T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Bilal ER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2022
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASYONEL BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Bilal ER

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2022, 41 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; "On solutions of a system of two fourth-order difference equations" başlıklı makale ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde; $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ ve $p \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^p},\ n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık denklemi tanımlanmış ve bu denklemin çözümleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık fark denklemi, Çözümlerin varlığı, Sınırlılık, Yakınsama.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON RATIONAL FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS

Bilal ER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2022, 41 Pages

Jury
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of five sections.

In the first section; basic definitions and theorems are given.

In the second section; informations about some of the studies are given.

In the third section; the article entitled “On solutions of a system of two fourth-order difference equations” is discussed.

In the fourth section; we define the fuzzy equation

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^{p}},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

where $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ and $p \in \mathbb{Z}^+$. Also, solutions of this equation are investigated.

In the fifth section, conclusions and suggestions are given.

Keywords: Fuzzy difference equation, Existence of solutions, Boundedness, Convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA danışmanlığında hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya ve hep yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

.

Bilal ER
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	:	Sıfırdan başlayan tam sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}_F$	:	Bulanık sayılar
$\mathbb{R}_F^+$	:	Pozitif bulanık sayılar
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$>$	:	Büyüktür
$<$	:	Küçüktür
$\geq$	:	Büyük eşit
$\leq$	:	Küçük eşit
$\exists$	:	Bazı
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
Δ	:	İleri fark operatörü
J_F	:	F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\bar{x}$	:	x denge noktası

1. GİRİŞ

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1.Bulanık Sayılar

Tanım 1.1.1. $X \neq \varnothing$ ve $A \subset X$ ise

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.1.1}$$

ile tanımlanan $X_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın üyelik fonksiyonu denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.2. $X \neq \varnothing$ ve $I = [0,1]$ ise $\mu_A : X \to [0,1]$ ile karakterize edilen

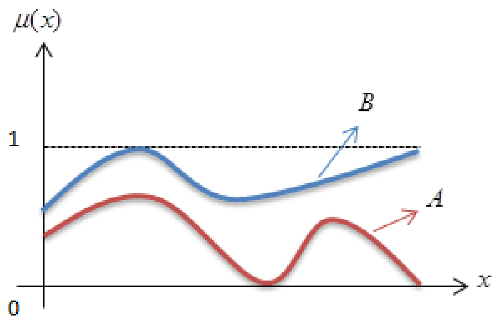
$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \tag{1.1.2}$$

kümesine X de bir bulanık (fuzzy) küme denir. Burada, μ_A ya A nın üyelik fonksiyonu ve $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in I$ değerine x in A ya ait olma derecesi adı verilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.3. $X \neq \varnothing$, $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $c \in [0,1]$ ise $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = c$ ile karakterize edilen A ya sabit bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.4. A ile B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B ye eşit bulanık kümeler denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.5. A ile B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise B bulanık kümesi A bulanık kümesini kapsar denir. $A \subset B$ $(A \leq B)$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.1. *B* bulanık kümesinin *A* bulanık kümesini kapsaması

Tanım 1.1.6. A, B, C kümeleri X de üç bulanık küme ise

$$\{(x,\mu_C(x)):\ \text{Her } x\in X \text{ için } \mu_C(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\} \tag{1.1.3}$$

ile tanımlanan kümeye A ve B bulanık kümelerinin kesişimi denir. $A\cap B$ $(A\wedge B)$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.7. A, B, C kümeleri X de üç bulanık küme ise

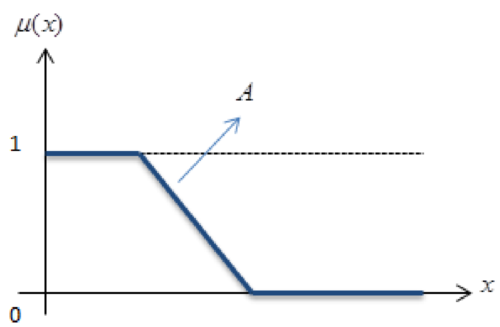
$$\{(x,\mu_C(x)):\ \text{Her } x\in X \text{ için } \mu_C(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\} \tag{1.1.4}$$

ile tanımlanan kümeye A ve B bulanık kümelerinin birleşimi denir. $A\cup B$ $(A\vee B)$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

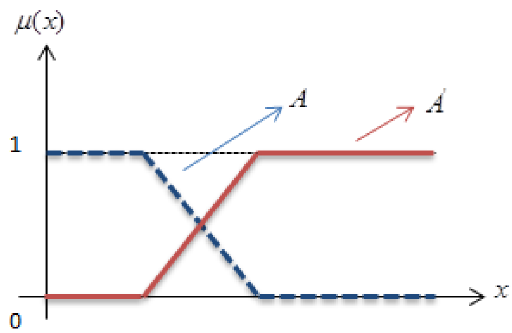
Tanım 1.1.8. A, X de bir bulanık küme ise

$$\{(x,\mu_{A'}(x)):\text{Her } x\in X \text{ için } \mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)\} \tag{1.1.5}$$

ile tanımlanan kümeye A kümesinin tümleyeni denir. A' ile gösterilir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.2. *A* bulanık kümesi



Şekil 1.1.3. *A* bulanık kümesinin tümleyeni

Tanım 1.1.9. A ile B kümeleri X de iki bulanık küme ise

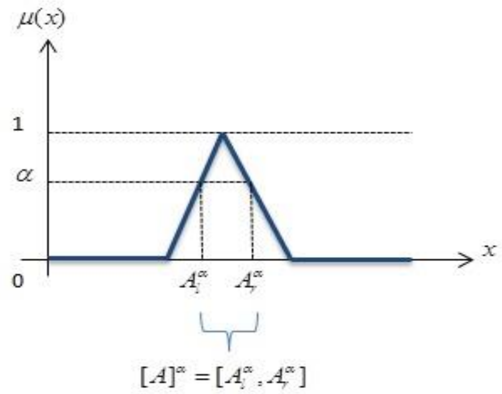
$$\{(x, \mu_{A\setminus B}(x)) : \text{ Her } x \in X \text{ için } \mu_{A\setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B'}(x)\}\} \tag{1.1.6}$$

ile tanımlanan kümeye A bulanık kümesinin B bulanık kümesinden farkı denir. $A \setminus B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.10. A, X de bir bulanık küme ise A kümesinin $\alpha-$kesimi

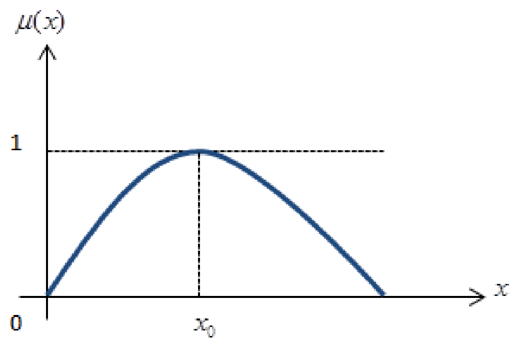
$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \ \alpha \in (0,1] \tag{1.1.7}$$

ile tanımlanır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.1.4. *A* bulanık kümesinin α -kesimi

Tanım 1.1.11. A, X de bir bulanık küme olsun. Eğer $\exists x_0 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ise A bulanık kümesi normaldir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.1.5. *A* normal bulanık kümesi

Tanım 1.1.12. A, X de bir bulanık küme ise A nın destek (dayanak) kümesi

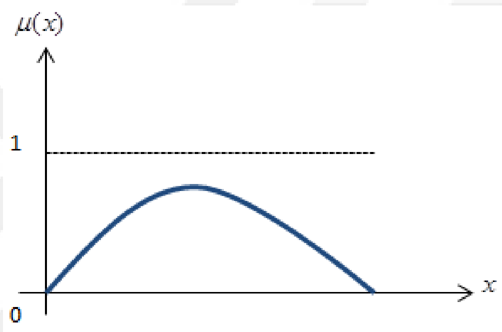
$$\operatorname{supp}(A)=\{x\in X : \mu_A(x)>0\} \tag{1.1.8}$$

ile tanımlanır (Bede, 2013).

Tanım 1.1.13. A, X de bir bulanık küme olsun. Eğer $\forall\lambda\in[0,1]$ ve $\forall x_1,x_2\in X$ için

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \min\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\} \tag{1.1.9}$$

ise A bulanık dışbükeydir denir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.6. A konveks bulanık kümesi

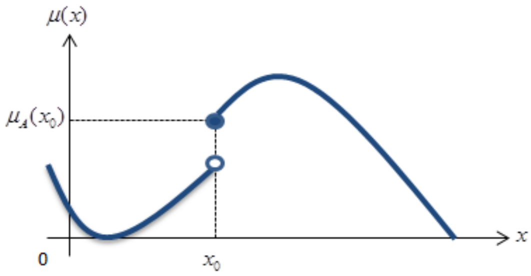
Teorem 1.1.1. A ve B bulanık dışbükey ise $A\cap B$ de bulanık dışbükeydir (Zadeh, 1965).

