



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**MINKOWSKI UZAY ZAMANDA 3.  
MERTEBEDEN İNVLÖT EĞRİLERİ**

**Nuran AYDOĞDU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Temmuz-2021  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### MINKOWSKI UZAY ZAMANDA 3. MERTEBEDEN İVOLÜT EĞRİLERİ

Nuran AYDOĞDU

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

2021, 97 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Bu tezde;  $\mathbb{E}_4^1$  Minkowski uzayında Cartan veya Frenet çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$  olan  $\alpha$  null Cartan veya null olmayan eğrisi için daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Bununla birlikte  $\mathbb{E}_4^1$  Minkowski uzayında verilen bir  $\alpha$  eğrisinin 3.mertebeden involüt eğrisi incelenmiştir.  $\alpha$  eğrisinin karakterine (timelike, spacelike veya null) bağlı olarak değişen eğrilik fonksiyonları durumları için farklı 3.mertebeden involüt eğrisi denklemleri ve ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Invölüt Eğri, Minkowski Uzayı, Null Cartan Eğri, Spacelike Eğri, Timelike Eğri.

## ABSTRACT

MS

### 3. ORDER INVOLUTE CURVES IN MINKOWSKI SPACE TIME

Nuran AYDOĞDU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2021, 97 Pages

Jury

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR  
Prof. Dr. Nesip AKTAN  
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

In this thesis; previous work has been mentioned for  $\alpha$  null Cartan or non-null curve with Cartan or Frenet frame  $\{T, N, B_1, B_2\}$  in Minkowski space  $\mathbb{E}_4^1$ . In addition, the 3rd order involute curve of a given curve  $\alpha$  has been examined in Minkowski space  $\mathbb{E}_4^1$ . The results of different 3rd order involute curve equations are given for the cases of curvature functions varying depending on the character of the curve  $\alpha$  (timelike, spacelike or null)

**Keywords:** : Involute Curve, Minkowski Space, Null Cartan Curve, Spacelike Curve, Timelike Curve.

## ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Melek ERDOĞDU'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Nuran AYDOĞDU  
KONYA-2021



# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	v
ABSTRACT.....	vi
ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
1.1. Minkowski 3 Uzayı.....	1
1.2. Minkowski 3 Uzayında Eğriler.....	2
1.2.1. Birim hızlı null olmayan eğriler.....	2
1.2.2. Null Cartan eğriler .....	8
1.3. Null Cartan Eğrilerinin 1. ve 2. Mertebeden İnvolut Eğrileri.....	9
1.4. Minkowski Uzayında k. Mertebeden İnvolut Eğrileri .....	22
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>27</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>29</b>
<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....</b>	<b>30</b>
4.1. Minkowski 4 Uzayı.....	30
4.2. Minkowski Uzay Zamanda Birim Hızlı Timelike Eğriler .....	31
4.3. Minkowski Uzay Zamanda Birim Hızlı Spacelike Eğriler .....	34
4.4. Minkowski Uzay Zamanda Null Eğriler.....	41
4.5. Minkowski Uzay Zamanda Kısmi Null Eğriler .....	41
4.6. Minkowski Uzay Zamanda Pseudo Null Eğriler .....	47
<b>5. SONUÇLAR.....</b>	<b>51</b>
<b>6. KAYNAKLAR .....</b>	<b>95</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\gamma_i$	:	İnvolut eğrisi
$\gamma_e$	:	Evolüt eğrisi
$\mathbb{E}^2$	:	Öklid düzlemi
$\alpha$	:	Regüler eğri
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	:	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	:	Minkowski uzay-zaman
$T$	:	$\alpha$ eğrisinin teğet vektör alanı
$N$	:	$\alpha$ eğrisinin asli normal vektör alanı
$B$	:	$\alpha$ eğrisinin binormal vektör alanı
$B_1$	:	$\alpha$ eğrisinin birinci binormal vektör alanı
$B_2$	:	$\alpha$ eğrisinin ikinci binormal vektör alanı
$B_3$	:	$\alpha$ eğrisinin üçüncü binormal vektör alanı
$k_1$	:	$\alpha$ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu
$k_2$	:	$\alpha$ eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu
$k_3$	:	$\alpha$ eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu
$\langle \cdot \rangle_L$	:	Lorentz çarpımı
$\  \cdot \ $	:	Vektörün normu
$\times_L$	:	Lorentz vektörel çarpım
$\alpha^*$	:	$\alpha$ eğrisinin Bertrand eşi
$\tilde{\alpha}$	:	$\alpha$ eğrisinin İnvolut eğrisi
$\check{\alpha}$	:	$\alpha$ eğrisinin 3.dereceden İnvolut eğrisi
$\mathbb{R}_0$	:	Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde  $n \geq 3$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowski uzayında null Cartan eğrilerin  $k$ . mertebeden involüt ve genişletilmiş involüt eğrileri tanıtılmıştır. Bu bağlamda Bertrand null Cartan eğrilerinin yeni bir karakterizasyonu 1. ve 2. mertebeden involüt eğrileri yardımıyla ortaya çıkmıştır. (Hanif ve ark., 2019). Ardından bir null Cartan Bertrand eğrisininin Bertrand eşinin null olmayan bir eğri de olabileceği ispatlanmıştır (Hanif ve ark., 2019). Bunun bir sonucu olarak (Balgetir ve ark., 2014) çalışmasında ifade edilen Bertrand eğri tanımının eksik olduğu ortaya çıkmıştır. Bütün eksik kavramlar göz önünde bulundurularak Bertrand eğri çiftleri için olası tüm karakterleri içine alan yeni bir tanım verilmiştir. Böylece null Cartan Bertrand eğrilerin null ve null olmayan 1. ve 2. mertebeden involüt eğrilerinin sırasıyla Cartan ve Frenet çatıları arasında ortaya çıkan ilişkiler de ifade edilmiştir (Hanif ve ark., 2019). Ayrıca bütün null Cartan eğrileri içinde yalnızca null kübik eğrilerin 1. mertebeden iki involüt ailesinin olduğu görülmüş olup bunlardan birinin B-scroll yüzeyi üzerinde yattığı da ispatlanmıştır. Daha açık ifade etmek istersek, dayanak eğrisi bir null  $\alpha$  Cartan kübik eğrisi olan bir B-scroll yüzeyinde yatan her null olmayan eğrinin  $\alpha$  eğrisinin bir involüt eğrisi olduğu ifade edilmiştir. Son olarak null Cartan eğrileri ile 1. ve 2. mertebeden involüt eğrileri aralarındaki ilişkileri ifade eden uygulamaya yönelik bazı sayısal örnekler de verilmiştir (Hanif ve ark., 2019).

### 1.1. Minkowski 3 Uzayı

$\vec{u}=(u_1, u_2, u_3), \vec{v}=(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (1.1)$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı ve bu çarpım ile donatılmış  $\mathbb{R}^3$  uzayına 3 boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı denir ve  $\mathbb{E}_1^3$  ile gösterilir. Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım  $\mathbb{E}_1^3$  deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır.  $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{E}_1^3$  olmak üzere

i)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$  veya  $(\vec{u} = 0)$  ise  $\vec{u}$  vektörüne spacelike vektör

ii)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne timelike vektör

iii)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne lightlike (null) vektör

adı verilir.

Her  $\vec{u} \in \mathbb{E}_1^3$  için  $\vec{u}$  vektörünün normu  $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$  olarak tanımlanır. Eğer  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = 0$  ise  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri diktir denir.

**Tanım 1.1.1.** Her  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$  için,

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı denir.

## 1.2. Minkowski 3 Uzayında Eğriler

### 1.2.1. Birim hızlı null olmayan eğriler

**Tanım 1.2.1.1**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3, \forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  vektörü timelike vektör ise  $\alpha$  eğrisine timelike eğri denir.  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$  ise  $\alpha'$  ya birim hızlı timelike eğri denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  birim hızlı bir timelike eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (1.3)$$

vektörü  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektörüdür ve timelike vektördür. Yani

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = -1 \quad (1.4)$$

olur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (1.5)$$

elde edilir. O halde  $T'(s) \perp T(s)$ 'dir. Sonuç olarak  $T'(s) = \alpha''(s)$  spacelike vektör olmalıdır.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|}} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (1.6)$$

vektörü  $\alpha$  eğrisinin asli normal vektörü olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \quad (1.7)$$

ise  $\alpha$  eğrisinin binormal vektörüdür. Burada  $\alpha$  eğrisinin eğriliği

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L} \quad (1.8)$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k_1(s)} \Rightarrow T'(s) = k_1(s)N(s) \quad (1.9)$$

olduğu görülür ve

$$k_1(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle_L \quad (1.10)$$

eşitliği sağlanır.  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu ise

$$k_2(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L \quad (1.11)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 1.2.1.1** Birim hızlı timelike  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $T, N, B$  ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ k_1(s) & 0 & k_2(s) \\ 0 & -k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

dir (Walrave, 1995).

**İspat:**  $N(s) = \frac{1}{k_1(s)} T'(s)$  eşitliğinden

$$T'(s) = k_1(s)N(s) \quad (1.13)$$

elde edilir.  $N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$  olduğunu kabul edelim. Her iki tarafın  $T(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılarak  $\langle N'(s), T(s) \rangle_L = -a$  bulunur.

$$\langle N(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (1.14)$$

$$\langle N'(s), T(s) \rangle_L + \langle N(s), T'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.15)$$

$$\langle N'(s), T(s) \rangle_L = -\langle N(s), T'(s) \rangle_L = -\langle N(s), k_1(s)N(s) \rangle_L = -k_1(s) \quad (1.16)$$

olduğundan  $a = k_1(s)$  olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$  eşitliğinin her iki yanının  $N(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılarak  $\langle N'(s), N(s) \rangle_L = b$  bulunur. Ayrıca  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$  olduğundan her iki tarafın türevi alınarak

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L + \langle N(s), N'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.17)$$

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L = 0 \quad (1.18)$$

elde edilir. Yani  $b = 0$  olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$  eşitliğinin her iki yanının  $B(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılarak  $\langle N'(s), B(s) \rangle_L = c$  bulunur.

$$\langle N(s), B(s) \rangle_L = 0 \quad (1.19)$$

$$\langle N'(s), B(s) \rangle_L + \langle N(s), B'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.20)$$

$$\langle N'(s), B(s) \rangle_L = -\langle N(s), B'(s) \rangle_L = k_2(s) \quad (1.21)$$

olduğundan,  $c = k_2(s)$  bulunur. Öyleyse  $N'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s)$  dir. Şimdi  $B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$  olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının  $T(s)$  ile iç çarpımı yapılarak  $\langle B'(s), T(s) \rangle_L = -d$  bulunur.

$$\langle B(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (1.22)$$

$$\langle B'(s), T(s) \rangle_L + \langle B(s), T'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.23)$$

$$\langle B'(s), T(s) \rangle_L = -\langle B(s), T'(s) \rangle_L = -\langle B(s), k_1(s)N(s) \rangle_L = 0 \quad (1.24)$$

olduğundan  $d = 0$  olur.

$B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$  eşitliğinin her iki yanının  $N(s)$  ile iç çarpımı yapılarak  $\langle B'(s), N(s) \rangle_L = e$  bulunur.

$$\langle B(s), N(s) \rangle_L = 0 \quad (1.25)$$

$$\langle B'(s), N(s) \rangle_L + \langle B(s), N'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.26)$$

$$\langle B'(s), N(s) \rangle_L = -\langle B(s), N'(s) \rangle_L = -\langle B(s), k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s) \rangle_L = -k_1(s) \quad (1.27)$$

olduğundan  $e = -k_2(s)$  olur.

$B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$  eşitliğinin her iki yanının  $B(s)$  ile iç çarpımı yapılarak  $\langle B'(s), B(s) \rangle_L = f$  bulunur.

$$\langle B(s), B(s) \rangle_L = 1 \quad (1.28)$$

$$\langle B'(s), B(s) \rangle_L + \langle B(s), B'(s) \rangle_L = 0 \quad (1.29)$$

$$\langle B'(s), B(s) \rangle_L = 0 \quad (1.30)$$

olduğundan  $f = 0$  bulunur. Öyleyse  $B'(s) = -k_2(s)N(s)$  dir.

Bu teoremdede elde edilen eşitliklere, birim hızlı timelike  $\alpha$  eğrisi için Frenet -Serret formülleri denir.

**Tanım 1.2.1.2**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ ,  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  vektörü spacelike bir vektör ise  $\alpha$  eğrisine spacelike eğri denir.  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$  ise  $\alpha'$  ya birim hızlı spacelike eğri denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  birim hızlı bir spacelike eğri olsun.  $T(s) = \alpha'(s)$  vektörü  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektörüdür ve spacelike vektördür.  $\langle T(s), T(s) \rangle_L = 1$  olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (1.31)$$

olur.  $T'(s) \perp T(s)$  elde edilir.  $T(s)$  spacelike olduğundan  $T'(s)$  spacelike ya da timelike olabilir.

**1.Durum:**  $T'(s) = \alpha''(s)$  spacelike ise; bu durumda

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L} \quad (1.32)$$

olarak tanımlanır.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k_1(s)} \quad (1.33)$$

eğrinin asli normal olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \quad (1.34)$$

ise eğrinin binormal vektörüdür. Bu eğriler için burulma fonksiyonu  $k_2(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle_L$  olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) \\ 0 & k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

olarak bulunur (Walrave, 1995).

**2.Durum:**  $T'(s) = \alpha''(s)$  timelike ise; bu durumda

$$k_1(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle_L} = \sqrt{-\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L} \quad (1.36)$$

olmak üzere normal vektörü

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k_1(s)} \quad (1.37)$$

şeklindedir.

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \quad (1.38)$$

spacelike bir vektördür. Eğrinin burulması ise  $k_2(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L$  olarak tanımlanır.

Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ k_1(s) & 0 & k_2(s) \\ 0 & k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

Sonuç olarak birim hızlı timelike ve spacelike eğriler için Frenet formülleri verilmiştir. Özetle birim hızlı null olmayan bir  $\alpha$  eğrisi için Frenet formülleri aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1(s) & 0 & k_2(s) \\ 0 & \varepsilon_1 k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Burada

$$\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L = \mp 1, \varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L = \mp 1, \langle B(s), B(s) \rangle_L = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (1.41)$$

olarak ifade edilir.

### 1.2.2. Null Cartan eğriler

**Tanım 1.2.2.1**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ ,  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$  ise  $\alpha$  eğrisine null eğri adı verilir. Eğer  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 1$  ise  $\alpha'$  ya pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri veya null Cartan eğri denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  bir null Cartan eğri olsun. Bu durumda

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (1.42)$$

vektörü  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörüdür.  $\alpha$  eğrisinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \alpha''(s) \quad (1.43)$$

olup spacelike vektördür.  $B$  binormal vektör alanı ise  $\alpha$  eğrisinin her  $\alpha(s)$  noktasında  $N(s)$ ' e dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle T(s), B(s) \rangle_L = 1 \quad (1.44)$$

dir. Burada  $\alpha$  doğru ise  $k_1(s) = 0$  ve diğer durumlarda  $k_1(s) = 1$ ' dir. Ayrıca  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu  $k_2(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L$ ' dir (Walrave, 1995).

**Tanım 1.2.2.2.**  $T(s), N(s), B(s)$  vektörlerine,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  null Cartan eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Cartan vektörleri denir.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesine de  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Cartan çatısı adı verilir.  $T, N, B$  vektör alanlarına  $\alpha$  eğrisi üstünde Cartan vektör alanları denir (Walrave, 1995).

**Teorem 1.2.2.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  bir null Cartan eğri,  $T, N, B$  Cartan vektör alanları olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -k_2(s) & 0 & k_1(s) \\ 0 & -k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Burada

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle B(s), B(s) \rangle_L = \langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle N(s), B(s) \rangle_L = 0 \quad (1.46)$$

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = 1, \quad \langle T(s), B(s) \rangle_L = -1 \quad (1.47)$$

$$T \times_L N = -T, \quad N \times_L B = -B, \quad B \times_L T = N \quad (1.48)$$

eşitlikleri sağlanır (Walrave, 1995).

**Tanım 1.2.2.3.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  null Cartan eğrisi için bir başka  $\alpha^*: I^* \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  null olmayan veya null Cartan eğrisi var ve bir  $\varphi: \alpha \rightarrow \alpha^*$  birebir ve örten fonksiyonu ile eğrilerin karşılıklı noktalarındaki normal vektör alanları sırasıyla  $N$  ve  $N^*$  lineer bağımlı ise  $\alpha$  eğrisine Bertrand eğrisi adı verilir. Bu durumda  $(\alpha, \alpha^*)$  ikilisine Bertrand çifti;  $\alpha^*$  eğrisine ise  $\alpha$  eğrisinin Bertrand eşi denir (Hanif ve ark., 2019).

**Tanım 1.2.2.4.**  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında  $F(\alpha, \delta): I \times I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  olmak üzere

$$(s, t) \rightarrow F(\alpha, \delta)(s, t) = \alpha(s) + t\delta(s) \quad (1.49)$$

parametrizasyonu ile ifade edilen yüzeye regle yüzey adı verilir. Burada  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  regüler eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi  $\delta$  düzgün vektör alanına ise regle yüzeyin doğrultmanı adı verilir.

**Tanım 1.2.2.5.** Dayanak eğrisi  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  null Cartan eğrisi ve doğrultmanı ise  $\alpha$  eğrisinin binormali  $B(s)$  doğrultusunda olan ve

$$X(s, t) = \alpha(s) + tB(s) \quad (1.50)$$

parametrizasyonu ile ifade edilen timelike regle yüzeye B-scroll adı verilir (Hanif ve ark., 2019).

