



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**4x4 SİMETRİK TOEPLITZ ÜÇ BANT
FİBONACCİ VE LUCAS MATRİSLERİ**

Muaz AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Haziran-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4x4 SİMETRİK TOEPLITZ ÜÇ BANT FİBONACCİ VE LUCAS MATRİSLERİ

Muaz AKSOY

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fikri KÖKEN

2021, 88 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Ahmet İPEK
Doç. Dr. Fikri KÖKEN
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas dizilerinden $(F_s, F_{s+1}) = (x, y)$ ve $(L_s, L_{s+1}) = (x, y)$ sıralı ikili elemanlara sahip, $\text{tridiag}(y, x, y) = S_4(x, y)$, $x, y \in F_s, L_s$, $s \in \mathbb{Z}$, 4×4 mertebeli simetrik Toeplitz üç bant matrislerin pozitif tamsayı kuvvetlerinin Fibonacci veya Lucas matrisleri olduğu gösterilerek bu matrislerin elemanlarına bağlı Fibonacci ve Lucas eşitlikleri elde edilir.

Giriş bölümünde, Fibonacci ve Lucas dizilerinin özellikleri ile üç bant matrislerinin temel kavramlarından bahsedilir.

2. Bölümde, Fibonacci ve Lucas matrisleri ile üç bant matrislerinin kuvvetleri üzerine yapılmış literatürdeki çalışmalar verilir.

3. Bölüm, ilham kaynağımız olan (Filipponi, 1997)'nin çalışmasında genellemesi incelenmeyen $(x, y) = (F_s, F_{s+1})$ elemanlarına sahip Fibonacci genelme matrisi ile araştırma sonuçları olarak; $(x, y) = (F_{-s}, F_{-(s+1)})$, $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ve $(x, y) = (F_{-(s+1)}, F_{-s})$ sıralı ikilileri için Fibonacci sayılarının özel ve genel durumlarına göre Fibonacci matrisleri kurulur.

Son olarak, 4. Bölümde Lucas sayılarının $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$, $(x, y) = (L_{-s}, L_{-(s+1)})$, $(x, y) = (L_{s+1}, L_s)$ ve $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$ sırasıyla genel ve özel elemanlarına göre $S_4^n(x, y)$ Lucas matrisinin elemanlarının kapalı form ifadeleri elde edilir. Her bir Fibonacci ve Lucas $S_4^{(n)}(x, y)$, $x, y \in F_s, L_s$, $s \in \mathbb{Z}$ matrisi için genel terim ifadelerinin toplanması veya çıkarılması ile elde edilen Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı eşitlikler elde edilir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayıları, Fibonacci Matrisleri, Lucas matrisleri, Lucas Sayıları, Matris Kuvvetleri, Üç Bant Matrisler

ABSTRACT

MS THESIS

**4X4 SYMMETRIC TOEPLITZ TRIDIAGONAL
FIBONACCI AND LUCAS MATRICES**

Muaz AKSOY

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fikri KÖKEN

2021, 88 Pages

Jury

Prof. Dr. Ahmet İPEK

Assoc. Prof. Dr. Fikri KÖKEN

Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

In this study, some Fibonacci or Lucas matrices are shown the positive integer powers of symmetric Toeplitz tridiagonal matrices with order 4×4 , $tridiag(y, x, y) = S_4(x, y)$, $x, y \in F_s, L_s$, $s \in \mathbb{Z}$, entries of which are ordered pairs $(F_s, F_{s+1}) = (x, y)$ and $(L_s, L_{s+1}) = (x, y)$ from Fibonacci and Lucas sequences, Fibonacci and Lucas identities depending on the elements of these matrices are obtained.

In the introduction, the properties of Fibonacci and Lucas sequences and the basic concepts of tridiagonal matrices are mentioned.

In Chapter 2, studies in the literature on the powers of the Fibonacci and Lucas matrices and tridiagonal matrices are given.

Chapter 3, the research results as Fibonacci matrices are constructed according to the special and general cases of the Fibonacci numbers for the ordered pairs of $(x, y) = (F_{-s}, F_{-(s+1)})$, $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ and $(x, y) = (F_{-(s+1)}, F_{-s})$ with the Fibonacci generalization matrix, where has elements $(x, y) = (F_s, F_{s+1})$, whose generalization was not examined in the study of our inspiration (Filipponi, P., 1997).

Finally, closed form expressions for entries of Lucas matrix $S_4^n(x, y)$ are obtained according to their

general and special elements for Lucas numbers $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$, $(x, y) = (L_{-s}, L_{-(s+1)})$,

$(x, y) = (L_{s+1}, L_s)$ and $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$, respectively, in Chapter 4. Identities based on the Fibonacci and Lucas numbers obtained by adding or subtracting the general term expressions for each Fibonacci and Lucas matrix $S_4^{(n)}(x, y)$, $x, y \in F_s, L_s$, $s \in \mathbb{Z}$ are derived.

Keywords: Fibonacci Numbers, Fibonacci Matrices, Lucas Numbers, Lucas Matrices, Matrix Powers, Tridiagonal Matrices

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimim boyunca emeği, sabrı, bilgisi ile bana yol gösteren, her koşulda desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Fikri KÖKEN'e,

Her konuda bana destek olan annem Rukiye AKSOY ve babam Mehmet Afif AKSOY'a

Hayatımın her aşamasında desteğini ve bilgisini esirgemeyen ablam Zahide AKSOY ve abim Mehmet İkbal AKSOY'a

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım...

Muaz AKSOY
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Fibonacci Sayıları Ve Bazı Özellikleri	1
1.2 Lucas Sayıları Ve Bazı Özellikleri	7
1.3 Üç Bant Matrisleri Ve Bazı Özellikleri	8
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	12
2.1 Fibonacci Matrisleri Literatür Özeti	12
2.2 Lucas Matrisleri Literatür Özeti	14
2.3 Üç Bant Matrisleri Literatür Özeti	16
3. FİBONACCİ MATRİSLERİ.....	19
3.1 $(F_{-s}, F_{-(s+1)})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Fibonacci Matrisleri	22
3.1.1 $S_4^{(n)}(F_{-1}, F_{-2})$ Fibonacci matrisi	22
3.1.2 $S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-3})$ Fibonacci matrisi	27
3.1.3 $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi	31
3.2 (F_{s+1}, F_s) , $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Fibonacci Matrisleri.....	34
3.2.1 $S_4^{(n)}(F_3, F_2)$ Fibonacci matrisi	34
3.2.2 $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi	38
3.3 $(F_{-(s+1)}, F_{-s})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Fibonacci Matrisleri.....	40
3.3.1 $S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-1})$ Fibonacci matrisi	41
3.3.2 $S_4^{(n)}(F_{-3}, F_{-2})$ Fibonacci matrisi	42
3.3.3 $S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi	45
4. LUCAS MATRİSLERİ	49
4.1 (L_s, L_{s+1}) , $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri.....	49
4.1.1 $S_4^{(n)}(L_1, L_2)$ Lucas matrisi.....	49

4.1.2	$S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi	54
4.2	$(L_{-s}, L_{-(s+1)})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri	58
4.2.1	$S_4^{(n)}(L_{-1}, L_{-2})$ Lucas matrisi	58
4.2.2	$S_4^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi.....	63
4.3	(L_{s+1}, L_s) , $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri	66
4.3.1	$S_4^{(n)}(L_2, L_1)$ Lucas matrisi.....	67
4.3.2	$S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ $s \geq 0$ Lucas matrisi	71
4.4	$(L_{-(s+1)}, L_{-s})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri	75
4.4.1	$S_4^{(n)}(L_{-2}, L_{-1})$ Lucas matrisi.....	75
4.4.2	$S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi.....	79
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	84
5.1	Sonuçlar	84
5.2	Öneriler	84
6.	KAYNAKLAR	85
	EKLER	87
	ÖZGEÇMİŞ	89

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

F_n	n 'inci Fibonacci sayısı
L_n	n 'inci Lucas sayısı
\mathbb{N}	Doğal Sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tamsayılar kümesi
$M_n(F)$	$n \times n$ boyutlu F cisminden eleman alan matris
I_n	$n \times n$ boyutlu birim matris
$tridiag(y, x, y)$	Alt ve üst bant elemanları y , köşe bant elemanları x olan simetrik üç bant Toeplitz matrisler
$S_k(x, y)$	$k \times k$ boyutlu alt ve üst bant elemanları y , köşe bant elemanları x olan simetrik üç bant Toeplitz matrisler
$S_k^{(n)}(x, y)$	$S_k(x, y)$ matrisinin n 'inci kuvveti
$A \circ B$	A ve B matrislerinin Hadamard çarpımları
$\lceil x \rceil$	x reel sayıdan büyük en küçük tamsayıyı veren tam sayı fonksiyonu
α	Altın Oran $= (1 + \sqrt{5}) / 2$
β	1-Altın Oran $= (1 - \sqrt{5}) / 2$
x^{-1}	x reel sayısının çarpmaya göre tersi

Kısaltmalar

(x, y)	Sıralı ikili, $(x, y) \in A \times B$
$ebob(x, y)$	x ve y sayılarının en büyük ortak böleni
a_{ij}	$A = [a_{ij}]$ matrisinin i . satır j . sütün elemanı
$a_{ij}^{(n)}$	A^n , kuvvet matrisinin i . satır j . sütün elemanı
\overline{AB}	A ve B noktaları arasındaki doğru parçası uzunluğu
$\overset{\wedge}{ABC}$	\overline{AB} ve \overline{BC} doğru parçaları arasındaki açı
λ_i	A_k matrislerine ait i 'inci öz değerleri
Λ	$\lambda_i, i=1, 2, \dots, k$ elemanlarına sahip köşegen matris
$v = [u_1, \dots, u_m]^T$	m boyutlu satır vektörünün devriği (tranpozesi)
$\det(A_k) = A_k $	$k \times k$ boyutlu A matrisinin determinanı
$\binom{n}{t}$	Binom katsayısı; $\frac{n!}{t!(n-t)!}$ değeri

1. GİRİŞ

Çalışmanın bu kısmında; ilk olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ile literatürdeki bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca matris teoride önemli bir yere sahip üç bant Teoplitz matris özellikleri ile literatürde bu matrisler üzerinde verilen kuvvet özelliklerinden bahsedilecektir.

1.1 Fibonacci Sayıları Ve Bazı Özellikleri

F_n , n 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere $n = 0$ ve $n = 1$ için başlangıç değerleri $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olan ikinci dereceden bir indirgeme bağıntısı ile,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0 \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu sayılardan oluşan diziyse Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin bazı terimleri 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 'dir. Şimdi Fibonacci dizilerinin, literatürdeki çalışmalarda yer alan ve bu çalışma için gerekli bazı özellikleri verilecektir.

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

olmak üzere $n \geq 0$ için F_n , n 'inci Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3)$$

kapalı formu ile verilebilir ve bu formül Binet Fibonacci formülü olarak bilinir. (3) ile verilen bu formül birçok özelliği ispatlarken kullanılmaktadır. Örneğin negatif indisli Fibonacci sayıları için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, n \geq 1 \quad (4)$$

eşitliği (3) ile verilen Binet Fibonacci formülü ile kolayca görülebilir (Vajda, 1989; Koshy, 2001; Debnart L., 2011; Dunlap, R A., 1998).

Lemma 1.1 (2)'de verilen $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ve F_n , n 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}, \quad (5)$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1, \quad \beta = -\alpha^{-1}, \quad (6)$$

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}, \quad \beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}, \quad (7)$$

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}, \quad \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}, \quad (8)$$

$$\left(-\alpha^{-1}\right)^n = F_{n+1} - \alpha F_n = \beta^n, \quad \left(-\beta^{-1}\right)^n = F_{n+1} - \beta F_n = \alpha^n, \quad (9)$$

bağıntıları mevcuttur (Dunlap, R A., 1998; Koshy, 2001).

İspat. (5) ve (6)'da verilen eşitlikler, (2)'deki $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ eşitliklerinin yerlerine yazılmasının direkt sonucudur. (7) ve (8)'de verilen dört eşitlikten ikisinin ispatını vereceğiz. Ayrıca (9) ile verilen eşitliklerde (8)'deki ifadelerin $\beta = -\alpha^{-1}$ için sonuçlarıdır.

(1) denkleminin $x^2 = x + 1$ karakteristik denklemi için kökleri olan α ve β karakteristik denklemi sağlayacağından dolayı (6) eşitlikleri sağlanır.

(6)'da verilen $\alpha^2 = \alpha + 1$ eşitliğinde her iki taraf α ile çarpılırsa ve $\alpha^2 = \alpha + 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1 \quad (10)$$

olur. (10) eşitliği α ile çarpılır, $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\alpha^3 = 2\alpha + 1$ değerleri elde edilen sağdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 = 2\alpha + 1 + \alpha + 1 = 3\alpha + 2 \quad (11)$$

olur ki, (11) eşitliği α ile çarpılır, $\alpha^3 = 2\alpha + 1$ ve $\alpha^4 = 3\alpha + 2$ değerleri elde edilen sağdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\alpha^5 = \alpha^4 + \alpha^3 = 5\alpha + 3 \quad (12)$$

Şeklinde elde edilir. (11) ve (12)'de izlenen yöntem $(n-1)$ kez uygulandığında

$\alpha^{n-1} = F_{n-1}\alpha + F_{n-2}$ ve $\alpha^{n-2} = F_{n-2}\alpha + F_{n-3}$ elde edildiği kabul edilirse

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = (F_{n-1} + F_{n-2})\alpha + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_n\alpha + F_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde istenilen elde edilir. Diğer kök β için $\beta^2 = \beta + 1$ sağlandığı açıktır. $\alpha^n = F_n \alpha + F_{n-1}$ sonucuna ulaşmadaki benzer işlemler tekrarlanırsa $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ aynı şekilde bulunur.

Diğer taraftan, $\alpha^2 = \alpha + 1$ denkleminde her iki taraf α ile bölünüp $1/\alpha = \alpha - 1$ şeklinde düzenlenir ve $1/\alpha = \alpha - 1$ eşitliğinde her iki taraf $1/\alpha$ ile çarpılır ve $1/\alpha = \alpha - 1$ eşitliği göz önünde alınırsa

$$1/\alpha^2 = 1 - 1/\alpha = 1 - (\alpha - 1) = -(\alpha - 2) \quad (13)$$

olur. (13)'de verilen ifadeler $1/\alpha$ ile çarpılıp, $1/\alpha^2 = 2 - \alpha$ ve $1/\alpha = \alpha - 1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$1/\alpha^3 = 1/\alpha - 1/\alpha^2 = 2\alpha - 3 \quad (14)$$

olur ki, (14)'de verilen ifadeler $1/\alpha$ ile çarpılıp, $1/\alpha^3 = 2\alpha - 3$ ve $1/\alpha^2 = 2 - \alpha$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$1/\alpha^4 = 1/\alpha^2 - 1/\alpha^3 = -(3\alpha - 5) \quad (15)$$

şeklinde dir. (13), (14) ve (15)'de izlenen yöntem $(n-1)$ kez tekrarlandığında $1/\alpha^{n-1} = (-1)^n (F_{n-1} \alpha - F_n)$ ve $1/\alpha^{n-2} = (-1)^{n-1} (F_{n-2} \alpha - F_{n-1})$ olduğu görülür ki;

$$1/\alpha^n = 1/\alpha^{n-2} - 1/\alpha^{n-1}$$

$$1/\alpha^n = (-1)^{n-1} (F_{n-2} \alpha - F_{n-1}) - (-1)^n (F_{n-1} \alpha - F_n)$$

$$\alpha^{-n} = (-1)^{n-1} ((F_{n-2} + F_{n-1}) \alpha - (F_{n-1} + F_n))$$

$$(\alpha^{-1})^n = (-1)^{n+1} (F_n \alpha - F_{n+1}),$$

$$(-1)^n (\alpha^{-1})^n = F_{n+1} - F_n \alpha$$

olur ki $-\alpha^{-1} = \beta$ için istenilen elde edilir. Diğer durum da; $F_{n+1} - \alpha F_n = \beta^n$ için yapılan işlemler benzer şekilde tekrarlanırsa $F_{n+1} - \beta F_n = \alpha^n$ sonucuna ulaşılır. ■

Ayrıca, iki ardışık F_{n+1} ve F_n Fibonacci sayısının oranı $n \rightarrow \infty$ şeklinde;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha, \quad (16)$$

olduğu ve $\alpha = 1,61803398874989484\dots$ sabit değerini aldığı bilinmektedir. İrrasyonel

değeri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olan altın oran, (6)'da verilen ifadeye göre

$$\alpha = \sqrt{1+\alpha} = \sqrt{1+\sqrt{1+\alpha}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha}}}} = \dots \quad (17)$$

şeklinde daha birçok özelliği ile literatürdeki çalışmalarda yer alır (Debnart L., 2011).

Lemma 1.2 (2) eşitliğinde verilen $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ve F_n , n . 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$2\alpha - 1 = \sqrt{5}, \quad 2\beta - 1 = -\sqrt{5}, \quad (18)$$

$$\alpha^2 + 1 = \sqrt{5}\alpha, \quad \beta^2 + 1 = -\sqrt{5}\beta, \quad \beta = -\alpha^{-1}, \quad (19)$$

$$F_n - F_{n+1}\beta = F_{n+1}\alpha - F_{n-1}, \quad F_n - F_{n+1}\alpha = F_{n+1}\beta - F_{n-1}, \quad (20)$$

ifadeleri geçerlidir (Dunlap, R A., 1998; Koshy, 2000).

İspat (18) ve (19) eşitliklerinde $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ verilen değeri direkt yerine yazılarak düzenlenirse istenilen ifadeler kolayca görülür.

(20)'de verilen eşitliklerin sol tarafındaki ifadeleri (1) denklemindeki indirgeme bağıntısı ile Lemma 1.1'deki eşitliklere göre düzenlersek

$$F_n - F_{n+1}\beta = F_n - (F_n + F_{n-1})\beta = F_n\alpha - F_{n-1}\beta$$

$$(F_{n+1} - F_{n-1})\alpha - F_{n-1}\beta = F_{n+1}\alpha - F_{n-1}(\alpha + \beta) = F_{n+1}\alpha - F_{n-1}$$

ve

$$F_n - F_{n+1}\alpha = F_n - (F_n + F_{n-1})\alpha = F_n\beta - F_{n-1}\alpha$$

$$(F_{n+1} - F_{n-1})\beta - F_{n-1}\alpha = F_{n+1}\beta - F_{n-1}(\alpha + \beta) = F_{n+1}\beta - F_{n-1}$$

elde edilir. ■

Daha da özel olarak, (2) eşitliğinde verilen $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ (veya Altın Oran) sayısı çalışmamızın önemli bir karakteri olacaktır. Altın oran için, \overline{AB} doğru parçası üzerinde bir C noktası tespit edilerek;

$$\begin{array}{ccccccc} A & & x & & C & & y & & B \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$$

Şekil 1

\overline{AB} doğru parçasının büyük parçası $\overline{AC} = x$, küçük parçası $\overline{CB} = y$ olarak kabul edilir.