Teorem 1.1.2. A nın bulanık dışbükey olması için gerek ve yeter şart her $\forall\alpha\in(0,1]$ için $[A]^\alpha$ kümesinin klasik anlamda dışbükey olmasıdır (Zadeh, 1965).

Uyarı 1.1.1. A nın α-kesim kümesi olan $[A]^\alpha=[A_l^\alpha,A_r^\alpha]$ için $\alpha'<\alpha$ ise $A_l^{\alpha'}\leq A_l^\alpha$ ve $A_r^\alpha\leq A_r^{\alpha'}$ iken A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu sürekli ise A bulanık kümesi bulanık dışbükeydir.

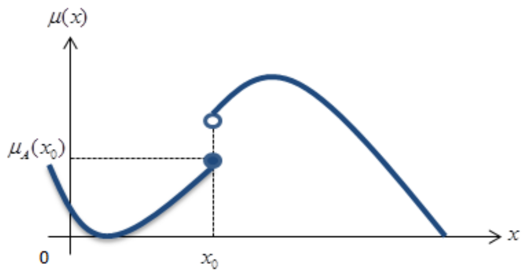
Tanım 1.1.14. A kümesi X de bir bulanık küme olsun.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu_A(x) < \mu_A(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa μ_A ile karakterize edilen A bulanık kümesi x_0 noktasında üst-yarı süreklidir.



Şekil 1.1.7. Üst-yarı sürekli

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu_A(x_0) - \varepsilon < \mu_A(x)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa μ_A ile karakterize edilen A bulanık kümesi x_0 noktasında alt-yarı süreklidir (Bede, 2013).



Şekil 1.1.8. Alt-yarı sürekli

Tanım 1.1.15. $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ ile karakterize edilen $\mathbb{R}$ de bir A bulanık kümesi;

(a) A normaldir.

(b) A bulanık dışbükeydir.

(c) μ_A üst-yarı süreklidir.

(d) $\operatorname{supp}(A)$ nın kapanışı kompakttır.

şartaları sağlıyorsa A ya bir bulanık (fuzzy) sayı denir. $\mathbb{R}$ deki bütün bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F$ veya $F(\mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

Tanım 1.1.16. Eğer $\operatorname{supp}(A) \subset (0,\infty)$ ise pozitiftir denir. Pozitif bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F^+$ ile gösterilir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

Örnek 1.1.1.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.30 \\ \dfrac{10x-3}{2}, & 0.30 \le x \le 0.50 \\ \dfrac{7-10x}{2}, & 0.50 \le x \le 0.70 \\ 0, & 0.70 < x \end{cases}$$

ile tanımlanan $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ ile karakterize edilen A bir bulanık sayıdır.

$\dfrac{10x-3}{2} = \alpha$ ise $x = \dfrac{2\alpha+3}{10}$ dir. $\dfrac{7-10x}{2} = \alpha$ ise $x = \dfrac{7-2\alpha}{10}$ dir. Bu durumda, $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha] = \left[\dfrac{2\alpha+3}{10}, \dfrac{7-2\alpha}{10}\right]$ olarak bulunur.

Tanım 1.1.17. $A, B \in \mathbb{R}_F$, $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha]$ olsun.

(a) A ile B nin toplamı; $\forall \alpha \in (0,1]$ için

$$A + B = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [A_l^\alpha + B_l^\alpha, A_r^\alpha + B_r^\alpha] \tag{1.1.10}$$

ile tanımlanır. $A+B$ nin üyelik fonksiyonu $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A+B}(z) = \bigcup_{z=x+y} (\mu_A(x) \cap \mu_B(y)) \tag{1.1.11}$$

dir.

(b) A ile B için çıkarma işlemi; $\forall \alpha \in (0,1]$ için

$$A - B = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [A_l^\alpha - B_l^\alpha, A_r^\alpha - B_r^\alpha] \tag{1.1.12}$$

ile tanımlanır. $A-B$ nin üyelik fonksiyonu $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A-B}(z)=\bigcup_{z=x-y}(\mu_A(x)\cap\mu_B(y)) \tag{1.1.13}$$

dir.

(c) A ile B nin çarpımı; $\forall\alpha\in(0,1]$ için

$$A\times B=[A]^\alpha\times[B]^\alpha$$

$$=[\min\{A_l^\alpha B_l^\alpha, A_l^\alpha B_r^\alpha, A_r^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha\}, \max\{A_l^\alpha B_l^\alpha, A_l^\alpha B_r^\alpha, A_r^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha\}] \tag{1.1.14}$$

ile tanımlanır. $A\times B$ nin üyelik fonksiyonu $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$\mu_{A\times B}(z)=\bigcup_{z=x.y}(\mu_A(x)\cap\mu_B(y)) \tag{1.1.15}$$

dir. Eğer $A,B\in\mathbb{R}_F^+$ ise

$$A\times B=[A]^\alpha\times[B]^\alpha=[A_l^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha] \tag{1.1.16}$$

ile tanımlanır.

(d) Eğer $A,B\in\mathbb{R}_F^+$ ve $B_l^\alpha.B_r^\alpha>0$ ise A ile B için bölme işlemi; $\forall\alpha\in(0,1]$ için

$$A/B=[A]^\alpha/[B]^\alpha=\left[\frac{A_l^\alpha}{B_r^\alpha},\frac{A_r^\alpha}{B_l^\alpha}\right] \tag{1.1.17}$$

ile tanımlanır. A/B nin üyelik fonksiyonu $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$\mu_{A/B}(z)=\bigcup_{z=\frac{x}{y}}(\mu_A(x)\cap\mu_B(y)) \tag{1.1.18}$$

dir.

Tanım 1.1.18.

(a) $A,B\in\mathbb{R}_F$, $[A]^\alpha=[A_l^\alpha,A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha=[B_l^\alpha,B_r^\alpha]$ ise A nın boyu, $\forall\alpha\in(0,1]$ için

$$\|A\|=\sup\left\{\max\left\{\left|A_l^\alpha\right|,\left|A_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.1.19}$$

ile tanımlanır. A ile B arasındaki uzaklık ise

$$D(A,B)=\sup\left\{\max\left\{\left|A_l^\alpha-B_l^\alpha\right|,\left|A_r^\alpha-B_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.1.20}$$

ile tanımlanır.

(b) (x_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $x\in\mathbb{R}_F$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=x$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n,x)=0$ olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 1.1.19. $A,B\in\mathbb{R}_F$, $[A]^\alpha=[A_l^\alpha,A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha=[B_l^\alpha,B_r^\alpha]$ ise

$$MIN(A,B)=\left[\min\left\{A_l^\alpha,B_l^\alpha\right\},\min\left\{A_r^\alpha,B_r^\alpha\right\}\right] \tag{1.1.21}$$

ve

$$MAX(A,B)=\left[\max\left\{A_l^\alpha,B_l^\alpha\right\},\max\left\{A_r^\alpha,B_r^\alpha\right\}\right] \tag{1.1.22}$$

ile tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

Tanım 1.1.20 Eğer $\forall n\geq n_0$ için $MIN(x_n,C)=C$ ve $MAX(x_n,D)=D$ olacak şekilde $C,D\in\mathbb{R}_F$ varsa (x_n) bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Tanım 1.1.21. (x_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $x\in\mathbb{R}_F$ olsun. Eğer $\forall n\geq n_0$ için

$$MIN(x_m,x)=x_m \text{ ve } MIN(x_s,x)=x \tag{1.1.23}$$

veya

$$MIN(x_m, x) = x \text{ ve } MIN(x_s, x) = x_s \tag{1.1.24}$$

olacak şekilde $s, m \geq n_0$ şartını sağlayan $s, m \in \mathbb{N}_0$ varsa (x_n) dizisi x civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Lemma 1.1.1. Eğer $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times ... \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon ve $B_0, B_1, ..., B_k \in \mathbb{R}_F$ ise

$$\left[f(B_0, B_1, ..., B_k) \right]^\alpha = f([B_0]^\alpha, [B_1]^\alpha, ..., [B_k]^\alpha) \tag{1.1.25}$$

dır (Papaschinopoulos ve Stefanidou, 2003).

1.2. Fark Denklemleri

Tanım 1.2.1. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}) = 0 \tag{1.2.1}$$

veya

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}) \tag{1.2.2}$$

denklemine fark denklemi denir (Soykan ve ark., 2017).