### 1.3. Null Cartan Eğrilerinin 1. ve 2. Mertebeden İnvolut Eğrileri

Bu kısımda  $\mathbb{E}_1^3$ 'de null Cartan eğrinin 1. ve 2. mertebeden involütleri karakterize edilecektir. İnvolut ile ilgili olarak Bertrand null Cartan eğrilerinin içerdiği özellikler açısından yeni bir karakterizasyon elde edilir. Yani, null Cartan helisi varsa 1. ve 2. mertebeden null Cartan involüt olduğunu ve Bertrand null Cartan eğrisi ve involüt Bertrand çift eğrisi olduğu ispatlanır. Özellikle null Cartan eğrisinin Cartan çatısı ile bu

eğrinin sırasıyla null olmayan veya null Cartan involüt eğrisinin Frenet veya Cartan çatısı arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca  $\mathbb{E}_1^3$ 'de tüm null Cartan eğrileri arasında sadece 1. mertebeden involütler iki null Cartan kübik ailesine sahiptir, bunlardan biri B-scroll üzerindedir. Daha doğrusu null Cartan kübik  $\alpha$ 'nın involütün taban eğrisi B-scroll üzerinde bulunan her eğri null olmayan eğri olduğunu kanıtlanır. Ayrıca null Cartan eğrinin 1. ve 2. mertebeden involütleri arasındaki bazı ilişkileri ve ilişkili örnekler veriyoruz.

**Teorem 1.3.1.**  $\mathbb{E}_1^3$ 'de  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  null Cartan eğrileri olmak üzere pseudo yay uzunlukları parametreleri sırasıyla  $s$  ve  $s^*$  ile burulmaları sırasıyla  $k_2(s) \neq 0$  ve  $k_2^*(s^*) \neq 0$  yazılır.  $\alpha^*$  involüttür ancak ve ancak  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand çifti eşit sabit burulmalara sahip eğrilerdir.

**İspat**  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın involütü olsun. Daha sonra  $\alpha^*$  şu şekilde parametrelendirilebilir.

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s), \quad (1.51)$$

bu eşitliğin türevini alınırsa

$$\alpha^{*'}(s) = \alpha'(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) \quad (1.52)$$

elde edilir. (1.12) eşitliğinden faydalanıp tekrar düzenlenirse

$$\alpha^{*'}(s) = T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)(-k_2T + k_1B) \quad (1.53)$$

$$\alpha^{*'} = (1 - \lambda k_2)T + \lambda'N + \lambda k_1B \quad (1.54)$$

elde edilir. Burada  $k_1 = 1$  olduğundan

$$\alpha^{*'} = (1 - \lambda k_2)T + \lambda'N + \lambda B \quad (1.55)$$

elde edilir. (1.55) eşitliğinin her iki tarafı  $N(s)$  ile Lorentz çarpımını yapılırsa  $\langle \alpha^{*'}(s), N(s) \rangle_L = 0$  bulunur.

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = \langle (1 - \lambda k_2)T + \lambda'N + \lambda B, N \rangle_L \quad (1.56)$$

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = (1 - \lambda k_2) \langle T, N \rangle_L + \lambda' \langle N, N \rangle_L + \lambda \langle B, N \rangle_L \quad (1.57)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\langle T, N \rangle_L = \langle B, N \rangle_L = 0$ ,  $\langle N, N \rangle_L = 1$  ve  $\lambda' = 0$  olur. Bundan dolayı  $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$  ve

$$\alpha^* = \alpha + \lambda_0 N \quad (1.58)$$

olur. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha^{*'}(s)\| = 0$  olduğundan

$$\langle \alpha^{*'}, \alpha^{*'} \rangle_L = \langle (1 - \lambda_0 k_2)T + \lambda_0 B, (1 - \lambda_0 k_2)T + \lambda_0 B \rangle_L = 0 \quad (1.59)$$

$$\langle \alpha^{*'}, \alpha^{*'} \rangle_L = (1 - \lambda_0 k_2)^2 \langle T, T \rangle_L + 2\lambda_0(1 - \lambda_0 k_2) \langle T, B \rangle_L + \lambda_0^2 \langle B, B \rangle_L = 0 \quad (1.60)$$

bulunur. Burada  $\langle T, T \rangle_L = \langle B, B \rangle_L = 0$ ,  $\langle T, B \rangle_L = -1$  dir. O halde

$$\|\alpha^{*'}(s)\| = -2\lambda_0(1 - \lambda_0 k_2) = 0 \quad (1.61)$$

$$k_2 = \frac{1}{\lambda_0} \quad (1.62)$$

olur.  $T^*$  vektör alanının tanımına göre  $T^*(s) = \alpha^{*'}(s)$  olduğundan

$$T^* = \alpha^{*'} = (1 - \lambda_0 k_2)T + \lambda_0 B = \lambda_0 B \quad (1.63)$$

bulunur.  $N^*(s) = \frac{-k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}} T(s) + \frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}} B(s)$  eşitliğine göre  $N^*(s) =$

$\alpha^{*''}(s)$  olduğundan dolayı

$$N^* = \alpha^{*''} = \lambda_0' B + \lambda_0 B' = \lambda_0(-k_2 N) = \lambda_0 \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right) N = -N \quad (1.64)$$

elde edilir.

$$B^* = xT + yN + zB \quad (1.65)$$

diye ifade edilirse  $\langle N^*, B^* \rangle_L = \langle T^*, B^* \rangle_L = \langle B^*, B^* \rangle_L = 0$  eşitliklerini kullanarak  $x, y$  ve  $z$  bilinmeyenlerini bulunur. (1.65) eşitliğinin her iki tarafını  $N^*$  ile Lorentz çarpımını alınırsa

$$\langle N^*, B^* \rangle_L = \langle -N, xT + yN + zB \rangle_L = 0 \quad (1.66)$$

$$\langle N^*, B^* \rangle_L = -x\langle N, T \rangle_L - y\langle N, N \rangle_L - z\langle N, B \rangle_L = 0 \quad (1.67)$$

elde edilir.

$$\langle T, N \rangle_L = \langle B, N \rangle_L = 0, \langle N, N \rangle_L = 1 \quad (1.68)$$

eşitliklerini (1.67) de yerine yazılırsa  $y = 0$  olduğu görülür.

$$\langle T^*, B^* \rangle_L = \langle \lambda_0 B, xT + zB \rangle_L = -1 \quad (1.69)$$

$$\langle T^*, B^* \rangle_L = \lambda_0 x \langle T, B \rangle_L + \lambda_0 z \langle B, B \rangle_L = -1 \quad (1.70)$$

elde edilir.

$$\langle B, B \rangle_L = 0 \text{ ve } \langle T, B \rangle_L = -1 \quad (1.71)$$

eşitliklerini (1.70) de yerine yazılırsa  $x = \frac{1}{\lambda_0}$  olarak elde edilir.

$$\langle B^*, B^* \rangle_L = \langle \frac{T}{\lambda_0} + zB, \frac{T}{\lambda_0} + zB \rangle_L = 0 \quad (1.72)$$

$$\langle B^*, B^* \rangle_L = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 \langle T, T \rangle_L + \frac{2z}{\lambda_0} \langle T, B \rangle_L + z^2 \langle B, B \rangle_L = 0 \quad (1.73)$$

elde edilir.

$$\langle B, B \rangle_L = \langle T, T \rangle_L = 0, \langle T, B \rangle_L = -1 \quad (1.74)$$

eşitliklerini (1.73) te yerine yazılırsa  $z = 0$  bulunur. O halde

$$T^* = \lambda_0 B, \quad N^* = -N, \quad B^* = \frac{1}{\lambda_0} T. \quad (1.75)$$

$B^* = \frac{1}{\lambda_0} T$  eşitliğinin türevini alınıp düzenlenirse

$$B^{*'} = \frac{1}{\lambda_0} N = -k_2^* N^* = k_2^* N \quad (1.76)$$

elde edilir. O halde  $k_2(s) = k_2^*(s^*) = \frac{1}{\lambda_0}$  olarak bulunur.

Tersine,  $(\alpha, \alpha^*)$ 'nın eşit sabit burulmalara sahip Bertrand çifti null Cartan eğrisi olduğunu varsayalım. Daha sonra  $\alpha$ 'nın Bertrand eğri çifti  $\alpha^*$  ise

$$\alpha^* = \alpha + \frac{1}{k_2} N \quad (1.77)$$

şeklinde yazılır.  $\langle \alpha^{*'}(s), N(s) \rangle_L = 0$  olur. O halde  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın involütüdür.

**Örnek 1.3.1.**  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  olmak üzere

$$\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s, s) \quad (1.78)$$

eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}_1^3$ 'de null Cartan helisi olsun (Hanif ve ark., 2019).

$$\alpha'(s) = (\cosh s, \sinh s, 1) \quad (1.79)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 0$  olduğundan,  $\alpha$  null bir eğridir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = (\cosh s, \sinh s, 1) \quad (1.80)$$

elde edilir. Buradan

$$T'(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.81)$$

ve

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = 1 \quad (1.82)$$

bulunur. Demek ki  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur. Öte yandan

$$N(s) = \frac{1}{k_1(s)} T'(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.83)$$

olur.  $\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = 2k_2(s) = -1$  olur. O halde burulma  $k_2(s) = -\frac{1}{2}$  bulunur.

Teorem 1.3.1 göre  $\alpha^*$ 'ın parametrik denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_2(s)} N(s) = (-\sinh s, -\cosh s, s) \quad (1.84)$$

şeklinde yazılır.

$$\alpha^{*'}(s) = (-\cosh s, -\sinh s, 1) \quad (1.85)$$

Her  $s \in I$  için  $\|\alpha^{*'}(s)\| = 0$  olduğundan,  $\alpha^*$  null bir eğridir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T^*(s) = \alpha^{*'}(s)$  olduğundan

$$T^*(s) = (-\cosh s, -\sinh s, 1), \quad \|T^*(s)\| = 0 \quad (1.86)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$N^* = \alpha^{*''}(s) = (-\sinh s, -\cosh s, 0) \quad (1.87)$$

$$N^{*'} = \alpha^{*'''}(s) = (-\cosh s, -\sinh s, 0) \quad (1.88)$$

bulunur. Burada  $\langle N^{*'}, N^{*'} \rangle_L = -1$  olduğundan dolayı  $k_2^* = -\frac{1}{2}$  olur. O halde  $(\alpha, \alpha^*)$

Bertrand çifti null Cartan helisidir.

**Teorem 1.3.2.**  $\mathbb{E}_1^3$ 'de  $\alpha$  null Cartan eğrisi olsun, pseudo yay  $s$  ile parametrelendirilmiş burulması  $k_2(s)$  ve  $\alpha^*$  null olmayan eğrisiyle null olmayan asıl normal olan eğrinin yay uzunluğu  $s^*$  ile parametrelendirilmiş burulması ise  $k_2^*(s) \neq 0$  olur.  $\alpha^*$ ,  $\alpha$  eğrisinin

involütüdür ancak ve ancak  $\alpha$ 'nın Cartan çatısı  $\{T, N, B\}$  ve  $\alpha^*$ 'ın Frenet çatısı  $\{T^*, N^*, B^*\}$  aşağıdaki gibi ilişkilidir.

$$\begin{aligned} T^* &= \left( \frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|} \right) T + \frac{\lambda_0}{|f|} B, \\ N^* &= \frac{\epsilon_2}{k_2} \left[ \frac{1}{|f|} \left( \frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|} \right)' T + \left( \frac{1-2\lambda_0 k_2}{f^2} \right) N + \frac{1}{|f|} \left( \frac{\lambda_0}{|f|} \right)' B \right], \\ B^* &= -\frac{\epsilon_1}{k_1} \left( \frac{(\lambda_0 k_2 - 1)(1-2\lambda_0 k_2)}{|f|f^2} T + \frac{1}{|f|} \left( \left( \frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|} \right)' \left( \frac{\lambda_0}{|f|} \right) - \left( \frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|} \right) \left( \frac{\lambda_0}{|f|} \right)' \right) N + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_0(1-2\lambda_0 k_2)}{|f|f^2} B \right), \end{aligned} \quad (1.89)$$

burada  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0$  ve  $|f(s)| = \sqrt{|2\epsilon_1 \lambda_0 (\lambda_0 k_2(s) - 1)|} \neq 0$  olarak verilir (Hanif ve ark., 2019).

**İspat**  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın spacelike veya timelike involütü olduğunu varsayalım. Burada  $\alpha^*$ 'ın parametrelendirilmesi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s), \quad (1.90)$$

burada  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  diferansiyellenebilir fonksiyondur. (1.90) eşitliğinin türevini alınıp düzenlenirse

$$\alpha^{*'}(s) = \alpha'(s) + \lambda_0 N'(s) = (1 - \lambda_0 k_2)T(s) + \lambda_0 B(s) \quad (1.91)$$

elde edilir.  $\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0$  olduğundan dolayı  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın involütüdür.

$$\langle \alpha^{*'}, \alpha^{*'} \rangle_L = 2\lambda_0(\lambda_0 k_2 - 1) \neq 0 \quad (1.92)$$

$$\langle \alpha^{*'}, \alpha^{*'} \rangle_L = \epsilon_1 [f(s)]^2, \quad (1.93)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\epsilon_1 = 1$  ise  $\alpha^*$  spacelike eğri,  $\epsilon_1 = -1$  ise  $\alpha^*$  timelike eğridir. Bu nedenle,

$$|f(s)| = \|\alpha^{*'}(s)\| = \sqrt{|2\epsilon_1 \lambda_0 (\lambda_0 k_2(s) - 1)|}. \quad (1.94)$$

olarak elde edilir.  $\alpha^*$ 'ın birim teğet vektörü

$$T^* = \frac{\alpha^{*\prime}(s)}{\|\alpha^{*\prime}(s)\|} = \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right) T + \frac{\lambda_0}{|f|} B. \quad (1.95)$$

olarak elde edilir.  $\alpha^*$ 'ın yay uzunluğu parametresi şu şekilde verilir:

$$s^*(s) = \int_0^s \|\alpha^{*\prime}(u)\| du, \quad (1.96)$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \|\alpha^{*\prime}(s)\| = |f(s)|. \quad (1.97)$$

Buradan

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{dT^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{|f|} \left[ \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right)' T + \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right) T' + \left(\frac{\lambda_0}{|f|}\right)' B + \left(\frac{\lambda_0}{|f|}\right) B' \right] \quad (1.98)$$

elde ederiz. Diğer yandan (1.98) ve (1.40) eşitlikleri kullanılıp tekrar düzenlenirse

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \epsilon_2 k_1^* N^* \quad (1.99)$$

elde edilir. (1.98) ve (1.99) eşitlikleri birbiriyle ilişkilendirilirse

$$N^* = \frac{\epsilon_2}{k_2} \left[ \frac{1}{|f|} \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right)' T + \left(\frac{1-2\lambda_0 k_2}{f^2}\right) N + \frac{1}{|f|} \left(\frac{\lambda_0}{|f|}\right)' B \right] \quad (1.100)$$

bulunur. (1.48), (1.95) ve (1.100) eşitlikleri birbiriyle ilişkilendirilirse

$$T^* \times N^* = -\epsilon_1 \epsilon_2 B^* \quad (1.101)$$

$$B^* = -\frac{\epsilon_1}{k_1^*} \left( \frac{(\lambda_0 k_2 - 1)(1 - 2\lambda_0 k_2)}{|f|f^2} T + \frac{1}{|f|} \left( \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right)' \left(\frac{\lambda_0}{|f|}\right) - \left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right) \left(\frac{\lambda_0}{|f|}\right)' \right) N + \frac{\lambda_0(1-2\lambda_0 k_2)}{|f|f^2} B \right) \quad (1.102)$$

şeklinde bulunur. Son olarak (1.95), (1.100) ve (1.102) eşitlikleri yazılarak (1.89) elde edilir.

Tersine, (1.89) sağlansın.  $\alpha^*$  involüt ise

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0 \quad (1.103)$$

olmalıdır.

$$T^* = \frac{\alpha^{*'}}{\|\alpha^{*'}\|} \quad (1.104)$$

$$\alpha^{*'} = |f(t)|T^* \quad (1.105)$$

şeklinde yazılır. (1.89) eşitliğini kullanarak  $T^*$  yerine  $\left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right)T + \frac{\lambda_0}{|f|}B$  yazılır.

$$\alpha^{*'} = |f(t)|\left[\left(\frac{1-\lambda_0 k_2}{|f|}\right)T + \frac{\lambda_0}{|f|}B\right] \quad (1.106)$$

$$\alpha^{*'} = (1 - \lambda_0 k_2)T + \lambda_0 B \quad (1.107)$$

şeklinde yazılır.  $\alpha^{*'}$  nın  $N(s)$  ile Lorentz iç çarpımı alınırsa

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = \langle (1 - \lambda_0 k_2)T + \lambda_0 B, N \rangle_L = (1 - \lambda_0 k_2)\langle T, N \rangle_L + \lambda_0 \langle B, N \rangle_L = 0 \quad (1.108)$$

olur. O halde  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin involütüdür.

**Sonuç 1.3.1.**  $\mathbb{E}_1^3$ 'de  $\alpha$  null Cartan helisinin pseudo yay parametresi  $s$  olsun ve  $\alpha^*$ , yay uzunluğu  $s^*$  ile parametrelendirilmiş null olmayan asli normali olan bir null olmayan bir eğridir. O halde  $\alpha^*$  involüttür ancak ve ancak  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand çift eğrileridir (Hanif ve ark., 2019).

**Örnek 1.3.2.**  $\alpha, \mathbb{E}_1^3$ 'de bir null Cartan helis olsun.

$$\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s, s) \quad (1.109)$$

ve Cartan çatısı

$$T(s) = (\cosh s, \sinh s, 1) \quad (1.110)$$

$$N(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.111)$$

$$B(s) = \left(\frac{1}{2} \cosh s, \frac{1}{2} \sinh s, -\frac{1}{2}\right) \quad (1.112)$$

bulunur.

$\alpha^*$  eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) - \frac{1}{2}N(s) = \left(\frac{1}{2} \sinh s, \frac{1}{2} \cosh s, s\right) \quad (1.113)$$

şeklinde tanımlıdır. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha^{*\prime}(s)\| = 1$  olduğundan,  $\alpha^*$  spacelike hiperbolik helistir ve Frenet çatısı

$$T^*(s) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cosh s, \sinh s, 2) \quad (1.114)$$

$$N^*(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.115)$$

$$B^*(s) = -\frac{\sqrt{3}}{3} (2 \cosh s, 2 \sinh s, 1) \quad (1.116)$$

bulunur.  $N$  ve  $N^*$  lineer bağımlı olduğundan dolayı Bertrand eğrisi tanımına göre  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand çift eğrileridir.  $\langle \alpha^{*\prime}(s), N(s) \rangle_L = 0$  olduğu kolayca doğrulanabilir. O halde  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın spacelike involütüdür (Hanif ve ark., 2019).