O halde Şekil 1'deki C noktasının seçimini iki sayının geometrik ortalaması olarak

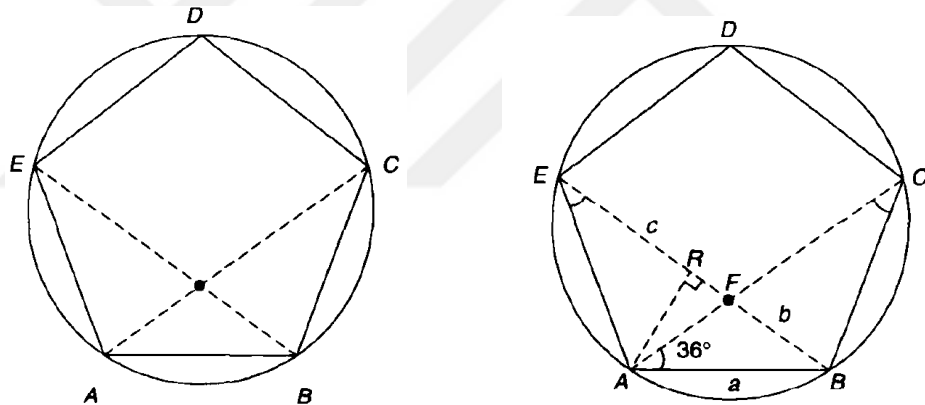
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$(\overline{AC})^2 = \overline{AB} \overline{CB} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{x/y} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Geometrik Ortalama} = \sqrt{\text{sayı1 sayı 2}} \quad \Rightarrow \quad (x/y)^2 - x/y - 1 = 0$$

şeklinde tasvir edilir. Geometrik ortalama ifadesi $x/y = t$ için iyi bilinen ikinci dereceden $t^2 - t - 1 = 0$ karakteristik denkleme dönüşür ki bu denklemin köklerinden $t > 0$ olarak ele alınırsa $\frac{x}{y} = \alpha$ olduğu görülür.

Geometrik olarak, düzgün bir $ABCDE$ beşgenin üzerinde çizilen \overline{AC} ve \overline{BE} köşegenlerinin bir F noktasında kesiştiğini düşünürsek; (J.A.H. Hunter, 1975)'nin çalışmasında gösterildiği gibi



Şekil 3

F noktasının her iki köşegeni de Altın oranda kestiği görülür. Gerçekten; Şekil 3'de görüldüğü gibi $\overline{AB} = a$, $\overline{BF} = b$ ve $\overline{FE} = c$ olmak üzere bilinen geometri işlemlerinden

kenar açı kenar kuralı ile $\text{Alan}(ABC) \cong \text{Alan}(ABE)$ ve açı kuralları ile $\hat{A}BC = 108^\circ$,

$\hat{B}AC = \hat{A}BE = 36^\circ$ olduğu biliniyordur. Bu yüzden $\hat{C}AE = \hat{A}FE = 72^\circ$ açı eşitlikleri ve

$\overline{AF} = \overline{BF} = b$ ve $a = \overline{AE} = \overline{EF} = c$ olduğu görülür. Şekil 3'de görüldüğü gibi \overline{BE}

üzerine \overline{AR} dik çizilirse

$$\overline{ER} = a \cos 36^\circ = \overline{BR} \quad (21)$$

$$\overline{BE} = \overline{BR} + \overline{RE} = b + c = 2a \cos 36^\circ \quad (22)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle b ve c değerleri için

$$b = \frac{a}{2 \cos 36^\circ}, \quad c = 2a \cos 36^\circ - \frac{a}{2 \cos 36^\circ} = \frac{a(4 \cos^2 36^\circ - 1)}{2 \cos 36^\circ} \quad (23)$$

olur ki $a = c$ değeri için $4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden pozitif kök olarak

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\alpha}{2} \quad (24)$$

karşımıza çıkar ki (21) ve (22) denklemlerini düşünerek

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{FE}} = b + c = \alpha a = \overline{AC}, \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{FE}} = \frac{\alpha a}{\alpha} = \frac{\alpha}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FC}} \quad (25)$$

yazılabilir. (25) denklemi de, F noktasının her iki köşegeni de Altın oranda böldüğünü ifade eder (Vajda, 1989; Koshy, 2001; Debnart L., 2011; Dunlap, R A., 1998).

Trigonometrik olarak; tümler ve bütünler açı eşitlikleri ile toplam-fark formülleri

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \end{aligned} \quad (26)$$

üzerinde $\theta = \pi/10$ olmak üzere $2\theta + 3\theta = \pi/2$ olduğundan 2θ ile $\pi/2 - 3\theta$ tümler açılarıdır. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ (veya $\cos 2\theta = \sin 3\theta$) eşitliklerine göre

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 &= 0 \end{aligned}$$

denkleminin köklerinde $\sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ pozitif olanı ($\theta = \pi/10$) ele alırsak;

$$\sin \frac{\pi}{10} = -\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\alpha}$$

olur ki,

$$\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{2 - \beta^2}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad (27)$$

olduğu verilir (Koshy, 2001; Debnart L., 2011; Dunlap, R A., 1998).

Şimdi farklı alanlarda karşımıza çıkan $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\alpha}{2}$ olduğunu kullanarak bu

çalışma için, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$ ve $\cos \frac{4\pi}{5}$ değerlerini Lemma 1.1'deki verilen eşitlikler ve (26) denklemindeki trigonometrik özelliklerle α ve β değerlerine göre ifade etmeye çalışacağız.

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = \frac{\alpha^2 - 2}{2} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1) - 1}{2} = \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{-\beta}{2} \quad (28)$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 3 \right) = \frac{\alpha}{2} (\alpha^2 - 3) = \frac{\alpha}{2} (-\alpha^2 \beta - 2) = \frac{\alpha}{2} (\alpha - 2) = \frac{\beta}{2} \quad (29)$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1 = \frac{\beta^2 - 2}{2} = \frac{(\beta + 1)(\beta - 1) - 1}{2} = \frac{\beta - 1}{2} = \frac{-\alpha}{2} \quad (30)$$

elde edilir (Koshy, 2001; Debnart L., 2011; Dunlap, R A., 1998).

1.2 Lucas Sayıları Ve Bazı Özellikleri

L_n , n 'inci Lucas sayısı olmak üzere $n=0$ ve $n=1$ için başlangıç değerleri $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ için ikinci dereceden indirgeme bağıntısı ile

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 0 \quad (31)$$

şeklinde tanımlanan sayılara Lucas sayıları denir. Bu sayıların oluşturduğu diziye Lucas dizisi denir ve $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin bazı terimleri 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,.... dir. Lucas sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

(2) eşitliğinde verilen $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (32)$$

kapalı formu ile verilebilir ve bu formül Binet Lucas formülü olarak bilinir. Bu formül ile kolayca görülebilir ki, negatif indisli Lucas sayıları

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \quad n \geq 1 \quad (33)$$

eşitliği ile bulunur (Vajda, 1989; Koshy, 2001).

Şimdi de, Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntıları verelim.

Lemma 1.3 F_n ile L_n , sırasıyla, n 'inci Fibonacci ve Lucas sayısı olmak üzere

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n, \quad L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \quad (34)$$

bağıntıları geçerlidir (Vajda, 1989; Koshy, 2001).

İspat (3) ve (32)'de verilen Fibonacci ve Lucas Binet Formülleri ile (19)'daki değerler kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n+1} + \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1)}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n-1}(\beta^2 + 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\sqrt{5}\alpha}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n-1}(-\sqrt{5}\beta)}{\sqrt{5}} = \alpha^n + \beta^n = L_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + L_{n-1} &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1) + \beta^{n-1}(\beta^2 + 1) \\
&= \alpha^{n-1}\sqrt{5}\alpha + \beta^{n-1}(-\sqrt{5}\beta) = 5\frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}} = 5F_n
\end{aligned}$$

olduğu gösterilir.

Lemma 1.4 (2)'de verilen $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ve F_n ile L_n sırasıyla, n 'inci Fibonacci ve Lucas sayısı olmak üzere

$$\sqrt{5}\alpha^n = \alpha L_n + L_{n-1}, \quad -\sqrt{5}\beta^n = \beta L_n + L_{n-1}, \quad (35)$$

$$(-\alpha^{-1})^n \sqrt{5} = \alpha L_n - L_{n+1} = \sqrt{5}\beta^n, \quad (-\beta^{-1})^n \sqrt{5} = L_{n+1} - \beta L_n = \sqrt{5}\alpha^n \quad (36)$$

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}, \quad \beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}, \quad (37)$$

bağıntıları mevcuttur (Vajda, 1989; Koshy, 2001).

İspat. (8)'de verilen eşitlik değerleri (35)'deki eşitliklerin sağ tarafında yerine yazılarak (33)'deki değerler kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\alpha L_n + L_{n-1} &= \alpha(F_{n+1} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n-2}) = \alpha F_{n+1} + F_n + \alpha F_{n-1} + F_{n-1} \\
&= \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1) = \sqrt{5}\alpha^n
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta L_n + L_{n-1} &= \beta(F_{n+1} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n-2}) = \beta F_{n+1} + F_n + \beta F_{n-1} + F_{n-1} \\
&= \beta^{n+1} + \beta^{n-1} = \beta^{n-1}(\beta^2 + 1) = -\sqrt{5}\beta^n
\end{aligned}$$

dir. (36)'daki verilen eşitlikler (35)'deki eşitliklerde $\beta = -\alpha^{-1}$ yerine yazılmasının sonuçlarıdır. (3) ve (32)'de verilen Fibonacci ve Lucas Binet formüllerinin taraf tarafa toplanıp çıkarılması düşünülerek (37)'deki arzu edilenler verilir. ■

1.3 Üç Bant Matrisleri Ve Bazı Özellikleri

$A = [a_{ij}]_{k \times k} \in M_k(F)$ matrisinin elemanları $|i-j| > 1$ iken $a_{ij} = 0$ ise A matrisine üç bant matris denir. $k \times k$ boyutlu A genel üç bant matrisi açık olarak;

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{pmatrix}_{k \times k} \quad (38)$$

şeklinde yazılır. (38) ile verilen $A = [a_{ij}]_{k \times k}$ matrislerinde $a_{i,(i+1)} = a_{(i+1),i}$, $1 \leq i \leq k-1$ olarak tanımlanan matrislere simetrik genel üç bant matris denir.

Herhangi bir $k \times k$ mertebeden $A = [a_{ij}]_k \in M_k(\mathbb{C})$, kompleks matrisin $\lambda_i, 1 \leq i \leq k$, öz değerleri birbirinden farklı olmak üzere A 'nın öz vektörlerinden oluşan terslenebilir P matrisi ve A 'nın öz değerlerinden oluşan $\Lambda = \text{köş}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ köşegen matrisi vardır. A matrisi

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad (39)$$

formunda ifade edilebilir ve bu ayrışımı A 'nın öz değer(spektral) ayrışımı denir.

Lemma 1.5 A matrisi köşegenleştirilebilen bir $k \times k$ mertebeden matris ise herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} \quad (40)$$

şeklinde (Gantmacher, 1977; Strang, 1998).

İspat (39)'da verilen spektral ayrışım olacak şekilde P düzgün matrisi vardır, A^n değerini bulmak için n tane $P\Lambda P^{-1}$ matrisini çarpım şeklinde yazarsak;

$$A^n = \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \dots (P\Lambda P^{-1})}_{n \text{ tane}} \quad (41)$$

elde edilir. Matris çarpımının birleşme özelliği kullanılırsa;

$$A^n = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda \dots (P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} \quad (42)$$

şeklinde olur. $P^{-1}P = I$ ve $\Lambda = \Lambda I$ olduğu kullanılırsa

$$A^n = P \underbrace{\Lambda \Lambda \dots \Lambda \Lambda}_{n \text{ tane}} P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1} \quad (43)$$

elde edilir. ■

Şimdi (38) ile verilen matrislerden daha özel olarak, x ve y keyfi sayı değerleri olmak üzere köşegen üzerindeki elemanları $a_{ii} = x$, $1 \leq i \leq m$ ve ayrıca alt ve üst köşegen üzerindeki elemanları $a_{i,(i+1)} = a_{(i+1),i} = y$, $1 \leq i \leq m-1$ ile tanımlanan;

$$S_m(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & y & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & y & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (44)$$

şeklindeki $m \times m$ boyutlu simetrik üç bant Toeplitz matrisinin bu çalışma için kullanılacak bazı özelliklerini vereceğiz (Gantmacher, 1977; Strang, 1998).

İlk olarak (44)'da verilen $S_m(x, y)$, $m \in \mathbb{N}^+$ matrislerinin (39) ile verilen spektral ayrışımı için öz değerleri,

$$\lambda_j(x, y) = x + 2y \cos \frac{j\pi}{m+1}, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (45)$$

ve öz vektörleri,

$$v_j(x, y) = \left[\sin \frac{1j\pi}{m+1}, \sin \frac{2j\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{(m-1)j\pi}{m+1}, \sin \frac{mj\pi}{m+1} \right]^T \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (46)$$

şeklinde $v_j = [u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m]^T$, $u_i = \sin(ij\pi / m+1)$ vektör devriği (transpozesi) olarak verilir (Gantmacher, 1977 ; Strang, 1998).

(44)'de verilen $S_m(x, y)$, $m \in \mathbb{N}^+$ matrislerinin (45)'deki öz değer ve (46)'deki öz vektör ifadelerine bağlı olarak, $S_m^{(n)}(x, y)$ matrisin $s_{hk}^{(n)}(x, y)$ elemanları için;

$$s_{hk}^{(n)}(x, y) = \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^m \left(x + 2y \cos \frac{j\pi}{m+1} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{m+1} \sin \frac{jk\pi}{m+1} \quad (47)$$

kapalı form ifadeleri (Gantmacher, 1977, Strang, 1998) çalışmalarında görülür.

Özellikle, $S_4(x, y)$ matrisinin kuvveti alınırken elemanların seçimi;

$$s_{hk}^{(n)}(px, py) = p^n s_{hk}^{(n)}(x, y) \quad (48)$$

olduğu için matrisin elemanları olan x ve y 'nin aralarında asal değerleri göz önüne alınmalıdır (Filipponi, P., 1997).

Ayrıca, $S_m^{(n)}(x, y)$ matrisi simetrik matris şeklinde olup, $s_{hk}^{(n)}(x, y)$ elemanlarının arasında birbirine eşit elemanlar bulunmaktadır. Örneğin, (47) denkleminde $m = 4$ durumu için

$$s_{hk}^{(n)}(x, y) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(x + 2y \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (49)$$

ifadesi kullanılarak elemanların simetri özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} s_{11}^{(n)} &= s_{44}^{(n)}, & s_{12}^{(n)} &= s_{21}^{(n)} = s_{34}^{(n)} = s_{43}^{(n)} \\ s_{14}^{(n)} &= s_{41}^{(n)}, & s_{13}^{(n)} &= s_{31}^{(n)} = s_{24}^{(n)} = s_{42}^{(n)} \\ s_{22}^{(n)} &= s_{33}^{(n)}, & s_{23}^{(n)} &= s_{32}^{(n)} \end{aligned} \quad (50)$$

olduğu için 6 elemanın hesaplanması yeterliliği gibi bir çok özellik geçerlidir (Filipponi, P., 1997).

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Herhangi bir matrisin n 'inci kuvvetlerinin elemanları Fibonacci sayılarının indisleri ya da bu sayıların çarpımları veya kuvvetlerinin indisleri ile ilişkilendirilebiliyorsa oluşan kuvvet matrislerine Fibonacci matrisleri denir. Ya da Lucas (veya Fibonacci-Lucas) sayıların indisleri ya da bu sayıların çarpımları veya kuvvetlerinin indisleri ile ilişkilendirilebiliyorsa oluşan bu matrisler Lucas (veya Fibonacci-Lucas) matrisleri olarak adlandırılır. Fibonacci ve Lucas matrislerinin üzerinde Matris teorisindeki bazı teori ve özelliklerin kullanılması ile Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili birçok özellik farklı ve basit şekilde ispatlanabilir. Bu yüzden Fibonacci veya Lucas matrisleri üzerinde bir çok çalışma yapılmış ve bu sayı dizilerinin özellikleri incelenmiştir.

Ayrıca literatürde yer alan üç bant matrislerin öz değer, öz vektör ve kuvvet özellikleri ile ilgili birçok çalışma vardır ki, birçok araştırmaya konu olarak farklı alanlarda ilişkileri incelenmiştir. Bu çalışmaya konu olan kısmı üç bant matrislerin kuvvetlerini içeren çalışmaları içermektedir.

2.1 Fibonacci Matrisleri Literatür Özeti

(King, C. H. 1960; Bruggles ID ve Arkd., 1963; Koshy, T., 2001)'nin çalışmalarında tam sayı elemanlı 2×2 boyutlu Q ve M matrisleri;

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

olmak üzere $n \geq 1$ için

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad M^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} \quad (52)$$

olduğu verilmiştir. Ayrıca, $L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n$ ve $L_n = 2F_{n+1} - F_n$ eşitliklerine göre

$$RQ^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} \quad (53)$$

tanımlanan R benzeri matrisler kullanılarak Fibonacci sayılarından Lucas sayılarına geçiş yapılmıştır.

(Silvester, J.R., 1979)'da King'in (King, 1960) çalışmasına benzer olarak seçilen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

matrisi ile F_n , $n \geq 1$ Fibonacci sayıları ile arasında

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad (55)$$

ilişkisi gösterilmiştir.

King'in Q^n ve Q^{-n} matrislerinin Hadamard çarpım matrisleri (Nallı A., 2006)'nın çalışmasında $Q^n \circ Q^{-n}$ şeklinde ele alınarak;

$$Q^n \circ Q^{-n} = \begin{cases} Q^n \circ adj Q^{-n}, & n \text{ çift} \\ -(Q^n \circ adj Q^{-n}), & n \text{ tek} \end{cases}$$

matris eşitliği ile bu matrisin bazı özellikleri elde edilmiştir.

Fibonacci matrislerinin üzerinde matris teorisindeki bazı tanım ve özellikler kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili birçok özellik farklı ve basit şekilde elde edilmiştir. Literatürdeki çalışmalarda yer alanların bazılarını matrisler üzerine uygulanan tanım ve teorilere göre verelim.

1) Determinant özellikleri ile

$$\det(Q^n) = (-1)^n \Rightarrow F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (56)$$

$$\det(RQ^n) = \det(R)\det(Q^n) \Rightarrow L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1} \quad (57)$$

Cassini's formülleri verilmiştir.

2) Fibonacci Q^n matrisinin karakteristik denklemi $|Q^n - I\lambda| = \lambda^2 - L_n\lambda + (-1)^n$

ile $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ve $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$ olmak üzere

$$\alpha^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta^n = \frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2} \quad (58)$$

eşitlikleri verilir ki; (58) eşitliklerinin taraf tarafa toplanması veya çıkarılması ile Fibonacci ve Lucas Binet formülleri elde edilmiştir.

3) $(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n)(Q - I) = Q^{n+1} - I$ matris eşitliği kullanılarak

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1 \quad (59)$$

olduğu gösterilmiştir.

4) Kuvvet özelliklerinin $Q^m Q^n = Q^{m+n}$ ve $Q^m Q^n Q^l = Q^{m+n+l}$ eşitliği ile

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \text{ ve } F_{m+n+l} = F_{m+1} F_{n+1} F_{l+1} + F_m F_n F_l - F_{m-1} F_{n-1} F_{l-1} \quad (60)$$

indis toplam eşitlikleri ve ters matris yöntemi ile $Q^m Q^{-n} = Q^{m-n}$ eşitliği ile

$$F_{m+n+1} = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n \text{ ve } L_{m+n} = F_{m+1} L_n + F_m L_{n-1} \quad (61)$$

benzeri eşitlikler elde edilmiştir (Bruggles ID. ve Arkd., 1963; Koshy, T., 2001).