Tanım 1.2.2. x_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (1.2.1) denklemini sağlıyor ise x_n e (1.2.1) denkleminin bir çözümü denir (Soykan ve ark., 2017).

Teorem 1.2.1. Eğer $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $f : I^{k+1} \to I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}\right),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2.3}$$

denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.3. Eğer (1.2.3) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$ ise $\bar{x}$ noktasına (1.2.3) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.4. (1.2.3) denkleminin bir denge noktası $\bar{x}$ olsun.

(a) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken $n \geq 1$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $\bar{x}$ kararlıdır.

(b) Eğer $\bar{x}$ kararlı, $x_0, ..., x_{-k} \in I$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma > 0$ var ise $\bar{x}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(c) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ çekim noktasıdır.

(d) Eğer $\bar{x}$ kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ global asimptotik kararlıdır.

(e) Eğer $\bar{x}$ kararlı değil ise kararsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.5. $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 0, 1, \ldots, k$ olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ deki değerleri

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \tag{1.2.4}$$

ise

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} q_i z_{n-i}, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2.5}$$

denklemine (1.2.3) denkleminin $\bar{x}$ civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir. (1.2.5) denkleminden elde edilen

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} q_i \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.2.6}$$

denklemine ise (1.2.3) denkleminin $\bar{x}$ deki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.2.6) denkleminin her kökü mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.2.6) denkleminin en az bir kökü mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.6. (1.2.3) denkleminin bir denge noktası $\bar{x}$ olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ için $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ kümesinin bütün elemanları $\bar{x}$ den büyük veya eşit, $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ ise $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ kümesine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı-dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ için $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ kümesinin bütün elemanları $\bar{x}$ den küçük, $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ ise $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ kümesine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı-dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.7. Eğer her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde $P, Q \in \mathbb{R}$ sayıları var ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.2.3. Eğer $I, J \subset \mathbb{R}$, $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \to I$ ve $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \to J$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her $(x_{-i}, y_{-i}) \in I \times J$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}\right) \\ y_{n+1} &= g\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}\right) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

fark denklem sisteminin bir tek $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

Tanım 1.2.8. Eğer (1.2.7) sisteminde

$$\bar{x} = f\left(\bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}\right),\ \bar{y} = g\left(\bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}\right) \tag{1.2.8}$$

ise $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ noktasına (1.2.7) sisteminin denge noktası denir.

(1.2.7) sistemi

$$X_n=\left(x_n,\dots,x_{n-k},y_n,\dots,y_{n-k}\right)^T, \quad F: I^{k+1}\times J^{k+1}\to I^{k+1}\times J^{k+1}$$

ve

$$F\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ y_0 \\ . \\ . \\ . \\ y_k \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} f(x_0,\dots,x_k,y_0,\dots,y_k)) \\ . \\ . \\ . \\ x_{k-1} \\ g(x_0,\dots,x_k,y_0,\dots,y_k) \\ . \\ . \\ . \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

için

$$X_{n+1}=F(X_n),\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{1.2.10}$$

vektör formunda yazılır. Eğer (1.2.7) sistemi $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasına sahip ise (1.2.10) sisteminin denge noktası $\bar{X}=\left(\bar{x},\dots,\bar{x},\bar{y},\dots,\bar{y}\right)^T$ dir (Kocic ve Ladas, 1993).

Bu çalışmada, bir vektörün veya matrisin normu $\|...\|$ sembolü ile ve (1.2.10) sisteminin bir başlangıç şartı $X_0\in I^{k+1}\times J^{k+1}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 1.2.9. (1.2.10) sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ olsun.

(a) Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\left\|X_0-\bar{X}\right\|<\delta$ ve $n\geq 1$ için $\left\|X_n-\bar{X}\right\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ var ise $\bar{X}$ kararlıdır. Aksi halde kararsızdır.

(b) Eğer $\bar{X}$ kararlı ve $n\to\infty$ iken $X_n\to\bar{X}$ olacak şekilde $\left\|X_0-\bar{X}\right\|<\gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma>0$ var ise $\bar{X}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(c) Eğer $n \to \infty$ iken $X_n \to \bar{X}$ ise $\bar{X}$ çekim noktasıdır.

(d) Eğer $\bar{X}$ hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası ise global asimptotik kararlıdır (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.2.10) sisteminin $\bar{X}$ deki lineerleştirilmiş sistemi; F dönüşümünün $\bar{X}$ deki Jacobian matrisi J_F ise

$$Z_{n+1} = J_F Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2.11}$$

Şeklindedir. (1.2.10) sisteminin $\bar{X}$ civarındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ için

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2(k+1)} + a_1^{2k+1}\lambda + \cdots + a_{2k+1}\lambda + a_{2(k+1)} \tag{1.2.12}$$

şeklindedir (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.2.4. (1.2.10) sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ olsun. Eğer J_F Jacobian matrisinin bütün öz değerleri $\bar{X}$ denge noktası için mutlak değerce 1 den küçük ise $\bar{X}$ lokal asimptotik kararlıdır. Eğer öz değerlerden en az biri mutlak değerce 1 den büyük ise $\bar{X}$ kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; bulanık denklemler ile ilgili çalışmalardan büyük bir kısmı ele alınmıştır:

Deeba ve arkadaşları 1996 yılında yayımlanan "A fuzzy difference equation with an application" başlıklı makalede; $p, q, w_0 \in \mathbb{R}_F$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = pw_n + q,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.1}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Deeba ve De Korvin 1999 yılında yayımlanan "Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO_2 level in the blood" başlıklı makalede; $a, b, m, C_{-1}, C_0 \in \mathbb{R}_F$ olmak üzere,

$$C_{n+1} = C_n - abC_{n-1} + m,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos 2002 yılında yayımlanan "On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$" başlıklı makalede; $A, B, w_0 \in \mathbb{R}_F$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = A + \frac{B}{w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.3}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos 2002 yılında yayımlanan "On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$" başlıklı makalede; $A \in \mathbb{R}_F$ ve $m \in \{1, 2, ...\}$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = A + \frac{w_n}{w_{n-m}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.4}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelenmişlerdir.

Papaschinopoulos ve Stefanidou 2003 yılında yayımlanan “Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $k \in \mathbb{N}_1$ ve $i \in \{0,1,...,k\}$ için $p_i \in \mathbb{R}^+$ ve $A_i, w_{-k}, w_{-k+1}, ..., w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{w_{n-i}^{p_i}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.5}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos 2005 yılında yayımlanan “Behavior of the positive solutions of fuzzy max-difference equations” başlıklı makalede; $w_{-k}, w_{-k+1}, ..., w_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_F^+$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{\alpha}{w_n}, \frac{\alpha}{w_{n-1}}, ..., \frac{\alpha}{w_{n-k}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.6}$$

ve

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{\alpha}{w_n}, \frac{\beta}{w_{n-1}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.7}$$

bulanık denklemlerinin çözümlerini incelemişlerdir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos 2006 yılında yayımlanan “The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max-difference equation” başlıklı makalede; $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $d = \max\{k, m\}$, $i \in \{-d, -d+1, ..., 0\}$ için w_i ler ve $w_i, A_0, A_1 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{A_0}{w_{n-k}}, \frac{A_1}{w_{n-m}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.8}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Zhang ve arkadaşları 2012 yılında yayımlanan “, Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation” başlıklı makalede; $A, B, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{Aw_n + w_{n-1}}{B + w_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.9}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Hatır ve arkadaşları 2014 yılında yayımlanan “On a fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $A, B, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = A + \frac{B}{w_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.10}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

He ve arkadaşları 2014 yılında yayımlanan “Periodicity of the positive solutions of a fuzzy max-difference equation” başlıklı makalede; (A_n) periyodik bir bulanık sayı dizisi ve $k, m \in \mathbb{N},\ d = \max\{k, m\}$ için $w_{-d}, w_{-d+1}, ..., w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{w_{n-m}}, w_{n-k}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.11}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Zhang ve arkadaşları 2014 yılında yayımlanan “On first-order fuzzy Ricatti difference equation” başlıklı makalede; $A, B, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{A + w_n}{B + w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.12}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Zhang ve arkadaşları 2015 yılında yayımlanan “Dynamical behavior of a third-order rational fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $A, B, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = A + \frac{w_n}{w_{n-1}w_{n-2}}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.13}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Khastan 2017 yılında yayımlanan “New solutions for first order linear fuzzy difference equations” başlıklı makalede; $p, q, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_n = pw_{n-1} + q, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.14}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Wang ve arkadaşları 2017 yılında yayımlanan “On the dynamics of a five-order fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $A, B, C, D, w_{-4}, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}w_{n-2}}{D + Bw_{n-3} + Cw_{n-4}}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.15}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Khastan 2018 yılında yayımlanan “Fuzzy logistic difference equation” başlıklı makalede; $\beta, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \beta w_n(1 - w_n), \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.16}$$

bulanık lojistik denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Lavanya ve Lovenia 2018 yılında yayımlanan “Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations” başlıklı makalede; $i \in \{0,1,...,\mathrm{k}\}$ için $A_i, B_i, w_{-k}, w_{-k+1}, ..., w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ ve $p_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i w_n + w_{n-i}}{B_i w_{n-i}^{p_i}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.17}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Rahman ve arkadaşları 2018 yılında yayımlanan “Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $A, B, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{w_{n-1}}{A + B w_{n-1} w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.18}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Sun ve arkadaşları 2018 yılında yayımlanan “Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1/z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$” başlıklı makalede; $d = \max\{m, r\}$ için $z_{-d}, z_{-d+1}, \ldots, z_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$z_n = \max\left\{\frac{1}{z_{n-m}}, \frac{\alpha_n}{z_{n-r}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.19}$$

bulanık denkleminin çözümlerinin incelemişlerdir.