**Teorem 1.3.3.**  $\mathbb{E}_1^3$ 'de B-scroll üzerinde yatan her null olmayan eğri taban eğrisi olan null Cartan kübik  $\alpha$ 'nın involütüdür (Hanif ve ark., 2019).

**İspat:** B-scroll parametrik denklemi

$$\beta(s, t) = \alpha(s) + tB(s) \quad (1.117)$$

olarak verilsin. Burada  $\alpha(s)$ , pseudo yay  $s$  ile parametrelendirilen bir null Cartan kübik ve  $B(s)$   $\alpha$  eğrisinin binormal vektörüdür.  $\gamma$  parametrik denklemle B-scroll üzerinde yatan herhangi bir eğri olsun.

$$\gamma(s) = \alpha(s) + t(s)B(s) \quad (1.118)$$

şeklinde yazılır. (1.118) eşitliğinin türevini alınırsa

$$\gamma'(s) = \alpha'(s) + t'(s)B(s) + t(s)B'(s) \quad (1.119)$$

elde edilir. Burada  $k_2 = 0$  olduğundan dolayı  $B'(s) = 0$  olur. (1.119) eşitliği düzenlenirse

$$\gamma'(s) = T(s) + t'(s)B(s) \quad (1.120)$$

elde edilir.

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_L = \langle T + t'B, T + t'B \rangle_L = \langle T, T \rangle_L + 2t' \langle T, B \rangle_L + t'^2 \langle B, B \rangle_L \quad (1.121)$$

elde edilir. Burada  $\langle T, T \rangle_L = \langle B, B \rangle_L = 0$  ve  $\langle T, B \rangle_L = -1$  olduğundan dolayı

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_L = -2t' \neq 0 \quad (1.122)$$

olduğu görülür. Bu  $\gamma$ 'nin null olmayan bir eğri olduğu anlamına gelir.  $\gamma'$ 'nin  $N(s)$  ile Lorentz çarpımı

$$\langle \gamma', N \rangle_L = \langle T + t'B, N \rangle_L = \langle T, N \rangle_L + t' \langle B, N \rangle_L \quad (1.123)$$

olarak bulunur. Burada  $\langle T, N \rangle_L = \langle B, N \rangle_L = 0$  olduğundan dolayı  $\langle \gamma', N \rangle = 0$  olur. Sonuç olarak  $\gamma$ ,  $\alpha$ 'nın involütüdür.

**Örnek 1.3.3.**  $\mathbb{E}_1^3$ 'teki  $\alpha^*$  eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + sB(s) \quad (1.124)$$

şeklinde verilir. Burada  $\alpha$  null Cartan kübik parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \left( \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3} \right) \quad (1.125)$$

ve  $B(s)$  ise  $\alpha$ 'nın binormal vektörüdür (Hanif ve ark., 2019).

$$\alpha'(s) = \left( \frac{3s^2}{4} + \frac{1}{3}, s, \frac{3s^2}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (1.126)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 0$  olduğundan  $\alpha$  null bir eğridir.  $T$  vektörünün tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = \left( \frac{3s^2}{4} + \frac{1}{3}, s, \frac{3s^2}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (1.127)$$

elde edilir. Buradan

$$T'(s) = \left( \frac{3s}{2}, 1, \frac{3s}{2} \right) \quad (1.128)$$

ve

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = 1 \quad (1.129)$$

bulunur. Demek ki  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur. Öte yandan

$$N(s) = \frac{1}{k_1(s)} T'(s) = \left( \frac{3s}{2}, 1, \frac{3s}{2} \right) \quad (1.130)$$

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) = \left( \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right) \quad (1.131)$$

(1.129) ve (1.125) eşitliklerini kullanarak (1.128) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\alpha^*(s) = \left( \frac{s^3}{4} + \frac{11s}{6}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} + \frac{7s}{6} \right) \quad (1.132)$$

elde edilir.

$$\alpha^{*\prime}(s) = \left( \frac{3s^2}{4} + \frac{11}{6}, s, \frac{3s^2}{4} + \frac{7}{6} \right) \quad (1.133)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha^{*'}(s), \alpha^{*'}(s) \rangle_L = -\frac{85}{36}$  olduğundan  $\alpha$  timelike bir eğridir.

$$T^*(s) = \frac{\alpha^{*'}(s)}{\|\alpha^{*'}(s)\|} = \frac{6}{\sqrt{85}} \left( \frac{3s}{2}, 1, \frac{3s}{2} \right) \quad (1.134)$$

elde edilir. Burada  $N^*$  ı bulmak için  $T^{*'} = \epsilon_2 k_1^* N^*$  eşitliği kullanılırsa

$$N^* = \frac{T^{*'}}{\epsilon_2 k_1^*} = \frac{1}{\epsilon_2 k_1^*} \frac{6}{\sqrt{85}} \left( \frac{3s}{2}, 1, \frac{3s}{2} \right) \quad (1.135)$$

elde edilir. O halde  $N$  ve  $N^*$  lineer bağımlıdır.

$$\langle \alpha^{*'}(s), N(s) \rangle_L = \left\langle \left( \frac{3s^2}{4} + \frac{11}{6}, s, \frac{3s^2}{4} + \frac{7}{6} \right), \left( \frac{3s}{2}, 1, \frac{3s}{2} \right) \right\rangle_L = 0 \quad (1.136)$$

olur. O halde  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin involütüdür.

**Sonuç 1.3.2.** Bir  $\alpha$  null Cartan eğrisinin her null Cartan involütü  $\alpha^*$ 'nın 2. mertebeden involütü olur (Hanif ve ark., 2019).

**İspat**  $\alpha^*$ 'nın 2. mertebeden involütü olduğunu göstermek için

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0, \quad \langle \alpha^{*'}, B \rangle_L = 0 \quad (1.137)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha$  bir null Cartan eğrisi ve  $\alpha^*$  ise  $\alpha$  eğrisinin herhangi bir Cartan involütü olsun.  $\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0$  olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 1.3.1' e göre  $(\alpha, \alpha^*)$  bir Bertrand eğri çiftidir.

$$\alpha^* = \alpha + \frac{1}{k_2} N \quad (1.138)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\alpha^{*'} = \alpha' + \frac{1}{k_2} N' \quad (1.139)$$

$$\alpha^{*'} = T + \frac{1}{k_2} (-k_2 T + k_1 B) = \frac{k_1}{k_2} B \quad (1.140)$$

elde edilir. Eşitliği  $B(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa

$$\langle \alpha^{*'}, B \rangle_L = \langle \frac{k_1}{k_2} B, B \rangle_L = 0 \quad (1.141)$$

olur. O halde  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 2.dereceden involütü olur.

#### 1.4. Minkowski Uzayında $k$ . Mertebeden İnvolut Eğrileri

Bu kısımda,  $n > 2$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere  $\mathbb{E}_1^n$ 'de verilen bir null Cartan eğrisi için  $k$ -boyutlu oskülatör uzayı tanımı verilecektir. Ayrıca  $n \geq 3$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere,  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowksi uzayında Cartan çatısı  $\{T, N, B_1, \dots, B_{n-2}\}$  olan  $\alpha$  null Cartan eğrisi için  $k$ . mertebeden involüt ve  $k$ . mertebeden genişletilmiş involüt tanımı da ifade edilecektir. Eğer  $\alpha$   $\mathbb{E}_1^3$ 'de bir null Cartan eğrisi ise, oskülatör düzlemi  $B^\perp$  ise  $\{N, B\}$  tarafından gerilir. Bu durumda  $B^\perp$  düzlemi,  $\alpha$  eğrisinin 2-boyutlu oskülatör uzayı olarak kabul edilebilir (Hanif ve ark., 2019).

**Tanım 1.4.1.**  $n \geq 3$  olmak üzere,  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowksi uzayında Cartan çatısı  $\{T, N, B_1, \dots, B_{n-2}\}$  olan  $\alpha$  null Cartan eğrisi için 1-boyutlu ve 2-boyutlu oskülatör uzaylar sırasıyla

$$V_1 = \text{span}\{N\}, \quad (1.142)$$

$$V_2 = \text{span}\{N, B_1\} \quad (1.143)$$

şeklinde tanımlanır.  $n \geq 4$  ve  $3 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere,  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowksi uzayında bir  $\alpha$  null Cartan eğrisi için  $k$ -boyutlu oskülatör uzay ise

$$V_k = \text{span}\{T, N, B_1, \dots, B_{k-2}\} \quad (1.144)$$

olarak tanımlanır (Hanif ve ark., 2019).

**Tanım 1.4.2.**  $n \geq 3$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere, bir null olmayan veya null Cartan  $\alpha^*$  eğrisi için, eğer  $\alpha^*$  eğrisi  $\mathbb{E}_1^n$ 'de verilen bir  $\alpha$  null Cartan eğrisinin  $k$ -boyutlu oskülatör uzayına dik ise  $\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$ 'nın  $k$ . mertebeden involütü adı verilir (Hanif ve ark., 2019).

Tanım 1.4.1 ve Tanım 1.4.2 'ye göre,  $\alpha^*$  eğrisi  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında bir  $\alpha$  null Cartan eğrisinin 1. ve 2. Mertebeden involütü olması için sırasıyla aşağıda verilen (1.145) ve (1.146) şartlarını sağlaması gerekir.

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0, \quad (1.145)$$

$$\langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0, \quad \langle \alpha^{*'}, B \rangle_L = 0. \quad (1.146)$$

Buna göre (1.145) koşulu,  $\alpha$ 'nın 1. mertebeden involüt eğrisinin spacelike, timelike veya null Cartan olabileceği anlamına gelir. Benzer şekilde (1.146) koşulu ise  $\alpha$ 'nın 2. mertebeden involüt eğrisinin yalnızca null Cartan eğri olabileceği anlamına gelir (Hanif ve ark., 2019).

Tanım 1.4.1 ve Tanım 1.4.2 'ye göre,  $n \geq 4$  ve  $3 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere,  $\alpha^*$  eğrisi

$$\langle \alpha^{*'}, T \rangle_L = 0, \quad \langle \alpha^{*'}, N \rangle_L = 0, \quad \langle \alpha^{*'}, B_j \rangle_L = 0, \quad (1.147)$$

koşullarını sağlıyorsa,  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  null Cartan eğrisinin  $k$ . mertebeden involüt eğrisidir. Burada  $1 \leq j \leq k - 2$  ' dir. Ayrıca bir null Cartan eğrisinin genişletilmiş involüt eğrisi tanımını da aşağıda verilmiştir (Hanif ve ark., 2019).

**Tanım 1.4.3.**  $n \geq 3$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere, eğer her  $t^*$  anında  $\beta(s^*, t^*)$  eğrisi  $\alpha$ 'nın  $k$ -boyutlu oskülatör uzayına dik ise  $s^*$  yay veya pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null olmayan veya null Cartan  $\beta(s^*, t^*)$  eğrisine için  $\mathbb{E}_1^n$ 'de  $\alpha$  null Cartan eğrisinin  $k$ . mertebeden genişletilmiş involüt eğrisi adı verilir (Hanif ve ark., 2019).

**Örnek 1.4.1.**  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  olmak üzere

$$\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s, s) \quad (1.148)$$

eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisinin Bertrand çiftini ve bu eğrinin Frenet vektör alanlarını bulalım.

$$\alpha'(s) = (\cosh s, \sinh s, 1) \quad (1.149)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  olduğundan,  $\alpha$  null bir eğridir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = (\cosh s, \sinh s, 1) \quad (1.180)$$

elde edilir. Buradan

$$T'(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.181)$$

ve

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = 1 \quad (1.182)$$

bulunur. Demek ki  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur. Öte yandan

$$N(s) = \frac{1}{k_1(s)} T'(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \quad (1.183)$$

olarak bulunur. (1.46) ve (1.47) şartlarını sağlayan  $B$  vektör alanı

$$B = (x, y, z) \quad (1.184)$$

olsun.

$$\langle B, B \rangle_L = -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (1.185)$$

$$\langle N, B \rangle_L = -x \sinh s + y \cosh s = 0 \quad (1.186)$$

$$\langle T, B \rangle_L = -x \cosh s + y \sinh s + z = -1 \quad (1.187)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan  $x = \frac{1}{2} \cosh s$ ,  $y = \frac{1}{2} \sinh s$  ve  $z = -\frac{1}{2}$  olduğu görülür.

$$B(s) = \left( \frac{1}{2} \cosh s, \frac{1}{2} \sinh s, -\frac{1}{2} \right) \quad (1.188)$$

bulunur.

$\alpha$  eğrisinin Bertrand eğri çifti (Hanif ve ark., 2019) çalışmasından verilen  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s)$  eşitlik yardımıyla

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) = \left( \frac{1}{2} \sinh s, \frac{1}{2} \cosh s, s \right) \quad (1.189)$$

olarak bulunur. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha^{*'}(s)\| = \sqrt{\frac{3}{4}}$  olduğundan  $\alpha^*$  eğrisini birim hızlı değildir.  $\alpha^* \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi birim hızlı olacak biçimde bir  $h: J \rightarrow I$  parametre dönüşümü vardır.

$$f(t) = \int_0^t \|\alpha^{*'}(u)\| du = \int_0^t \sqrt{\frac{3}{4}} du = \frac{\sqrt{3}}{2} t = s \quad (1.190)$$

$\beta$  fonksiyonu  $f: I \rightarrow J$  fonksiyonun tersidir.  $\alpha^* \circ h = \beta$  diyelim.  $\beta$  birim hızlı bir eğridir.

$$\beta(s) = \left( \frac{1}{2} \sinh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \cosh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{2s}{\sqrt{3}} \right) \quad (1.191)$$

olarak bulunur. Her  $s \in I$  için  $\|\beta'(s)\| = 1$  olduğundan,  $\beta$  birim hızlı bir eğridir.  $T^*$  vektör alanının tanımına göre  $T^*(s) = \beta'(s)$  olduğundan

$$T^*(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad (1.192)$$

ve

$$k_1^*(s) = \|T^{*\prime}(s)\| = \frac{4}{9} \quad (1.193)$$

olarak bulunur. Demek ki  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur. Öte yandan

$$N^*(s) = \frac{1}{k_1^*(s)} T^{*\prime}(s) = \left( \sinh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \cosh \frac{2s}{\sqrt{3}}, 0 \right) \quad (1.194)$$

olarak elde edilir.

$$B^*(s) = T^*(s) \times_L N^*(s) = \left( \frac{2}{3} \cosh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \sinh \frac{2s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (1.195)$$

bulunur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Evolüt ve involüt kavramları ilk olarak C. Huygens tarafından 1673 yılında eş zamanlı sarkaçlı saatin geometrik özelliklerini tanımlamak için ortaya atılmıştır (Merzbach ve Boyer, 2010). C. Huygens; eş zamanlı eğrinin aslında bir sikloid yayı olduğunu ve bir sikloid eğrisinin involütünün kendisine benzer bir başka sikloid olduğunu keşfetti. Daha sonra bu keşfini verilen bir düzlem eğrisinin eğrilik yarıçapını bulmak için kullandı. Özellikle;  $\gamma_i$  ve  $\gamma_e$  düzlem eğrileri arasında ilginç bir ilişki ortaya koymuştur. Verilen  $\gamma_i$  düzlem eğrisinin üzerindeki  $P$  noktaları için eğrilik merkezlerinin üzerinde yattığı bir  $\gamma_e$  eğrisi var. Bahsi geçen  $\gamma_e$  ve  $\gamma_i$  eğrilerine sırasıyla  $\gamma_i$  eğrisinin evolütü ve  $\gamma_e$  eğrisinin involütü adı verilir. Bundan dolayı,  $\gamma_e$  evolütü  $\gamma_i$  eğrisinin normal doğrularının zarfı ve  $\gamma_i$  involütü ise eğrinin bir noktasından çözülen gerilmiş ipin son noktasının izlediği yol olarak tarif edilebilir.

Klasik differansiyel geometride, bir düzgün  $\alpha$  düzlem eğrisinin tanjant vektör alanı olan  $T$ ; 1-boyutlu öskülatör uzay olarak kabul edilebilir. Buna göre;  $\mathbb{E}^2$ 'de bir  $\tilde{\alpha}$  regüler eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 1-boyutlu öskülatör uzayına dik ise  $\tilde{\alpha}$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin involütü adı verilir. Açıkça;  $\tilde{\alpha}$  eğrisinin tanjant vektör alanı olan  $\tilde{T}$  ise  $\alpha$  eğrisinin asli normal vektör alanı  $N$  ile paraleldir.

Düzlem eğrilerinin involute eğrileri (Apostol ve Mnatsakanian, 2010) çalışmasında ortaya çıkan tanvolute (genelleştirilmiş involute) eğrilerinin özel bir durumu olarak ele alınabilir. (Apostol ve Mnatsakanian, 2010) çalışmasında tanvolüt eğri ise verilen bir düzlem eğrisinin her teğet doğrusu ile aynı keyfi sabit açı ile kesişen eğri olarak tanımlanmıştır.

$n$  boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{R}^n$ ' de ve Minkowski uzay-zaman  $\mathbb{E}_1^4$ ' da  $k > 1$  olmak üzere  $k$ . mertebeden evolüt ve genelleştirilmiş evolüt kavramları tanımlanmış ve üzerine çalışılmıştır (Gerretsen, 1962; Öztürk ve ark, 2018; Öztürk, 2016).

$n$  boyutlu izotropik uzay  $I_n^{(1)}$ , da ve dört boyutlu Galile uzayı  $\mathbb{G}^4$ ' de de  $k$ . mertebeden involut kavramları tanımlanmıştır (Divjak ve Sipus, 1999; Kişi ve Öztürk, 2018).

Öklidyen ve Minkowski uzaylarında involüt ve evolüt eğrilerinin ayrıntılı olarak incelendiği ve özelliklerini yer aldığı çalışmalar da mevcuttur (Arnold ve ark., 2017;

Fukunaga ve Takahashi, 2016; Hanif ve Hou, 2018; Sakaki, 2010; Turgut ve Ali, 2010; Öztürk ve ark., 2018).