(Civciv, H. ve Türkmen, R., 2008(Vol-87))'nin de $s^2 + 4t > 0$, $s > 0$, $t \neq 0$ olacak şekildeki tamsayıları için

$$\mathcal{F}_0(s, t) = I_2, \mathcal{F}_1(s, t) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{F}_{n+1}(s, t) = s\mathcal{F}_n(s, t) + t\mathcal{F}_{n-1}(s, t), n \geq 1, \quad (62)$$

ile (s, t) - Fibonacci matris dizisi $\{\mathcal{F}_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tanımlanmıştır. Fibonacci matris dizileri ile genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasında

$$\mathcal{F}_n(s, t) = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ tF_n & tF_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 0, \quad (63)$$

bağıntısı ve özellikleri verilmiştir.

(Hoggatt V. E. ve Bicknell, M. Jr., 1964)'in çalışmaların da ikincil köşegen altındaki elemanları Pascal üçgenin satırları olarak verilen 3×3 boyutlu P matrisi;

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

olmak üzere $f(x) = x^n$ kuvvet fonksiyonu altındaki görüntüsü $f(P) = P^n$ matrisi;

$$P^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

olduğu verilmiştir.

2.2 Lucas Matrisleri Literatür Özeti

(Koken F. ve Bozkurt, D., 2010; Demirtürk, B. 2010) çalışmalarında tanımlanan 2×2 boyutlu matrislerin;

$$Q_L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

matrislerin kuvvet özellikleri düşünülerek,

$$Q_L^{2n} = 5^n \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad Q_L^{2n+1} = 5^n \begin{pmatrix} L_{2n+2} & L_{2n+1} \\ L_{2n+1} & L_{2n} \end{pmatrix}, \quad S^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_n & 5F_n \\ F_n & L_n \end{pmatrix} \quad (67)$$

Fibonacci-Lucas matrisleri ve

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix} = Q_L \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5F_{n+1} \\ 5F_n \end{pmatrix} = Q_L \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} \quad (68)$$

matrisler arasında aşağıdaki ilişkiler kurulmuştur.

Ayrıca Lucas matrislerinin üzerinde matris teorisindeki benzer çalışmaların yapılması ile Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili birçok özellik farklı ve basit şekilde elde edilmiştir. Literatürdeki çalışmalarda yer alanların bazılarını matrisler üzerine uygulanan tanım ve teorilere göre verelim.

1) Determinant özellikleri ile

$$\det(Q_L^n) = 5^n, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \quad (69)$$

Fibonacci ve Lucas Cassini formülleri verilmiştir.

2) $Q_L = UVU^{-1}$ matris eşitliği öz değer ayrışımı özelliği

$$\Lambda = \text{köş}(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1 = \sqrt{5}\alpha, \quad \lambda_2 = \sqrt{5}\beta, \quad (70)$$

$$U = (v_1^T, v_2^T), \quad v_1 = (1, -\beta), \quad v_2 = (1, -\alpha) \quad (71)$$

olmak üzere kuvvet hesabı $Q_L^n = UV^nU^{-1}$ matris eşitliği ile

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (72)$$

Fibonacci ve Lucas Binet formülleri kurulmuştur.

3) Kuvvet özelliklerinin eşitliği $Q_L^m Q_L^n = Q_L^{m+n}$ ve $Q_L^m Q_L^{-n} = Q_L^{m-n}$ ters matris yöntemi ile

$$5F_{m+n} = L_{m+1}L_n + L_mL_{n-1}, \quad F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \quad (73)$$

$$L_{m+n} = F_{n+1}L_m + F_nL_{m-1}, \quad 5F_{m-n} = (-1)^{n-1} (L_mL_{n+1} - L_{m+1}L_n), \quad (74)$$

$$F_{m-n} = (-1)^n (F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n), \quad L_{m-n} = (-1)^{n-1} (F_mL_{n+1} - F_{m+1}L_n) \quad (75)$$

indis toplam ve fark eşitlikleri elde edilmiştir. Ayrıca $S^n S^m = S^{n+m}$ ve $S^n S^{-m} = S^{n-m}$ ters matris yöntemi ile

$$2F_{m+n} = F_nL_m + L_nF_m, \quad 2L_{m+n} = L_nL_m + 5F_mF_n, \quad (76)$$

$$2(-1)^m L_{n-m} = L_m L_n - 5F_n F_m, \quad 2(-1)^m F_{n-m} = F_n L_m - L_n F_m, \quad (77)$$

verilmiştir.

(Civciv, H. ve Türkmen, R., 2008(Vol-89),)'in de $s^2 + 4t > 0$, $s > 0$, $t \neq 0$ olacak şekildeki tamsayıları için

$$\mathcal{L}_0(s, t) = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_1(s, t) = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{n+1}(s, t) = s\mathcal{L}_n(s, t) + t\mathcal{L}_{n-1}(s, t), \quad n \geq 1, \quad (78)$$

ile (s, t) -Lucas matris dizisi $\{\mathcal{L}_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tanımlamıştır. Lucas matris dizileri ile genelleştirilmiş Lucas sayıları arasında

$$\mathcal{L}_n(s, t) = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ tL_n & tL_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \quad (79)$$

bağıntısını ve özelliklerini vermiştir.

(Koken F., 2019)'ın çalışmasında Pascal matrisleri ile ilgili 3×3 boyutlu R_L matrisi tanımlanmıştır. İki farklı yöntem ile R_L^n matris kuvvetinin hesaplanması yapılmıştır. Elde edilen kuvvetlerin eşitlenmesi ile bir çok Fibonacci-Lucas eşitliği bulunur. Ayrıca, $R_L - 5I$ matrisi düşünülmüş ve $(R_L - 5I)^n$ kuvvet matrisi elde edilmiştir. $(R_L - 5I)^n$ ve R_L^n matrislerinin ilişkileri ve Fibonacci ve Lucas eşitlik uygulamaları verilmiştir.

2.3 Üç Bant Matrisleri Literatür Özeti

Bu kısımda özel bazı üç bant matrislerin herhangi bir pozitif tamsayı kuvvetini matrisin elemanlarına, öz değerlerine ve Chebyshev polinomlarına bağlı olarak elde edilen genel kapalı form ifadelerinden bahsedilecektir. Literatürdeki çalışmalarda genel olarak (38) denkleminde verilen üç bant matrisin simetrik olmayan özel durumu olan

$$\text{tridiag}(a, b, c) = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & c & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C} \quad (80)$$

matrisi ile bu matrisin ilk ve son satırı veya sütunundaki bazı elemanların farklı alınması üzerine yapılmıştır.

(Rimas, J., 2005(vol:168); Rimas, J., 2005(vol:171); Rimas, J., 2006(vol:172); Rimas, J., 2006(vol:174)) verilen çalışmalarda $tridiag(1,0,1) = [b_{ij}]_{n \times n}$, $i \neq 1$ elemanlarına sahip olan $n = 2k$ ve $n = 2k + 1$ mertebeli üç bant matrisler için herhangi kuvvetin genel ifadesini elde etmiştir. Ayrıca Rimas, çalışmalarında $b_{1,j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ elemanları, $b_{n,n-1} = 2$ ve diğer elemanları $tridiag(1,0,1) = [b_{ij}]_{n \times n}$, $i \neq 1$ olan bir üç bant matrisin mertebelerini tek ve çift şeklinde alarak (Rimas, J., 2005-164-169) iki farklı çalışmada bu matrislerin kuvvetini oluşturmuştur.

(Davod, K. S., 2006)'daki çalışmasında $tridiag(c, b, a)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ şeklinde üç bant matrisi düşünerek öz değerlerini ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri formülize etmiştir. Ayrıca herhangi matrisin pozitif tam sayı kuvvetlerini sinüs ve kosinüs fonksiyonlarına bağlı ifadelerle ifade etmiştir.

Yazar (Gutie'erez, J., 2008-202) çalışmasında $tridiag_n(a_1, a_0, \bar{a}_1)$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $0 \neq a_1 \in \mathbb{C}$ şeklindeki bir üç bant matrisin kuvvetini vermiştir. Ayrıca (Gutie'erez J., 2008-206)'deki çalışmalarında $tridiag_n(a_1, a_0, a_{-1})$, $a_1 a_{-1} \neq 0$ şeklindeki bir üç bant matrisin kuvvetini kurgulamıştır.

(Elouafi, M. ve A Hadj, 2009)'ın çalışmalarında (38)'deki gibi matrisleri ele alıp bu matrisler için bir öz değer ayrışımı formülize etmiştir. Bu öz değer ayrışımına göre bu matrislerin kuvvetlerini ve terslerini veren genel ifadeler düzenlemiştir.

(Filipponi, P., 1997)'nin çalışmasında, (44)'de verilen $m \times m$ boyutlu simetrik üç bant matrisinde $m = 4$ durumu için $S_4(x, y)$ matrislerinin elemanlarını $x = F_s$ ve $y = F_{s+1}$, ($s \geq 0$) ardışık Fibonacci sayıları seçilerek oluşturulan $S_4(F_s, F_{s+1})$, ($s \geq 0$) matrislerin n 'inci kuvvetlerinin

$$s_{hk}^{(n)}(x, y) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(x + 2y \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (81)$$

Fibonacci matrisleri olduğu gösterilmiştir.

$(x, y) = (F_s, F_{s+1})$, ($s \geq 0$) sıralı ikilisine göre $S_4^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ Fibonacci matrisinin $s = 0, 1, 2$ durumları için $S_4^{(n)}(F_0, F_1)$, $S_4^{(n)}(F_1, F_2)$ ve $S_4^{(n)}(F_2, F_3)$ matrislerinin bütün elemanları ve bu elemanlarının aralarında bazı toplam eşitliği

özelliklerini vermiştir. Filipponi, P., $s=0,1,2$ durumları için verdiği $S_4^n(F_s, F_{s+1})$ matrislerindeki hesaplamalarında her matris için bir eleman hesaplamış diğerlerini gözlem için bırakmıştır. Fakat $S_4^n(F_s, F_{s+1})$ matris genellemesinde sadece aşağıdaki şekilde elemanlar arasındaki ilişkileri değerlendirmiştir. $h=1$ değeri için, (47) denkleminde verilen genel terim elemanlarına göre

$$s_{1k}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(F_s + 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (82)$$

ifadesi verilir. (82) ifadesinde $j=1,2,3,4$ için özdeğerler ifadeleri ile $k=2$ ve $k=3$ için kullanılacak değerleri aşağıdaki tabloda verilir.

j	$\left(F_s + 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(F_s + \alpha F_{s+1})^n = \alpha^{(s+1)n}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$
2	$(F_s - \beta F_{s+1})^n$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$
3	$(F_s + \beta F_{s+1})^n = \beta^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$
4	$(F_s - \alpha F_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$

Tablo 1

$s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ ve $s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ elemanları için Tablo 1'deki değerleri (82) ifadesinde yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) + s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n} - \beta^{(s+1)n} + (F_s - \beta F_{s+1})^n - (F_s - \alpha F_{s+1})^n \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n} - \beta^{(s+1)n} - (F_s - \beta F_{s+1})^n + (F_s - \alpha F_{s+1})^n \right] \\ &= F_{(s+1)n} \end{aligned}$$

elde edilir. $S_4^n(F_s, F_{s+1})$ matrisinin elemanlarının açık ifadeleri yerine sadece

$$\begin{cases} s_{11}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) + s_{14}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = F_{(s+1)n-1}, \\ s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) + s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = F_{(s+1)n}, \\ s_{22}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) + s_{23}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = F_{(s+1)n+1}. \end{cases} \quad (83)$$

elemanlar arasındaki toplam eşitliği ifadeleri verilir.

3. FİBONACCİ MATRİSLERİ

(Filipponi, P., 1997)'deki çalışmada yer aldığı şekli ile iyi bilinen bir gerçek ki $ebob(F_s, F_{s+1})=1$, ($s \geq 0$) ardışık Fibonacci sayıları aralarında asaldır. Bu yüzden ardışık Fibonacci sıralı ikilileri $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ($s \geq 0$), diğer taraftan $(x, y) = (F_s, F_{s+1})$ ve $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ($s < 0$) durumların da $ebob(x, y)=1$ olduğundan bu bölümde $S_4(x, y)$ matrisini 3 alt bölümde ayrı ayrı değerlendireceğiz. Ayrıca $S_4^{(n)}(x, y)$ matrisinin elemanlarının (50) denkleminde verilen simetri özelliğinden faydalanarak $s_{1k}^{(n)}$, $1 \leq k \leq 4$, $s_{22}^{(n)}$ ve $s_{23}^{(n)}$ ifadeleri için değerler elde edildikten sonra bu elemanlar arasındaki toplam ve fark ilişkileri verilecektir.

İlk olarak (49) denkleminde verilen $S_4^{(n)}(x, y) = [s_{hk}^{(n)}(x, y)]$ genel matris elemanın ifadesinde iki tane hesaplanması gereken terim vardır. Bunlardan birisi matrisin elemanları ile değişen öz değer kısmı, diğeri ise her matriste aynı olan satır ve sütun elemanlarına bağlı öz vektör kısmıdır. Bu yüzden (27), (28), (29), (30)'da verilen eşitliklerle (45)'de verilen öz değerler ifadelerinde karşımıza çıkabilecek değerler için aşağıdaki tablo oluşturulur.

j	1	2	3	4
$2 \cos \frac{j\pi}{5}$	α	$-\beta$	β	$-\alpha$

Tablo 2

(49) denkleminin içerdiği diğer kısım olan;

$$\sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(h-k)j\pi}{5} - \cos \frac{(h+k)j\pi}{5} \right) \quad (84)$$

ifadesinin değerleri Tablo 2'deki ifadeler kullanılarak bulunur. h ve k ifadelerinin değerlerine göre $j=1,2,3,4$ için $s_{hk}^{(n)}(x, y)$ elemanlarının elde edilebilmesi için aşağıdaki tablo düzenlenir.

$\sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5}$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$h=k=1;$ $\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$
$h=1, k=2;$ $\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$

$h=1, k=3;$ $\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$
$h=1, k=4;$ $\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$
$h=k=2;$ $\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$
$h=2, k=3;$ $\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$	$\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$

Tablo 3

Filipponi, (Filipponi, P., 1997) çalışmasında $S_4^n(F_s, F_{s+1})$ matris genellemesinde elemanlar arasındaki ilişkileri değerlendirmiştir, fakat elemanların açık temsillerini vermemiştir. Bu genel matrisin elemanlarını açık olarak bir lemma ile vererek başlayalım.

Lemma 3.1. F_s , s 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere $S_4^n(F_s, F_{s+1})$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (85)$$

$$s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (86)$$

$$s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (87)$$

$$s_{14}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (88)$$

$$s_{22}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], \quad (89)$$

$$s_{23}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[-F_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right] \quad (90)$$

dir.

İspat (49) denkleminde verilen genel terim elemanlarına göre $h=1$ değeri için,

$$s_{1k}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(F_s + 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (91)$$

ifadesinde (8)'de verilen eşitlikler ve Tablo 2 ile Tablo 3'deki veriler kullanılarak; (91) ifadesinde $k=1$, $k=2$ ve $k=3$ için (84)'deki değerler ve öz değer ifadeleri aşağıdaki tabloda verilir.

j	$\left(F_s + 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n$	$\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(F_s + \alpha F_{s+1})^n = \alpha^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$
2	$(F_s - \beta F_{s+1})^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$
3	$(F_s + \beta F_{s+1})^n = \beta^{(s+1)n}$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$
4	$(F_s - \alpha F_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$

Tablo 4

$s_{11}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$, $s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ ve $s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ elemanları için Tablo 4'deki değerleri (91)

ifadesinde yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
s_{11}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n} (-\beta) + (F_s - \beta F_{s+1})^n \alpha + \beta^{(s+1)n} \alpha + (F_s - \alpha F_{s+1})^n (-\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(sn+n-1)} - \beta^{(sn+n-1)} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(sn+n-1)} - \beta^{(sn+n-1)} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} (\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki (3)'de verilen Binet formunu kullanarak

$$s_{11}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) = \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right]$$

bulunur. Diğer elemanlar olarak

$$\begin{aligned}
s_{12}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n} + (F_s - \beta F_{s+1})^n - \beta^{(s+1)n} - (F_s - \alpha F_{s+1})^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
s_{13}^{(n)}(F_s, F_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n} - (F_s - \beta F_{s+1})^n - \beta^{(s+1)n} + (F_s - \alpha F_{s+1})^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right]
\end{aligned}$$

elde edilmiştir. $s_{14}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$, $s_{22}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ ve $s_{23}^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ elemanlarını bulmak için gerekli ifadeler aşağıdaki gibi verilir.

j	$\left(F_s + 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(F_s + \alpha F_{s+1})^n = \alpha^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(F_s - \beta F_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\beta/4$
3	$(F_s + \beta F_{s+1})^n = \beta^{(s+1)n}$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(F_s - \alpha F_{s+1})^n$	$\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 5

Yukarıda yapılan benzer işlemlerle Tablo 5'deki değerler kullanılarak diğer elemanlar kolayca bulunur. ■

Şimdi, $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ($s \geq 0$), $(x, y) = (F_s, F_{s+1})$ ve $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ($s < 0$), Fibonacci sıralı ikilileri için sırasıyla düşünülen olası durumları inceleyelim.

3.1 $(F_{-s}, F_{-(s+1)})$, $s \geq 0$ Sıralı İkiline Göre Fibonacci Matrisleri

Bu bölümde, $(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ sıralı ikilisi için s 'nin $s = \{0, 1, 2\}$ gibi özel değerlerinden başlatıp genelleme durumuna kadar alt kısımlarda ayrı ayrı inceleyeceğiz. Fakat, $(x, y) = (F_0, F_{-1})$ sıralı ikilisi $F_0 = 0$, $F_{-1} = 1$ olduğu için $S_4^n(F_0, F_{-1})$ matrisinin (Filipponi, P., 1997) çalışmasında yer alan $S_4^n(F_0, F_1)$ matris çalışması ile aynı olduğu görüldüğünden $S_4^n(F_0, F_{-1})$ matrisi incelenmeyecektir.

3.1.1 $S_4^{(n)}(F_{-1}, F_{-2})$ Fibonacci matrisi

$(x, y) = (F_{-1}, F_{-2})$ sıralı ikilisi için (44)'deki matris ifadesi

$$S_m(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (92)$$

şeklinde oluşur. (92) ifadesinde $m = 4$ durumu için matrisin n 'inci kuvveti olarak $S_4^{(n)}(1, -1)$ matrisinde, $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri

$$S_4^{(2)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad S_4^{(3)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -6 & 3 \\ 3 & -6 & 7 & -5 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

$$S_4^{(4)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 9 & -4 \\ -12 & 18 & -16 & 9 \\ 9 & -16 & 18 & -12 \\ -4 & 9 & -12 & 9 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad S_4^{(5)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 21 & -30 & 25 & -13 \\ -30 & 46 & -43 & 25 \\ 25 & -43 & 46 & -30 \\ -13 & 25 & -30 & 21 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

verilebilir. $S_4^{(n)}(1,-1)$ matrisinin elemanlarının (Filipponi, P., 1997)'deki çalışmada (3.33)'deki $s_{hk}^{(n)}(1,-1) = (-1)^{h+k} s_{hk}^{(n)}(1,1)$ ile verildiği fakat ispatlarının yapılmadığı görülmektedir. Bu yüzden, tüm elemanların ifadelerini ayrıntılı açıklayan teoreminizi aşağıda vereceğiz.