Wang ve Zhang 2018 yılında yayımlanan “Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $A, B, C, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = A + B w_n e^{-C w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.20}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Wang ve arkadaşları 2019 yılında yayımlanan “On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations” başlıklı makalede; $k \in \mathbb{Z}^+$ için $A, w_{-k}, w_{-k+1}, \ldots, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{w_n}, \frac{A}{w_{n-1}}, \ldots, \frac{A}{w_{n-(k-1)}}, w_{n-k}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.21}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Han ve arkadaşları 2020 yılında yayımlanan “Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$” başlıklı makalede; $m,k \in \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{Z}(-m-k,-1)$ için $C, w_i \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_n = \max\left\{C, \frac{w_{n-m-k}}{w_{n-m}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.22}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Sun ve arkadaşları 2020 yılında yayımlanan “On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$” başlıklı makalede; $k \in \mathbb{N}_1$ için $w_{-k}, w_{-k+1}, ..., w_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_n = F(w_{n-1}, w_{n-k}),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.23}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Wang ve arkadaşları 2021 yılında yayımlanan “Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equations” başlıklı makalede; $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $A, B, C, w_{-m}, w_{-m+1}, ..., w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{A w_{n-m}}{B + C\prod_{i=0}^{m} w_{n-i}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.24}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları 2021 yılında yayımlanan “On a third-order fuzzy difference equation” başlıklı makalede; $C, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{w_{n-2}}{C + w_{n-2} w_{n-1} w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.25}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları 2022 yılında yayımlanan "On a nonlinear fuzzy difference equation" başlıklı makalede; $p \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $A, w_{-2}, w_{-1}, w_{0} \in \mathbb{R}_{F}^{+}$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{A w_{n-1}}{1 + w_{n-2}^{p}}, \ n \in \mathbb{N}_{0} \tag{2.26}$$

bulanık denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

3. $u_{n+1}=au_{n-1}/\left(b+cv_{n-3}^{p}\right),\ v_{n+1}=dv_{n-1}/\left(e+fu_{n-3}^{q}\right)$ FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde; Türk ve arkadaşlarının "On solutions of a system of two fourth-order difference equations" başlıklı makalesi ele alınmıştır.

Bu makalede; $a,b,c,d,e,f,p,q\in(0,\infty)$ ve $u_0,u_{-1},u_{-2},u_{-3},v_0,v_{-1},v_{-2},v_{-3}\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ olmak üzere,

$$u_{n+1}=\frac{au_{n-1}}{b+cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{dv_{n-1}}{e+fu_{n-3}^{q}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

sisteminin çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

(3.1) sistemi $u_n=\left(e/f\right)^{1/q}x_n,\ v_n=\left(b/c\right)^{1/p}y_n,\ \gamma=a/b,\ \beta=d/e$ dönüşümleri ile

$$x_{n+1}=\frac{\gamma x_{n-1}}{1+y_{n-3}^{p}},\ y_{n+1}=\frac{\beta y_{n-1}}{1+x_{n-3}^{q}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır.

$\gamma,\beta\in(0,1)$ iken $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)=(0,0)$ noktası (3.2) sisteminin daima bir denge noktasıdır. $\gamma,\beta\in(1,\infty)$ iken (3.2) sisteminin tek pozitif denge noktası $(\overline{x}_2,\overline{y}_2)=\left((\beta-1)^{1/q},(\gamma-1)^{1/p}\right)$ dir.

Teorem 3.1. (3.2) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) Eğer $\gamma,\beta\in(0,1)$ ise (3.2) sisteminin $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer $\gamma\in(1,\infty)$ veya $\beta\in(1,\infty)$ ise (3.2) sisteminin $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ denge noktası kararsızdır.

(c) Eğer $\gamma,\beta\in(1,\infty)$ ise (3.2) denklem sisteminin $(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$ denge noktası kararsızdır.

Teorem 3.2. Eğer $\gamma,\beta\in(0,1)$ ise (3.2) sisteminin $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.3. $\gamma, \beta \in (1,\infty)$ ve (3.2) sisteminin bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n=-3}^{\infty}$ olsun. Eğer

(a) $x_{-1}, x_{-3} < \bar{x}_2;\ x_0, x_{-2} \geq \bar{x}_2;\ y_{-1}, y_{-3} \geq \bar{y}_2;\ y_0, y_{-2} < \bar{y}_2$

veya

(b) $x_{-1}, x_{-3} \geq \bar{x}_2;\ x_0, x_{-2} < \bar{x}_2;\ y_{-1}, y_{-3} < \bar{y}_2;\ y_0, y_{-2} \geq \bar{y}_2$

ise $\{(x_n, y_n)\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ denge noktası civarında bir uzunluğundaki yarı-dönmeler ile salınımlıdır.

Teorem 3.4. Eğer $\gamma, \beta \in (1,\infty)$ ise (3.2) sistemi sınırsız çözümlere sahiptir.

Teorem 3.5. Eğer $\gamma, \beta \in (0,1)$ ise (3.2) sisteminin pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

İspat. $\gamma, \beta \in (0,1)$ ise $n \in \mathbb{N}_0$ için (3.2) sisteminden

$$0 < x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{1 + y_{n-3}^p} < \gamma x_{n-1} < x_{n-1} \tag{3.3}$$

ve

$$0 < y_{n+1} = \frac{\beta y_{n-1}}{1 + x_{n-3}^p} < \beta y_{n-1} < y_{n-1} \tag{3.4}$$

dir. Buradan,

$$0 < x_1 = \frac{\gamma x_{-1}}{1 + y_{-3}^p} < \gamma x_{-1} < x_{-1},$$

$$0 < x_2 = \frac{\gamma x_0}{1 + y_{-2}^p} < \gamma x_0 < x_0,$$

$$0 < x_3 = \frac{\gamma x_1}{1 + y_{-1}^p} < \gamma x_1 < x_1 < x_{-1},$$

$$0 < x_4 = \frac{\gamma x_2}{1 + y_0^p} < \gamma x_2 < x_2 < x_0,$$

$$\vdots$$

$$0 < y_1 = \frac{\beta y_{-1}}{1+x_{-3}^q} < \beta y_{-1} < y_{-1},$$
$$0 < y_2 = \frac{\beta y_0}{1+x_{-2}^q} < \beta y_0 < y_0,$$
$$0 < y_3 = \frac{\beta y_1}{1+x_{-1}^q} < \beta y_1 < y_1 < y_{-1},$$
$$0 < y_4 = \frac{\beta y_2}{1+x_0^q} < \beta y_2 < y_2 < y_0,$$
$$\vdots$$

olup, $n \geq 1$ ve $i = 0,1$ için

$$0 < x_{2n-i} < \gamma x_{-i} < x_{-i} \tag{3.5}$$

ve

$$0 < y_{2n-i} < \beta y_{-i} < y_{-i} \tag{3.6}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. $w_{n+1} = \dfrac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^{p}}$ BULANIK FARK DENKLEMİ

Bu bölümde; $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^{p}},\ n \in \mathbb{N}_0,\ p \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.1}$$

bulanık denklemi tanımlanmıştır. (4.1) bulanık denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Teorem 4.1. Eğer $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ ise (4.1) denkleminin bir tek pozitif (w_n) çözümü vardır.