Üç boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{E}^3$ ' de bir  $\alpha$  regüler düzgün eğrisi için bir başka  $\alpha^*$  regüler düzgün eğrisi var ve bir  $\varphi: \alpha \rightarrow \alpha^*$  birebir ve örten fonksiyonu ile eğrilerin karşılıklı noktalarındaki normal vektör alanları çakışmakta ise  $\alpha$  eğrisine Bertrand eğrisi adı verilir (Eisenhart, 1960).

$(\alpha, \alpha^*)$  ikilisine Bertrand çifti;  $\alpha^*$  eğrisine ise  $\alpha$  eğrisinin Bertrand eşi adı verilir. Aynı zamanda, üç boyutlu Minkowski uzayı  $\mathbb{E}_1^3$ ' de null (Cartan) eğrilerin Bertrand eşlerinin null eğriler olarak ele alındığı null Bertrand çiftlerini detaylı olarak (Balgetir ve ark., 2014) çalışmasında ele alınmıştır.

Minkowski uzay-zaman  $\mathbb{E}_1^4$ ' da  $\alpha$  eğrisinin karakterine (null olmayan) bağlı olarak Frenet denklemleri ve eğrilik fonksiyonları tanıtılmış ve denklemleri bulmak için yöntemler sunulmuştur (Kühnel, 2003; Yılmaz ve Turgut, 2008; Ilarslan ve Nesovic, 2009).

$\mathbb{E}_1^4$  Minkowski uzayında eğriler için Frenet formüllerinden yararlanarak yapı denklemleri verildi. İvolüt ve Bertrand eğrilerini ele almıştır ve çalışmalarının geometrik uygulamalarını detaylı olarak (Tozak, 2010) çalışmalarında ele alınmıştır.

Dört boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda null, pseudo null, partially null eğrilerinin sınıflandırmasını ele almıştır (Ilarslan ve Nesovic, 2011). Burada Frenet denklemlerine bağlı olarak eğrilerin hangi alt uzayda yatıp yatmadığını üzerine araştırmalar yapmıştır (Ovalıoğlu, 2019).

Null veya null olmayan eğrilerin incelenmesinde ihtiyaç duyulan temel kavramlara yer verilmiştir (O'Neill, 1983; Bonnor, 1985; Walvare, 1995).

$n \geq 3$  ve  $1 \leq k \leq n - 1$  olmak üzere  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowski uzayında null Cartan eğrilerin  $k$ . mertebeden involüt ve genişletilmiş involüt eğrileri tanıtılmıştır. Null Cartan Bertrand eğrilerin null ve null olmayan 1. ve 2. mertebeden involüt eğrilerinin sırasıyla Cartan ve Frenet çatıları arasında ortaya çıkan ilişkiler de ifade edilmiştir (Hanif ve ark., 2019).

Dört boyutlu Minkowski uzayında null Cartan helisi üzerine çalışılmıştır. Bununla birlikte Betchov-Da Rios denkleminin bazı çözümleri verilmiştir (Ferrandez ve ark., 2004)

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında dört boyutlu Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda eğrilerin diferansiyel geometrisini konu alan tez, makale, sempozyum bildirileri ve kitaplardan yararlanılmıştır. Bununla birlikte bazı hesaplamaların kolaylaşması için Sciword, Maple ve Mathematica gibi bazı bilgisayar programlarından faydalanılmıştır.



#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde  $\mathbb{E}_1^4$  Minkowski uzayında verilen bir  $\alpha$  null Cartan veya null olmayan eğrilerinin Cartan veya Frenet denklemlerinin ve eğrilik fonksiyonlarının tanımı verilmiştir.

##### 4.1. Minkowski 4 Uzayı

$\vec{u}=(u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v}=(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$  olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 \quad (4.1)$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı ve bu çarpım ile donatılmış  $\mathbb{R}^4$  uzayına 4 boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı denir ve  $\mathbb{E}_1^4$  ile gösterilir. Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım  $\mathbb{E}_1^4$  deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır.  $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

- i)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$  veya  $(\vec{u} = 0)$  ise  $\vec{u}$  vektörüne spacelike vektör
- ii)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne timelike vektör
- iii)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne lightlike (null) vektör

adı verilir.

Her  $\vec{u} \in \mathbb{E}_1^4$  için  $\vec{u}$  vektörünün normu  $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$  olarak tanımlanır. Eğer  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = 0$  ise  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri diktir denir (Tozak, 2010).

**Tanım 4.1.1.** Her  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{E}_1^4$  için,

$$\vec{u} \times_L \vec{v} \times_L \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye  $\vec{u}, \vec{v}$  ve  $\vec{w}$  vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı denir (Tozak, 2010).

## 4.2. Minkowski Uzay Zamanda Birim Hızlı Timelike Eğriler

**Tanım 4.2.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$ ,  $\forall s \in I$  için null olmayan regüler eğri için  $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L} = 1$  ise  $\alpha$  eğrisine birim hızlı eğri denir.  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  vektörü timelike vektör ise  $\alpha$  eğrisine timelike eğri denir.  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$  ise  $\alpha'$  ya birim hızlı timelike eğri denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir timelike eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (4.3)$$

vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin teğet alanıdır ve timelike vektördür. Yani

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1 \quad (4.4)$$

olur. Her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle_L + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle_L = 0 \quad (4.5)$$

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. O halde  $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$ 'dir. Sonuç olarak  $T'(s) = \alpha''(s)$  timelike vektör olmalıdır.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|}} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (4.7)$$

eşitliğiyle tanımlı  $N$  vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin asli vektör alanı denir.

$$k_1(s) = \sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|} = \|\alpha''(s)\| \quad (4.8)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_1: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyona  $\alpha$  eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu denir.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{k_1(s)} \quad (4.9)$$

$$T'(s) = k_1(s)N(s) \quad (4.10)$$

olarak yazılır.

$$B_1(s) = \frac{(N'(s) - k_1(s)T(s))}{\|N'(s) - k_1(s)T(s)\|} \quad (4.11)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_1$  vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir.

$$k_2(s) = \|N'(s) - k_1(s)T(s)\| \quad (4.12)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyona  $\alpha$  eğrinin ikinci eğrilik fonksiyonu denir.

$$B_1(s) = \frac{(N'(s) - k_1(s)T(s))}{\|N'(s) - k_1(s)T(s)\|} = \frac{(N'(s) - k_1(s)T(s))}{k_2(s)} \quad (4.13)$$

$$N'(s) = k_2(s)B_1(s) + k_1(s)T(s) \quad (4.14)$$

olarak yazılır.

$T \times_L N \times_L B_1$  vektörel çarpımı ile  $B_2$  vektör alanını tanımlamak mümkündür.

$$B_2(s) = \zeta T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.15)$$

olarak tanımlıdır.  $\zeta = \pm 1$  değerini alır.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 ise  $\zeta$  değeri 1,  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı -1 ise  $\zeta$  değeri -1 olur.

$$k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| \quad (4.16)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Örnek 4.2.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \cosh s, \sin s, \cos s) \quad (4.17)$$

eğrisi verilsin.

$$\alpha'(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \cos s, -\sin s) \quad (4.18)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$  olduğundan,  $\alpha$  birim hızlı timelike bir eğridir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \cos s, -\sin s) \quad (4.19)$$

elde edilir. Buradan

$$T'(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \cosh s, -\sin s, -\cos s) \quad (4.20)$$

ve

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{3} \quad (4.21)$$

bulunur.  $\alpha$  eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur. Öte yandan

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k_1(s)} = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s \right) \quad (4.22)$$

olur.

$$N'(s) = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{3}} \sin s \right) \quad (4.23)$$

$$N'(s) - k_1(s)T(s) = \left( -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos s, \frac{4}{\sqrt{3}} \sin s \right) \quad (4.24)$$

$$k_2(s) = \|N'(s) - k_1(s)T(s)\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (4.25)$$

olarak bulunur.  $\alpha$  eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu sabit fonksiyondur.

$$B_1(s) = \frac{N'(s) - k_1(s)T(s)}{k_2(s)} = (-\cosh s, -\sinh s, -\sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s) \quad (4.26)$$

olur.

$$B_1'(s) = (-\sinh s, -\cosh s, \sqrt{2} \sin s, \sqrt{2} \cos s) \quad (4.27)$$

$$B_1'(s) + k_2(s)N(s) = \left(\frac{1}{3} \sinh s, \frac{1}{3} \cosh s, \frac{\sqrt{2}}{3} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{3} \cos s\right) \quad (4.28)$$

$$k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| = \frac{1}{3} \quad (4.29)$$

bulunur.

$$B_2(s) = \zeta T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.30)$$

$$B_2(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos s\right) \quad (4.31)$$

olur.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 olduğu için  $\zeta = 1$  olur.

### 4.3. Minkowski Uzay Zamanda Birim Hızlı Spacelike Eğriler

**Tanım 4.3.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  regüler eğri olmak üzere  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L > 0$  ise  $\alpha$  eğrisine spacelike eğri adı verilir. Ayrıca  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$  ise  $\alpha$  eğrisine birim hızlı spacelike eğri denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (4.32)$$

vektörü  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektörüdür ve spacelike vektördür. Yani

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = 1 \quad (4.33)$$

olur.

$\alpha$  eğrisinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \quad (4.34)$$

şeklinde tanımlı olur.

$$k_1: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.35)$$

$$s \rightarrow k_1(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|} \quad (4.36)$$

eşitliği ile tanımlı  $k_1$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu denir.

O halde  $N$  vektör alanını düzenlenirse

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{k_1(s)} \quad (4.37)$$

$$T'(s) = k_1(s)N(s) \quad (4.38)$$

olduğu görülür.

Birim hızlı bir  $\alpha$  spacelike eğrisinin null olmayan bütün Frenet vektörleri için 3 farklı durum tanımlanır (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**1.Durum:**  $N(s)$  timelike vektör,  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  spacelike vektör olsun.

**Tanım 4.3.2.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü timelike vektör olsun.

$$B_1(s) = \frac{N'(s) + k_1(s)T(s)}{\|N'(s) + k_1(s)T(s)\|} \quad (4.39)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_1$  spacelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.3.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü timelike vektör olsun.

$$k_2: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.40)$$

$$s \rightarrow k_2(s) = \|N'(s) + k_1(s)T(s)\| \quad (4.41)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_2$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.4.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü timelike vektör olsun.

$$B_2(s) = \zeta T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.42)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_2$  spacelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin ikinci binormal vektör alanı denir.  $\zeta = \pm 1$  değerini alır.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 ise  $\zeta$  değeri 1, determinatı -1 ise  $\zeta$  değeri -1 olur (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.5.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü timelike vektör olsun.

$$k_3: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.43)$$

$$s \rightarrow k_3(s) = \|B_1'(s) - k_2(s)N(s)\| \quad (4.44)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_3$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**2.Durum:**  $B_1(s)$  timelike vektör,  $N(s)$  ve  $B_2(s)$  spacelike vektör olsun.

**Tanım 4.3.6.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$B_1(s) = -\frac{N'(s) + k_1(s)T(s)}{\|N'(s) + k_1(s)T(s)\|} \quad (4.45)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_1$  timelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.7.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$k_2: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.46)$$

$$s \rightarrow k_2(s) = \|N'(s) + k_1(s)T(s)\| \quad (4.47)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_2$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.8.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$B_2(s) = \zeta T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.48)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_2$  spacelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin ikinci binormal vektör alanı denir.  $\zeta = \pm 1$  değerini alır.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 ise  $\zeta$  değeri 1, determinatı -1 ise  $\zeta$  değeri -1 olur (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.9.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$k_3: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.49)$$

$$s \rightarrow k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| \quad (4.50)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_3$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**3.Durum:**  $B_2(s)$  timelike vektör,  $N(s)$  ve  $B_1(s)$  spacelike vektör olsun.

**Tanım 4.3.10.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$B_1(s) = \frac{N'(s) + k_1(s)T(s)}{\|N'(s) + k_1(s)T(s)\|} \quad (4.51)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_1$  spacelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.11.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$k_2: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.52)$$

$$s \rightarrow k_2(s) = \|N'(s) + k_1(s)T(s)\| \quad (4.53)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_2$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.12.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$B_2(s) = \zeta T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.54)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B_2$  timelike vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin ikinci binormal vektör alanı denir.  $\zeta = \pm 1$  değerini alır.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 ise  $\zeta$  değeri 1, determinatı -1 ise  $\zeta$  değeri -1 olur (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Tanım 4.3.13.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı bir spacelike eğri ve  $\alpha''(s)$  vektörü spacelike vektör olsun.

$$k_3: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.55)$$

$$s \rightarrow k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| \quad (4.56)$$

eşitliğiyle tanımlı  $k_3$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin üçüncü eğrilik fonksiyonu denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

**Örnek 4.3.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{10}} \sin 2s, -\frac{1}{\sqrt{10}} \cos 2s \right) \quad (4.57)$$

eğrisi verilsin.

$$\alpha'(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s \right) \quad (4.58)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  olduğundan  $\alpha$  eğrisi birim hızlı spacelike eğridir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = \alpha'(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s \right) \quad (4.59)$$

elde edilir.

$$\alpha''(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s \right) \quad (4.60)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 1$  olduğundan  $\beta''$  spacelike vektördür.

$$k_1(s) = \|\alpha''(s)\| = 1 \quad (4.61)$$

olur.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s \right) \quad (4.62)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$  olduğundan,  $N$  birim hızlı spacelike eğridir. (4.62) eşitliğini  $T(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa  $\langle T(s), N(s) \rangle_L = 0$  olur.

$$N'(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s, -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s \right) \quad (4.63)$$

elde edilir. (4.63) eşitliğini  $N(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa  $\langle N'(s), N(s) \rangle_L = 0$  olur.

$$N'(s) + k_1(s)T(s) = \left( \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s \right) \quad (4.64)$$

$$k_2(s) = \|N'(s) + k_1(s)T(s)\| = \sqrt{6} \quad (4.65)$$

elde edilir.

$$B_1(s) = \frac{N'(s) + k_1(s)T(s)}{\|N'(s) + k_1(s)T(s)\|} \quad (4.66)$$

$$B_1(s) = \left( \frac{2}{\sqrt{10}} \sinh s, \frac{2}{\sqrt{10}} \cosh s, -\frac{3}{\sqrt{15}} \sin 2s, -\frac{3}{\sqrt{15}} \cos 2s \right) \quad (4.67)$$

dir. Her  $s \in I$  için  $\langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1$  olduğundan,  $B_1$  birim hızlı spacelike eğridir. (4.67) eşitliğini  $T(s)$  ve  $N(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa  $\langle T(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle N(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olur.

$$B_2(s) = T(s) \times_L N(s) \times_L B_1(s) \quad (4.68)$$

$$B_2(s) = \left( -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cosh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sin 2s, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cos 2s \right) \quad (4.69)$$

olarak bulunur. Her  $s \in I$  için  $\langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = -1$  olduğundan,  $B_2$  birim hızlı timelike eğridir. (4.69) eşitliğini  $T(s)$ ,  $N(s)$  ve  $B_1(s)$  ile Lorentz çarpımını alı alınırsa  $\langle T(s), B_2(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle N(s), B_2(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L = 0$  olur.  $[T, N, B_1, B_2]$  determinatı 1 olduğu için  $\zeta$  değeri 1 olur.

4.2 ve 4.3 başlıkları için  $\alpha$  eğrisi için Frenet formülleri aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1(s) & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1(s) & 0 & \varepsilon_3 k_2(s) & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2(s) & 0 & \varepsilon_4 k_3(s) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Burada

$$\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L, \varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L, \varepsilon_3 = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L \text{ ve } \varepsilon_4 = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L$$

olarak ifade edilir (Ilarslan ve Nesovic, 2009).

#### 4.4. Minkowski Uzay Zamanda Null Eğriler

**Tanım 4.4.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$ ,  $\forall s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$  ise  $\alpha$  eğrisine null eğri adı verilir.  $\alpha$  null eğrisi  $s$  yay uzunluğu fonksiyonu ile parametrelenmiş bir eğri için  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = \pm 1$  ise birim hıza sahiptir.

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  bir null eğri olsun. Bu durumda

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (4.71)$$

vektörü  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörüdür.  $\alpha$  eğrisinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \alpha''(s) \quad (4.72)$$

olarak tanımlanır (Bonner 1985 ve Walrave 1995).

**Tanım 4.4.2.**  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$  Frenet çatısında

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B_1(s) \rangle_L = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 1, \quad (4.73)$$

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = \langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B_2(s) \rangle_L = 0, \quad (4.74)$$

$$\langle N(s), B_1(s) \rangle_L = \langle N(s), B_2(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L = 0 \quad (4.75)$$

şartlarındaki Frenet denklemlerini

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ k_2(s) & 0 & -k_1(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) \\ -k_3(s) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

sağlayan eğriye null eğri denir (Bonner 1985 ve Walrave 1995).

#### 4.5. Minkowski Uzay Zamanda Kısmi Null Eğriler

**Tanım 4.5.1.**  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$  Frenet çatısında

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L = 1, \quad (4.77)$$

$$\langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = \langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.78)$$

$$\langle T(s), B_2(s) \rangle_L = \langle N(s), B_1(s) \rangle_L = \langle N(s), B_2(s) \rangle_L = 0 \quad (4.79)$$

şartlarında

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & -k_3(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

Frenet denklemlerini sağlayan eğriye kısmi(partially) null eğri denir (Bonnor 1985 ve Walrave 1995).

**Teorem 4.5.1.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{E}_1^4$  de bir kısmi(partially) null eğri ve  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$   $\alpha$ 'nın Frenet çatısı olmak üzere  $k_1(s) = 1$  ise Frenet denklemleri

$$T'(s) = N(s) \quad (4.81)$$

$$N'(s) = -T(s) + k_2(s)B_1(s) \quad (4.82)$$

$$B_1'(s) = k_3(s)B_1(s) \quad (4.83)$$

$$B_2'(s) = -k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s) \quad (4.84)$$

şeklindedir (Ovalıoğlu 2019).