Teorem 3.1. $S_4^{(n)}(1,-1)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2}[F_{2n-1} + F_{n+1}], \quad (93)$$

$$s_{12}^{(n)}(1,-1) = \frac{-1}{2}[F_{2n} + F_n], \quad (94)$$

$$s_{13}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2}[F_{2n} - F_n], \quad (95)$$

$$s_{14}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2}[F_{n+1} - F_{2n-1}], \quad (96)$$

$$s_{22}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2}[F_{2n+1} + F_{n-1}], \quad (97)$$

$$s_{23}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2}[F_{n-1} - F_{2n+1}] \quad (98)$$

şeklindedir.

İspat $S_4^{(n)}(1,-1)$ matrisinin (49) denkleminde verilen genel terim elemanları;

$$s_{hk}^{(n)}(1,-1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (99)$$

şeklinde yazılabilir. (45)'deki öz değerler ifadesinde $x=1$, $y=-1$ değerlerinin yazılması ile $1 \leq j \leq 4$ değerleri için Lemma 1.1'deki (5)-(9)'daki eşitlikleri ve Tablo 2'deki verileri kullanarak öz değerler tablosu aşağıdaki gibi verilir.

j	1	2	3	4
$1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}$	β	β^2	α	α^2

Tablo 6

(99) ifadesinde $h = k = 1$ için $s_{11}^{(n)}(1, -1)$ elemanın genel terimi

$$s_{11}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n \sin^2 \frac{j\pi}{5} \quad (100)$$

şeklinde yazılabilir. Tablo 6'dan $j = 1, 2, 3, 4$ için sırasıyla $1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} = \beta, \beta^2, \alpha$ ve

α^2 olduğunu görüyoruz. Buna ek olarak Tablo 3'den $\sin^2 \left(\frac{j\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j = 1, 4$) ve

$\sin^2 \left(\frac{j\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j = 2, 3$) olduğu görülür. (100)'de bu veriler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} s_{11}^{(n)}(1, -1) &= \frac{2}{5} \left[\beta^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4}\right) + (\beta^2)^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + \alpha^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (\alpha^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-\beta^{n+1} + \beta^{2n}\alpha + \alpha^{n+1} - \alpha^{2n}\beta \right] \end{aligned}$$

böylece (3)'de verilen Fibonacci Binet formu ve $\alpha\beta = -1$ olmasını kullanarak

$$s_{11}^{(n)}(1, -1) = \frac{1}{2} [F_{2n-1} + F_{n+1}]$$

elde edilir.

(99) ifadesinde $h = 1, k = 2$ için $s_{12}^{(n)}(1, -1)$ elemanın genel terimi

$$s_{12}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5} \quad (101)$$

şeklinde yazılabilir.

Tablo 3'den $\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ($j = 1, 2$) ve $\frac{-\sqrt{5}}{4}$ ($j = 3, 4$) olduğu görülür.

(101) ifadesinde Tablo 6'daki veriler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} s_{12}^{(n)}(1, -1) &= \frac{2}{5} \left[\beta^n \frac{\sqrt{5}}{4} + (\beta^2)^n \frac{\sqrt{5}}{4} + \alpha^n \left(\frac{-\sqrt{5}}{4}\right) + (\alpha^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\beta^n + \beta^{2n} - \alpha^n - \alpha^{2n} \right] \end{aligned}$$

şeklindedir. (3)'de verilen Binet formunu kullanarak

$$s_{12}^{(n)}(1, -1) = \frac{-1}{2} [F_{2n} + F_n]$$

elde edilir.

(99) ifadesinde $h = 1, k = 3$ için $s_{13}^{(n)}(1, -1)$ elemanın genel terimi

$$s_{13}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5} \quad (102)$$

şeklinde yazılabilir. Tablo 6'daki veriler ile Tablo 3'den $\sin \frac{j\pi}{5} \cdot \sin \frac{3j\pi}{5}$ ifadesi için

$\frac{\sqrt{5}}{4}$ ($j=1,4$) ve $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ ($j=2,3$) değerleri (102) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} s_{13}^{(n)}(1,-1) &= \frac{2}{5} \left[\beta^n \left(\frac{\sqrt{5}}{4} \right) + (\beta^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) + \alpha^n \left(-\frac{\sqrt{5}}{4} \right) + (\alpha^2)^n \frac{\sqrt{5}}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} [\beta^n - \beta^{2n} - \alpha^n + \alpha^{2n}] \end{aligned}$$

olur. (3)'de verilen form ile

$$s_{13}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2} [F_{2n} - F_n]$$

bulunur.

(99) ifadesinde $h=1$, $k=4$ için $s_{14}^{(n)}(1,-1)$ elemanın genel terimi

$$s_{14}^{(n)}(1,-1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5} \quad (103)$$

yazılabilir. Tablo 6'daki değerler ve Tablo 3'den $\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j=1$),

$-\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j=2$), $\frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j=3$) ve $\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j=4$) ifadelerini (103)'de yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned} s_{14}^{(n)}(1,-1) &= \frac{2}{5} \left[\beta^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (\beta^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + \alpha^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (\alpha^2)^n \frac{\sqrt{5}\beta}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} [-\beta^{n+1} - \beta^{2n-1}\beta\alpha + \alpha^{n+1} + (\alpha^{2n-1}\alpha\beta)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} [-\beta^{n+1} + \beta^{2n-1} + \alpha^{n+1} - \alpha^{2n-1}] \end{aligned}$$

dir. (3)'de verilen form ile

$$s_{14}^{(n)}(1,-1) = \frac{1}{2} [F_{n+1} - F_{2n-1}]$$

olur.

(99) ifadesinde $h=2$, $k=2$ için $s_{22}^{(n)}(1,-1)$ elemanın genel terimi

$$s_{22}^{(n)}(1,-1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin^2 \frac{j\pi}{5} \quad (104)$$

dir. Tablo 6'daki ifadeler ve Tablo 3'den $\sin^2 \frac{j\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j=1,4$) ve $-\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j=2,3$)

değerler; (104) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$s_{22}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \left[\beta^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (\beta^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + \alpha^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (\alpha^2)^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-\beta^{n-1} - \beta^{2n+1} + \alpha^{n-1} + \alpha^{2n+1} \right]$$

olur. (3)'de verilen form ile

$$s_{22}^{(n)}(1, -1) = \frac{1}{2} [F_{2n+1} + F_{n-1}]$$

elde edilir.

(99) ifadesinde $h = 2$, $k = 3$ için $s_{23}^{(n)}(1, -1)$ elemanın genel terimi

$$s_{23}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{2j\pi}{5} \cdot \sin \frac{3j\pi}{5} \quad (105)$$

yazılabilir. Tablo 6'daki değerler ile Tablo 3'deki $\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j=1$),

$\frac{\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j=2$), $\frac{-\sqrt{5}\beta}{4}$ ($j=3$) ve $\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4}$ ($j=4$) ifadeleri; (105),de yerlerine yazılırsa;

$$s_{23}^{(n)}(1, -1) = \frac{2}{5} \left[\beta^n \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + (\beta^2)^n \left(\frac{\sqrt{5}\beta}{4} \right) + \alpha^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (\alpha^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-\beta^{n-1} + \beta^{2n+1} + \alpha^{n-1} - \alpha^{2n+1} \right]$$

olur. (3)'de verilen form kullanılarak

$$s_{23}^{(n)}(1, -1) = \frac{1}{2} [F_{n-1} - F_{2n+1}]$$

elde edilir. ■

Ayrıca (93) -- (98) ifadelerinden görülür ki $S_4^{(n)}(1, -1)$ matrisin elemanları için toplam ve fark eşitliklerini, (1) ve (31)'deki bağıntıları ile aşağıdaki gibi verebiliriz.

$s_{11}^{(n)}(1, -1) + s_{14}^{(n)}(1, -1) = F_{n+1},$	$s_{11}^{(n)}(1, -1) - s_{14}^{(n)}(1, -1) = L_{2n},$
$s_{12}^{(n)}(1, -1) + s_{13}^{(n)}(1, -1) = -F_n,$	$s_{12}^{(n)}(1, -1) - s_{13}^{(n)}(1, -1) = -F_{2n},$
$s_{22}^{(n)}(1, -1) + s_{23}^{(n)}(1, -1) = F_{n-1},$	$s_{22}^{(n)}(1, -1) - s_{23}^{(n)}(1, -1) = F_{2n+1},$
$s_{11}^{(n)}(1, -1) + s_{12}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{n-1} - F_{2n-2}}{2},$	$s_{11}^{(n)}(1, -1) - s_{12}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n+1} + F_{n+2}}{2},$
$s_{13}^{(n)}(1, -1) + s_{14}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n-2} + F_{n-1}}{2},$	$s_{13}^{(n)}(1, -1) - s_{14}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n+1} - F_{n+2}}{2},$

$s_{13}^{(n)}(1, -1) + s_{22}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n+2} - F_{n-2}}{2},$	$s_{22}^{(n)}(1, -1) - s_{13}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n-1} + F_{n+1}}{2},$
$s_{23}^{(n)}(1, -1) + s_{14}^{(n)}(1, -1) = \frac{L_n - L_{2n}}{2},$	$s_{14}^{(n)}(1, -1) - s_{23}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_n + F_{2n}}{2},$
$s_{22}^{(n)}(1, -1) + s_{11}^{(n)}(1, -1) = \frac{L_{2n} + L_n}{2},$	$s_{22}^{(n)}(1, -1) - s_{11}^{(n)}(1, -1) = \frac{F_{2n} + F_n}{2}$

Tablo 7

Ek olarak $S_4^{(n)}(1, -1)$ matrisinin izi; Tablo 6'da verilen öz değerler ifadesi

kullanılarak $Tr(S_4^{(n)}(1, -1)) = \sum_{j=1}^4 \left(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n$ toplamına göre ya da (93) - (98)

ifadelerinden $s_{11}^{(n)}(1, -1) = s_{44}^{(n)}(1, -1)$, $s_{22}^{(n)}(1, -1) = s_{33}^{(n)}(1, -1)$ eşitliklerini göz önüne alarak tüm köşegen elemanlarının toplamına göre

$$Tr(S_4^{(n)}(1, -1)) = L_{2n} + L_n \quad (106)$$

şeklinde dir.

Not: (50)'de verilen ifadelerden $S_4^{(n)}(x, y)$ matrisin elemanları için eşitlik değerlerine göre $(h, k) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3)\}$ sıralı ikilileri için elemanların verilmesi $S_4^{(n)}(x, y)$ matrisinin tespiti için yeterli olacaktır. Ayrıca (93) - (98) ifadelerinin ispatları Tablo 3 ve Tablo 6'daki veriler kullanılarak paralel argümanlarla yapıldığı için sonraki ispatlarımızda bazı elemanların ispatları kısalık için verilmeyecektir. Görülüyor ki; (49)'da verilen genel terim elemanları için Tablo 3'deki değerlerin her matris için kullanılacağı açıktır. Ayrıca, Tablo 3'den anlaşılıyor ki; $(h, k) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3)\}$ ikililerinden, sırasıyla ikişerli üç adet grup olarak $(h, k) = \{(1,1), (1,4)\}$, $(h, k) = \{(1,2), (1,3)\}$, $(h, k) = \{(2,2), (2,3)\}$ şeklinde verilenler işaret farkı ile benzerdir. Bu yüzden, bu üçlü grupta her birinden bir tanesi elemanların ispatında kullanılacaktır. Ek olarak, $S_4^{(n)}(x, y)$ şeklindeki her matris için Tablo 3 ve Tablo 6'nın birleşimi şeklinde bir tabloda matrisin öz değerleri ve yukarıdaki (h, k) ikililerinde 3 adet elemanın satır ve sütun değerlerini gösteren ifadeler verilecektir.

3.1.2 $S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-3})$ Fibonacci matrisi

$s = 2$ durumu için (44)'deki matris ifadesinde $(x, y) = (F_{-2}, F_{-3})$ sıralı ikilisi $m = 4$ durumunda yerine yazılırsa

$$S_4(-1, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

şeklinde oluşur. (107)'deki matrisin n 'inci kuvveti olan $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisi için $n = 2, 3, 4, 5$ değerlerine kuvvet matrisleri

$$S_4^{(2)}(-1, 2) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 9 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 9 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(3)}(-1, 2) = \begin{pmatrix} -13 & 22 & -12 & 8 \\ 22 & -25 & 30 & -12 \\ -12 & 30 & -25 & 22 \\ 8 & -12 & 22 & -13 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(-1, 2) = \begin{pmatrix} 57 & -72 & 72 & -32 \\ -72 & 129 & -104 & 72 \\ 72 & -104 & 129 & -72 \\ -32 & 72 & -72 & 57 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(5)}(-1, 2) = \begin{pmatrix} -201 & 330 & -280 & 176 \\ 330 & -481 & 506 & -280 \\ -280 & 506 & -481 & 330 \\ 176 & -280 & 330 & -201 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisinin elemanlarının F_{3n-1} , F_{3n} ve F_{3n+1} sayıları ile bağlantıları verelim.

Teorem 3.2. $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(-1, 2) = \frac{(-1)^n}{2} (F_{3n-1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor}), \quad (108)$$

$$s_{12}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left[(-1)^{n+1} F_{3n} + 5^{(n-1)/2} (1 - (-1)^n) \right], \quad (109)$$

$$s_{13}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left[(-1)^n F_{3n} + 5^{(n-1)/2} (1 - (-1)^n) \right], \quad (110)$$

$$s_{14}^{(n)}(-1, 2) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} (F_{3n-1} - 5^{\lfloor n/2 \rfloor}), \quad (111)$$

$$s_{22}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left((-1)^n F_{3n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \right), \quad (112)$$

$$s_{23}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left((-1)^{n+1} F_{3n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \right) \quad (113)$$

şeklindedir.

İspat (49)'daki genel terim elemanları $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matris ifadesine göre;

$$s_{hk}^{(n)}(-1, 2) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(-1 + 4 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (114)$$

şeklinde yazılabilir. (45)'deki öz değerler ifadesinde $(x, y) = (F_{-2}, F_{-3})$ değerlerine göre Lemma 1.1'deki (5) - (9) denklemleri ve Tablo 2'de verilen veriler kullanılırsa $1 \leq j \leq 4$ için aşağıdaki gibi olduğu görülür.

j	1	2	3	4
$-1 + 4 \cos \frac{j\pi}{5}$	$\sqrt{5}$	$-\beta^3$	$-\sqrt{5}$	$-\alpha^3$

Tablo 8

(114) ifadesinde $(h, k) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2)\}$ sıralı ikilileri için Tablo 8 ve Tablo 3'deki uygun değerleri kullanarak aşağıdaki tablo düzenlenir.

j	$\left(-1 + 4 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$
1	$5^{n/2}$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(-1)^n \beta^{3n}$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
3	$(-1)^n 5^{n/2}$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(-1)^n \alpha^{3n}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 9

İlk olarak, $s_{13}^{(n)}(-1, 2)$ elemanı için (114) ifadesinde Tablo 9'daki uygun değerler kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
 s_{13}^{(n)}(-1, 2) &= \frac{2}{5} \left[5^{n/2} \frac{\sqrt{5}}{4} + (-1)^n \beta^{3n} \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) + (-1)^n 5^{n/2} \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) + (-1)^n \alpha^{3n} \frac{\sqrt{5}}{4} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} - (-1)^n \beta^{3n} - (-1)^n 5^{n/2} + (-1)^n \alpha^{3n} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(-1)^n (\alpha^{3n} - \beta^{3n}) + 5^{n/2} (1 - (-1)^n) \right]
 \end{aligned}$$

dir. (3)'de verilen Binet formu ile

$$s_{13}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left[(-1)^n F_{3n} + 5^{(n-1)/2} (1 - (-1)^n) \right]$$

elde edilir. İkinci olarak, $s_{14}^{(n)}(-1, 2)$ elemanı için (114) ifadesinde Tablo 9'daki uygun değerler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 s_{14}^{(n)}(-1, 2) &= \frac{2}{5} \left[5^{n/2} \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (-1)^n \beta^{3n} \left(\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + (-1)^n 5^{n/2} \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (-1)^n \alpha^{3n} \frac{\sqrt{5}\beta}{4} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (-\beta) + (-1)^n \beta^{3n} (-\alpha) + (-1)^n 5^{n/2} \alpha + (-1)^n \alpha^{3n} \beta \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^{3n-1} - \beta^{3n-1}}{\sqrt{5}} \right) + 5^{(n-1)/2} \left((-1)^n \alpha - \beta \right) \right]$$

bulunur ki n 'in tek ve çift olma durumlarına göre $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ özellikleri ile (3)'de verilen Binet formunu kullanarak

$$s_{14}^{(n)}(-1, 2) = \begin{cases} \frac{1}{2} (F_{3n-1} - 5^{(n-1)/2}), & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} (-F_{3n-1} + 5^{n/2}), & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. n 'in tek veya çift olma durumunu tam değer fonksiyon ile düzenlersek istenilen elde edilir. Üçüncü olarak, $s_{22}^{(n)}(-1, 2)$ elemanı için Tablo 9'daki uygun değerler (114) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} s_{22}^{(n)}(-1, 2) &= \frac{2}{5} \left[5^{n/2} \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (-1)^n \beta^{3n} \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (-1)^n 5^{n/2} \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (-1)^n \alpha^{3n} \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \alpha - (-1)^n \beta^{3n+1} - (-1)^n 5^{n/2} \beta + (-1)^n \alpha^{3n+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1)^n \left(\frac{\alpha^{3n+1} - \beta^{3n+1}}{\sqrt{5}} \right) + 5^{(n-1)/2} \left(\alpha - (-1)^n \beta \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur ki n 'in tek ve çift olma durumlarına göre $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ özellikleri ile (3)'de verilen Binet formunu kullanarak

$$s_{22}^{(n)}(-1, 2) = \begin{cases} \frac{1}{2} (-F_{3n+1} + 5^{(n-1)/2}), & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} (F_{3n+1} + 5^{n/2}), & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. n 'in tek veya çift olma durumunu tam değer fonksiyon ile düzenlersek istenilen elde edilir.

(108) - (113) ifadelerinden $(h, k) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2)\}$ ikililerin ispatları Tablo 9'daki veriler kullanılarak yapıldı. $(h, k) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ ikililerin ispatları Tablo 8 ve Tablo 3'deki uygun değerler kullanılarak paralel argümanlarla yapıldığı için tekrarlanmamıştır. ■

(108) - (113) ifadelerinden $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisinin elemanları için aşağıdaki tabloda verilen eşitlik ifadeleri geçerlidir.

$s_{11}^{(n)}(-1, 2) + s_{14}^{(n)}(-1, 2) = (-1)^n 5^{\lfloor n/2 \rfloor}$,	$s_{11}^{(n)}(-1, 2) - s_{14}^{(n)}(-1, 2) = (-1)^n F_{3n-1}$,
--	---

$s_{12}^{(n)}(-1, 2) + s_{13}^{(n)}(-1, 2) = 5^{(n-1)/2} (1 - (-1)^n),$	$s_{12}^{(n)}(-1, 2) + s_{13}^{(n)}(-1, 2) = (-1)^{n+1} F_{3n},$
$s_{22}^{(n)}(-1, 2) + s_{23}^{(n)}(-1, 2) = 5^{\lfloor n/2 \rfloor},$	$s_{22}^{(n)}(-1, 2) - s_{23}^{(n)}(-1, 2) = (-1)^n F_{3n+1},$
$s_{14}^{(n)}(-1, 2) + s_{23}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left((-1)^{n+1} L_{3n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} [(-1)^n + 1] \right)$	
$s_{11}^{(n)}(-1, 2) + s_{22}^{(n)}(-1, 2) = \frac{1}{2} \left((-1)^n L_{3n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} [(-1)^n + 1] \right)$	

Tablo 10

Ek olarak, $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(-1, 2)\right) = (-1)^n L_{3n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left((-1)^n + 1 \right) \quad (115)$$

şeklinde dir.