İspat. $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ başlangıç şartları için (4.1) denklemini sağlayan bir (w_n) bulanık sayı dizisinin var olduğunu kabul edelim. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[w_n]^\alpha = [L_n^\alpha, U_n^\alpha],\ n = -3, -2, .. \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} [A]^\alpha &= [A_l^\alpha, A_r^\alpha], \\ [B]^\alpha &= [B_l^\alpha, B_r^\alpha], \\ [C]^\alpha &= [C_l^\alpha, C_r^\alpha] \end{aligned} \tag{4.3}$$

olsun. Bu durumda, (4.1) – (4.3) ve Lemma 1.1.1 den

$$[L_{n+1}, U_{n+1}]^\alpha = [w_{n+1}]^\alpha = \left[\frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^{p}}\right]^\alpha = \frac{[Aw_{n-1}]^\alpha}{[B + Cw_{n-3}^{p}]^\alpha} = \frac{[A]^\alpha [w_{n-1}]^\alpha}{[B]^\alpha + [C]^\alpha ([w_{n-3}]^\alpha)^p}$$

$$= \frac{[A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha, A_r^\alpha U_{n-1}^\alpha]}{[B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_{n-3}^\alpha)^p, B_r^\alpha + C_r^\alpha (U_{n-3}^\alpha)^p]} = \left[\frac{A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (U_{n-3}^\alpha)^p}, \frac{A_r^\alpha U_{n-1}^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_{n-3}^\alpha)^p}\right]$$

olup, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$L_{n+1}^{\alpha}=\frac{A_l^{\alpha}L_{n-1}^{\alpha}}{B_r^{\alpha}+C_r^{\alpha}(U_{n-3}^{\alpha})^p},\ U_{n+1}^{\alpha}=\frac{A_r^{\alpha}U_{n-1}^{\alpha}}{B_l^{\alpha}+C_l^{\alpha}(L_{n-3}^{\alpha})^p} \tag{4.4}$$

elde edilir. $j=-3,-2,-1,0$ olmak üzere, $(L_j^{\alpha},U_j^{\alpha})$ başlangıç şartları ve $\alpha\in(0,1]$ için (4.4) sisteminin bir tek $(L_n^{\alpha},U_n^{\alpha})$ çözümünün var olduğu açıktır.

(4.4) sisteminin çözümü $(L_n^{\alpha},U_n^{\alpha})$ olmak üzere, $[L_n^{\alpha},U_n^{\alpha}]$ nın w_{-3},w_{-2},w_{-1},w_0 başlangıç şartları için (4.1) denkleminin (w_n) çözümünü belirlediğini, yani $n=-3,-2,...$ için

$$[w_n]^{\alpha}=[L_n^{\alpha},U_n^{\alpha}] \tag{4.5}$$

olduğunu ispat edelim.

$A,B,C,w_{-3},w_{-2},w_{-1},w_0\in\mathbb{R}_F^+$ olduğundan $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1]$, $\alpha_1\le\alpha_2$ iken

$$\begin{aligned}
&0<A_l^{\alpha_1}\le A_l^{\alpha_2}\le A_r^{\alpha_2}\le A_r^{\alpha_1},\\
&0<B_l^{\alpha_1}\le B_l^{\alpha_2}\le B_r^{\alpha_2}\le B_r^{\alpha_1},\\
&0<C_l^{\alpha_1}\le C_l^{\alpha_2}\le C_r^{\alpha_2}\le C_r^{\alpha_1},\\
&0<L_{-3}^{\alpha_1}\le L_{-3}^{\alpha_2}\le U_{-3}^{\alpha_2}\le U_{-3}^{\alpha_1},\\
&0<L_{-2}^{\alpha_1}\le L_{-2}^{\alpha_2}\le U_{-2}^{\alpha_2}\le U_{-2}^{\alpha_1},\\
&0<L_{-1}^{\alpha_1}\le L_{-1}^{\alpha_2}\le U_{-1}^{\alpha_2}\le U_{-1}^{\alpha_1},\\
&0<L_{0}^{\alpha_1}\le L_{0}^{\alpha_2}\le U_{0}^{\alpha_2}\le U_{0}^{\alpha_1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $n\in\mathbb{N}$ için

$$0<L_n^{\alpha_1}\le L_n^{\alpha_2}\le U_n^{\alpha_2}\le U_n^{\alpha_1} \tag{4.7}$$

olduğunu tümevarımla ispat edelim. (4.6) dan $n=-3,-2,-1,0$ için (4.7) nin doğru olduğu açıktır. Bu durumda; (4.7) nin $k\in\mathbb{N}$ ve $n\le k$ için doğru olduğunu kabul edip, $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (4.4), (4.6) ve (4.7) den

$$L_{k+1}^{\alpha_1}=\frac{A_l^{\alpha_1}L_{k-1}^{\alpha_1}}{B_r^{\alpha_1}+C_r^{\alpha_1}(U_{k-3}^{\alpha_1})^p}\le\frac{A_l^{\alpha_2}L_{k-1}^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2}+C_r^{\alpha_2}(U_{k-3}^{\alpha_2})^p}=L_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$L_{k+1}^{\alpha_2}=\frac{A_l^{\alpha_2}L_{k-1}^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2}+C_r^{\alpha_2}(U_{k-3}^{\alpha_2})^p}\le\frac{A_r^{\alpha_2}U_{k-1}^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2}+C_l^{\alpha_2}(L_{k-3}^{\alpha_2})^p}=U_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$U_{k+1}^{\alpha_2} = \frac{A_r^{\alpha_2} U_{k-1}^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2} + C_l^{\alpha_2} (L_{k-3}^{\alpha_2})^p} \leq \frac{A_r^{\alpha_1} U_{k-1}^{\alpha_1}}{B_l^{\alpha_1} + C_l^{\alpha_1} (L_{k-3}^{\alpha_1})^p} = U_{k+1}^{\alpha_1}$$

olup, $L_{k+1}^{\alpha_1} \leq L_{k+1}^{\alpha_2} \leq U_{k+1}^{\alpha_2} \leq U_{k+1}^{\alpha_1}$ elde edilir. Böylece (4.7) sağlanır. (4.4) ten $\alpha \in (0,1]$ için

$$L_1^{\alpha} = \frac{A_l^{\alpha} L_{-1}^{\alpha}}{B_r^{\alpha} + C_r^{\alpha} (U_{-3}^{\alpha})^p}, \; U_1^{\alpha} = \frac{A_r^{\alpha} U_{-1}^{\alpha}}{B_l^{\alpha} + C_l^{\alpha} (L_{-3}^{\alpha})^p} \tag{4.8}$$

elde edilir. $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olduğundan A_l^{α}, A_r^{α}, B_l^{α}, B_r^{α}, C_l^{α}, C_r^{α}, L_{-1}^{α}, U_{-1}^{α}, L_{-2}^{α}, U_{-2}^{α}, L_{-3}^{α}, U_{-3}^{α} sol süreklidir. (4.8) den $L_1^{\alpha}, U_1^{\alpha}$ nın da sol sürekli olduğu görülür. İterasyonla, $n \in \mathbb{N}$ için L_n^{α}, U_n^{α} nın sol sürekli olduğu kolayca elde edilir.

Şimdi $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_n^{\alpha}, U_n^{\alpha}]}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_n^{\alpha}, U_n^{\alpha}]$ nın sınırlı olduğunu ispat etmek yeterlidir. $n = 1$ olduğunu kabul edelim. $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&[A_l^{\alpha}, A_r^{\alpha}] \subset [P_A, Q_A], \\
&[B_l^{\alpha}, B_r^{\alpha}] \subset [P_B, Q_B], \\
&[C_l^{\alpha}, C_r^{\alpha}] \subset [P_C, Q_C], \\
&[L_{-3}^{\alpha}, U_{-3}^{\alpha}] \subset [P_{-3}, Q_{-3}], \\
&[L_{-2}^{\alpha}, U_{-2}^{\alpha}] \subset [P_{-2}, Q_{-2}], \\
&[L_{-1}^{\alpha}, U_{-1}^{\alpha}] \subset [P_{-1}, Q_{-1}], \\
&[L_0^{\alpha}, U_0^{\alpha}] \subset [P_0, Q_0]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olacak şekilde

$$P_A,\; Q_A,\; P_B,\; Q_B,\; P_C,\; Q_C,\; P_{-3},\; Q_{-3},\; P_{-2},\; Q_{-2},\; P_{-1},\; Q_{-1},\; P_0,\; Q_0 > 0$$

sabitleri mevcuttur. Kolaylıkla, (4.8) ve (4.9) dan $\alpha \in (0,1]$ için

$$[L_1^{\alpha}, U_1^{\alpha}] \subset \left[\frac{P_A P_{-1}}{Q_B + Q_C (Q_{-3})^p}, \frac{Q_A Q_{-1}}{P_B + P_C (P_{-3})^p} \right] \tag{4.10}$$

elde edilir. Buradan, $\alpha \in (0,1]$ için

$$\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_1^\alpha, U_1^\alpha] \subset \left[\frac{P_A P_{-1}}{Q_B + Q_C (Q_{-3})^p}, \frac{Q_A Q_{-1}}{P_B + P_C (P_{-3})^p}\right] \tag{4.11}$$

olduğu açıktır. (4.11) den $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_1^\alpha, U_1^\alpha]}$ kompakt ve $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_1^\alpha, U_1^\alpha]} \subset (0,\infty)$ olduğu görülür. Benzer şekilde, tümevarımla $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_n^\alpha, U_n^\alpha]} \text{ kompakt ve } \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_n^\alpha, U_n^\alpha]} \subset (0,\infty) \tag{4.12}$$

olduğu elde edilir. (4.7), (4.12) ve L_n^α, U_n^α sol sürekli olduğundan $[L_n^\alpha, U_n^\alpha]$, (4.5) te tanımlanan (w_n) pozitif bulanık sayı dizisini belirler.