**Teorem 4.5.2.**  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$  Frenet çatısında ve  $\mathbb{E}_1^4$  de bir kısmi(partially) null eğri için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur (Ovalıoğlu 2019):

$$\langle T'(s), N(s) \rangle_L = 1, \quad (4.85)$$

$$\langle T'(s), B_1(s) \rangle_L = \langle T'(s), B_2(s) \rangle_L = \langle T'(s), T(s) \rangle_L = \langle N'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.86)$$

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L = \langle B_1'(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1'(s), N(s) \rangle_L = \langle B_1'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.87)$$

$$\langle B_2'(s), T(s) \rangle_L = \langle B_2'(s), B_2(s) \rangle_L = 0, \quad (4.88)$$

$$\langle N'(s), B_2(s) \rangle_L = k_2(s) = -\langle B_2'(s), N(s) \rangle_L, \quad (4.89)$$

$$\langle B_1'(s), B_2(s) \rangle_L = k_3(s) = -\langle B_2'(s), B_1(s) \rangle_L. \quad (4.90)$$

**İspat:** Tanım 4.5.1'e göre (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerin bazıları ve (4.80) kullanılıp düzenlenirse

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle T'(s), N(s) \rangle_L = 1, \quad (4.91)$$

$$\langle N(s), T(s) \rangle_L = \langle T'(s), T(s) \rangle_L = 0, \quad (4.92)$$

$$\langle N(s), B_1(s) \rangle_L = \langle T'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.93)$$

$$\langle N(s), B_2(s) \rangle_L = \langle T'(s), B_2(s) \rangle_L = 0 \quad (4.94)$$

olarak bulunur.

(4.82) eşitliğini sırasıyla  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L = -\langle T(s), N(s) \rangle_L + k_2(s) \langle B_1(s), N(s) \rangle_L, \quad (4.95)$$

$$\langle N'(s), B_1(s) \rangle_L = -\langle T(s), B_1(s) \rangle_L + k_2(s) \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L, \quad (4.96)$$

$$\langle N'(s), B_2(s) \rangle_L = -\langle T(s), B_2(s) \rangle_L + k_2(s) \langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L \quad (4.97)$$

olarak elde edilir. (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerden bazıları kullanılarak düzenlenirse

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L = 0, \quad (4.98)$$

$$\langle N'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.99)$$

$$\langle N'(s), B_2(s) \rangle_L = k_2(s) \quad (4.100)$$

olduğu görülür.

(4.83) eşitliğini sırasıyla  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle B_1'(s), T(s) \rangle_L = k_3(s) \langle B_1(s), T(s) \rangle_L, \quad (4.101)$$

$$\langle B_1'(s), N(s) \rangle_L = k_3(s) \langle B_1(s), N(s) \rangle_L, \quad (4.102)$$

$$\langle B_1'(s), B_1(s) \rangle_L = k_3(s) \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L, \quad (4.103)$$

$$\langle B_1'(s), B_2(s) \rangle_L = k_3(s) \langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L \quad (4.104)$$

olarak bulunur. (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerden bazılarını kullanılarak düzenlenirse

$$\langle B_1'(s), T(s) \rangle_L = 0, \quad (4.105)$$

$$\langle B_1'(s), N(s) \rangle_L = 0, \quad (4.106)$$

$$\langle B_1'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.107)$$

$$\langle B_1'(s), B_2(s) \rangle_L = k_3(s) \quad (4.108)$$

elde edilir.

(4.84) eşitliğini sırasıyla  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle B_2'(s), T(s) \rangle_L = -k_2(s)\langle N(s), T(s) \rangle_L - k_3(s)\langle B_2(s), T(s) \rangle_L, \quad (4.109)$$

$$\langle B_2'(s), N(s) \rangle_L = -k_2(s)\langle N(s), N(s) \rangle_L - k_3(s)\langle B_2(s), N(s) \rangle_L, \quad (4.110)$$

$$\langle B_2'(s), B_1(s) \rangle_L = -k_2(s)\langle N(s), B_1(s) \rangle_L - k_3(s)\langle B_2(s), B_1(s) \rangle_L, \quad (4.111)$$

$$\langle B_2'(s), B_2(s) \rangle_L = -k_2(s)\langle N(s), B_2(s) \rangle_L - k_3(s)\langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L \quad (4.112)$$

olarak bulunur. (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerden bazılarını kullanılarak düzenlenirse

$$\langle B_2'(s), T(s) \rangle_L = 0, \quad (4.113)$$

$$\langle B_2'(s), N(s) \rangle_L = -k_2(s), \quad (4.114)$$

$$\langle B_2'(s), B_1(s) \rangle_L = -k_3(s), \quad (4.115)$$

$$\langle B_2'(s), B_2(s) \rangle_L = 0 \quad (4.116)$$

elde edilir.

**Örnek 4.5.1.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{E}_1^4$  deki bir kısmi(partially) null eğrisinin  $s$  yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş denklemi

$$\alpha(s) = (0, \sqrt{2s} \sin \sqrt{2s} + \cos \sqrt{2s}, \sin \sqrt{2s} - \sqrt{2s} \cos \sqrt{2s}, 0) \quad (4.117)$$

olarak verilsin (Nesovic ve İlarıslan 2011).

$$\alpha'(s) = (0, \cos \sqrt{2s}, \sin \sqrt{2s}, 0) \quad (4.118)$$

dir. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$  olarak bulunur.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = (0, \cos \sqrt{2s}, \sin \sqrt{2s}, 0) \quad (4.119)$$

elde edilir.

$$T'(s) = (0, \frac{-1}{\sqrt{2s}} \sin \sqrt{2s}, \frac{1}{\sqrt{2s}} \cos \sqrt{2s}, 0) \quad (4.120)$$

şeklinde yazılır. (4.120) eşitliğini  $T'(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılarak  $\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = \frac{1}{2s}$  olarak bulunur. (4.80) eşitliğinde  $T'(s)$  eşitliğinin Lorentz çarpımı yapılsa  $\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = k_1^2(s) \langle N(s), N(s) \rangle_L$  olarak elde edilir. Burada  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$  dir.

$$\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = k_1^2(s) \quad (4.121)$$

$$k_1^2(s) = \frac{1}{2s} \quad (4.122)$$

$$k_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \quad (4.123)$$

olur. O halde (4.80) eşitliğini (4.120) ile (4.123) eşitliklerini kullanılarak düzenlenirse

$$N(s) = (0, -\sin \sqrt{2s}, \cos \sqrt{2s}, 0) \quad (4.124)$$

elde edilir.

$$N'(s) = (0, \frac{-1}{\sqrt{2s}} \cos \sqrt{2s}, \frac{-1}{\sqrt{2s}} \sin \sqrt{2s}, 0) \quad (4.125)$$

olur. (4.125) eşitliğini  $N'(s)$  ile Lorentz çarpımını yapılsa  $\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = \frac{1}{2s}$  olarak bulunur. (4.80) eşitliğinde  $N'(s)$  eşitliğinin Lorentz çarpımı alınır

$$\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = k_1^2(s) \langle T(s), T(s) \rangle_L - 2k_1(s)k_2(s) \langle T(s), B_1(s) \rangle_L + k_2^2(s) \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L \quad (4.126)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1$  ve  $\langle T(s), B_1(s) \rangle_L = 0$ 'dır.

$$\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = k_1^2(s) + k_2^2(s) \quad (4.127)$$

$$\frac{1}{2s} = \frac{1}{2s} + k_2^2(s) \quad (4.128)$$

$$k_2(s) = 0 \quad (4.129)$$

olarak bulunur. (4.80) eşitliğindeki şartları sağlayan  $B_1(s) = (x, y, z, t)$  şeklinde olsun. Bu eşitliği sırasıyla  $T(s)$ ,  $N(s)$  ve  $B_1(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle B_1(s), T(s) \rangle_L = \frac{-y}{\sqrt{2s}} \sin \sqrt{2s} + \frac{z}{\sqrt{2s}} \cos \sqrt{2s} \quad (4.130)$$

$$\langle B_1(s), N(s) \rangle_L = -y \sin \sqrt{2s} + z \cos \sqrt{2s} \quad (4.131)$$

$$\langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = -x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \quad (4.132)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerden bazılarını kullanılarak düzenlenirse burada  $y = z = 0$  ve  $x = |t|$  olduğu görülür.

$$B_1(s) = (1, 0, 0, 1) \quad (4.133)$$

olarak alınabilir.

$$B_1'(s) = (0, 0, 0, 0) \quad (4.134)$$

olur. (4.80) eşitliğini (4.134) eşitliğini kullanılarak düzenlenirse

$$B_1'(s) = k_3(s)B_1(s) \quad (4.135)$$

$$k_3(s) = 0 \quad (4.136)$$

olarak bulunur. (4.80) eşitliğindeki şartları sağlayan  $B_2$  vektör alanı

$$B_2(s) = (a, b, c, d) \quad (4.137)$$

şeklinde olsun. (4.137) eşitliğini  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle B_2(s), T(s) \rangle_L = \frac{-b}{\sqrt{2s}} \sin \sqrt{2s} + \frac{c}{\sqrt{2s}} \cos \sqrt{2s} \quad (4.138)$$

$$\langle B_2(s), N(s) \rangle_L = -b \sin \sqrt{2s} + c \cos \sqrt{2s} \quad (4.139)$$

$$\langle B_2(s), B_1(s) \rangle_L = -a + d \quad (4.140)$$

$$\langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = -a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (4.141)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.77) ile (4.79) arasındaki eşitliklerinden bazılarını kullanılarak düzenlenirse burada  $b = c = 0$  ve  $a = |d|$  olduğu görülür.

$$B_2(s) = \left( \frac{-1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right) \quad (4.142)$$

şeklinde bulunur.

#### 4.6. Minkowski Uzay Zamanda Pseudo Null Eğriler

**Tanım 4.6.1.**  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$  Frenet çatısında

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1, \quad (4.143)$$

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 0, \quad (4.144)$$

$$\langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B_1(s) \rangle_L = \langle T(s), B_2(s) \rangle_L = 0, \quad (4.145)$$

$$\langle N(s), B_1(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_2(s) \rangle_L = 0 \text{ ve } \langle N(s), B_2(s) \rangle_L = 1 \quad (4.146)$$

şartlarında tanımlı olan  $\mathbb{E}_1^4$  deki pseudo null eğri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & k_3(s) & 0 & -k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & -k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4.147)$$

$$T'(s) = k_1(s)N(s) \quad (4.148)$$

$$N'(s) = k_2(s)B_1(s) \quad (4.149)$$

$$B_1'(s) = k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s) \quad (4.150)$$

$$B_2'(s) = -k_1(s)T(s) - k_3(s)B_1(s) \quad (4.151)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bonnor 1985 ve Walrave 1995).

**Teorem 4.6.1.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{E}_1^4$  de bir pseudo null eğri ve eğrinin Frenet çatısı  $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$  aşağıdaki eşitlikler mevcuttur (Ovalıoğlu 2019):

$$\langle T'(s), N(s) \rangle_L = \langle T'(s), B_1(s) \rangle_L = \langle T'(s), T(s) \rangle_L = \langle N'(s), T(s) \rangle_L = 0, \quad (4.152)$$

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_L = \langle N'(s), B_2(s) \rangle_L = \langle B_1'(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1'(s), B_1(s) \rangle_L = 0, \quad (4.153)$$

$$\langle B_2'(s), N(s) \rangle_L = \langle B_2'(s), B_2(s) \rangle_L = 0, \quad (4.154)$$

$$\langle T'(s), B_2(s) \rangle_L = k_1(s), \quad (4.155)$$

$$\langle N'(s), B_1(s) \rangle_L = k_2(s), \quad (4.156)$$

$$\langle B_1'(s), N(s) \rangle_L = -k_2(s), \quad (4.157)$$

$$\langle B_1'(s), B_2(s) \rangle_L = k_3(s), \quad (4.158)$$

$$\langle B_2'(s), T(s) \rangle_L = -k_1(s), \quad (4.159)$$

$$\langle B_2'(s), B_1(s) \rangle_L = -k_3(s). \quad (4.160)$$

**İspat:** Teoremin ispatı Teorem 5.2 ispatına benzer şekilde yapılır.

**Sonuç 4.6.1.**  $k_1(s) = 1$  için  $\langle T'(s), B_2(s) \rangle_L = 1$  ve  $\langle T(s), B_2'(s) \rangle_L = -1$  olduğu görülür (Ovalıoğlu 2019).

**Örnek 4.6.1.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{E}_1^4$  deki bir pseudo null eğrisinin  $s$  yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş denklemi

$$\alpha(s) = \left(-\frac{s^2}{2} + \frac{1}{8} \ln s, \frac{s^2}{2} + \frac{1}{8} \ln s, \frac{s\sqrt{2}}{4} [\sin(\ln s) + \cos(\ln s)], \frac{s\sqrt{2}}{4} [\sin(\ln s) - \cos(\ln s)]\right) \quad (4.161)$$

olarak verilsin (Djordjevic ve Nesovic 2019).

$$\alpha'(s) = \left(-s + \frac{1}{8s}, s + \frac{1}{8s}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\ln s), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\ln s)\right) \quad (4.162)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$  dir.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = \left(-s + \frac{1}{8s}, s + \frac{1}{8s}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\ln s), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\ln s)\right) \quad (4.163)$$

elde edilir.

$$\alpha''(s) = \left(-1 - \frac{1}{8s^2}, 1 - \frac{1}{8s^2}, -\frac{1}{s\sqrt{2}} \sin(\ln s), -\frac{1}{s\sqrt{2}} \cos(\ln s)\right) \quad (4.164)$$

dır. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 0$  dir. Sonuç 4.6.1 e göre  $k_1(s) = 1$  dir. O halde

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{k_1(s)} = \left(-1 - \frac{1}{8s^2}, 1 - \frac{1}{8s^2}, -\frac{1}{s\sqrt{2}} \sin(\ln s), -\frac{1}{s\sqrt{2}} \cos(\ln s)\right) \quad (4.165)$$

olur.

$$N'(s) = \left(\frac{1}{4s^3}, \frac{1}{4s^3}, \frac{1}{s^2\sqrt{2}} [\sin(\ln s) - \cos(\ln s)], -\frac{1}{s^2\sqrt{2}} [\cos(\ln s) + \sin(\ln s)]\right) \quad (4.166)$$

şeklinde yazılır. (4.149) eşitliğini  $N'(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılırsa  $\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = k_2^2(s) \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L$  olarak elde edilir. Burada  $\langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1$  dir.

$$\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = k_2^2(s) \quad (4.177)$$

$$k_2^2(s) = \frac{1}{s^4} \quad (4.178)$$

$$k_2(s) = \frac{1}{s^2} \quad (4.179)$$

olarak bulunur. (4.149) eşitliğini (4.176) ve (4.179) eşitliklerini kullanılarak düzenlenirse

$$B_1(s) = \left(\frac{1}{4s}, \frac{1}{4s}, \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(\ln s) - \cos(\ln s)], -\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\ln s) + \sin(\ln s)]\right) \quad (4.180)$$

olur.

$$B'_1(s) = \left(-\frac{1}{4s^2}, -\frac{1}{4s^2}, \frac{1}{s\sqrt{2}} [\cos(\ln s) + \sin(\ln s)], \frac{1}{s\sqrt{2}} [\sin(\ln s) - \cos(\ln s)]\right) \quad (4.181)$$

şeklinde yazılır. (4.150) eşitliğini  $B'_1(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa  $\langle B'_1(s), B'_1(s) \rangle_L = k_3^2(s) \langle N(s), N(s) \rangle_L + k_2^2(s) \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L - 2k_2(s)k_3(s) \langle B_2(s), N(s) \rangle_L$  olarak elde edilir. Burada  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle B_2(s), N(s) \rangle_L = 1$  dir.

$$\langle B'_1(s), B'_1(s) \rangle_L = -2k_2(s)k_3(s) \quad (4.182)$$

$$-\frac{2k_3(s)}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad (4.183)$$

$$k_3(s) = -\frac{1}{2} \quad (4.184)$$

olarak bulunur. (4.150) eşitliğini (4.181), (4.184), (4.179) ve (4.176) eşitliklikleri kullanılarak düzenlenirse

$$B_2(s) = \left(\frac{8s^2+5}{16}, \frac{-8s^2+5}{16}, -\frac{s[\sin(\ln s)+2\cos(\ln s)]}{2\sqrt{2}}, \frac{s[\cos(\ln s)-2\sin(\ln s)]}{2\sqrt{2}}\right) \quad (4.185)$$

elde edilir.

## 5. SONUÇLAR

**Tanım 5.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  regüler eğrisi verilsin.  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $\alpha$  eğrisinin Frenet veya Cartan çatısı olmak üzere

$$V = \text{span}\{T, N, B_1\} \quad (5.1)$$

uzayına  $\alpha$  eğrisinin 3 boyutlu oskülatör uzayı adı verilir.

**Tanım 5.2.**  $\check{\alpha}$  null olmayan veya null Cartan eğrisi olmak üzere eğer  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  regüler eğrisinin 3 boyutlu oskülatör uzayına dik ise  $\check{\alpha}$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisi adı verilir.

Yukarıdaki tanıma göre  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\langle \check{\alpha}', T \rangle_L = 0, \quad (5.2)$$

$$\langle \check{\alpha}', N \rangle_L = 0, \quad (5.3)$$

$$\langle \check{\alpha}', B_1 \rangle_L = 0. \quad (5.4)$$

**Teorem 5.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı timelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.5)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cosh(as) + c_2 k_1 \sinh(as) + \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.6)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sinh(as) - c_2 a \cosh(as) - \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.7)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(as) + c_2 k_2 \sinh(as) + \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.8)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a^2 = k_1^2 - k_2^2 > 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı timelike burulmuş eğri olsun.