3.1.3 $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi

Negatif indisli Fibonacci sayıları için (4) eşitliği ile verilen

$$F_{-s} = (-1)^{s+1} F_s \quad \text{ve} \quad F_{-(s+1)} = (-1)^s F_{s+1}, \quad s \geq 0 \quad (116)$$

değerlerine göre genelleme yapılabilir. (44)'de $(x, y) = (F_{-s}, F_{-(s+1)})$ sıralı ikili elemanları ve $m = 4$ durumu düşünülürse

$$S_4(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^s \begin{pmatrix} -F_s & F_{s+1} & 0 & 0 \\ F_{s+1} & -F_s & F_{s+1} & 0 \\ 0 & F_{s+1} & -F_s & F_{s+1} \\ 0 & 0 & F_{s+1} & -F_s \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad s \geq 0 \quad (117)$$

matrisi oluşur ki, $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ matrisin elemanları ile Fibonacci sayıları arasındaki bağıntıları verelim.

Teorem 3.3. $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (118)$$

$$s_{12}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (119)$$

$$s_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (120)$$

$$s_{14}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (121)$$

$$s_{22}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], \quad (122)$$

$$s_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right] \quad (123)$$

şeklindedir.

İspat (49) denklemi ile $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ matrisinin elemanları

$$s_{hk}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(F_{-s} + 2F_{-(s+1)} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (124)$$

biçiminde ifade edilir. (9)'da verilen eşitlikler ve Tablo 2 ile Tablo 3'deki değerler kullanılırsa; öz değer ifadeleri ve $(h, k) = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ ikililerinin değerlerine göre aşağıdaki tablo düzenlenir.

j	$\left((-1)^{s+1} \left(F_s - 2F_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n$	$\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(-1)^{n(s+1)} (F_s - \alpha F_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(F_s + \beta F_{s+1})^n = (-\beta)^{(s+1)n}$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$
3	$(-1)^{n(s+1)} (F_s - \beta F_{s+1})^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(F_s + \alpha F_{s+1})^n = (-\alpha)^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 11

(124)'de Tablo 11'deki uygun değerler yerlerine yazılarak $s_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ için,

$$\begin{aligned} s_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(F_s - \alpha F_{s+1})^n (-\beta) + \beta^{(s+1)n} \alpha + (F_s - \beta F_{s+1})^n \alpha + \alpha^{(s+1)n} (-\beta) \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{(s+1)n-1} - \beta^{(s+1)n-1} - \beta (F_s - \alpha F_{s+1})^n + \alpha (F_s - \beta F_{s+1})^n \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n-1} - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} + \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}}{\sqrt{5}} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right] \end{aligned}$$

dir. $s_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ ve $s_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ elemanları için

$$\begin{aligned}
s_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(F_s - \alpha F_{s+1})^n - \beta^{(s+1)n} - (F_s - \beta F_{s+1})^n + \alpha^{(s+1)n} \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t} - \beta^{n-t}}{\sqrt{5}} \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
s_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(F_s - \alpha F_{s+1})^n \alpha + \beta^{(s+1)n} \beta + (F_s - \beta F_{s+1})^n (-\beta) + \alpha^{(s+1)n} (-\alpha) \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n+1} + \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\alpha F_{s+1})^{n-t} - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_s^t (-\beta F_{s+1})^{n-t} \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}}{\sqrt{5}} \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $(h, k) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2)\}$ sıralı ikilileri için Tablo 3 ve Tablo 11'deki uygun ifadeler kullanılırsa diğer elemanlarda benzer şekilde bulunabilir. ■

(118) - (123) ifadelerinden $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ matrisinin elemanları için toplam ve fark değerlerine ait aşağıdaki tablodaki eşitlik ifadeleri geçerlidir.

$s_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + s_{14}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1},$
$s_{12}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + s_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t},$
$s_{22}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + s_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1},$
$s_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) - s_{14}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} F_{(s+1)n-1},$

$S_{12}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) - S_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} F_{(s+1)n},$
$S_{22}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) - S_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = (-1)^{(s+1)n} F_{(s+1)n+1},$
$S_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + S_{12}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n-2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right],$
$S_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + S_{22}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[F_{(s+1)n+2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right],$
$S_{13}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + S_{23}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[-F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right],$
$S_{11}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) + S_{22}^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[L_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} L_{n-t} \right]$

Tablo 12

Ek olarak, $S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(F_{-s}, F_{-(s+1)})\right) = (-1)^{(s+1)n} \left[L_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} F_s^t F_{s+1}^{n-t} L_{n-t} \right] \quad (125)$$

şeklindedir.

3.2 (F_{s+1}, F_s) , $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Fibonacci Matrisleri

Özel durumlardan, $(x, y) = (F_1, F_0)$ ve $(x, y) = (F_2, F_1)$ sıralı ikililerinde $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ için $S_4^{(n)}(F_1, F_0)$ matrisi iyi bilen I_4 birim matrisidir ki $S_4^{(n)}(F_1, F_0) = I^n = I$ özelliği geçerlidir. $S_4^{(n)}(F_2, F_1)$ matrisinin de (Filipponi, P., 1997) çalışmasında yer alan 3.2 kısmındaki $S_4^{(n)}(1, 1)$ matris çalışması ile aynı olduğundan incelenmemiştir.

3.2.1 $S_4^{(n)}(F_3, F_2)$ Fibonacci matrisi

$s = 2$ durumunda $(x, y) = (F_3, F_2)$ sıralı ikilisine göre (44)'de $m = 4$ için,

$$S_4(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (126)$$

matrisi oluşur. (126) ifadesinde matrisin n 'inci kuvveti olarak $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri;

$$S_4^{(2)}(2,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, S_4^{(3)}(2,1) = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 6 & 1 \\ 14 & 20 & 15 & 6 \\ 6 & 15 & 20 & 14 \\ 1 & 6 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(2,1) = \begin{pmatrix} 42 & 48 & 27 & 8 \\ 48 & 69 & 56 & 27 \\ 27 & 56 & 69 & 48 \\ 8 & 27 & 48 & 42 \end{pmatrix}, S_4^{(5)}(2,1) = \begin{pmatrix} 132 & 165 & 110 & 43 \\ 165 & 242 & 208 & 110 \\ 110 & 208 & 242 & 165 \\ 43 & 110 & 165 & 132 \end{pmatrix}$$

verilebilir. Şimdi, $S_4^{(n)}(2,1)$ matrisinin elemanlarından $s_{22}^{(n)}(2,1)$ 'in (Filipponi, P., 1997) çalışmasında (3.32) ile verildiği fakat ispatı yapılmadığı için aşağıdaki teoremden diğer elemanlarla birlikte Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkileri vereceğiz.

Teorem 3.4. $S_4^{(n)}(2,1)$ matrisinin elemanları

$$s_{21}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right], \quad (127)$$

$$s_{31}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[-F_{2n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right], \quad (128)$$

$$s_{41}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[-F_{2n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right], \quad (129)$$

$$s_{44}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right], \quad (130)$$

$$s_{33}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n-1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right], \quad (131)$$

$$s_{32}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[-F_{2n-1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (132)$$

şeklindedir.

İspat (49) denklemindeki genel terim ifadelerine göre $S_4^{(n)}(2,1)$ matrisinin elemanları;

$$s_{hk}^{(n)}(2,1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(2 + 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (133)$$

yazılabilir. Lemma 1.1 deki eşitlikler ile Tablo 2 ve Tablo 3'deki değerler kullanılarak, $1 \leq j \leq 4$ için öz değerler ifadesi ve $(h, k) = \{(2,1), (1,4), (2,2)\}$ değerlerinin yazılması ile aşağıdaki tabloda olduğu görülür.

j	$\left(2 + 2\cos\frac{j\pi}{5}\right)^n$	$\sin\frac{2j\pi}{5}\sin\frac{j\pi}{5}$	$\sin\frac{4j\pi}{5}\sin\frac{j\pi}{5}$	$\sin^2\frac{3j\pi}{5}$
1	$(\sqrt{5}\alpha)^n$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	α^{2n}	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
3	$(-\sqrt{5}\beta)^n$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	β^{2n}	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 13

$s_{21}^{(n)}(2,1)$ elemanı için Tablo 13'deki veriler (133)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 s_{21}^{(n)}(2,1) &= \frac{2}{5} \left[(\sqrt{5}\alpha)^n \frac{\sqrt{5}}{4} + \alpha^{2n} \frac{\sqrt{5}}{4} + (-\sqrt{5}\beta)^n \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) + \beta^{2n} \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{2n} - \beta^{2n} + 5^{n/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}} + 5^{(n-1)/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) \right]
 \end{aligned}$$

dir ki n 'in tek ve çift olma durumları için (3) ve (32)'de verilen Binet formlarıyla;

$$s_{21}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} [F_{2n} + 5^{(n-1)/2} L_n], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} [F_{2n} + 5^{n/2} F_n], & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. Diğer elemanlar için,

$$\begin{aligned}
 s_{41}^{(n)}(2,1) &= \frac{2}{5} \left[(\sqrt{5}\alpha)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (\alpha^2)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + (-\sqrt{5}\beta)^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} + (\beta^2)^n \frac{\sqrt{5}\beta}{4} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 5^{n/2} (\alpha^n \beta - (-1)^n \beta^n \alpha) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\sqrt{5}} + 5^{(n-1)/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) \right]
 \end{aligned}$$

olur ki n 'in tek ve çift olma durumu için (3) ve (32)'de verilen Binet formlarıyla;

$$s_{41}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} [-F_{2n+1} + 5^{(n-1)/2} L_{n-1}], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} [-F_{2n+1} + 5^{n/2} F_{n-1}], & n \text{ çift} \end{cases}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} s_{33}^{(n)}(2,1) &= \frac{2}{5} \left[(\sqrt{5}\alpha)^n \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} - \alpha^{2n} \frac{\sqrt{5}\beta}{4} - (-\sqrt{5}\beta)^n \frac{\sqrt{5}\beta}{4} + \beta^{2n} \frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1} + 5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}} + 5^{(n-1)/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) \right] \end{aligned}$$

dir. n 'in tek ve çift olma durumları için (3) ve (32)'de verilen Binet formlarıyla;

$$s_{33}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} [F_{2n-1} + 5^{(n-1)/2} L_{n+1}], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} [F_{2n-1} + 5^{n/2} F_{n+1}], & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. n 'in tek veya çift olma durumu kaldırmak için tam değer fonksiyonu ile istenilen elde edilir.

Diğer ifadelerin ispatları Tablo 13 ve Tablo 3'deki uygun değerler kullanılarak paralel argümanlarla yapıldığı için verilmemiştir. ■

$S_4^{(n)}(2,1)$ matrisinin (127) - (132) ifadelerinde verilen elemanlar için toplam ve fark değerleri aşağıdaki tabloda düzenlenir.

$s_{21}^{(n)}(2,1) + s_{31}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_n, & n \text{ tek} \\ 5^{n/2} F_n, & n \text{ çift} \end{cases}$	$s_{21}^{(n)}(2,1) - s_{31}^{(n)}(2,1) = F_{2n}$,
$s_{44}^{(n)}(2,1) + s_{41}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n-1}, & n \text{ tek} \\ 5^{n/2} F_{n-1}, & n \text{ çift} \end{cases}$	$s_{44}^{(n)}(2,1) - s_{41}^{(n)}(2,1) = F_{2n+1}$,
$s_{33}^{(n)}(2,1) + s_{32}^{(n)}(2,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n+1}, & n \text{ tek} \\ 5^{n/2} F_{n+1}, & n \text{ çift} \end{cases}$	$s_{33}^{(n)}(2,1) - s_{32}^{(n)}(2,1) = F_{2n-1}$,
$s_{21}^{(n)}(2,1) + s_{44}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+2} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right]$,	
$s_{31}^{(n)}(2,1) + s_{44}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n-1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right]$,	
$s_{33}^{(n)}(2,1) + s_{44}^{(n)}(2,1) = \frac{1}{2} \left[L_{2n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[5F_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) \right] \right]$	

Tablo 14

Ek olarak, $S_4^{(n)}(-1, 2)$ matrisinin izi;

$$\text{Tr}\left(S_4^{(n)}(2, 1)\right) = \begin{cases} L_{2n} + 5^{(n+1)/2} F_n, & n \text{ tek} \\ L_{2n} + 5^{n/2} L_n, & n \text{ çift} \end{cases} \quad (134)$$

şeklindedir.

3.2.2 $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi

(44)'de $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ sıralı ikili elemanları ile $m = 4$ durumu için

$$S_4(F_{s+1}, F_s) = \begin{pmatrix} F_{s+1} & F_s & 0 & 0 \\ F_s & F_{s+1} & F_s & 0 \\ 0 & F_s & F_{s+1} & F_s \\ 0 & 0 & F_s & F_{s+1} \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (135)$$

matrisi oluşur.

Teorem 3.5. $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ matrisinin elemanları

$$s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (136)$$

$$s_{31}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[-F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (137)$$

$$s_{41}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[-F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (138)$$

$$s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (139)$$

$$s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], \quad (140)$$

$$s_{32}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[-F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right] \quad (141)$$

şeklindedir.

İspat (49) denkleminde $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ matrisinin genel terim elemanlarına göre

$$s_{hk}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(\left(F_{s+1} + 2F_s \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (142)$$

ifadesinde öz değerler için (9) eşitlikleri ve Tablo 2'deki ifadeler ile Tablo 3'deki

$(h, k) = \{(3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$ değerler kullanılarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

j	$\left(\left(F_{s+1} + 2F_s \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n$	$\sin^2 \frac{3j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{4j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$
1	$(F_{s+1} + \alpha F_s)^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$
2	$(F_{s+1} - \beta F_s)^n = \alpha^{sn}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$
3	$(F_{s+1} + \beta F_s)^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$
4	$(F_{s+1} - \alpha F_s)^n = \beta^{sn}$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$

Tablo 15

$s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$, $s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ ve $s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ elemanları için Tablo 15'deki değerleri

(142)'de yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(F_{s+1} + \alpha F_s)^n \alpha + \alpha^{sn} (-\beta) + (F_{s+1} + \beta F_s)^n (-\beta) + \beta^{sn} \alpha \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn-1} - \beta^{sn-1} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\alpha F_s)^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\beta F_s)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn-1} - \beta^{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (F_s)^{n-t} (\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki, diğer elemanlar için

$$\begin{aligned}
s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(F_{s+1} + \alpha F_s)^n (-\beta) + \alpha^{sn} \alpha + (F_s + \beta F_{s+1})^n \alpha + \beta^{sn} (-\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn+1} - \beta^{sn+1} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\alpha F_s)^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\beta F_s)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{sn+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} (\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right]
\end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned}
s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(F_{s+1} + \alpha F_s)^n + \alpha^{sn} - (F_{s+1} + \beta F_s)^n - \beta^{sn} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn} - \beta^{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\alpha F_s)^{n-t} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\beta F_s)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn} - \beta^{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (F_s)^{n-t} (\alpha^{n-t} - \beta^{n-t}) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right]$$

bulunur. Tablo 15 ve Tablo 3'deki değerler kullanılarak diğer elemanlar benzer işlemler ile elemanlar kolayca gösterilebilir. ■

(136) - (141) ifadelerinden $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ matrisin elemanlarının toplamları ve farkları aşağıdaki tabloda görülür.

$s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{41}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1},$	$s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) - s_{41}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = F_{sn+1},$
$s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{31}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t},$	$s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) - s_{31}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = F_{sn},$
$s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{32}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1},$	$s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) - s_{32}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = F_{sn-1},$
$s_{21}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[F_{sn+2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right],$	
$s_{31}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right],$	
$s_{33}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) + s_{44}^{(n)}(F_{s+1}, F_s) = \frac{1}{2} \left[L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} L_{n-t} \right]$	

Tablo 16

Ek olarak, $S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(F_{s+1}, F_s)\right) = L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} L_{n-t} \quad (143)$$

şeklindedir.

3.3 $(F_{-(s+1)}, F_{-s})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Fibonacci Matrisleri

Özel durum olarak, $(x, y) = (F_{-1}, F_0)$ sıralı ikilisi $F_0 = 0$, $F_{-1} = 1$ değerleri için $S_4^{(n)}(1, 0)$ matrisinin de 3.2 kısmındaki gibi iyi bilinen I birim matrisi verdiğiinden $S_4^{(n)}(F_1, F_0) = I^n = I$ olur ki bu yüzden $S_4^{(n)}(F_{-1}, F_0) = I$ incelenmemiştir.

3.3.1 $S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-1})$ Fibonacci matrisi

$s = 1$ durumunda $(x, y) = (F_{-2}, F_{-1})$ sıralı ikilisi için (44)'deki matris $m = 4$ için düzenlenirse

$$S_4(-1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (144)$$

şeklinde oluşur. (92) ve (144) denklemlerindeki matrisler değerlendirildiğinde $S_4(-1, 1) = (-1)S_4(1, -1)$ olur ki; (144) denklemindeki $S_4(-1, 1)$ matrisin n 'inci kuvveti $S_4^{(n)}(-1, 1) = (-1)^n S_4^{(n)}(1, -1)$ olur ki, Teorem 3.1'deki genel elemanlardan kurulabilir. $S_4^{(n)}(-1, 1)$ matrisinin $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri

$$S_4^{(2)}(-1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad S_4^{(3)}(-1, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -7 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

$$S_4^{(4)}(-1, 1) = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 9 & -4 \\ -12 & 18 & -16 & 9 \\ 9 & -16 & 18 & -12 \\ -4 & 9 & -12 & 9 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(5)}(-1, 1) = \begin{pmatrix} -21 & 30 & -25 & 13 \\ 30 & -46 & 43 & -25 \\ -25 & 43 & -46 & 30 \\ 13 & -25 & 30 & -21 \end{pmatrix}$$

olur.

Teorem 3.6. $S_4^{(n)}(-1, 1)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^n}{2} (F_{2n-1} + F_{n+1}) \quad (145)$$

$$s_{12}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} (F_{2n} + F_n) \quad (146)$$

$$s_{13}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^n}{2} [F_{2n} - F_n] \quad (147)$$

$$s_{14}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^n}{2} [F_{n+1} - F_{2n-1}] \quad (148)$$

$$s_{22}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^n}{2} [F_{2n+1} + F_{n-1}] \quad (149)$$

$$s_{23}^{(n)}(-1, 1) = \frac{(-1)^n}{2} [F_{n-1} - F_{2n+1}] \quad (150)$$

şeklindedir.

İspat $S_m^{(n)}(-1,1) = (-1)^n S_4^{(n)}(1,-1)$ matris eşitliği göz önüne alındığında Teorem 3.1'in ispatına benzer olarak verilebilir. ■

Not: (145) - (150) ifadelerinin ispatları (93) - (98) ifadelerine göre yapıldığı için, (145) - (150) elemanlarının toplam veya farklarından Tablo 7'ye benzer tablo ifadesi elde edileceğinden verilmemiştir.