Şimdi; $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0$ başlangıç şartları için (w_n) dizisinin (4.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterelim. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[w_{n+1}]^\alpha = [L_{n+1}^\alpha, U_{n+1}^\alpha] = \left[\frac{A_l^\alpha L_{n-1}^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (U_{n-3}^\alpha)^p}, \frac{A_r^\alpha U_{n-1}^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (L_{n-3}^\alpha)^p}\right] = \left[\frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^p}\right]^\alpha$$

olduğundan (w_n) dizisi (4.1) denkleminin çözümüdür. $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0$ başlangıç şartları için (4.1) denkleminin (w_n) den farklı bir (w_n^*) çözümünün var olduğunu kabul edelim. $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$[w_n^*]^\alpha = [L_n^\alpha, U_n^\alpha] \tag{4.13}$$

olduğu gösterilebilir. (4.5) ve (4.13) ten $n = -3, -2, ..$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $[w_n^*]^\alpha = [w_n]^\alpha$ olduğu dolasıyla $(w_n^*) = (w_n)$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ ise (4.1) bulanık fark denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

İspat. (w_n) bulanık sayı dizisinin (4.1) denkleminin (4.5) i sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. (4.4) ve Teorem 3.5 ten $T^\alpha = \max\{U_{-1}^\alpha, U_0^\alpha\}$ olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$[L_n^\alpha, U_n^\alpha] \subset [0, T^\alpha] \tag{4.14}$$

elde edilir. (w_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olduğundan her $\alpha \in (0,1]$ için

$$T^\alpha \leq T \tag{4.15}$$

olacak şekilde $T > 0$ sabiti mevcuttur. Dolasıyla, $n \geq 1$ için $[L_n^\alpha, U_n^\alpha] \subset [0, T]$ yazılabilir. Buradan $n \geq 1$ için $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_n^\alpha, U_n^\alpha] \subset (0, T)$ ve $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_n^\alpha, U_n^\alpha]} \subseteq (0, T)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. Eğer $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ varsa (4.1) bulanık fark denklemi sınırsız çözümlere sahiptir.

İspat. $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ nin var olduğunu kabul edelim. Eğer $n = -3, -2, ...$ için $\gamma = \dfrac{A_l^{\bar{\alpha}}}{B_r^{\bar{\alpha}}}$, $\beta = \dfrac{A_r^{\bar{\alpha}}}{B_l^{\bar{\alpha}}}$, $x_n = L_n^{\bar{\alpha}}$, $y_n = U_n^{\bar{\alpha}}$ ise (4.4) sistemine Teorem 3.4 uygulanabilir. Eğer $B_r^{\bar{\alpha}} < A_l^{\bar{\alpha}}$ olacak şekilde $\bar{\alpha} \in (0,1]$ mevcut ise o zaman $\bar{\alpha} = \alpha$ için (4.4) sisteminin

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \text{ ve } \lim_{n \to \infty} y_n = \infty \tag{4.16}$$

olacak şekilde (x_n, y_n) çözümü vardır. Dahası $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları $j = -3, -2, -1, 0$ için $x_{-j} < y_{-j}$ eşitsizliğini sağlarsa,

$$\begin{aligned} [w_j]^\alpha &= [L_j^\alpha, U_j^\alpha], \ \alpha \in (0,1] \\ [w_j]^{\bar{\alpha}} &= [L_j^{\bar{\alpha}}, U_j^{\bar{\alpha}}] = [x_j, y_j] \end{aligned} \tag{4.17}$$

olacak şekilde w_j pozitif bulanık sayıları bulunabilir. $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0$ başlangıç şartları ve $\alpha \in (0,1]$ için $[w_n]^\alpha = [L_n^\alpha, U_n^\alpha]$ olmak üzere, (w_n) in (4.1) denkleminin çözümü olduğunu kabul edelim. (4.17) sağlanıyorsa ve (4.4) sisteminin çözümü (L_n^α, U_n^α) ise

$$[w_n]^{\bar{\alpha}} = [L_n^{\bar{\alpha}}, U_n^{\bar{\alpha}}] = [x_n, y_n] \tag{4.18}$$

elde edilir. Bu durumda; (4.16), (4.18) den ve

$$\|w_n\| = \sup \max\{|L_n^{\alpha}|, |U_n^{\alpha}|\} \geq \max\{|L_n^{\bar{\alpha}}|, |U_n^{\bar{\alpha}}|\} = U_n^{\bar{\alpha}} \tag{4.19}$$

olduğundan her $\alpha \in (0,1]$ için (w_n) in sınırsız olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^{\alpha} < B_l^{\alpha}$ ise (4.1) bulanık fark denkleminin bütün pozitif çözümleri sıfıra yakınsar.

İspat. (4.1) denkleminin (4.2) yi sağlayan bir çözümü (w_n) ve her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^{\alpha} < B_l^{\alpha}$ olsun. Bu durumda, (4.4) sistemine Teorem 3.2 uygulanabilir ve

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} U_n^{\alpha} = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir. Dolasıyla, (4,20) den

$$\lim_{n\to\infty} D(w_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \sup\{\max\{|L_n^{\alpha} - 0|, |U_n^{\alpha} - 0|\}\} = 0 \tag{4.21}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.Nümerik Örnekler

Bu kısımda, p, A, B, C parametrelerinin ve $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0$ başlangıç şartlarının farklı değerleri için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 4.1.1. $p = 3$ olmak üzere,

$$A = \begin{cases} x-4, & 4 \leq x \leq 5, \\ 6-x, & 5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 5x-2, & 0.40 \leq x \leq 0.60, \\ 4-5x, & 0.60 \leq x \leq 0.80, \end{cases}$$

$$C=\begin{cases}x-5, & 5\le x\le 6,\\ 7-x, & 6\le x\le 7\end{cases}$$

ve

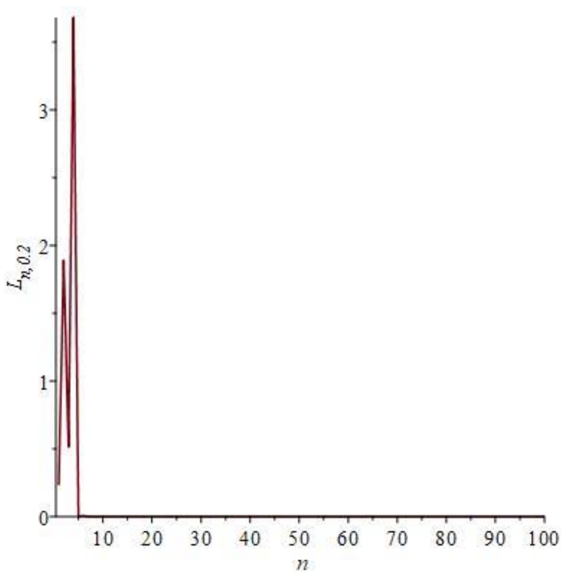
$$w_{-3}(x)=\begin{cases}\dfrac{10x-3}{2}, & 0.30\le x\le 0.50,\\ \dfrac{7-10x}{2}, & 0.50\le x\le 0.70,\end{cases}$$

$$w_{-2}(x)=\begin{cases}10x-2, & 0.20\le x\le 0.30,\\ 4-10x, & 0.30\le x\le 0.40,\end{cases}$$