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.9)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olduğunu kabul edelim. O halde (5.2)-(5.4) eşitliklerini sağlamalıdır. (5.9) eşitliğinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) &= \alpha'(s) + f_1'(s)T(s) + f_1(s)T'(s) + f_2'(s)N(s) + f_2(s)N'(s) + f_3'(s)B_1(s) \\ &\quad + f_3(s)B_1'(s) \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. (4.70) eşitliğinden faydalanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) &= T(s)(1 + f_1'(s) + k_1f_2(s)) + N(s)(k_1f_1(s) + f_2'(s) - k_2f_3(s)) \\ &\quad + B_1(s)(k_2f_2(s) + f_3'(s)) + B_2(s)k_3f_3(s) \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir. Burada (5.2) eşitliğini kullanılarak

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = -(1 + f_1'(s) + k_1f_2(s)) \quad (5.12)$$

$$f_1'(s) = -1 - k_1f_2(s) \quad (5.13)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (5.3) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = k_1f_1(s) + f_2'(s) - k_2f_3(s) \quad (5.14)$$

$$f_2'(s) = -k_1f_1(s) + k_2f_3(s) \quad (5.15)$$

elde edilir. Son olarak (5.4) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = k_2f_2(s) + f_3'(s) \quad (5.16)$$

$$f_3'(s) = -k_2f_2(s) \quad (5.17)$$

olduğu görülür. (5.13), (5.15) ve (5.17) eşitliklerini

$$\begin{bmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \\ f_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu birinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

ele alalım.  $A$ 'nın karakteristik denklemi

$$K_A(\lambda) = \lambda \left( \lambda - \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \right) \left( \lambda + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \right) = 0 \quad (5.20)$$

şeklinde olup, buradan  $A$  matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ -\sqrt{k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} k_1 \\ \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

olarak bulunur. Burada  $k_1^2 - k_2^2 > 0$  olduğu için  $a \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $k_1^2 - k_2^2 = a^2$  şeklinde ifade edilir. O halde

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\lambda_2 = a \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ -a \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\lambda_3 = -a \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} k_1 \\ a \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

şeklinde düzenlenir. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1 (\cosh(as) + \sinh(as)) \begin{bmatrix} k_1 \\ -a \\ k_2 \end{bmatrix} + d_2 (\cosh(as) - \sinh(as)) \begin{bmatrix} k_1 \\ a \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} k_1 \cosh(as) \\ -a \sinh(as) \\ k_2 \cosh(as) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} k_1 \sinh(as) \\ -a \cosh(as) \\ k_2 \sinh(as) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü düzenlenirse

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} k_1 \cosh(as) \\ -a \sinh(as) \\ k_2 \cosh(as) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} k_1 \sinh(as) \\ -a \cosh(as) \\ k_2 \sinh(as) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

eşitliğiyle elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \cosh(as) & k_1 \sinh(as) \\ 0 & -a \sinh(as) & -a \cosh(as) \\ k_1 & k_2 \cosh(as) & k_2 \sinh(as) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

şeklinde yazılabilir. (5.13), (5.15), (5.17) eşitliklerinin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.31)$$

eşitliğinden yararlanılırsa,  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sistemini Kramer metoduyla çözümlerse

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k_1 \cosh(as) & k_1 \sinh(as) \\ 0 & -a \sinh(as) & -a \cosh(as) \\ 0 & k_2 \cosh(as) & k_2 \sinh(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_2}{a^2} \quad (5.33)$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & k_1 \sinh(as) \\ 0 & 0 & -a \cosh(as) \\ k_1 & 0 & k_2 \sinh(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \cosh(as)}{-a^2} \quad (5.34)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_1 \cosh(as) & -1 \\ 0 & -a \sinh(as) & 0 \\ k_1 & k_2 \cosh(as) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \sinh(as)}{a^2} \quad (5.35)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = \frac{k_2}{a^2} s \quad (5.36)$$

$$u_2(s) = -\frac{k_1 \sinh(as)}{a^3} \quad (5.37)$$

$$u_3(s) = \frac{k_1 \cosh(as)}{a^3} \quad (5.38)$$

şeklinde elde edilir. Burada integral sabitleri genelliği bozmadığından sıfır alınabilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} \frac{k_2}{a^2} s \\ -\frac{k_1}{a^2} \\ \frac{k_1 k_2}{a^2} s \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

ifadesi (5.13), (5.15), (5.17) eşitliklerindeki diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.40)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cosh(as) + c_2 k_1 \sinh(as) + \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.41)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sinh(as) - c_2 a \cosh(as) - \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.42)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(as) + c_2 k_2 \sinh(as) + \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.43)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cosh(as) + c_2 k_1 \sinh(as) + \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.44)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sinh(as) - c_2 a \cosh(as) - \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.45)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(as) + c_2 k_2 \sinh(as) + \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.46)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.47)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s)B_2(s) \quad (5.48)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Örnek 5.1.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \cosh s, \sin s, \cos s) \quad (5.49)$$

birim hızlı timelike eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet vektörleri

$$T(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \cos s, -\sin s) \quad (5.50)$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s\right) \quad (5.51)$$

$$B_1(s) = (-\cosh s, -\sinh s, -\sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s) \quad (5.52)$$

$$B_2(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos s\right) \quad (5.53)$$

şeklinde bulunur. Böylece eğrinin eğrilik fonksiyonları

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{3} \quad (5.54)$$

$$k_2(s) = \|N'(s) - k_1(s)T(s)\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (5.55)$$

$$k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| = \frac{1}{3} \quad (5.56)$$

olarak elde edilir.

$\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\tilde{\alpha}(s) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s - 2\sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2}s \cosh s\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s - 2\sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2}s \sinh s\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos s + 4 \sin s - 4s \cos s\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin s + 4 \cos s + 4s \sin s\right)\right) \quad (5.57)$$

eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisidir. Teorem 5.1'e göre

$$f_1(s) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 8s \quad (5.58)$$

$$f_2(s) = -3\sqrt{3} \quad (5.59)$$

$$f_3(s) = \sqrt{3} + 6\sqrt{2}s \quad (5.60)$$

olduğu görülür ve  $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0$ 'dır.  $\tilde{\alpha}$  eğrisinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\tilde{\alpha}'(s) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s + 2\sqrt{2}s \sinh s\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s + 2\sqrt{2}s \cosh s\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin s + 4s \sin s\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos s + 4s \cos s\right)\right) \quad (5.61)$$

elde edilir. (5.56) eşitliğini sırasıyla  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (5.62)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0 \quad (5.63)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0 \quad (5.64)$$

şeklinde bulunur. Tanım 5.2'ye göre (5.2), (5.3), (5.4) eşitlikleri sağlandığından  $\check{\alpha}$  eğrisi gerçekten  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisidir.

**Teorem 5.2.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı timelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.65)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cos(as) + c_2 k_1 \sin(as) - \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.66)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sin(as) - c_2 a \cos(as) + \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.67)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(as) + c_2 k_2 \sin(as) - \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.68)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $-a^2 = k_1^2 - k_2^2 < 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:** Teorem 5.1 ispatındaki gibi birinci dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

katsayılar matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ -\sqrt{k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} k_1 \\ \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

olarak bulunur. Burada  $k_1^2 - k_2^2 < 0$  olduğu için  $a \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $k_1^2 - k_2^2 = -a^2$  şeklinde ifade edilir. O halde

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

$$\lambda_2 = ai \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ -ai \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

$$\lambda_3 = -ai \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} k_1 \\ ai \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

şeklinde düzenlenir. Bu durumda diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1(\cos(as) + i\sin(as)) \begin{bmatrix} k_1 \\ -ai \\ k_2 \end{bmatrix} + d_2(\cos(as) - i\sin(as)) \begin{bmatrix} k_1 \\ ai \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} k_1 \cos(as) \\ a \sin(as) \\ k_2 \cos(as) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} k_1 \sin(as) \\ -a \cos(as) \\ k_2 \sin(as) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

olarak yazılır. Burada  $c_0, d_1, d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü düzenlenirse

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} k_1 \cos(as) \\ a \sin(as) \\ k_2 \cos(as) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} k_1 \sin(as) \\ -a \cos(as) \\ k_2 \sin(as) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

elde edilir. Özel çözümünü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \cos(as) & k_1 \sin(as) \\ 0 & a \sin(as) & -a \cos(as) \\ k_1 & k_2 \cos(as) & k_2 \sin(as) \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

şeklinde yazılabilir. Özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.80)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sistemi Kramer metodu ile çözümlürse

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k_1 \cos(as) & k_1 \sin(as) \\ 0 & a \sin(as) & -a \cos(as) \\ 0 & k_2 \cos(as) & k_2 \sin(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_2}{a^2} \quad (5.82)$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & k_1 \sin(as) \\ 0 & 0 & -a \cos(as) \\ k_1 & 0 & k_2 \sin(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \cos(as)}{a^2} \quad (5.83)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_1 \cos(as) & -1 \\ 0 & a \sin(as) & 0 \\ k_1 & k_2 \cos(as) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \sin(as)}{a^2} \quad (5.84)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin integral sabitlerini genelliği bozmadığından sıfır alıp integrallerini sırasıyla

$$u_1(s) = -\frac{k_2}{a^2} s \quad (5.85)$$

$$u_2(s) = \frac{k_1 \sin(as)}{a^3} \quad (5.86)$$

$$u_3(s) = -\frac{k_1 \cos(as)}{a^3} \quad (5.87)$$

olarak elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{k_2^2}{a^2} s \\ \frac{k_1}{a^2} \\ -\frac{k_1 k_2}{a^2} s \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

ifadesi diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.89)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cos(as) + c_2 k_1 \sin(as) - \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.90)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sin(as) - c_2 a \cos(as) + \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.91)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(as) + c_2 k_2 \sin(as) - \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.92)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 + c_1 k_1 \cos(as) + c_2 k_1 \sin(as) - \frac{k_2^2}{a^2} s, \quad (5.93)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sin(as) - c_2 a \cos(as) + \frac{k_1}{a^2}, \quad (5.94)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(as) + c_2 k_2 \sin(as) - \frac{k_1 k_2}{a^2} s \quad (5.95)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.96)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s)B_2(s) \quad (5.97)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Teorem 5.3.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 1. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.98)$$

eğrisinin  $\alpha$  spacelike eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_1 \cosh(bs) - c_2 k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.99)$$

$$f_2(s) = -c_1 b \sinh(bs) - c_2 b \cosh(bs) - \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.100)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(bs) + c_2 k_2 \sinh(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.101)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $b \in \mathbb{R}^+$ ,  $b^2 = k_1^2 + k_2^2 > 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 1. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.102)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olduğunu kabul edelim. O halde (5.2)-(5.4) eşitliklerini sağlamalıdır. (5.102) eşitliğinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\check{\alpha}'(s) = \alpha'(s) + f_1'(s)T(s) + f_1(s)T'(s) + f_2'(s)N(s) + f_2(s)N'(s) + f_3'(s)B_1(s)$$

$$+f_3(s)B_1'(s) \quad (5.103)$$

elde edilir. (4.70) eşitliğine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) &= T(s)(1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) + N(s)(\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s)) \\ &\quad + B_1(s)(\varepsilon_3 k_2 f_2(s) + f_3'(s)) + B_2(s)\varepsilon_4 k_3 f_3(s) \end{aligned} \quad (5.104)$$

elde edilir. Burada (5.2) eşitliğini kullanılarak

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = (1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) \quad (5.105)$$

$$f_1'(s) = -1 + \varepsilon_1 k_1 f_2(s) \quad (5.106)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (5.3) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = \varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.107)$$

$$f_2'(s) = -\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.108)$$

elde edilir. Son olarak (5.4) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = k_2 f_2(s) + f_3'(s) \quad (5.109)$$

$$f_3'(s) = -\varepsilon_3 k_2 f_2(s) \quad (5.110)$$

olduğu görülür. Burada  $\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L = -1$ ,  $\varepsilon_3 = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1$  ve  $\varepsilon_4 = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 1$  olarak ifade edilir. (5.106), (5.108) ve (5.110) eşitlikleri düzenlenirse

$$f_1'(s) = -1 + k_1 f_2(s) \quad (5.111)$$

$$f_2'(s) = k_1 f_1(s) - k_2 f_3(s) \quad (5.112)$$

$$f_3'(s) = -k_2 f_2(s) \quad (5.113)$$

Bu eşitlikler

$$\begin{bmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \\ f_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.114)$$

şeklinde yazılabilir. Bu birinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

ele alalım. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.116)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.117)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}. \quad (5.118)$$

Burada  $k_1^2 + k_2^2 > 0$  olduğu için  $b \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $k_1^2 + k_2^2 = b^2$  şeklinde ifade edilir. O halde özdeğer ve özvektörleri

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.119)$$

$$\lambda_2 = b \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -b \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.120)$$

$$\lambda_3 = -b \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ b \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.121)$$

olarak yazılır. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1(\cosh(bs) + \sinh(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ -b \\ k_2 \end{bmatrix} + d_2(\cosh(bs) - \sinh(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ b \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \cosh(bs) \\ -b \sinh(bs) \\ k_2 \cosh(bs) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \sinh(bs) \\ -b \cosh(bs) \\ k_2 \sinh(bs) \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_1 \cosh(bs) \\ -b \sinh(bs) \\ k_2 \cosh(bs) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_1 \sinh(bs) \\ -b \cosh(bs) \\ k_2 \sinh(bs) \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & -k_1 \cosh(bs) & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & -b \sinh(bs) & -b \cosh(bs) \\ k_1 & k_2 \cosh(bs) & k_2 \sinh(bs) \end{pmatrix} \quad (5.125)$$

şeklinde yazılabilir. (5.111), (5.112) ve (5.113) eşitliklerinin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.126)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sistemi Kramer metoduyla çözümlürse

$$u_1'(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_1 \cosh(bs) & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & -b \sinh(bs) & -b \cosh(bs) \\ 0 & k_2 \cosh(bs) & k_2 \sinh(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_2}{b^2} \quad (5.128)$$

$$u_2'(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & 0 & -b \cosh(bs) \\ k_1 & 0 & k_2 \sinh(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \cosh(bs)}{b^2} \quad (5.129)$$

$$u_3'(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -k_1 \cosh(bs) & -1 \\ 0 & -b \sinh(bs) & 0 \\ k_1 & k_2 \cosh(bs) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_1 \sinh(bs)}{b^2} \quad (5.130)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = -\frac{k_2}{b^2} s \quad (5.131)$$

$$u_2(s) = \frac{k_1 \sinh(bs)}{b^3} \quad (5.132)$$

$$u_3(s) = -\frac{k_1 \cosh(bs)}{b^3} \quad (5.133)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{k_2^2}{b^2} s \\ \frac{k_1}{b^2} \\ -\frac{k_1 k_2}{b^2} s \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

ifadesi (5.111), (5.112) ve (5.113) eşitliğindeki diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.135)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_1 \cosh(bs) - c_2 k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.136)$$

$$f_2(s) = -c_1 b \sinh(bs) - c_2 b \cosh(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.137)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(bs) + c_2 k_2 \sinh(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.138)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_1 \cosh(bs) - c_2 k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.139)$$

$$f_2(s) = -c_1 b \sinh(bs) - c_2 b \cosh(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.140)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(bs) + c_2 k_2 \sinh(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.141)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.142)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s) B_2(s) \quad (5.143)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Teorem 5.4.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 2. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.144)$$

eğrisinin  $\alpha$  spacelike eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = -c_0 k_2 - c_1 k_1 \cosh(bs) - c_2 k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.145)$$

$$f_2(s) = -c_1 b \sinh(bs) - c_2 b \cosh(bs) - \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.146)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cosh(bs) + c_2 k_2 \sinh(bs) + \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.147)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $b \in \mathbb{R}^+, b^2 = k_2^2 - k_1^2 > 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 2. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.148)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olduğunu kabul edelim. O halde (5.2)-(5.4) eşitliklerini sağlamalıdır. (5.148) eşitliğinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) = & \alpha'(s) + f_1'(s)T(s) + f_1(s)T'(s) + f_2'(s)N(s) + f_2(s)N'(s) + f_3'(s)B_1(s) \\ & + f_3(s)B_1'(s) \end{aligned} \quad (5.149)$$

elde edilir. (4.70) eşitliğini kullanarak (5.149) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) = & T(s)(1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) + N(s)(\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s)) \\ & + B_1(s)(\varepsilon_3 k_2 f_2(s) + f_3'(s)) + B_2(s)\varepsilon_4 k_3 f_3(s) \end{aligned} \quad (5.150)$$

elde edilir. Burada (5.2) eşitliğini kullanılarak

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = (1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) \quad (5.151)$$

$$f_1'(s) = -1 + \varepsilon_1 k_1 f_2(s) \quad (5.152)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (5.3) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = \varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.153)$$

$$f_2'(s) = -\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.154)$$

elde edilir. Son olarak (5.4) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = k_2 f_2(s) + f_3'(s) \quad (5.155)$$

$$f_3'(s) = -\varepsilon_3 k_2 f_2(s) \quad (5.156)$$

olduğu görülür. Burada  $\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$ ,  $\varepsilon_3 = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = -1$  ve  $\varepsilon_4 = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 1$  olarak ifade edilir. (5.152), (5.154) ve (5.156) eşitlikleri düzenlenirse

$$f_1'(s) = -1 + k_1 f_2(s) \quad (5.157)$$

$$f_2'(s) = -k_1 f_1(s) + k_2 f_3(s) \quad (5.158)$$

$$f_3'(s) = k_2 f_2(s) \quad (5.159)$$

(5.157), (5.158) ve (5.159) eşitliklerini

$$\begin{bmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \\ f_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.160)$$

şeklinde yazılır. Bu birinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

ele alalım. Bu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 0, \quad (5.162)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \quad (5.163)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2} \quad (5.164)$$

olarak bulunur. Burada  $k_2^2 - k_1^2 > 0$  olduğu için  $b \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $k_2^2 - k_1^2 = b^2$  şeklinde ifade edilir. Özdeğerleri  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = b$  ve  $\lambda_3 = -b$  olarak yazılır. Özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri sırasıyla

$$V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.165)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -b \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.166)$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -b \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.167)$$

elde edilir. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1(\cosh(bs) + \sinh(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ -b \\ k_2 \end{bmatrix} + d_2(\cosh(bs) - \sinh(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ b \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.168)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \cosh(bs) \\ -b \sinh(bs) \\ k_2 \cosh(bs) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \sinh(bs) \\ -b \cosh(bs) \\ k_2 \sinh(bs) \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_1 \cosh(bs) \\ -b \sinh(bs) \\ k_2 \cosh(bs) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_1 \sinh(bs) \\ -b \cosh(bs) \\ k_2 \sinh(bs) \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

eşitliğiyle elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & -k_1 \cosh(bs) & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & -b \sinh(bs) & -b \cosh(bs) \\ k_1 & k_2 \cosh(bs) & k_2 \sinh(bs) \end{pmatrix} \quad (5.171)$$

olarak yazılır. (5.157), (5.158) ve (5.159) eşitliklerinin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.172)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.173)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sistemini Kramer metodu ile çözümlerse