3.3.2 $S_4^{(n)}(F_{-3}, F_{-2})$ Fibonacci matrisi

(44) denklemindeki matris ifadesinde $m = 4$ durumu ve $(x, y) = (F_{-3}, F_{-2})$ sıralı ikilisi düşünülürse

$$S_4(2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (151)$$

şeklindedir. (151) denklemindeki matrisin n 'inci kuvveti $n = \{2, 3, 4, 5\}$ değerleri için

$$S_4^{(2)}(2, -1) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, S_4^{(3)}(2, -1) = \begin{pmatrix} 14 & -14 & 6 & -1 \\ -14 & 20 & -15 & 6 \\ 6 & -15 & 20 & -14 \\ -1 & 6 & -14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(2, -1) = \begin{pmatrix} 42 & -48 & 27 & -8 \\ -48 & 69 & -56 & 27 \\ 27 & -56 & 69 & -48 \\ -8 & 27 & -48 & 42 \end{pmatrix}, S_4^{(5)}(2, -1) = \begin{pmatrix} 132 & -165 & 110 & -43 \\ -165 & 242 & -208 & 110 \\ 110 & -208 & 242 & -165 \\ -43 & 110 & -165 & 132 \end{pmatrix}$$

kuvvet matrisleri örneklenebilir.

Teorem 3.7. $S_4^{(n)}(2, -1)$ matrisinin elemanları

$$s_{41}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+1} - 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (152)$$

$$s_{43}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[-F_{2n} - 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (153)$$

$$s_{44}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (154)$$

$$s_{31}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[-F_{2n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (155)$$

$$s_{32}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n-1} - 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (156)$$

$$s_{33}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n-1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right] \quad (157)$$

şeklindedir.

İspat $S_4^{(n)}(2, -1)$ matrisi için (49) denklemindeki genel terim elemanlarına göre;

$$s_{hk}^{(n)}(2, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(2 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (158)$$

yazılabilir. Lemma 1.1 deki ifadeler ile Tablo 2 ve Tablo 3'deki değerler kullanılarak, (158)'deki $(h, k) = \{(4, 1), (4, 3), (3, 3)\}$ değerlerinin tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

j	$\left(2 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin \frac{4j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{4j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{3j\pi}{5}$
1	β^{2n}	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(-\sqrt{5}\beta)^n$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
3	α^{2n}	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(\sqrt{5}\alpha)^n$	$\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 17

(158)'de Tablo 17'deki değerler yerlerine yazılırsa $s_{41}^{(n)}(2, -1)$, $s_{43}^{(n)}(2, -1)$ ve $s_{33}^{(n)}(2, -1)$ elemanlarının genel terimleri;

$$\begin{aligned} s_{41}^{(n)}(2, -1) &= \frac{2}{5} \left[\beta^{2n} \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (-\sqrt{5}\beta)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + \alpha^{2n} \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + (\sqrt{5}\alpha)^n \left(\frac{\sqrt{5}\beta}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1} - 5^{n/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) \right] \end{aligned}$$

dir ki, n 'in tek ve çift olma durumları için (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{41}^{(n)}(2, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} (F_{2n+1} - 5^{(n-1)/2} L_{n-1}), & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} (F_{2n+1} - 5^{n/2} F_{n-1}), & n \text{ çift} \end{cases}$$

olur. Ayrıca,

$$s_{43}^{(n)}(2, -1) = \frac{2}{5} \left[\beta^{2n} \frac{\sqrt{5}}{4} + (-\sqrt{5}\beta)^n \frac{\sqrt{5}}{4} + \alpha^{2n} \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) + (\sqrt{5}\alpha)^n \left(\frac{-\sqrt{5}}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})}{\sqrt{5}} - 5^{(n-1)/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) \right]$$

bulunur. n 'in tek ve çift olma durumlarında (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{43}^{(n)}(2, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-F_{2n} - 5^{(n-1)/2} L_n), & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2}(-F_{2n} - 5^{n/2} F_n), & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. $s_{33}^{(n)}(2, -1)$ elemanı için

$$s_{33}^{(n)}(2, -1) = \frac{2}{5} \left[\beta^{2n} \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right) + (-\sqrt{5}\beta)^n \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + \alpha^{2n} \left(\frac{-\sqrt{5}\beta}{4} \right) + (\sqrt{5}\alpha)^n \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1} + 5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) \right]$$

dir ki, n 'in tek ve çift olmasına göre (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{33}^{(n)}(2, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(F_{2n-1} + 5^{(n-1)/2} L_{n+1}), & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2}(F_{2n-1} + 5^{n/2} F_{n+1}), & n \text{ çift} \end{cases}$$

bulunur. $(h, k) = \{(4, 1), (4, 3), (3, 3)\}$ ikililerine göre elemanların ispatları Tablo 17'deki veriler kullanılarak yapıldı. $(h, k) = \{(4, 4), (3, 1), (3, 2)\}$ ikilerine göre elemanların ispatları Tablo 17 ve Tablo 3'deki uygun değerler kullanılarak paralel argümanlarla kolaylıkla yapılabilir. ■

(152) - (157) ifadelerinden $s_4^{(n)}(2, -1)$ matrisinin elemanlarına göre aşağıdaki tablodaki eşitlikler geçerlidir.

$s_{44}^{(n)}(2, -1) + s_{41}^{(n)}(2, -1) = F_{2n+1},$
$s_{31}^{(n)}(2, -1) + s_{43}^{(n)}(2, -1) = -F_{2n},$
$s_{33}^{(n)}(2, -1) + s_{32}^{(n)}(2, -1) = F_{2n-1},$
$s_{44}^{(n)}(2, -1) - s_{41}^{(n)}(2, -1) = 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right],$

$s_{31}^{(n)}(2, -1) - s_{43}^{(n)}(2, -1) = 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right],$
$s_{33}^{(n)}(2, -1) - s_{32}^{(n)}(2, -1) = 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n+1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right],$
$s_{41}^{(n)}(2, -1) - s_{43}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+2} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-2} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-2} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right],$
$s_{33}^{(n)}(2, -1) - s_{31}^{(n)}(2, -1) = \frac{1}{2} \left[F_{2n+1} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[F_{n-1} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + L_{n-1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \right]$

Tablo 18

Ayrıca, $S_4^{(n)}(2, -1)$ matrisinin izi;

$$\text{Tr} \left(S_4^{(n)}(2, -1) \right) = L_{2n} + 5^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[L_n \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) + 5F_n \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \right] \quad (159)$$

şeklinde dir.

3.2.3 $S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ $s \geq 0$ Fibonacci matrisi

(4)'deki negatif indisli Fibonacci sayıları için verilen eşitliklerle;

$$F_{-s} = (-1)^{s+1} F_s \quad \text{ve} \quad F_{-(s+1)} = (-1)^s F_{s+1}, \quad s \geq 0 \quad (160)$$

pozitif değerlerine göre genelleme yapılabilir. (44) denkleminde $m=4$ durumu için

$(x, y) = (F_{-(s+1)}, F_{-s})$ genel sıralı ikili elemanları düşünülürse

$$S_4 \left(F_{-(s+1)}, F_{-s} \right) = (-1)^s \begin{pmatrix} F_{s+1} & -F_s & 0 & 0 \\ -F_s & F_{s+1} & -F_s & 0 \\ 0 & -F_s & F_{s+1} & -F_s \\ 0 & 0 & -F_s & F_{s+1} \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (161)$$

matrisi oluşur.

Teorem 3.8. $S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ matrisinin elemanları

$$s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[-F_{sn} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (162)$$

$$s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], \quad (163)$$

$$s_{23}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], \quad (164)$$

$$s_{41}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], \quad (165)$$

$$s_{42}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[-F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right], \quad (166)$$

$$s_{44}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right] \quad (167)$$

şeklindedir.

İspat (49) denkleminde verilen genel terim elemanları (160) verilerine göre;

$$s_{hk}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{2(-1)^{sn}}{5} \sum_{j=1}^4 \left(F_{s+1} - 2F_s \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (168)$$

düzenlenirse (9) eşitlikleri ve Tablo 2'deki veriler ile $(h, k) = \{(2,1), (2,2), (4,4)\}$ sıralı ikililerine göre Tablo 3'deki değerler kullanılarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

j	$\left((-1)^s \left(F_{s+1} - 2F_s \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{4j\pi}{5}$
1	$(-1)^{sn} (F_{s+1} - \alpha F_s)^n = (-\beta)^{sn}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
2	$(-1)^{sn} (F_{s+1} + \beta F_s)^n$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
3	$(-1)^{sn} (F_{s+1} - \beta F_s)^n = (-\alpha)^{sn}$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
4	$(-1)^{sn} (F_{s+1} + \alpha F_s)^n$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$

Tablo 19

$s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$, $s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ ve $s_{44}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ elemanları için Tablo 19'daki değerleri (168) ifadesinde uygun yerlerine yazar ve (3) denklemini kullanırsak;

$$\begin{aligned} s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[\beta^{sn} + (F_{s+1} + \beta F_s)^n - \alpha^{sn} - (F_{s+1} + \alpha F_s)^n \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[-(\alpha^{sn} - \beta^{sn}) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\alpha F_s)^{n-t} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t (\beta F_s)^{n-t} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[-F_{sn} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t} \right]$$

elde edilir. Diğer elemanlar olarak

$$\begin{aligned} s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[\beta^{sn} \alpha + (F_{s+1} + \beta F_s)^n (-\beta) + \alpha^{sn} (-\beta) + (F_{s+1} + \alpha F_s)^n \alpha \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn-1} - \beta^{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} \alpha^{n-t+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} \beta^{n-t+1} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_{44}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[\beta^{sn} (-\beta) + (F_{s+1} + \beta F_s)^n \alpha + \alpha^{sn} \alpha + (F_{s+1} + \alpha F_s)^n (-\beta) \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[\alpha^{sn+1} - \beta^{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} \alpha^{n-t-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} \beta^{n-t-1} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right] \end{aligned}$$

verilir. Benzer işlemler ile $(h, k) = \{(2, 3), (4, 1), (4, 2)\}$ sıralı ikili elemanları kolayca gösterilebilir. ■

(162) - (167) ifadelerinden $S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ matrisinin elemanları ile Fibonacci sayıları arasındaki bağıntılar aşağıdaki tabloda verilir.

$s_{44}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) + s_{41}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn} F_{sn+1},$
$s_{42}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) + s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn+1} F_{sn},$
$s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) + s_{23}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn} F_{sn-1},$
$s_{44}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) - s_{41}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1},$
$s_{42}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) - s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t},$

$s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) - s_{23}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t+1},$
$s_{21}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) + s_{22}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[-F_{sn-2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right],$
$s_{23}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) + s_{42}^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s}) = \frac{(-1)^{sn+1}}{2} \left[F_{sn-2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} F_{n-t-1} \right]$

Tablo 20

Ek olarak, $S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(F_{-(s+1)}, F_{-s})\right) = L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} F_{s+1}^t F_s^{n-t} L_{n-t} \quad (169)$$

şeklinindedir.

4. LUCAS MATRİSLERİ

Bu bölüm için $S_4^n(x, y)$ matrisinde $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$, $(x, y) = (L_{-s}, L_{-(s+1)})$, $(x, y) = (L_{s+1}, L_s)$ ve $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$ sıralı ikili elemanları seçilerek hangi elemanlara sahip Lucas matrisleri olduğu araştırılacaktır. Her bir sıralı ikili için 4 alt bölümde $s = 0, 1$ özel durumlarından genel durumlara kadar nasıl Lucas matrisleri olduğunu inceleyeceğiz.

4.1 (L_s, L_{s+1}) , $s \geq 0$ Sıralı İkiline Göre Lucas Matrisleri

İlk olarak $s = 0$ özel durumunda $(x, y) = (L_0, L_1)$ sıralı ikilisi için $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olduğundan $S_4^{(n)}(L_0, L_1) = S_4^{(n)}(F_3, F_2)$ matrisine eşit olduğu görülür ki; bu çalışmanın 3.2.1 kısmında $S_4^{(n)}(F_3, F_2) = S_4^{(n)}(2, 1)$ kuvvet çalışması yapıldığından tekrardan değerlendirilmemiştir.

4.1.1 $S_4^{(n)}(L_1, L_2)$ Lucas matrisi

$(x, y) = (L_1, L_2)$ ikilisi için (44)'deki matris ifadesinde $m = 4$ için;

$$S_4(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (170)$$

matrisi oluşur ki, $S_4^{(n)}(1, 3)$ 'de $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri için matris kuvvetleri

$$S_4^{(2)}(1, 3) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 & 0 \\ 6 & 19 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 19 & 6 \\ 0 & 9 & 6 & 10 \end{pmatrix}, S_4^{(3)}(1, 3) = \begin{pmatrix} 28 & 63 & 27 & 27 \\ 63 & 55 & 90 & 27 \\ 27 & 90 & 55 & 63 \\ 27 & 27 & 63 & 28 \end{pmatrix},$$

$$S_4^{(4)}(1, 3) = \begin{pmatrix} 217 & 228 & 297 & 108 \\ 228 & 514 & 336 & 297 \\ 297 & 336 & 514 & 228 \\ 108 & 297 & 228 & 217 \end{pmatrix}, S_4^{(5)}(1, 3) = \begin{pmatrix} 901 & 1770 & 1305 & 999 \\ 1770 & 2206 & 2769 & 1305 \\ 1305 & 2769 & 2206 & 1770 \\ 999 & 1305 & 1770 & 901 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $S_4^{(n)}(1,3)$ matrisinin elemanları ile Fibonacci veya Lucas sayıları arasındaki ilişkileri gösterelim.

Teorem 4.1. $S_4^{(n)}(1,3)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n-1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} + F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (171)$$

$$s_{12}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n} - F_n - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (172)$$

$$s_{13}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n} + F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (173)$$

$$s_{14}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} - F_{n-1} - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (174)$$

$$s_{22}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (175)$$

$$s_{23}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} - F_{n+1} - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (176)$$

şeklindedir.

İspat $S_4^{(n)}(1,3)$ matrisinin (49) denklemine göre elemanlarının ifadesi

$$s_{hk}^{(n)}(1,3) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(1 + 6 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (177)$$

şeklinde yazılabilir. (177)'de $(h, k) = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ ikililerine göre Tablo 3'deki değerler ile birlikte (5) - (9) denklemleri ve Tablo 2 kullanılarak $1 \leq j \leq 4$ için aşağıdaki tablo oluşturulur.

j	$\left(1 + 6 \cos \frac{j\pi}{5}\right)^n$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5}$
1	$(\sqrt{5}\alpha^2)^n$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
2	$(\sqrt{5}-\beta)^n$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$
3	$(-\sqrt{5}\beta^2)^n$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
4	$(-1)^n (\sqrt{5}+\alpha)^n$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}\beta/4$

Tablo 21

$s_{12}^{(n)}(1, 3)$ elemanının genel terimi için Tablo 21'deki veriler kullanılırsa

$$\begin{aligned} s_{12}^{(n)}(1, 3) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha^2)^n + (\sqrt{5}-\beta)^n - (-\sqrt{5}\beta^2)^n - (-1)^n (\sqrt{5}+\alpha)^n \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{2n} - (-1)^n \beta^{2n}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-\beta)^{n-t} - (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{2n} - (-1)^n \beta^{2n}) - (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^{n-t} - (-1)^t \beta^{n-t}) \right] \end{aligned}$$

n ve t 'nin tek ve çift olma durumları için

$$s_{12}^{(n)}(1, 3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t} - \beta^{n-2t}}{\sqrt{5}} \right) + \binom{n}{2t+1} (\alpha^{n-2t-1} + \beta^{n-2t-1}) \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n} - F_n - \sum_{t=1}^{n/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t} - \beta^{n-2t}}{\sqrt{5}} \right) + 5^{t-1} \binom{n}{2t-1} (\alpha^{n-2t+1} + \beta^{n-2t+1}) \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

olur. (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{12}^{(n)}(1, 3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n} - F_n - \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. Diğer elemanlardan $s_{23}^{(n)}(1, 3)$ için,

$$s_{23}^{(n)}(1, 3) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha^2)^n \alpha + (\sqrt{5}-\beta)^n \beta - (-\sqrt{5}\beta^2)^n \beta - (-1)^n (\sqrt{5}+\alpha)^n \alpha \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{2n+1} - (-1)^n \beta^{2n+1} \right) + \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-\beta)^{n-t} - \alpha (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{2n+1} - (-1)^n \beta^{2n+1} \right) - (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \left(\alpha^{n-t+1} - (-1)^t \beta^{n-t+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

dir. n ve t 'nin tek ve çift olma durumları ile (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{23}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t+1} - \beta^{n-2t+1}}{\sqrt{5}} \right) + \binom{n}{2t+1} (\alpha^{n-2t} + \beta^{n-2t}) \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} - F_{n+1} - \sum_{t=1}^{n/2} 5^t \binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t+1} - \beta^{n-2t+1}}{\sqrt{5}} \right) + 5^{t-1} \binom{n}{2t-1} (\alpha^{n-2t+2} + \beta^{n-2t+2}) \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} - F_{n+1} - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

olur. Ayrıca $s_{14}^{(n)}(1,3)$ elemanı için uygun değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
s_{14}^{(n)}(1,3) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha^2)^n (-\beta) + (\sqrt{5} - \beta)^n (-\alpha) + (-\sqrt{5}\beta^2)^n \alpha + (-1)^n (\sqrt{5} + \alpha)^n \beta \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{2n-1} - (-1)^n \beta^{2n-1} \right) - \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-\beta)^{n-t} + (-1)^n \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{2n-1} - (-1)^n \beta^{2n-1} \right) + (-1)^{n+1} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \left(\alpha^{n-t-1} - (-1)^t \beta^{n-t-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

olur ki n ve t 'nin tek ve çift olma durumları için (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{14}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t-1} - \beta^{n-2t-1}}{\sqrt{5}} \right) + \binom{n}{2t+1} (\alpha^{n-2t-2} + \beta^{n-2t-2}) \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} - F_{n-1} - \sum_{t=1}^{n/2} 5^t \binom{n}{2t} \left(\frac{\alpha^{n-2t-1} - \beta^{n-2t-1}}{\sqrt{5}} \right) + 5^{t-1} \binom{n}{2t-1} (\alpha^{n-2t} + \beta^{n-2t}) \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} - F_{n-1} - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir.

Tablo 21 ve Tablo 3'deki uygun değerler kullanılarak diğer elemanların ispatları paralel argümanlarla yapıldığı için verilmemiştir. ■

Ayrıca, (171) -- (176) denklemlerindeki ifadelerden görülür ki, $S_4^{(n)}(1,3)$ matrisin elemanlarının toplamları ve farkları arasında aşağıdaki gibi tablo elde edilir.

$s_{11}^{(n)}(1,3) + s_{14}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{2n-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{2n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{12}^{(n)}(1,3) + s_{13}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{2n}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{2n}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{22}^{(n)}(1,3) + s_{23}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{2n+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{2n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{14}^{(n)}(1,3) - s_{11}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{13}^{(n)}(1,3) - s_{12}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{22}^{(n)}(1,3) - s_{23}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{11}^{(n)}(1,3) + s_{12}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-3} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} - F_{n-2} - \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{13}^{(n)}(1,3) + s_{14}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-3} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n-2} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

$s_{13}^{(n)}(1,3) + s_{22}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+2} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+2} + F_{n+2} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+3} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(1,3) + s_{23}^{(n)}(1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+2} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+2} - F_{n+2} - \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+3} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 22

Ek olarak, $S_4^{(n)}(1,3)$ matrisinin izi;

$$Tr(S_4^{(n)}(1,3)) = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_{2n} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t L_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} 5^{t+1} F_{n-2t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} L_{2n} + L_n + \sum_{t=1}^{n/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} L_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} F_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (178)$$

şeklinde dir.