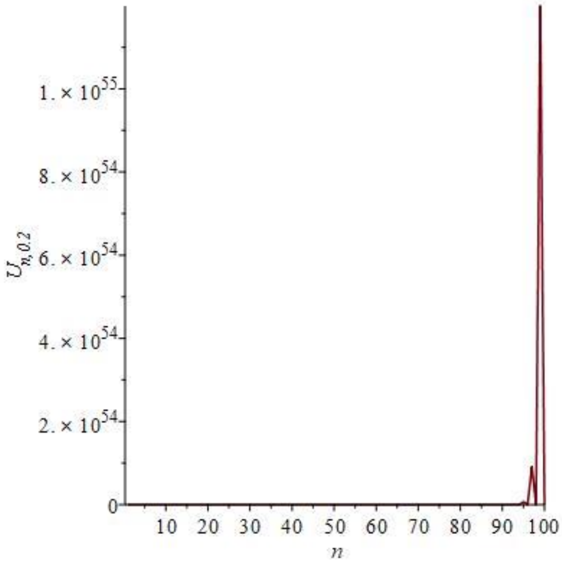
$$w_{-1}(x)=\begin{cases}4x-0.4, & 0.10\le x\le 0.35,\\ 2.4-4x, & 0.35\le x\le 0.60,\end{cases}$$

$$w_{0}(x)=\begin{cases}20x-10, & 0.50\le x\le 0.55,\\ 12-20x, & 0.55\le x\le 0.60\end{cases}$$

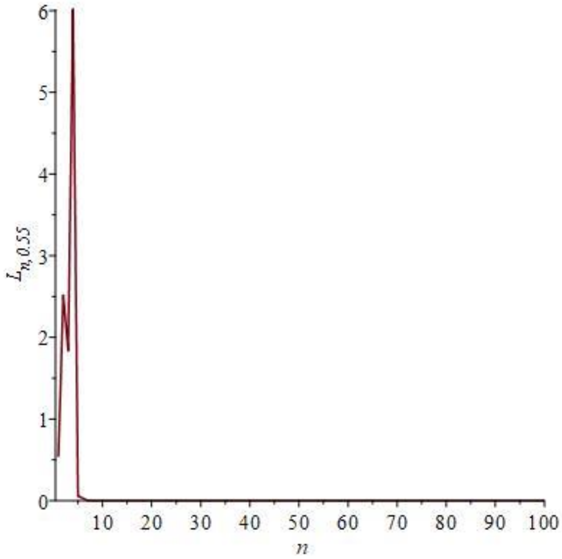
ise (4.1) bulanık fark denklemi Teorem 4.1 e göre bir tek pozitif çözüme sahiptir. Ayrıca, her $\alpha\in(0,1]$ için $B_r^\alpha < A_l^\alpha$ olduğundan Teorem 4.3 ün şartları sağlanır. Dolayısıyla, (4.1) bulanık fark denklemi sınırsız çözümlere sahiptir.



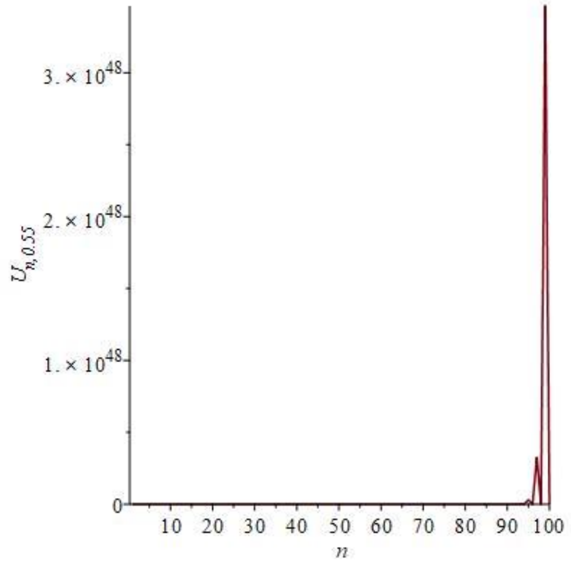
Şekil 4.1.1. $\alpha=0.2$ için L_n değerleri



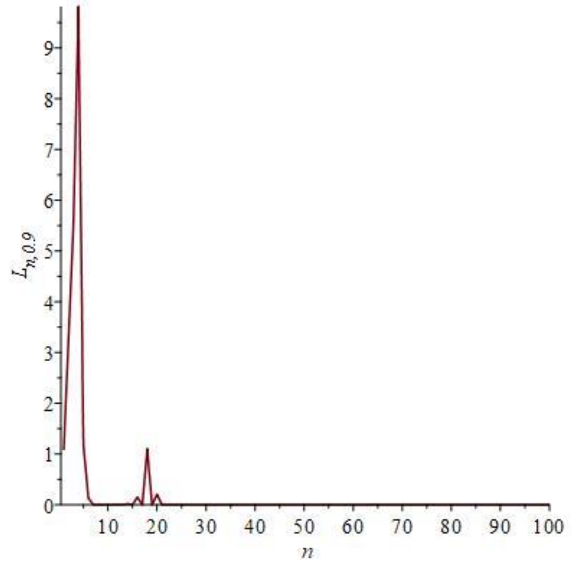
Şekil 4.1.2. $\alpha = 0.2$ için U_n değerleri



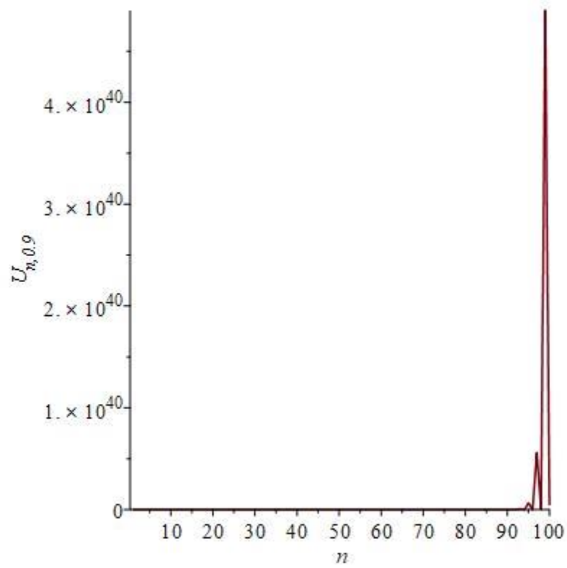
Şekil 4.1.3. $\alpha = 0.55$ için L_n değerleri



Şekil 4.1.4. $\alpha = 0.55$ için için U_n değerleri



Şekil 4.1.5. $\alpha = 0.9$ için L_n değerleri



Şekil 4.1.6. $\alpha = 0.9$ için U_n değerleri

Örnek 4.1.2. $p = 5$ olmak üzere,

$$A = \begin{cases} 10x - 3, & 0.30 \le x \le 0.40, \\ 5 - 10x, & 0.40 \le x \le 0.50, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} x - 3, & 3 \le x \le 4, \\ 5 - x, & 4 \le x \le 5, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ 4 - x, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

ve

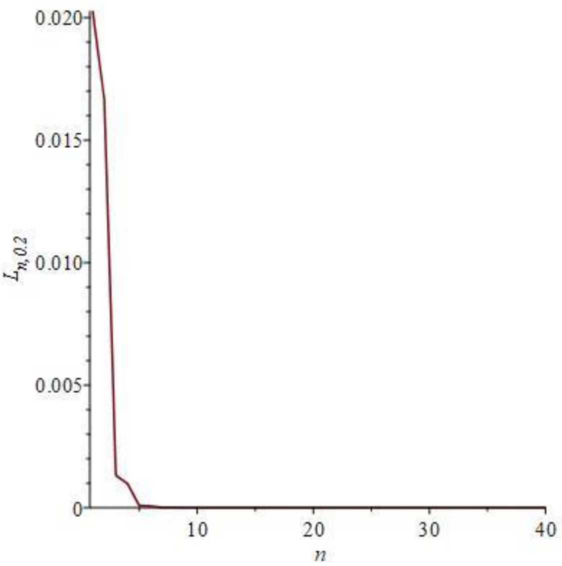
$$w_{-3}(x) = \begin{cases} 10x - 4, & 0.40 \le x \le 0.50, \\ 6 - 10x, & 0.50 \le x \le 0.60, \end{cases}$$

$$w_{-2}(x) = \begin{cases} 5x - 2, & 0.40 \le x \le 0.60, \\ 4 - 5x, & 0.60 \le x \le 0.80, \end{cases}$$

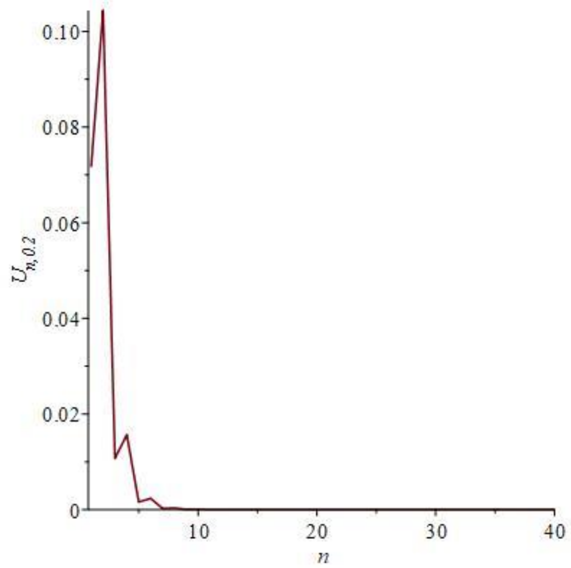
$$w_{-1}(x)=\begin{cases}10x-3, & 0.30\le x\le 0.40,\\ 5-10x, & 0.40\le x\le 0.50,\end{cases}$$

$$w_{0}(x)=\begin{cases}4x-1, & 0.25\le x\le 0.50,\\ 3-4x, & 0.50\le x\le 0.75,\end{cases}$$