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_1 \cosh(bs) & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & -b \sinh(bs) & -b \cosh(bs) \\ 0 & k_2 \cosh(bs) & k_2 \sinh(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_2}{b^2} \quad (5.174)$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & -k_1 \sinh(bs) \\ 0 & 0 & -b \cosh(bs) \\ k_1 & 0 & k_2 \sinh(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_1 \cosh(bs)}{b^2} \quad (5.175)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -k_1 \cosh(bs) & -1 \\ 0 & -b \sinh(bs) & 0 \\ k_1 & k_2 \cosh(bs) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \sinh(bs)}{b^2} \quad (5.176)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = \frac{k_2}{b^2} s \quad (5.177)$$

$$u_2(s) = -\frac{k_1 \sinh(bs)}{b^3} \quad (5.178)$$

$$u_3(s) = \frac{k_1 \cosh(bs)}{b^3} \quad (5.179)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{b^2} s \\ -\frac{k_1}{b^2} \\ \frac{k_1 k_2}{b^2} s \end{pmatrix} \quad (5.180)$$

ifadesi (5.157), (5.158) ve (5.159) eşitliğindeki diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.181)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = -c_0k_2 - c_1k_1 \cosh(bs) - c_2k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2}s, \quad (5.182)$$

$$f_2(s) = -c_1b \sinh(bs) - c_2b \cosh(bs) - \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.183)$$

$$f_3(s) = c_0k_1 + c_1k_2 \cosh(bs) + c_2k_2 \sinh(bs) + \frac{k_1k_2}{b^2}s \quad (5.184)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = -c_0k_2 - c_1k_1 \cosh(bs) - c_2k_1 \sinh(bs) - \frac{k_2^2}{b^2}s, \quad (5.185)$$

$$f_2(s) = -c_1b \sinh(bs) - c_2b \cosh(bs) - \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.186)$$

$$f_3(s) = c_0k_1 + c_1k_2 \cosh(bs) + c_2k_2 \sinh(bs) + \frac{k_1k_2}{b^2}s \quad (5.187)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.188)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3f_3(s)B_2(s) \quad (5.189)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Teorem 5.5.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 2. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.190)$$

eğrisinin  $\alpha$  spacelike eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = -c_0k_2 - c_1k_1 \cos(bs) - c_2k_1 \sin(bs) + \frac{k_2^2}{b^2}s, \quad (5.191)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.192)$$

$$f_3(s) = c_0k_1 + c_1k_2 \cos(bs) + c_2k_2 \sin(bs) - \frac{k_1k_2}{b^2}s \quad (5.193)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $b \in \mathbb{R}^+$ ,  $-b^2 = k_2^2 - k_1^2 < 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:** Teorem 5.4 ispatındaki gibi birinci dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin katsayılar matrisinin  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}$  ve  $\lambda_3 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2}$  özdeğerlerinde  $k_2^2 - k_1^2 < 0$  olduğu için  $b \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $k_2^2 - k_1^2 = -b^2$  şeklinde ifade edilir. O halde özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.194)$$

$$\lambda_2 = bi \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -bi \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.195)$$

$$\lambda_3 = -bi \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ bi \\ k_2 \end{bmatrix}. \quad (5.196)$$

Dolayısıyla diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1(\cos(bs) + i\sin(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ -bi \\ k_2 \end{bmatrix} + d_2(\cos(bs) - i\sin(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ bi \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.197)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \cos(bs) \\ b \sin(bs) \\ k_2 \cos(bs) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \sin(bs) \\ -b \cos(bs) \\ k_2 \sin(bs) \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_1 \cos(bs) \\ b \sin(bs) \\ k_2 \cos(bs) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_1 \sin(bs) \\ -b \cos(bs) \\ k_2 \sin(bs) \end{bmatrix} \quad (5.199)$$

elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} -k_2 & -k_1 \cos(bs) & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & b \sin(bs) & -b \cos(bs) \\ k_1 & k_2 \cos(bs) & k_2 \sin(bs) \end{pmatrix} \quad (5.200)$$

şeklinde yazılabilir. Özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.201)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.202)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sisteminin çözümü

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_1 \cos(bs) & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & b \sin(bs) & -b \cos(bs) \\ 0 & k_2 \cos(bs) & k_2 \sin(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_2}{b^2} \quad (5.203)$$

$$u_2'(s) = \frac{\begin{vmatrix} -k_2 & -1 & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & 0 & -b \cos(bs) \\ k_1 & 0 & k_2 \sin(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \cos(bs)}{b^2} \quad (5.204)$$

$$u_3'(s) = \frac{\begin{vmatrix} -k_2 & -k_1 \cos(bs) & -1 \\ 0 & b \sin(bs) & 0 \\ k_1 & k_2 \cos(bs) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \sin(bs)}{b^2} \quad (5.205)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = -\frac{k_2}{b^2} s \quad (5.206)$$

$$u_2(s) = \frac{k_1 \sin(bs)}{b^3} \quad (5.207)$$

$$u_3(s) = -\frac{k_1 \cos(bs)}{b^3} \quad (5.208)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} \frac{k_2^2}{b^2} s \\ \frac{k_1}{b^2} \\ -\frac{k_1 k_2}{b^2} s \end{pmatrix} \quad (5.209)$$

ifadesi diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.210)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = -c_0 k_2 - c_1 k_1 \cos(bs) - c_2 k_1 \sin(bs) + \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.211)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.212)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(bs) + c_2 k_2 \sin(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.213)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = -c_0k_2 - c_1k_1 \cos(bs) - c_2k_1 \sin(bs) + \frac{k_2^2}{b^2}s, \quad (5.214)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.215)$$

$$f_3(s) = c_0k_1 + c_1k_2 \cos(bs) + c_2k_2 \sin(bs) - \frac{k_1k_2}{b^2}s \quad (5.216)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.217)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3f_3(s)B_2(s) \quad (5.218)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3.mertebeden involüt eğridir.

**Teorem 5.6.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 3. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.219)$$

eğrisinin  $\alpha$  spacelike eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0k_2 - c_1k_1 \cos(bs) - c_2k_1 \sin(bs) - \frac{k_2^2}{b^2}s, \quad (5.220)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.221)$$

$$f_3(s) = c_0k_1 + c_1k_2 \cos(bs) + c_2k_2 \sin(bs) - \frac{k_1k_2}{b^2}s \quad (5.222)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $b \in \mathbb{R}^+$ ,  $-b^2 = -k_1^2 - k_2^2 < 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  birim hızlı 3. durumda spacelike burulmuş eğri olsun.

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.223)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olduğunu kabul edelim. O halde (5.2)-(5.4) eşitliklerini sağlamalıdır. (5.223) eşitliğinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevinden

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(s) &= \alpha'(s) + f_1'(s)T(s) + f_1(s)T'(s) + f_2'(s)N(s) + f_2(s)N'(s) + f_3'(s)B_1(s) \\ &\quad + f_3(s)B_1'(s) \end{aligned} \quad (5.224)$$

elde edilir. (4.70) eşitliğindeki Frenet formüllerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(s) &= T(s)(1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) + N(s)(\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s)) \\ &\quad + B_1(s)(\varepsilon_3 k_2 f_2(s) + f_3'(s)) + B_2(s)\varepsilon_4 k_3 f_3(s) \end{aligned} \quad (5.225)$$

elde edilir. Burada (5.2) eşitliği kullanılarak

$$\langle \tilde{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = (1 + f_1'(s) - \varepsilon_1 k_1 f_2(s)) \quad (5.226)$$

$$f_1'(s) = -1 + \varepsilon_1 k_1 f_2(s) \quad (5.227)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (5.3) eşitliğinden

$$\langle \tilde{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = \varepsilon_2 k_1 f_1(s) + f_2'(s) - \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.228)$$

$$f_2'(s) = -\varepsilon_2 k_1 f_1(s) + \varepsilon_2 k_2 f_3(s) \quad (5.229)$$

elde edilir. Son olarak (5.4) eşitliğinden

$$\langle \tilde{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = k_2 f_2(s) + f_3'(s) \quad (5.230)$$

$$f_3'(s) = -\varepsilon_3 k_2 f_2(s) \quad (5.231)$$

olduğu görülür. Burada  $\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$ ,  $\varepsilon_3 = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 1$  ve  $\varepsilon_4 = \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = -1$  olarak ifade edilir. (5.227), (5.229) ve (5.231) eşitlikleri tekrar düzenlenirse

$$f_1'(s) = -1 + k_1 f_2(s) \quad (5.232)$$

$$f_2'(s) = -k_1 f_1(s) + k_2 f_3(s) \quad (5.233)$$

$$f_3'(s) = -k_2 f_2(s) \quad (5.234)$$

(5.232), (5.233) ve (5.234) eşitliklerini

$$\begin{bmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \\ f_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.235)$$

şeklinde yazılabilir. Bu birinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.236)$$

ele alalım. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.237)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{-k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -\sqrt{-k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.238)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{-k_1^2 - k_2^2} \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ \sqrt{-k_1^2 - k_2^2} \\ k_2 \end{bmatrix}. \quad (5.239)$$

Burada  $-k_1^2 - k_2^2 < 0$  olduğu için  $b \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $-k_1^2 - k_2^2 = -b^2$  şeklinde ifade edilir. O halde özdeğer ve özvektörleri tekrar düzenlenirse sırasıyla

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (5.240)$$

$$\lambda_2 = bi \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -bi \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.241)$$

$$\lambda_3 = -bi \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_1 \\ bi \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.242)$$

olarak yazılır. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$\begin{aligned} X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} -k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + d_1(\cos(bs) + i\sin(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ -bi \\ k_2 \end{bmatrix} \\ + d_2(\cos(bs) - i\sin(bs)) \begin{bmatrix} -k_1 \\ bi \\ k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.243)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \cos(bs) \\ b \sin(bs) \\ k_2 \cos(bs) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_1 \sin(bs) \\ -b \cos(bs) \\ k_2 \sin(bs) \end{bmatrix} \quad (5.244)$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_1 \cos(bs) \\ b \sin(bs) \\ k_2 \cos(bs) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_1 \sin(bs) \\ -b \cos(bs) \\ k_2 \sin(bs) \end{bmatrix} \quad (5.245)$$

eşitliğiyle elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & -k_1 \cos(bs) & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & b \sin(bs) & -b \cos(bs) \\ k_1 & k_2 \cos(bs) & k_2 \sin(bs) \end{pmatrix} \quad (5.246)$$

şeklinde yazılabilir. (5.232), (5.233) ve (5.234) eşitliklerinin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.247)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.248)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sisteminin çözümü

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_1 \cos(bs) & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & b \sin(bs) & -b \cos(bs) \\ 0 & k_2 \cos(bs) & k_2 \sin(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{k_2}{b^2} \quad (5.249)$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & -k_1 \sin(bs) \\ 0 & 0 & -b \cos(bs) \\ k_1 & 0 & k_2 \sin(bs) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \cos(bs)}{b^2} \quad (5.250)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -k_1 \cos(bs) & -1 \\ 0 & b \sin(bs) & 0 \\ k_1 & k_2 \cos(bs) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{k_1 \sin(bs)}{b^2} \quad (5.251)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = -\frac{k_2}{b^2} s \quad (5.252)$$

$$u_2(s) = \frac{k_1 \sin(bs)}{b^3} \quad (5.253)$$

$$u_3(s) = -\frac{k_1 \cos(bs)}{b^3} \quad (5.254)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{b^2} s \\ \frac{k_1}{b^3} \sin(bs) \\ -\frac{k_1}{b^3} \cos(bs) \end{pmatrix} \quad (5.255)$$

ifadesi (5.232), (5.233) ve (5.234) eşitliklerindeki diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.256)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_1 \cos(bs) - c_2 k_1 \sin(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.257)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.258)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(bs) + c_2 k_2 \sin(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.259)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_1 \cos(bs) - c_2 k_1 \sin(bs) - \frac{k_2^2}{b^2} s, \quad (5.260)$$

$$f_2(s) = c_1 b \sin(bs) - c_2 b \cos(bs) + \frac{k_1}{b^2}, \quad (5.261)$$

$$f_3(s) = c_0 k_1 + c_1 k_2 \cos(bs) + c_2 k_2 \sin(bs) - \frac{k_1 k_2}{b^2} s \quad (5.262)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.263)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s)B_2(s) \quad (5.264)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Örnek 5.2.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{10}} \sin 2s, -\frac{1}{\sqrt{10}} \cos 2s \right) \quad (5.265)$$

3.durumdaki spacelike eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet vektörleri

$$T(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s \right), \quad (5.266)$$

$$N(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sin 2s, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos 2s \right), \quad (5.267)$$

$$B_1(s) = \left( \frac{2}{\sqrt{10}} \sinh s, \frac{2}{\sqrt{10}} \cosh s, -\frac{3}{\sqrt{15}} \sin 2s, -\frac{3}{\sqrt{15}} \cos 2s \right), \quad (5.268)$$

$$B_2(s) = \left( -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cosh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sin 2s, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cos 2s \right) \quad (5.269)$$

şeklinde bulunur. Böylece eğrinin eğrilik fonksiyonları

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = 1, \quad (5.270)$$

$$k_2(s) = \|N'(s) + k_1(s)T(s)\| = \sqrt{6}, \quad (5.271)$$

$$k_3(s) = \|B_1'(s) + k_2(s)N(s)\| = 2 \quad (5.272)$$

olarak elde edilir.

$\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \check{\alpha}(s) = & \left( \left( \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} \cosh s + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sinh s - \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} s \sinh s \right), \left( \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cosh s + \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} \sinh s + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} s \cosh s \right), \left( \frac{3}{7\sqrt{10}} \sin 2s + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cos 2s - \frac{6}{7\sqrt{10}} s \cos 2s \right), \left( \frac{3}{7\sqrt{10}} \cos 2s + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sin 2s + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{6}{7\sqrt{10}} s \sin 2s \right) \right) \end{aligned} \quad (5.273)$$

eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3.mertebeden involüt eğrisidir. Bu eşitlikte Teorem 5.6'ya göre

$$f_1(s) = \sqrt{6} - \frac{6}{7}s, \quad (5.274)$$

$$f_2(s) = \frac{1}{7}, \quad (5.275)$$

$$f_3(s) = 1 - \frac{\sqrt{6}}{7}s \quad (5.276)$$

ve  $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0$  olduğu görülür.  $\check{\alpha}$  eğrisinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) = & \left( \left( \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cosh s - \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} s \cosh s \right), \left( \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sinh s - \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} s \sinh s \right), \left( -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sin 2s + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{12}{7\sqrt{10}} s \sin 2s \right), \left( \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cos 2s - \frac{12}{7\sqrt{10}} s \cos 2s \right) \right) \end{aligned} \quad (5.277)$$

elde edilir. Bu eşitliğini sırasıyla  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B_1(s)$  ile Lorentz çarpımı alınırsa

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (5.278)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0 \quad (5.279)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0 \quad (5.280)$$

şeklinde bulunur. Tanım 5.2'ye göre (5.2), (5.3), (5.4) eşitlikleri sağlandığından  $\check{\alpha}$  eğrisi gerçekten  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisidir.

**Teorem 5.7.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  bir null Cartan eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.281)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cosh(as) - c_2 k_2 \sinh(as) - \frac{1}{2} s, \quad (5.282)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sinh(as) + c_2 a \cosh(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.283)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cosh(as) + c_2 \sinh(as) - \frac{1}{2k_2} s \quad (5.284)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a^2 = 2k_2 > 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  bir null Cartan eğri olsun.

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.285)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olduğunu kabul edelim. O halde (5.2)-(5.4) eşitliklerini sağlamalıdır. (5.285) eşitliğinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\check{\alpha}'(s) &= \alpha'(s) + f_1'(s)T(s) + f_1(s)T'(s) + f_2'(s)N(s) + f_2(s)N'(s) + f_3'(s)B_1(s) \\ &\quad + f_3(s)B_1'(s)\end{aligned}\quad (5.286)$$

elde edilir. (4.76) eşitliğinden faydalanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}\check{\alpha}'(s) &= T(s)(1 + f_1'(s) + k_2f_2(s)) + N(s)(f_1(s) + f_2'(s) - k_2f_3(s)) \\ &\quad + B_1(s)(-f_2(s) + f_3'(s)) + B_2(s)k_3f_3(s)\end{aligned}\quad (5.287)$$

elde edilir. Burada (5.2) eşitliği kullanılarak

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = -f_2(s) + f_3'(s) \quad (5.288)$$

$$f_3'(s) = f_2(s) \quad (5.289)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (5.3) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = f_1(s) + f_2'(s) - k_2f_3(s) \quad (5.290)$$

$$f_2'(s) = -f_1(s) + k_2f_3(s) \quad (5.291)$$

elde edilir. Son olarak (5.4) eşitliğinden

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 1 + f_1'(s) + k_2f_2(s) \quad (5.292)$$

$$f_1'(s) = -k_2f_2(s) - 1 \quad (5.293)$$

olduğu görülür. (5.289), (5.291) ve (5.293) eşitliklerini

$$\begin{bmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \\ f_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_2 & 0 \\ -1 & 0 & k_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.294)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu birinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -k_2 & 0 \\ -1 & 0 & k_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.295)$$

ele alalım. Bu matrisin öz değeri ve öz vektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.296)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2k_2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ \sqrt{2k_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.297)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{2k_2} \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ -\sqrt{2k_2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.298)$$

Burada  $k_2 > 0$  olduğu için  $a \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $2k_2 = a^2$  şeklinde ifade edilir. O halde öz değeri ve öz vektörleri

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.299)$$

$$\lambda_2 = a \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.300)$$

$$\lambda_3 = -a \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.301)$$

olarak bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$\begin{aligned} X_h(s) = & c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_1 (\cosh(as) + \sinh(as)) \begin{bmatrix} -k_2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \\ & + d_2 (\cosh(as) - \sinh(as)) \begin{bmatrix} -k_2 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.302)$$

$$\begin{aligned}
X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_2 \cosh(as) \\ a \sinh(as) \\ \cosh(as) \end{bmatrix} \\
+ (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_2 \sinh(as) \\ a \cosh(as) \\ \sinh(as) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.303}$$

olarak elde edilir. Burada  $c_0, d_1, d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_2 \cosh(as) \\ a \sinh(as) \\ \cosh(as) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_2 \sinh(as) \\ a \cosh(as) \\ \sinh(as) \end{bmatrix} \tag{5.304}$$

eşitliğiyle elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \cosh(as) & -k_2 \sinh(as) \\ 0 & a \sinh(as) & a \cosh(as) \\ 1 & \cosh(as) & \sinh(as) \end{pmatrix} \tag{5.305}$$