4.1.2 $S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi

Genel durum olarak; (44)'de matrisinde $m=4$ durumu için $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$

sıralı ikilisi ile

$$S_4(L_s, L_{s+1}) = \begin{pmatrix} L_s & L_{s+1} & 0 & 0 \\ L_{s+1} & L_s & L_{s+1} & 0 \\ 0 & L_{s+1} & L_s & L_{s+1} \\ 0 & 0 & L_{s+1} & L_s \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (179)$$

matrisi oluşur. Şimdi $S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ matrisine ait elemanların eşitliklerini verelim.

Teorem 4.2. $S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (180)$$

$$s_{12}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (181)$$

$$s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (182)$$

$$s_{14}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (183)$$

$$s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (184)$$

$$s_{23}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}, \quad (185)$$

şeklindedir.

İspat (49) denkleminde verilen genel terim elemanlarına göre $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$ için,

$$s_{hk}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(L_s + 2L_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (186)$$

ifadesine göre (35)'deki eşitlikler ve Tablo 2 ile Tablo 3'deki veriler kullanılarak

$(h, k) = \{(1,1), (2,2), (1,3)\}$ sıralı ikilerine göre aşağıdaki tabloyu verelim.

j	$\left(L_s + 2L_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(L_s + \alpha L_{s+1})^n = 5^{n/2} \alpha^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$
2	$(L_s - \beta L_{s+1})^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$
3	$(L_s + \beta L_{s+1})^n = 5^{n/2} (-\beta^{(s+1)})^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$
4	$(L_s - \alpha L_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$

Tablo 23

$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ elemanı için Tablo 23'deki değerleri (186)'da yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} (-\beta) + (L_s - \beta L_{s+1})^n \alpha + 5^{n/2} (-\beta^{(s+1)})^n \alpha + (L_s - \alpha L_{s+1})^n (-\beta) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{(s+1)n-1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n-1} \right) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[5^{n/2} \frac{\left(\alpha^{(s+1)n-1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n-1} \right)}{\sqrt{5}} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} (-1)^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}}{\sqrt{5}} \right) \right] \end{aligned}$$

olduğu görülür. n 'nin tek ve çift olma durumuna göre (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

dir. $s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ elemanı için;

$$\begin{aligned} s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} \alpha + (L_s - \beta L_{s+1})^n (-\beta) + 5^{n/2} (-\beta^{(s+1)})^n (-\beta) + (L_s - \alpha L_{s+1})^n \alpha \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{(s+1)n+1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n+1} \right) - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[5^{n/2} \frac{\left(\alpha^{(s+1)n+1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n+1} \right)}{\sqrt{5}} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} (-1)^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}}{\sqrt{5}} \right) \right] \end{aligned}$$

(3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

olduğuna ulaşılır. $s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ elemanı için;

$$\begin{aligned} s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} - (L_s - \beta L_{s+1})^n - 5^{n/2} (-\beta^{(s+1)})^n + (L_s - \alpha L_{s+1})^n \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{(s+1)n} - (-1)^n \beta^{(s+1)n} \right) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[5^{n/2} \frac{(\alpha^{(s+1)n} - (-1)^n \beta^{(s+1)n})}{\sqrt{5}} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} (-1)^{n-t} \left(\frac{\alpha^{n-t} - \beta^{n-t}}{\sqrt{5}} \right) \right]$$

dir. (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa

$$s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift} \end{cases}$$

olduğu görülür. (180) -- (185) ifadelerinden ispatı verilmeyenler Tablo 3 ve Tablo 23'deki uygun veriler kullanılarak bulunur. ■

(180) -- (185) ifadelerinden $S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ matrisin elemanlarının toplamları ve farkları için aşağıdaki gibi bir tablo elde edilir.

$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{14}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{(s+1)n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{(s+1)n}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{23}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{(s+1)n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) - s_{14}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1},$
$s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) - s_{12}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t},$
$s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) - s_{23}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1},$
$s_{11}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{12}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-2} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$

$s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{14}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-2} \right], & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-2} \right], & n \text{ çift} \end{cases},$
$s_{13}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{22}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+2} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) + s_{23}^{(n)}(L_s, L_{s+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+2} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+2} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 24

Ek olarak $S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(L_s, L_{s+1})\right) = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} L_{n-t}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} L_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} L_{n-t}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (187)$$

bulunur.

4.2 $(L_{-s}, L_{-(s+1)})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri

Bu bölüm için $s=0$ durumunda $L_0=2$, $L_{-1}=-1$ sıralı ikilisine göre $S_4^{(n)}(L_0, L_{-1})=S_4^{(n)}(F_{-3}, F_{-2})$ matris eşitliği geçerlidir. Bu yüzden, 4.3.2 kısmında $S_4^{(n)}(F_{-3}, F_{-2})$ matrisi ele alındığı için $S_4^{(n)}(L_0, L_{-1})$ matrisi göz ardı edilmiştir.

4.2.1 $S_4^{(n)}(L_{-1}, L_{-2})$ Lucas matrisi

$s=1$ özel durumu için (44)'de verilen 4×4 mertebeli matris ifadesinde $(L_{-1}, L_{-2})=(-1, 3)$ sıralı ikilisine göre

$$S_4(-1,3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (188)$$

matris ifadesi oluşur. $S_4^{(n)}(-1,3)$ matrisinde $n=2,3,4,5$ değerlerine göre

$$S_4^{(2)}(-1,3) = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 & 0 \\ -6 & 19 & -6 & 9 \\ 9 & -6 & 19 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(3)}(-1,3) = \begin{pmatrix} -28 & 63 & -27 & 27 \\ 63 & -55 & 90 & -27 \\ -27 & 90 & -55 & 63 \\ 27 & -27 & 63 & -28 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(-1,3) = \begin{pmatrix} 217 & -228 & 297 & -108 \\ -228 & 514 & -336 & 297 \\ 297 & -336 & 514 & -228 \\ -108 & 297 & -228 & 217 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(5)}(-1,3) = \begin{pmatrix} -901 & 1770 & -1305 & 999 \\ 1770 & -2206 & 2769 & -1305 \\ -1305 & 2769 & -2206 & 1770 \\ 999 & -1305 & 1770 & -901 \end{pmatrix}$$

matrisleri verilir. Şimdi n durumuna genelleyip, elemanların genel ifadelerini verelim.

Teorem 4.3. $S_4^{(n)}(-1,3)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} + F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (189)$$

$$s_{12}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{2n} + F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (190)$$

$$s_{13}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n} + F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (191)$$

$$s_{14}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{2n-1} + F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (192)$$

$$s_{22}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (193)$$

$$s_{23}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (194)$$

şeklinindedir.

İspat $S_4^{(n)}(-1,3)$ matrisinin (49) denklemine göre $s_{hk}^{(n)}(-1,3)$ elemanları

$$s_{hk}^{(n)}(-1,3) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(-1 + 6 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (195)$$

eşitliğinden bulunur. Tablo 3'deki değerler ve Lemma 1.1'deki (5) - (9) denklemleri ile Tablo 2'deki veriler kullanılarak; $(h,k) = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ için (195)'de yazılabilecek değerler aşağıdaki tabloda gösterilir.

j	$\left(-1 + 6 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(\alpha + \sqrt{5})^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(\sqrt{5}\beta^2)^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$
3	$(\beta - \sqrt{5})^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(-\sqrt{5}\alpha^2)^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 25

$s_{11}^{(n)}(-1,3)$ elemanı için Tablo 25'deki veriler kullanılırsa

$$\begin{aligned} s_{11}^{(n)}(-1,3) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5} + \alpha)^n (-\beta) + (\sqrt{5}\beta^2)^n \alpha + (-1)^n (\sqrt{5} - \beta)^n \alpha + (-1)^n (\sqrt{5}\alpha^2)^n (-\beta) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^n \alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1} \right) + (-\beta) \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-1)^{2n-t} \beta^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^n \alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \left(\alpha^{n-t-1} - (-1)^t \beta^{n-t-1} \right) \right] \end{aligned}$$

dir. n 'in tek ve çift olma durumları ile (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{11}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n-1} + F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Tablo 25'deki verilerden $h=1$ ve $k=2$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} s_{12}^{(n)}(-1,3) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5} + \alpha)^n + (\sqrt{5}\beta^2)^n - (-1)^n (\sqrt{5} - \beta)^n - (-1)^n (\sqrt{5}\alpha^2)^n \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^{n+1} \alpha^{2n} + \beta^{2n} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-1)^{2n-t} \beta^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^{n+1} \alpha^{2n} + \beta^{2n} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \left(\alpha^{n-t} - (-1)^t \beta^{n-t} \right) \right] \end{aligned}$$

olur. (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{12}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{2n} + F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde dir. Ayrıca $h=2$ ve $k=3$ olursa;

$$\begin{aligned} s_{23}^{(n)}(-1,3) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5} + \alpha)^n \alpha + (\sqrt{5}\beta^2)^n \beta + (-1)^n (\sqrt{5} - \beta)^n (-\beta) + (-1)^n (\sqrt{5}\alpha^2)^n (-\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^{n+1} \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} \right) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (-1)^{2n-t} \beta^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left((-1)^{n+1} \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \left(\alpha^{n-t+1} - (-1)^t \beta^{n-t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

dir. (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{23}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. (189) -- (194) arasındaki diğer elemanların ispatları Tablo 25'deki ilk sütun değerleri ile Tablo 3'deki uygun veriler kullanılarak paralel argümanlarla yapılabilir. ■

Ayrıca (189) -- (194) ifadelerinden $S_4^{(n)}(-1,3)$ matrisinin elemanları için aşağıdaki tabloda verilen eşitlik ifadeleri geçerlidir.

$s_{11}^{(n)}(-1,3) + s_{14}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-2} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(-1,3) + s_{13}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(-1,3) + s_{23}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t} \right], & n \text{ tek ise} \\ F_{n+1} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t+2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(-1,3) - s_{14}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} -5^{(n-1)/2} L_{2n-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{2n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(-1,3) - s_{13}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{2n}, & n \text{ tek ise} \\ -5^{n/2} F_{2n}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(-1,3) - s_{23}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} -5^{(n-1)/2} L_{2n+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{2n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(-1,3) - s_{12}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-3} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} - F_{n-2} - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{13}^{(n)}(-1,3) - s_{14}^{(n)}(-1,3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{2n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t+1} L_{n-2t-3} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{2n+1} + F_{n-2} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{n-2t-2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{n-2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 26

Bunun yanı sıra, $S_4^{(n)}(-1,3)$ matrisinin iz ifadesi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(-1,3)\right)=\begin{cases} -5^{(n+1)/2}F_{2n}+\sum_{t=0}^{(n-1)/2}\left[5^t\binom{n}{2t}L_{n-2t}+\binom{n}{2t+1}5^{t+1}F_{n-2t-1}\right], & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2}L_{2n}+L_n+\sum_{t=1}^{n/2}5^t\left[\binom{n}{2t}L_{n-2t}+\binom{n}{2t-1}F_{n-2t+1}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (196)$$

şeklinde dir.

4.2.2 $S_4^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi

Negatif indisli Lucas sayıları için (33)'de verilen eşitlik göz önüne alınırsa

$$L_{-s}=(-1)^sL_s \quad \text{ve} \quad L_{-(s+1)}=-(-1)^sL_{s+1}, \quad s \geq 0 \quad (197)$$

değerlerine göre genelleme yapılabilir. (44)'deki matris ifadesinde $m=4$ durumu için

$(x,y)=(L_{-s},L_{-(s+1)})$ sıralı ikilisini düşünürsek

$$S_4(L_{-s},L_{-(s+1)})=(-1)^s\begin{pmatrix} L_s & -L_{s+1} & 0 & 0 \\ -L_{s+1} & L_s & -L_{s+1} & 0 \\ 0 & -L_{s+1} & L_s & -L_{s+1} \\ 0 & 0 & -L_{s+1} & L_s \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (198)$$

olur.

Teorem 4.4. $S_4^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})$ matrisinin elemanları için

$$s_{11}^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})=\begin{cases} \frac{(-1)^{sn}}{2}\left[5^{(n-1)/2}L_{(s+1)n-1}-\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t-1}\right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn}}{2}\left[5^{n/2}F_{(s+1)n-1}+\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t-1}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (199)$$

$$s_{12}^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})=\begin{cases} \frac{(-1)^{sn+1}}{2}\left[5^{(n-1)/2}L_{(s+1)n}+\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t}\right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn+1}}{2}\left[5^{n/2}F_{(s+1)n}-\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (200)$$

$$s_{13}^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})=\begin{cases} \frac{(-1)^{sn}}{2}\left[5^{(n-1)/2}L_{(s+1)n}-\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t}\right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn}}{2}\left[5^{n/2}F_{(s+1)n}+\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (201)$$

$$s_{14}^{(n)}(L_{-s},L_{-(s+1)})=\begin{cases} \frac{(-1)^{sn+1}}{2}\left[5^{(n-1)/2}L_{(s+1)n-1}+\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t-1}\right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn+1}}{2}\left[5^{n/2}F_{(s+1)n-1}-\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}(-1)^tL_s^tL_{s+1}^{n-t}F_{n-t-1}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (202)$$

$$s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (203)$$

$$s_{23}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{sn+1}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn+1}}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (204)$$

geçerlidir.

İspat (49) denkleminde $(x, y) = (L_{-s}, L_{-(s+1)})$ ikilisi için

$$s_{hk}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(L_{-s} + 2L_{-(s+1)} \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (205)$$

verilen genel terime göre $(h, k) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2)\}$ olmak üzere (35)'deki eşitlikler ile Tablo 2 ve Tablo 3'deki değerler kullanılarak aşağıdaki tablo düzenlenir.

j	$\left((-1)^s \left(L_s - 2L_{s+1} \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin \frac{j\pi}{5} \sin \frac{4j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$
1	$(-1)^{sn} (L_s - \alpha L_{s+1})^n$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(L_s + \beta L_{s+1})^n = 5^{n/2} (-\beta)^{(s+1)n}$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
3	$(-1)^{sn} (L_s - \beta L_{s+1})^n$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(L_s + \alpha L_{s+1})^n = (-1)^{sn} 5^{n/2} \alpha^{(s+1)n}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 27

(205) ifadesinde Tablo 27'deki $(h, k) = (1, 3)$ yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned} s_{13}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[(L_s - \alpha L_{s+1})^n - (-1)^n 5^{n/2} \beta^{(s+1)n} - (L_s - \beta L_{s+1})^n + 5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{(s+1)n} - (-1)^n \beta^{(s+1)n} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} \left(\alpha^{(s+1)n} - (-1)^n \beta^{(s+1)n} \right) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} \left(\alpha^{n-t} - \beta^{n-t} \right) \right] \end{aligned}$$

dir. n 'nin tek ve çift olma durumları ile (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{13}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. $s_{14}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})$ ve $s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})$ elemanları için

$$\begin{aligned} s_{14}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[(L_s - \alpha L_{s+1})^n (-\beta) - (-1)^n 5^{n/2} \beta^{(s+1)n} \alpha + (L_s - \beta L_{s+1})^n \alpha + 5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} \beta \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{(s+1)n-1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n-1}) - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{(s+1)n-1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} (\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}) \right] \end{aligned}$$

(3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{14}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{sn+1}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn+1}}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[(L_s - \alpha L_{s+1})^n \alpha - (-1)^n 5^{n/2} \beta^{(s+1)n} \beta - (L_s - \beta L_{s+1})^n \beta + 5^{n/2} \alpha^{(s+1)n} \alpha \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{(s+1)n+1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n+1}) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\alpha L_{s+1})^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_s^t (-\beta L_{s+1})^{n-t} \right] \\ &= \frac{(-1)^{sn}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{(s+1)n+1} - (-1)^n \beta^{(s+1)n+1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^{n-t} L_s^t L_{s+1}^{n-t} (\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}) \right] \end{aligned}$$

(3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{sn}}{2} \left[5^{n/2} F_{(s+1)n+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Tablo 27 ve Tablo 3'deki değerler kullanılarak; (205) ifadesinde $(h, k) = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ ikilileri için uygun değerler yerlerine yazılarak diğer elemanlarda bulunabilir. ■

(199) -- (204) ifadelerinden $S_4^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})$ matrisinin elemanları için aşağıdaki oluşturulan eşitlik ifadeleri geçerlidir.

$s_{11}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) + s_{14}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn+1} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) + s_{13}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn+1} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) + s_{23}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn+1} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) - s_{14}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n-1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} 5^{n/2} F_{(s+1)n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{12}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) - s_{13}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn+1} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn+1} 5^{n/2} F_{(s+1)n}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) - s_{23}^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)}) = \begin{cases} (-1)^{sn} 5^{(n-1)/2} L_{(s+1)n+1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} 5^{n/2} F_{(s+1)n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 28

Ek olarak, $S_4^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(L_{-s}, L_{-(s+1)})\right) = \begin{cases} (-1)^{sn} \left[5^{(n+1)/2} F_{(s+1)n} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{sn} \left[5^{n/2} L_{(s+1)n} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_s^t L_{s+1}^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (206)$$

şeklindedir.

4.3 (L_{s+1}, L_s) , $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri

Bu bölümde $s=0$ durumu göz önüne alındığında $(x, y) = (L_1, L_0)$ sıralı ikilisi için $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $S_4^n(L_1, L_0)$ matrisi (Filipponi, P., 1997)'deki

çalışmasında 3.3 kısmında yer alan $S_4^n(1,2)$ matrisine eşit olduğu için çalışılmayacaktır. Özel durum olarak $s=1$ ve genel durumu alt kısımlarda inceleyeceğiz.

4.3.1 $S_4^{(n)}(L_2, L_1)$ Lucas matrisi

$(x, y) = (L_2, L_1)$ sıralı ikilisi için (44)'de $m=4$ için matris ifadesi

$$S_4(3,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (207)$$

şeklinde oluşur. (207) ifadesindeki matrisin $n=2,3,4,5$ için n 'inci kuvvet değerleri;

$$S_4^{(2)}(3,1) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(3)}(3,1) = \begin{pmatrix} 36 & 29 & 9 & 1 \\ 29 & 45 & 30 & 9 \\ 9 & 30 & 45 & 29 \\ 1 & 9 & 29 & 36 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(3,1) = \begin{pmatrix} 137 & 132 & 57 & 12 \\ 132 & 194 & 144 & 57 \\ 57 & 144 & 194 & 132 \\ 12 & 57 & 132 & 137 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(5)}(3,1) = \begin{pmatrix} 543 & 590 & 315 & 93 \\ 590 & 858 & 683 & 315 \\ 315 & 683 & 858 & 590 \\ 93 & 315 & 590 & 543 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Şimdi, $S_4^{(n)}(3,1)$ matrisinin elemanları için kapalı form ifadelerini verelim.

Teorem 4.5. $S_4^{(n)}(3,1)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (208)$$

$$s_{21}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (209)$$

$$s_{31}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (210)$$

$$s_{41}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n+1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (211)$$

$$s_{22}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n-1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (212)$$

$$s_{23}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n-1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (213)$$

şeklinde.

