlerini ve ispatlarını vereceğiz.

Tanım 3.1 p ve q farklı asallar olsun. $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının komşulukları aşağıdaki gibidir:

- $(0,j)\sim(i,0)$ burada $0<\mathrm{j}<q^2$ ve $0<\mathrm{i}<\mathrm{p}^2$
- $(k_1p,j)\sim(k_2p,0)$ burada $0\leq\mathrm{j}<q^2$ ve $0<\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2<\mathrm{p}^2$
- $(0,t_1q)\sim(\mathrm{i},t_2q)$ burada $0\leq\mathrm{i}<\mathrm{p}^2$ ve $0<\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2<\mathrm{q}$
- $(k_1p,t_1q)\sim(k_2p,t_2q)$ burada $0<\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2<\mathrm{p}$ ve $0<\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2<\mathrm{q}$

3.1. Baskınlık Sayısı

$\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafına ait baskınlık sayısı Aykaç(2018) tarafından ifade edilmiştir.

Teorem 3.1.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının baskınlık sayısı 2 dir. (Aykaç,2018)

İspat: Eğer $0<k<\mathrm{p}$, $0<t<q$ için $(kp,0)$ ve $(0,tq)$ köşelerini alırsak, bu köşeler tüm köşeleri domine eder ve $(kp,0)\sim(0,tq)$ dır. Bu nedenle $\gamma_i\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=q^2-q$ $D\subseteq V(G)$ olan baskınlık kümesi $D=\{(kp,0),(0,tq)\}$ alabiliriz. Böylece $\gamma\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=2$ dir **.**

Örnek 3.1.2 $\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9)$ grafını inceleyelim.

$D = \{(2,0),(0,3)\}$ olsun.

$(2,0) \sim \{(1,0),(3,0),(2,1),(2,2),...,(2,8),(0,3),(0,6),(1,6),(2,6),(3,6)\}$

$(0,3) \sim \{(2,6),(1,6),(0,6),(3,6),(1,3),(2,3),(3,3),(3,0),(1,0)\}$

Böylelikle D kümesi grafın tüm köşelerini domine eder ve baskınlık sayısı 2 dir.

3.2. Total Baskınlık Sayısı

$\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için Tanım 2.2 de tanımını verdiğimiz Total baskınlık sayısı ile ilgili temel teoremimiz şu şekildedir.

Teorem 3.2.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının total baskınlık sayısı 2 tür.

İspat: $(p,0) \sim (0,q)$ köşelerini alırsak diğer köşelere kenar oluşturur ve ayrıca bu iki köşe birbiri ile komşu olduğundan tanım gereği total baskınlık sayısı 2 olur.

3.3. Bağımsız Baskınlık Sayısı

Bağımsız baskınlık sayısı tanımını göz önünde bulundurarak, $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için temel teoremimizi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.3.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının bağımsız baskınlık sayısı $q^2 - q$ dur.

İspat: Bağımsız köşeler $(i,0)-(i,tq)$ dir.

$(i,0)$ ların derece dizisi (q^2-1),

(i,tq) ların derecesi ise $(q-1)$ olup

$(i,0)-(i,tq)=(q^2-1)-(q-1)=q^2-q$ olur.

Teoremimizi aşağıdaki örnek ile pekiştirelim.

Örnek 3.3.2 $\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9)$ grafı için bağımsız baskınlık sayısını inceleyelim.

$(i,0)$ ların derece dizisi *8*,

(i,tq) ların derecesi ise *2* olup *8-2* den bağımsız baskınlık sayısı *6* dır.

3.4. Kenar Baskınlık Sayısı

2. bölümde vermiş olduğumuz kenar baskınlık sayısı tanımını gereği, $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için kenar baskınlık sayısı teoremimizi verelim.

Teorem 3.4.1 : $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının kenar baskınlık sayısı $p^2 + pq - 2$ dir.

İspat: Grafın tanımından komşulukları şu şekildedir.

- $(0,j) \sim (i,0)$ burada $0 < j < q^2$ ve $0 < i < p^2$
- $(k_1 p, j) \sim (k_2 p, 0)$ burada $0 \le j < q^2$ ve $0 < k_1, k_2 < p^2$
- $(0, t_1 q) \sim (i, t_2 q)$ burada $0 \le i < p^2$ ve $0 < t_1, t_2 < q$
- $(k_1 p, t_1 q) \sim (k_2 p, t_2 q)$ burada $0 < k_1, k_2 < p$ ve $0 < t_1, t_2 < q$

Burada

$(i,0)$ ların sayısı $p^2 - 1$ tane,

$(kp,0)$ lerin sayısı $p-1$ tane,

$(0,tq)$ lerin sayısı $q-1$ tane,

(kp,tq) ların sayısı $(p-1)(q-1)$ tanedir.

Bu kümelerin tamamı grafın kenar kümesini kapsar. O halde

$(p^2-1)+(p-1)+(q-1)+(p-1)(q-1) = p^2 + pq - 2$

Sayısı tüm kenarları kapsayan en küçük elemanlı köşe kümesidir.