şeklinde yazılabilir. (5.289), (5.291) ve (5.293) eşitliklerinin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \tag{5.306}$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.307}$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sisteminin çözümü

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_2 \cosh(as) & -k_2 \sinh(as) \\ 0 & a \sinh(as) & a \cosh(as) \\ 0 & \cosh(as) & \sinh(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{1}{2k_2} \tag{5.308}$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & -k_2 \sinh(as) \\ 0 & 0 & a \cosh(as) \\ 1 & 0 & \sinh(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{\cosh(as)}{2k_2} \quad (5.309)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -k_2 \cosh(as) & -1 \\ 0 & a \sinh(as) & 0 \\ 1 & \cosh(as) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{\sinh(as)}{-2k_2} \quad (5.310)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = -\frac{1}{2k_2} s \quad (5.311)$$

$$u_2(s) = \frac{\sinh(as)}{2ak_2} \quad (5.312)$$

$$u_3(s) = -\frac{\cosh(as)}{2ak_2} \quad (5.313)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} s \\ -\frac{1}{2k_2} \\ -\frac{1}{2k_2} s \end{pmatrix} \quad (5.314)$$

ifadesi (5.289), (5.291) ve (5.293) eşitliğindeki diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.315)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cosh(as) - c_2 k_2 \sinh(as) - \frac{1}{2} s, \quad (5.316)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sinh(as) + c_2 a \cosh(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.317)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cosh(as) + c_2 \sinh(as) - \frac{1}{2k_2} s \quad (5.318)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cosh(as) - c_2 k_2 \sinh(as) - \frac{1}{2}s, \quad (5.319)$$

$$f_2(s) = c_1 a \sinh(as) + c_2 a \cosh(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.320)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cosh(as) + c_2 \sinh(as) - \frac{1}{2k_2}s \quad (5.321)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.322)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s)B_2(s) \quad (5.323)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Teorem 5.8.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  bir null Cartan eğri olsun.  $\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.324)$$

eğrisinin  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğri olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cos(as) - c_2 k_2 \sin(as) - \frac{1}{2}s, \quad (5.325)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sin(as) + c_2 a \cos(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.326)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cos(as) + c_2 \sin(as) - \frac{1}{2k_2}s \quad (5.327)$$

olmasıdır. Burada  $k_1, k_2, k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$  sabit fonksiyonları  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $-a^2 = 2k_2 < 0$ 'dır ve  $c_0, c_1, c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

**İspat:** Teorem 5.7 ispatındaki gibi birinci dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin katsayılar matrisinin  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{2k_2}$  ve  $\lambda_3 = -\sqrt{2k_2}$  özdeğerlerinde  $k_2 < 0$  olduğu için  $a \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $2k_2 = -a^2$  şeklinde ifade edilir. O halde özdeğerleri düzenlenip karşılık gelen özvektörleri

$$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.328)$$

$$\lambda_2 = ai \quad \rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ ai \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.329)$$

$$\lambda_3 = -ai \quad \rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ -ai \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.330)$$

olarak bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_1 (\cos(as) + i \sin(as)) \begin{bmatrix} -k_2 \\ ai \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 (\cos(as) - i \sin(as)) \begin{bmatrix} -k_2 \\ -ai \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.331)$$

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} -k_2 \cos(as) \\ -a \sin(as) \\ \cos(as) \end{bmatrix} + (d_1 - d_2) \begin{bmatrix} -k_2 \sin(as) \\ a \cos(as) \\ \sin(as) \end{bmatrix} \quad (5.332)$$

olarak yazılır. Burada  $c_0, d_1, d_2$  birer sabittir.  $(d_1 + d_2) = c_1$  ve  $(d_1 - d_2) = c_2$  olmak üzere homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -k_2 \cos(as) \\ -a \sin(as) \\ \cos(as) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -k_2 \sin(as) \\ a \cos(as) \\ \sin(as) \end{bmatrix} \quad (5.333)$$

eşitliğiyle elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$X(s) = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \cos(as) & -k_2 \sin(as) \\ 0 & -a \sin(as) & a \cos(as) \\ 1 & \cos(as) & \sin(as) \end{pmatrix} \quad (5.334)$$

şeklinde yazılabilir. Özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = X(s)u(s) \quad (5.335)$$

eşitliğinden  $u(s)$  vektörü

$$X(s)u'(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.336)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen  $3 \times 3$  lineer denklem sisteminin çözümü

$$u'_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k_2 \cos(as) & -k_2 \sin(as) \\ 0 & -a \sin(as) & a \cos(as) \\ 0 & \cos(as) & \sin(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = -\frac{1}{2k_2} \quad (5.337)$$

$$u'_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -1 & -k_2 \sin(as) \\ 0 & 0 & a \cos(as) \\ 1 & 0 & \sin(as) \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{\cos(as)}{2k_2} \quad (5.338)$$

$$u'_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & -k_2 \cos(as) & -1 \\ 0 & -a \sin(as) & 0 \\ 1 & \cos(as) & 0 \end{vmatrix}}{\det(X(s))} = \frac{\sin(as)}{2k_2} \quad (5.339)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s) = -\frac{1}{2k_2} s \quad (5.340)$$

$$u_2(s) = \frac{\sin(as)}{2ak_2} \quad (5.341)$$

$$u_3(s) = -\frac{\cos(as)}{2ak_2} \quad (5.342)$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$X_p(s) = X(s)u(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} s \\ -\frac{1}{2k_2} \\ -\frac{1}{2k_2} s \end{pmatrix} \quad (5.343)$$

ifadesi diferansiyel denklem sistemin özel çözümüdür. Sonuç olarak

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) \quad (5.344)$$

eşitliğinden

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cos(as) - c_2 k_2 \sin(as) - \frac{1}{2} s, \quad (5.345)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sin(as) + c_2 a \cos(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.346)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cos(as) + c_2 \sin(as) - \frac{1}{2k_2} s \quad (5.347)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tersine,

$$f_1(s) = c_0 k_2 - c_1 k_2 \cos(as) - c_2 k_2 \sin(as) - \frac{1}{2} s, \quad (5.348)$$

$$f_2(s) = -c_1 a \sin(as) + c_2 a \cos(as) - \frac{1}{2k_2}, \quad (5.349)$$

$$f_3(s) = c_0 + c_1 \cos(as) + c_2 \sin(as) - \frac{1}{2k_2} s \quad (5.350)$$

olmak üzere

$$\check{\alpha}(s) = \alpha(s) + f_1(s)T(s) + f_2(s)N(s) + f_3(s)B_1(s) \quad (5.351)$$

eğrisi için

$$\check{\alpha}'(s) = k_3 f_3(s) B_2(s) \quad (5.352)$$

olduğundan  $\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0$ ,  $\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  olduğu görülür. O halde  $\check{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğridir.

**Örnek 5.3.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \sqrt{2}s, \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{2}s \right) \quad (5.353)$$

null eğrisi verilsin.

$$\alpha'(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s \right) \quad (5.354)$$

dir. Her  $s \in I$  için  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$  olarak bulunur.  $T$  vektör alanının tanımına göre  $T(s) = \alpha'(s)$  olduğundan

$$T(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s \right) \quad (5.355)$$

elde edilir.

$$T'(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s \right) \quad (5.356)$$

şeklinde yazılır. (5.356) eşitliğini  $T'(s)$  ile Lorentz çarpımı yapılırsa  $\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = 1$  olarak bulunur. (4.89) eşitliğinde  $T'(s)$  eşitliğinin Lorentz çarpımı yapılırsa  $\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = k_1^2(s) \langle N(s), N(s) \rangle_L$  olarak elde edilir. Burada  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = 1$  dir.

$$\langle T'(s), T'(s) \rangle_L = k_1^2(s) \quad (5.357)$$

$$k_1(s) = 1 \quad (5.358)$$

olur. O halde (4.89) eşitliği (5.356) ile (5.358) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$N(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s \right) \quad (5.359)$$

elde edilir.

$$N'(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s, -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s \right) \quad (5.360)$$

olur. (5.360) eşitliğini  $N'(s)$  ile Lorentz çarpımını yapılarak  $\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = 1$  olarak bulunur. (4.89) eşitliğinde  $N'(s)$  eşitliğinin Lorentz çarpımı alınır

$$\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = k_2^2(s) \langle T(s), T(s) \rangle_L - 2k_1(s)k_2(s) \langle T(s), B_1(s) \rangle_L + k_1^2(s) \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L \quad (5.361)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle B_1(s), B_1(s) \rangle_L = 0$  ve  $\langle T(s), B_1(s) \rangle_L = 1$ 'dir.

$$\langle N'(s), N'(s) \rangle_L = -2k_1(s)k_2(s) \quad (5.362)$$

$$k_2(s) = -\frac{1}{2} \quad (5.363)$$

olur. O halde (4.89) eşitliğini (5.360), (5.355), (5.358) ve (5.363) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$B_1(s) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \sqrt{2}s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \sqrt{2}s \right) \quad (5.364)$$

olarak bulunur.

$$B_1'(s) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh s, -\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \sqrt{2}s, -\frac{\sqrt{6}}{2} \sin \sqrt{2}s \right) \quad (5.365)$$

olur. (5.365) eşitliğini  $B_1'(s)$  ile Lorentz çarpımını yapılırsa  $\langle B_1'(s), B_1'(s) \rangle_L = \frac{9}{4}$  olarak bulunur. (4.89) eşitliğinde  $B_1'(s)$  eşitliğinin Lorentz çarpımı alınır

$$\langle B_1'(s), B_1'(s) \rangle_L = k_2^2(s) \langle N(s), N(s) \rangle_L - 2k_2(s)k_3(s) \langle N(s), B_2(s) \rangle_L + k_3^2(s) \langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L$$

şeklinde yazılır. Burada  $\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle N(s), B_2(s) \rangle_L = 1$  ve  $\langle B_2(s), B_2(s) \rangle_L = 0$ 'dir.

$$\langle B_1'(s), B_1'(s) \rangle_L = k_2^2(s) + k_3^2(s) \quad (5.366)$$

$$k_3(s) = \sqrt{3} \quad (5.367)$$

olur. O halde (4.89) eşitliğini (5.356), (5.363), (5.364) ve (5.366) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$B_2(s) = \left( -\frac{\sqrt{6}}{3} \sinh s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s, \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s \right) \quad (5.368)$$

elde edilir.

$\check{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^4$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \check{\alpha}(s) = & \left( \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sinh s - \frac{2}{\sqrt{3}} \cosh s - \frac{2}{\sqrt{3}} s \cosh s \right), \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \cosh s - \frac{2}{\sqrt{3}} \sinh s - \right. \right. \\ & \left. \frac{2}{\sqrt{3}} s \sinh s \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \sqrt{2}s - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{2}s - \frac{\sqrt{3}}{3} s \sin \sqrt{2}s \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{2}s + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \sqrt{2}s + \right. \\ & \left. -\frac{\sqrt{3}}{3} s \cos \sqrt{2}s \right) \end{aligned} \quad (5.369)$$

eğrisi  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisidir. Bu eşitlikte Teorem 5.8'e

$$f_1(s) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} s, \quad (5.370)$$

$$f_2(s) = 1, \quad (5.371)$$

$$f_3(s) = 1 + s \quad (5.372)$$

ve  $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0$  olduğu görülür.  $\check{\alpha}$  eğrisinin her iki tarafının  $s$  yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \check{\alpha}'(s) = & \left( \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \sinh s - \frac{2}{\sqrt{3}} s \sinh s \right), \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \cosh s - \frac{2}{\sqrt{3}} s \cosh s \right), \left( -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \sqrt{2}s - \right. \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \cos \sqrt{2}s \right), \left( -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{2}s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \sin \sqrt{2}s \right) \end{aligned} \quad (5.373)$$

elde edilir. (5.373) eşitliğini sırasıyla  $T(s), N(s), B_1(s)$  ile Lorentz çarpımını alınırsa

$$\langle \check{\alpha}'(s), T(s) \rangle_L = 0 \quad (5.374)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), N(s) \rangle_L = 0 \quad (5.375)$$

$$\langle \check{\alpha}'(s), B_1(s) \rangle_L = 0 \quad (5.376)$$

şeklinde bulunur. Tanım 5.2'ye göre (5.2), (5.3), (5.4) eşitlikleri sağlandığından  $\check{\alpha}$  eğrisi gerçekten  $\alpha$  eğrisinin 3. mertebeden involüt eğrisidir.

## 6. KAYNAKLAR

- Aydın, M. E., Ergüt, M., 2014, Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3-space, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 81-90.
- Balgetir, H., Bektas, M., and Ergut, M., 2016, Bertrand curves for non-null curves in 3-dimensional Lorentzian space, *Hadronic Journal*, 229-236.
- Bilici, M., Caliskan, M., 2009, On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space, *Int. Math. Forum*, 4, 31, 1497-1509.
- O'Neill, B., 2006, Elementary Differential Geometry, *Elsevier*, United States.
- Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferansiyel geometri, *Nobel Yayınevi*, Ankara, 1-83.
- Walrave, J., 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral dissertation, *K.U. Leuven Faculteit Der Wetenschappen*, 1-9.
- Yüce, S., 2017, Öklid uzayında diferansiyel geometri, *Pegem Akademi*, Ankara, 156-302.
- Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., 2010, Tanvolutes: generalized involutes, *Amer. Math. Monthly*, 117, 8, 701-713.
- Arnold, M., Fucks, D., Izmetives, I., Tabachnikov, S., Tsukerman, E., 2017, Iterating evolutes and involutes, *Discrete & Computational geometry*, 58, 1, 80-143.
- Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., 2014, Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, *Note di Matematica*, 23, 1, 7-13.
- Betchov, R., 1965, On the curvature and torsion of an isolate vortex filament, *J. Fluid Mech.*, 22, 471.
- Bonnor, W. B., 1969, Null curves in a Minkowski space-time, *Tensor*, 20, 229-242.
- Bonnor, W. B., 1985, Curves with null normals in Minkowski space-time, *Wiley Eastern Limited*, 33-47.
- Da Rios, L. S., 1906, On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of an shape, *Rend. Circ. Math. Palermo*, 22, 117.
- Divjak, B., Sipus, Z. M., 1999, Involutives and evolutes in n-dimensional simply isotropic space  $I_n^{(1)}$ , *JIOS*, 23, 1, 71-79.
- Djordjevic, J., Nesovic, E., 2019, On Bishop of a pseudo null curves in Minkowski space-time, *Turk. J. Math.*, 44, 870-882.
- Duggal, K. L., Jin, D. H., 2007, Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds, *World Scientific*, Singapore.

- Eisenhart, L. P., 1960, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, *Dover Edition*, New York.
- Erdogdu, M., Özdemir, M., 2014, Geometry of Hasimoto surfaces in Minkowski 3-space, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 17, 169-181.
- Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2004, Null generalized helices and Betchoc-Da Rios equation in Lorentz-Minkowski spaces, *Proceeding of the XI Fall Workshop on Geomerty and Physics*, Madrid, 215-221.
- Fukunaga, T., Takahashi, M., 2016, involutes of fronts in the Euclidean plane, *Contribution to Algebra and Geometry*, 57, 3, 637-653.
- Geretsen, J. C. H., 1962, Lectures on Tensor Calculus and Differential Geometry, *P.Noordhoff*, Groningen.
- Hanif, M., Nesovic, E., Hou, Z. H., 2019, On involutes of order  $k$  of a null Cartan curves in Minkowski spaces, Published by Faculty of Sciences and Mathematics, 33, 8, 2295-2305.
- Hanif, M., Hou, Z. H., 2018, Generalized involute and evolute curves-cuouple in Euclidean space, *Contributions to Algebra and Geometry*, 11, 2, 28-39.
- Ilarslan, K., Nesovic, E., 2018, On Bishop frame of a null Cartan curve in Minkowski space-time, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys*, 15, 8, 1850142 (16 pages).
- Ilarslan, K., Nesovic, E., 2009, Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time, *Publications de l'Intitut Mathematique*, 85, 99, 111-118.
- Ilarslan, K., Nesovic, E., 2011, Some characterizations of pseudo and partially null osculating curves in Minkowski space-time, *Int. Electronic J. Geom.*, 4, 2, 1-12.
- Ivey, T. A., 2000, Helices, Hasimoto surfaces and Backlund transformations, *Canad. Math. Bull.*, 43, 4, 427-439.
- Kisi, I., Öztürk, G., 2018, Involutes curve of order  $k$  of a given cuve in Galilean 4-space  $G_4$ , *Honam Math. J.*, 40, 2, 251-264.
- Kühnel, W., 2003, Differential geometry: curves-surfaces-manifolds, *Fiedr. Vieweg & Sohn Verlag*, Wiesbaden.
- Merzbach, U. C., Boyer, C. R., 2010, A History of Mathematics, *Third Edition*, *John Wiley & Sons, Inc.*, New Jersey.
- O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, *Akademic Press*, New York.
- Ovalıoğlu, E., 2019, Yarı-öklidyen uzayda null eğriler ve null eğrilerin sınıflandırılması, Yüksek Lisans Tezi, *Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa, 21-31.

- Öztürk, G., Arslan, K., Bulca, B., 2018, A characterization of involutes and evolutes of given curve in  $\mathbb{E}^n$ , *Kyungpook Math. J.*, 58, 1, 117-135.
- Öztürk, G., 2016, On involutes of order k of a space-like curve in Minkowski 4-space  $\mathbb{E}_1^4$ , *AKU J. Sci. Eng.*, 16, 3, 569-575.
- Rogers, C., Schief, W. K., 2002, Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Application in Soliton Theory, *Cambridge University press*.
- Sakaki, M., 2010, Notes on null curves in Minkowski spaces, *Turk. J. Math.*, 34, 417-424.
- Tozak, H., 2010, Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, 1-15.
- Turgut, M., Ali, A. T., 2010, Time-like involutes of a space-like helix in Minkowski space-time, *Apeiron*, 17, 1, 28-41.
- Turgut, M., Yılmaz, S., 2008, On the differential geometry of the curves in Minkowski space-time, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3, 27, 1343-1349.