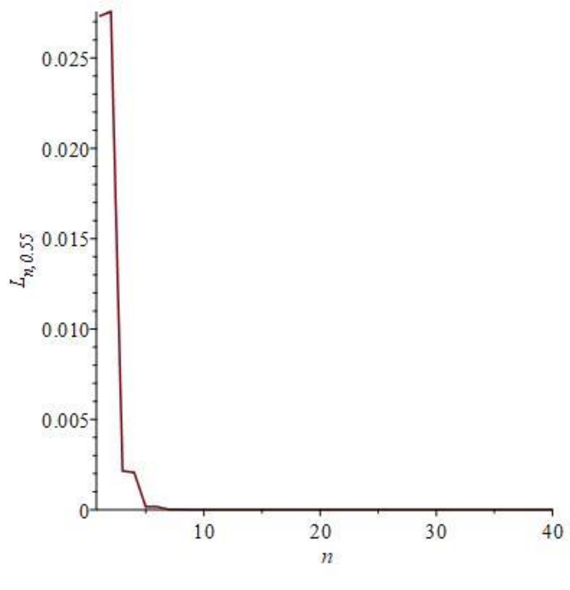
ise her $\alpha\in(0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ olduğundan Teorem 4.2 nin şartları sağlanır. Dolayısıyla, (4.1) bulanık fark denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.



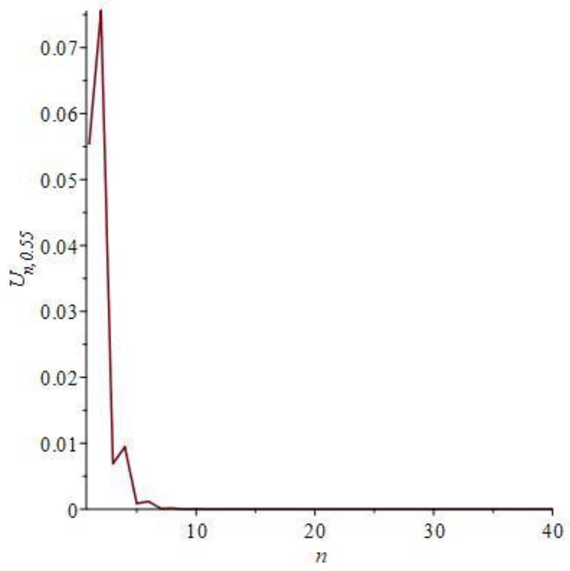
Şekil 4.1.7. $\alpha=0.2$ için L_n değerleri



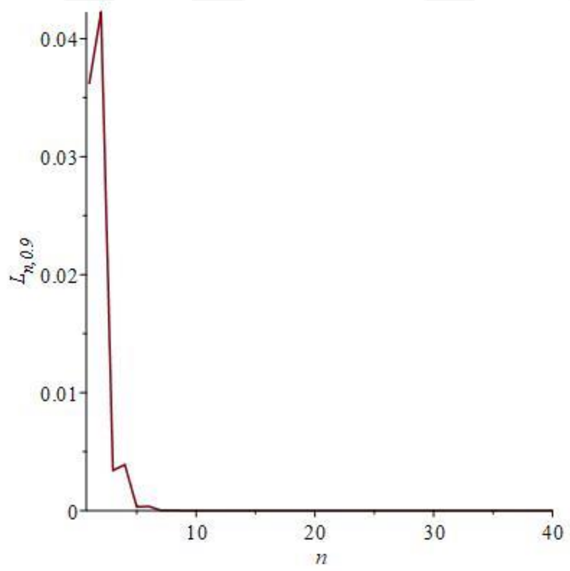
Şekil 4.1.8. $\alpha = 0.2$ için U_n değerleri



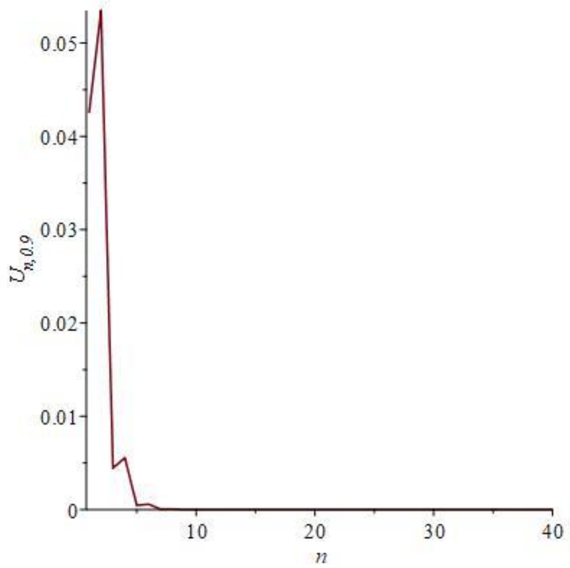
Şekil 4.1.9. $\alpha = 0.55$ için L_n değerleri



Şekil 4.1.10. $\alpha = 0.55$ için U_n değerleri



Şekil 4.1.11. $\alpha = 0.9$ için L_n değerleri



Şekil 4.1.12. $\alpha = 0.9$ için U_n değerleri

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde; bu güne kadar çalışılmış olan bulanık fark denklemlerinin çok büyük bir kısmı incelenerek $A, B, C, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{R}_F^+$ olmak üzere,

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-3}^p},\ n \in \mathbb{N}_0,\ p \in \mathbb{Z}^+$$

bulanık fark denklemi tanımlanmıştır. Yapılan çalışmada tanımlanan bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Bundan sonra yapılacak yeni çalışmalarda, bu tezde ele alınan denklemin mertebesi artırılarak veya denkleme yeni parametreler ile yeni terimler eklenerek daha genel denklemler tanımlanabilir. Tanımlanan yeni denklemlerin çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bede, B., 2013, Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer*, New York.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Deeba, E. Y., De Korvin, A. and Koh, E. L., 1996, A fuzzy difference equation with an application, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2, 365-374.

Deeba, E. Y. and De Korvin, A., 1999, Analysis by fuzzy difference equations of a model of $\mathrm{CO_2}$ level in the blood, *Applied Mathematics Letters*, 12, 33-40.

Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets, World Scientific, Singapore.

Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$, *Advances in Difference Equations*, 673, 10 pages.

Hatir, E., Mansour, T. and Yalcinkaya, İ., 2014, On a fuzzy difference equation, *Utilitas Mathematica*, 93, 135-151.

He, Q., Tao, C., Sun, T., Liu, X. and Su, D., 2014, Periodicity of the positive solutions of a fuzzy max-difference equation, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 760247, 4 pages.

Khastan, A., 2017, New solutions for first order linear fuzzy difference equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 156-166.

Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.

Klir, G. and Yuan, B., 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Lavanya, A. P. and Lovenia, J. D. L., 2018, Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations, *Tamsui Oxford Jaurnal of Informational and Mathematical Sciences*, 32(2), 27-37.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Soft Computing*, 6, 456-461.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$, *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.

Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2005, Behavior of the positive solutions of fuzzy max-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2005, 153-172.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max-difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.

Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1/z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.

Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.

Türk, G., Yalçınkaya, İ. and Tollui D. T., 2018, On solutions of a system of two fourth-order difference equations, *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, 25, 85-96.

Wang, C., Su, X., Liu, P., Hu, X. and Li, R., 2017, On the dynamics of a five-order fuzzy difference equation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 3303-3319.

Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.

Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications,* 7(2), 13-18.

Wang, C., Li, J. and Jia, L., 2021, Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equations, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(1), 404-421.

Yalçınkaya, İ., Atak, N. and Tollu, D. T., 2021, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 17(1), 59-69.

Yalçınkaya, İ., Çalışkan, V. and Tollu, D. T., 2022, On a nonlinear fuzzy difference equation, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 71(1), 68-78.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2012, Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9, 1-12.

Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2014, On first-order fuzzy Ricatti difference equation, *Information Sciences*, 270, 226-236.

Zhang, Q., Liu, J. and Luo, Z., 2015, Dynamical behavior of a third-order rational fuzzy difference equation, *Advances in Difference Equations*, 2015, 18 pages.