Teoremimizi bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.4.2 : $\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9)$ grafı için kenar baskınlık sayısını inceleyelim.

$(i,0)$ ların sayısı 3 tane,

$(kp,0)$ ların sayısı 1 tane,

$(0,tq)$ ların sayısı 2 tane,

(kp,tq) ların sayısı 2 tanedir.

Toplamda 8 köşe tüm kenarları oluşturmaktadır. Kenar baskınlık sayısı 8 dir.

3.5. 2- Baskınlık Sayısı

Son olarak $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için 2-baskınlık sayısı teoremimizi verelim. Ayrıca $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının *k*-baskınlık sayısında diğer *k* ların bulunması bir araştırma konusu olarak sunulabilir.

Teorem 3.5.1 : $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının $k = 2$ baskınlık sayısı 2 dir.

İspat: *k*-Baskınlık sayısı tanımından yola çıkarak $S = \{(p,0),(0,q)\}$ olsun. *S* nin elemanları $(V - S)$ kümesinin elemanları ile komşuluk oluşturur. Tanım gereği $(V - S) \sim S$ en az 2 tanesine komşu olup baskınlık sayısı 2 dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde genel graf tanımları ile beraber graf çeşitleri verilmiştir. Bunun yanında bazı baskınlık sayıları verilmiş ve çeşitli graflarda incelenmiştir.

Tez üç ana başlık altında toplanmıştır ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin giriş bölümünde basit graflar tanıtılmış ve kaynak araştırılması sunulmuştur.

İkinci bölümde p ve q asal iken $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ grafı üzerinde çeşitli baskınlık sayılarına (baskınlık sayısı, Total baskınlık sayısı, Bağımsız baskınlık sayısı, kenar baskınlık sayısı, *k*-baskınlık sayısı) yer verilmiştir. Teoremler ve Sonuçların ispatları yapılmış ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde p ve q asal iken $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının bazı baskınlık sayıları bulunmuş ve ispatları yapılmıştır.

5.2 Öneriler

Bu tezde bir cebirsel yapı üzerinde tanımlanan ve incelenen bazı halka graflarının baskınlık sayıları araştırmacılar için bir tavsiye olabilir. Ayrıca bulunan baskınlık çeşitleri dışında diğer baskınlık çeşitleri de incelenebilir.

6.KAYNAKLAR

Akgüneş, N., 2012, Analyzing Special Parameters Over Zero-Divisor Graphs, *In AIP Conference Proceedings Vol. 1479*

Allan, R. B. ve Laskar, R., 1978, On Domination and Independent Domination Numbers of a Graph, *Discrete Mathematics*, 23 (1978), 73-76.

Anderson, D. F., Badawi, A., 2008, On the Zero-Divisor Graph of a Ring, *Communications in Algebra*, 36(8), 3073-3092.

Anderson, D. F., Livingston, P. S., 1999, The Zero-Divisor Graph of Commutative Ring, *Journal of Algebra,* 217, 434-447.

Arumugam, S. , Velammal, S. , 1998, Edge Domination in Graphs, *Taiwanese Journal of Mathematıcs,* Vol. 2., No. 2, 173-179.

Atapour, M. , Soltankhah, N., 2009, On Total Dominating Sets in Graphs, *Int. J. Contemp. Math. Sciences,* Vol. 4. 253-257.

Aykaç, S., 2018, Özel Halkalar Üzerinde Özel Graflar, Yüksek lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Buckley. F., Harary. F., 1990, Distance in Graphs, *Addison Wesley Pub.*, California.

DeMeyer, L., Greve, L., Sabbaghi, A., Wang, J., 2010, The Zero-Divisor Graph Associated to a Semigroup, *Communications in Algebra*, 38(9), 3370-3391.

Dündar, P., Taçkın N., 2006, Graflarda Baskınlık ve Total Baskınlık Sayısı, *Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü*. İzmir.

Fink, J.F., Jacobson, M.S., 1984, n-Domination In Graphs, Graph Theory With Applications to Algorithms and Computer Science, *Proc. Of 5 th International Conference,Kalamazoo, 283-300.*

Gross, J. L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory,*Chapman Hall, CRC Press*.

Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J., 1998 Fundamentals of Domination in Graphs. *Marcel Dekker*, New York, MR 1605684

Mitchell, S., Hedetniemi, S.T., 1977, Edge Domination In Trees,*Congr,Numer*, 19, 489-509.

Mitchell, S., Hedetniemi, S.T., 1977, Independent Domination In Trees, Proc. Eighth S.E. Conf on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Baton Rouge.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	MERVE ÇAKIN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	ILGIN-1991
Telefon	**:**	05077949871
Faks	**:**	
e-mail	**:**	4232merve@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	**:**	Cemil Keleşoğlu Lisesi, Karatay, Konya	2009
Üniversite	**:**	Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta	2014
Yüksek Lisans	**:**	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2018

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2015	MEB	(Ücretli) Matematik Öğretmeni
2016- …	Gençlik Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR: Akgüneş, N., Ozdemir, M., 2016, *"A New Type Graph and Their Parameters"*, 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conferance, Mersin.