İspat $s_4^{(n)}(3,1)$ matrisinin (49) denklemindeki genel terim ifadeleri için

$$s_{hk}^{(n)}(3,1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(3 + 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{jh\pi}{5} \sin \frac{jk\pi}{5} \quad (214)$$

yazılabilir. Tablo 3'deki veriler ve Lemma 1.1'deki (5) -- (9) eşitlikleriyle Tablo 2'deki değerler kullanılarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

j	$\left(3 + 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin^2 \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$
1	$(1 + \sqrt{5}\alpha)^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$(\sqrt{5}\alpha)^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$
3	$(1 - \sqrt{5}\beta)^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$(-\sqrt{5}\beta)^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 29

(214)'de $(h, k) = \{(1,1), (2,1), (2,3)\}$ ikilileri göz önüne alınarak $s_{11}^{(n)}(3,1)$ elemanın genel terimi için Tablo 29'daki veriler kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
s_{11}^{(n)}(3,1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha + 1)^n (-\beta) + (\sqrt{5}\alpha)^n \alpha + (-1)^n (\sqrt{5}\beta - 1)^n \alpha + (-\sqrt{5}\beta)^n (-\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) + (-\beta) \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^t + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \beta^t (-1)^{2n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^{t-1} - (-1)^t \beta^{t-1}) \right]
\end{aligned}$$

olur. n ve t 'nin tek ve çift olma durumları ve (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{11}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. $s_{21}^{(n)}(3,1)$ için Tablo 29'daki veriler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s_{21}^{(n)}(3,1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha + 1)^n + (\sqrt{5}\alpha)^n - (-1)^n (\sqrt{5}\beta - 1)^n - (-\sqrt{5}\beta)^n \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^t - (-1)^t \beta^t) \right]
\end{aligned}$$

dir. n ve t 'nin tek ve çift olma durumları ile (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa;

$$s_{21}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. Son olarak; $s_{23}^{(n)}(3,1)$ elemanı için,

$$\begin{aligned}
s_{23}^{(n)}(3,1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}\alpha + 1)^n \alpha + (\sqrt{5}\alpha)^n \beta - (-1)^n (\sqrt{5}\beta - 1)^n \beta - (-\sqrt{5}\beta)^n \alpha \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^{t+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \beta^{t+1} (-1)^{2n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^{t+1} - (-1)^t \beta^{t+1}) \right]
\end{aligned}$$

dir. n 'in tek ve çift olma durumları için (3) ve (32)'deki Binet formlarıyla;

$$s_{23}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n-1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. (208) -- (213) ifadelerinden $s_{41}^{(n)}(3,1)$ ifadesi $s_{11}^{(n)}(3,1)$ 'e; $s_{31}^{(n)}(3,1)$ ifadesi $s_{21}^{(n)}(3,1)$ 'e; $s_{22}^{(n)}(3,1)$ ifadesi $s_{23}^{(n)}(3,1)$ 'e benzer işlemler ile bulunabilir. ■

(208) -- (213) ifadelerinden $S_4^{(n)}(3,1)$ matrisinin elemanlarına göre aşağıdaki tablo gözlemlenebilir.

$s_{11}^{(n)}(3,1) + s_{41}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right], & n \text{ tek ise} \\ 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{21}^{(n)}(3,1) + s_{31}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{23}^{(n)}(3,1) + s_{22}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right], & n \text{ tek ise} \\ 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(3,1) - s_{41}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{21}^{(n)}(3,1) - s_{31}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_n, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(3,1) - s_{23}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(3,1) + s_{21}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+2} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+2} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$

$$s_{31}^{(n)}(3,1) + s_{41}^{(n)}(3,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n+2} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n+2} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

Tablo 30

Ek olarak, $S_4^{(n)}(3,1)$ matrisinin izi;

$$\text{Tr}(S_4^{(n)}(3,1)) = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t L_{2t} + \binom{n}{2t+1} 5^{t+1} F_{2t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} L_n + 2 + \sum_{t=1}^{n/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} L_{2t} + \binom{n}{2t-1} F_{2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (215)$$

şeklinindedir.

4.3.2 $S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ $s \geq 0$ Lucas matrisi

(44) denkleminde $(x, y) = (L_{s+1}, L_s)$ sıralı ikili elemanları ile $m = 4$ durumu için

$$S_4(L_{s+1}, L_s) = \begin{pmatrix} L_{s+1} & L_s & 0 & 0 \\ L_s & L_{s+1} & L_s & 0 \\ 0 & L_s & L_{s+1} & L_s \\ 0 & 0 & L_s & L_{s+1} \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (216)$$

şeklinde oluşur. Şimdi kuvvet matrisi için elemanlarının genellemesini verelim.

Teorem 4.6. $S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ matrisinin elemanları

$$s_{11}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (217)$$

$$s_{21}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (218)$$

$$s_{31}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (219)$$

$$s_{41}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (220)$$

$$s_{22}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (221)$$

$$s_{32}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (222)$$

şeklinindedir.

İspat (49) denkleminde verilen genel terime göre $S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ matrisinin elemanları;

$$s_{hk}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(L_{s+1} + 2L_s \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (223)$$

ifadesinde (35) eşitlikleri ile birlikte Tablo 2 ve Tablo 3'deki veriler kullanılarak; (223)

ifadesinde kullanılacak bazı değerleri aşağıda görebiliriz.

j	$\left(L_{s+1} + 2L_s \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\sin \frac{3j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{4j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$
1	$(L_{s+1} + \alpha L_s)^n$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
2	$(L_{s+1} - \beta L_s)^n = 5^{n/2} \alpha^{sn}$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\alpha/4$
3	$(L_{s+1} + \beta L_s)^n$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
4	$(L_{s+1} - \alpha L_s)^n = (-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn}$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\beta/4$

Tablo 31

$(h, k) = \{(2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ ikilileri için Tablo 31'deki değerleri (223)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} s_{22}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\alpha (L_{s+1} + \alpha L_s)^n + 5^{n/2} \alpha^{sn} (-\beta) + (L_{s+1} + \beta L_s)^n (-\beta) + (-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} \alpha \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn-1} - (-1)^n \beta^{sn-1}) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn-1} - (-1)^n \beta^{sn-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}) \right]$$

dir. n 'in tek ve çift olma durumları ile (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{22}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Tablo 31'deki $(h, k) = (3, 1)$ uygun değerleri (223)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} s_{31}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(L_{s+1} + \alpha L_s)^n - 5^{n/2} \alpha^{sn} - (L_{s+1} + \beta L_s)^n + (-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn} - (-1)^n \beta^{sn}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn} - (-1)^n \beta^{sn}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t} - \beta^{n-t}) \right] \end{aligned}$$

olur. (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{31}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

bulunur. Tablo 31'deki değerleri $(h, k) = (4, 1)$ olarak (223)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} s_{41}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(L_{s+1} + \alpha L_s)^n (-\beta) + 5^{n/2} \alpha^{sn} (-\alpha) + (L_{s+1} + \beta L_s)^n \alpha + (-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} \beta \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn+1} - (-1)^n \beta^{sn+1}) + (-\beta) \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn+1} - (-1)^n \beta^{sn+1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}) \right] \end{aligned}$$

dir. (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{41}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

verilir. Diğer elemanlar ise (223)'de Tablo 3'den uygun değerler yerlerine yazarak benzer işlemler ile bulunabilir. ■

(217) -- (222) ifadelerinden $S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ matrisinin elemanları için toplam ve fark eşitliklerini aşağıdaki tabloda görebiliriz.

$s_{11}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) + s_{41}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1}, & n \text{ tek ise} \\ \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{21}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) + s_{31}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t}, & n \text{ tek ise} \\ \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) + s_{32}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1}, & n \text{ tek ise} \\ \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{11}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) - s_{41}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{sn+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{sn+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{21}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) - s_{31}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{sn}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{sn}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{22}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) - s_{32}^{(n)}(L_{s+1}, L_s) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{sn-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{sn-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 32

$S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)$ matrisinin izi;

$$Tr\left(S_4^{(n)}(L_{s+1}, L_s)\right) = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} L_{n-t}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} L_{n-t}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (224)$$

şeklindedir.

4.4 $(L_{-(s+1)}, L_{-s})$, $s \geq 0$ Sıralı İkilisine Göre Lucas Matrisleri

Bu bölümde $s=0$ durumunda $L_0=2$, $L_{-1}=-1$ olduğundan $(x, y)=(L_{-1}, L_0)$ sıralı ikilisi için $S_4^{(n)}(L_{-1}, L_0)=S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-3})$ matris eşitliği olur. Bu çalışmanın 3.3.2 kısmında $S_4^{(n)}(F_{-2}, F_{-3})$ matrisi ele alındığından tekrardan incelenmeyecektir. $s=1$ özel durumu ve genellemesi alt kısımlarda çalışılacaktır.

4.4.1 $S_4^{(n)}(L_{-2}, L_{-1})$ Lucas matrisi

$(x, y)=(L_{-2}, L_{-1})$ sıralı ikilisi için (44)'de $m=4$ durumuna göre

$$S_4(3, -1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (225)$$

şeklinde oluşur. $S_4^{(n)}(3, -1)$ matrisinin $n=2, 3, 4, 5$ değerleri;

$$S_4^{(2)}(3, -1) = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \\ 1 & -6 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(3)}(3, -1) = \begin{pmatrix} 36 & -29 & 9 & -1 \\ -29 & 45 & -30 & 9 \\ 9 & -30 & 45 & -29 \\ -1 & 9 & -29 & 36 \end{pmatrix}$$

$$S_4^{(4)}(3, -1) = \begin{pmatrix} 137 & -132 & 57 & -12 \\ -132 & 194 & -144 & 57 \\ 57 & -144 & 194 & -132 \\ -12 & 57 & -132 & 137 \end{pmatrix}, \quad S_4^{(5)}(3, -1) = \begin{pmatrix} 543 & -590 & 315 & -93 \\ -590 & 858 & -683 & 315 \\ 315 & -683 & 858 & -590 \\ -93 & 315 & -590 & 543 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Genelleme olarak, $S_4(3, -1)$ matrisinin n 'inci kuvvetini verelim.

Teorem 4.7. $S_4^{(n)}(3, -1)$ matrisinin elemanları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$s_{41}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+1} - 1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (226)$$

$$s_{42}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (227)$$

$$s_{43}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_n - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_n - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (228)$$

$$s_{44}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (229)$$

$$s_{33}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n-1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (230)$$

$$s_{32}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n-1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n-1} - 1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}. \quad (231)$$

İspat (49) denkleminde $S_4^{(n)}(3, -1)$ matrisinin elemanları için;

$$s_{hk}^{(n)}(3, -1) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(3 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (232)$$

yazılabilir. (5) -- (9) eşitlikleri ile Tablo 2'deki veriler $(h, k) = \{(4,1), (4,3), (3,3)\}$

sıralı ikilileri için Tablo 3'deki değerlere göre düzenlenirse aşağıdaki tablo elde edilir.

j	$\left(3 - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right)^n$	$\sin \frac{4j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin \frac{4j\pi}{5} \sin \frac{3j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{3j\pi}{5}$
1	$-\sqrt{5}\beta$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
2	$1 - \sqrt{5}\beta$	$-\sqrt{5}\alpha/4$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
3	$\sqrt{5}\alpha$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
4	$1 + \sqrt{5}\alpha$	$\sqrt{5}\beta/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$

Tablo 33

(232) ifadesinde Tablo 33'deki değerler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
s_{41}^{(n)}(3, -1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(-\sqrt{5}\beta)^n (-\beta) + (1 - \sqrt{5}\beta)^n (-\alpha) + (\sqrt{5}\alpha)^n \alpha + (1 + \sqrt{5}\alpha)^n \beta \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) + \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^t - (-1)^n \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \beta^t (-1)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n+1} - (-1)^n \beta^{n+1}) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^{t-1} - (-1)^t \beta^{t-1}) \right]
\end{aligned}$$

dir. n ve t 'nin tek ve çift olma durumlarına göre (3) ve (32) denklemleri kullanılırsa;

$$s_{41}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+1} - 1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. $s_{43}^{(n)}(2, -1)$ elemanı için

$$\begin{aligned}
s_{43}^{(n)}(3, -1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(-\sqrt{5}\beta)^n + (1 - \sqrt{5}\beta)^n - (\sqrt{5}\alpha)^n - (1 + \sqrt{5}\alpha)^n \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^t + (-1)^n \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \beta^t (-1)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^n - (-1)^n \beta^n) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^t - (-1)^t \beta^t) \right]
\end{aligned}$$

dir. n ve t 'nin tek ve çift olma durumları ve (3) ve (32) denklemlerine göre

$$s_{43}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_n - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_n - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. $s_{33}^{(n)}(2, -1)$ elemanı için

$$\begin{aligned}
s_{33}^{(n)}(3, -1) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(-\sqrt{5}\beta)^n \alpha + (1 - \sqrt{5}\beta)^n (-\beta) + (\sqrt{5}\alpha)^n (-\beta) + (1 + \sqrt{5}\alpha)^n \alpha \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \alpha^t - (-1)^n \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} \beta^t (-1)^{n-t} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{n-1} - (-1)^n \beta^{n-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 5^{t/2} (\alpha^{t+1} - (-1)^t \beta^{t+1}) \right]
\end{aligned}$$

dir. n ve t 'nin tek ve çift olma durumları için (3) ve (32) denklemleri ile

$$s_{33}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n-1} + 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

bulunur.

Diğer ifadelerin ispatları Tablo 33 ve Tablo 3'deki uygun değerler kullanılarak benzer biçimde yapılabildiği için verilmemiştir. ■

(226) -- (231) ifadelerinden $S_4^{(n)}(3, -1)$ matrisin elemanlarına göre aşağıdaki tablo gözlemlenebilir.

$s_{41}^{(n)}(3, -1) + s_{44}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n+1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{42}^{(n)}(3, -1) + s_{43}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} -5^{(n-1)/2} L_n, & n \text{ tek ise} \\ -5^{n/2} F_n, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{33}^{(n)}(3, -1) + s_{32}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} 5^{(n-1)/2} L_{n-1}, & n \text{ tek ise} \\ 5^{n/2} F_{n-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{41}^{(n)}(3, -1) - s_{44}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} -\sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right], & n \text{ tek ise} \\ -1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{42}^{(n)}(3, -1) - s_{43}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$
$s_{33}^{(n)}(3, -1) - s_{32}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right], & n \text{ tek ise} \\ 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

$s_{41}^{(n)}(3, -1) + s_{42}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n-1} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t-2} + \binom{n}{2t+1} L_{2t-1} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n-1} - 1 + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t-2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-3} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{43}^{(n)}(3, -1) + s_{33}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n-2} + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n-2} + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t-2} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{41}^{(n)}(3, -1) - s_{42}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{n+2} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+1} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+2} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[5^{n/2} F_{n+2} - 1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+1} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{43}^{(n)}(3, -1) - s_{33}^{(n)}(3, -1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-5^{(n-1)/2} L_{n+1} - \sum_{t=0}^{(n-1)/2} 5^t \left[\binom{n}{2t} F_{2t+2} + \binom{n}{2t+1} L_{2t+3} \right] \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2} \left[-5^{n/2} F_{n+1} - 1 - \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} 5^t F_{2t+2} + \binom{n}{2t-1} 5^{t-1} L_{2t+1} \right] \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$

Tablo 34

Ek olarak, $S_4^{(n)}(3, -1)$ matrisinin izi;

$$Tr(S_4^{(n)}(3, -1)) = \begin{cases} 5^{(n+1)/2} F_n + \sum_{t=0}^{(n-1)/2} \left[5^t \binom{n}{2t} L_{2t} + \binom{n}{2t+1} 5^{t+1} F_{2t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ 1 + 5^{n/2} L_n + \sum_{t=1}^{n/2} \left[\binom{n}{2t} L_{2t} + \binom{n}{2t-1} F_{2t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (233)$$

şeklindedir.

4.4.2 $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ $s \geq 0$ Lucas matrisi

İlk olarak (33)'deki negatif indisli Lucas sayıları için verilen eşitler ile

$$L_{-s} = (-1)^s L_s \quad \text{ve} \quad L_{-(s+1)} = (-1)^{s+1} L_{s+1}, \quad s \geq 0 \quad (234)$$

olur. (44)'de $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$ sıralı ikili elemanları ve $m = 4$ durumu düşünülürse

$$S_4(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = (-1)^s \begin{pmatrix} -L_{s+1} & L_s & 0 & 0 \\ L_s & -L_{s+1} & L_s & 0 \\ 0 & L_s & -L_{s+1} & L_s \\ 0 & 0 & L_s & -L_{s+1} \end{pmatrix}, \quad s \geq 0 \quad (235)$$

matrisi oluşur. Şimdi, $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ matrisinin elemanlarının Fibonacci ve Lucas sayıları ile bağlantılarını gösterelim.

Teorem 4.8. $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ matrisinin elemanları

$$s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (236)$$

$$s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (237)$$

$$s_{23}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn-1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (238)$$

$$s_{41}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn+1} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (239)$$

$$s_{42}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn} - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (240)$$

$$s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (241)$$

şeklinde dir.

İspat (49) denkleminde göre $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ matrisinin genel terim elemanları

$$s_{hk}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \frac{2}{5} \sum_{j=1}^4 \left(\left(L_{-(s+1)} + 2L_{-s} \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n \sin \frac{hj\pi}{5} \sin \frac{kj\pi}{5} \quad (242)$$

şeklinde yazılabilir. Tablo 3 ve (36) denklemi ile Tablo 2'deki verileri kullanarak; (242) ifadesindeki $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$ ve $(h, k) = \{(2,1), (2,2), (4,4)\}$ değerine göre uygun elemanlar tablo şeklinde düzenlenebilir.

j	$\left((-1)^s \left(-L_{s+1} + 2L_s \cos \frac{j\pi}{5} \right) \right)^n$	$\sin \frac{2j\pi}{5} \sin \frac{j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{2j\pi}{5}$	$\sin^2 \frac{4j\pi}{5}$
1	$(-1)^{(s+1)n} (L_{s+1} - \alpha L_s)^n = (-1)^{sn} 5^{n/2} \beta^{sn}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$
2	$(-1)^{(s+1)n} (L_{s+1} + \beta L_s)^n$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
3	$(-1)^{(s+1)n} (L_{s+1} - \beta L_s)^n = (-1)^{(s+1)n} 5^{n/2} \alpha^{sn}$	$-\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$
4	$(-1)^{(s+1)n} (L_{s+1} + \alpha L_s)^n$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}\alpha/4$	$-\sqrt{5}\beta/4$

Tablo 35

$s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ için Tablo 35'deki değerler (242)'de yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} + (L_{s+1} + \beta L_s)^n - 5^{n/2} \alpha^{sn} - (L_{s+1} + \alpha L_s)^n \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn} - (-1)^n \beta^{sn}) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \\ &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[-5^{n/2} (\alpha^{sn} - (-1)^n \beta^{sn}) - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t} - \beta^{n-t}) \right] \end{aligned}$$

dir. n değerinin tek ve çift olma durumuna göre (3) ve (32) eşitlerini kullanarak;

$$s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n+1}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. $s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ ve $s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ elemanları içinde Tablo 35'deki değerler (242) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} \alpha - (L_{s+1} + \beta L_s)^n \beta - 5^{n/2} \alpha^{sn} \beta + (L_{s+1} + \alpha L_s)^n \alpha \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn-1} - (-1)^n \beta^{sn-1}) + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn-1} - (-1)^n \beta^{sn-1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t+1} - \beta^{n-t+1}) \right]
\end{aligned}$$

olur ki (3) ve (32) eşitlerini kullanarak;

$$s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn-1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}
s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) &= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[(-1)^n 5^{n/2} \beta^{sn} (-\beta) + (L_{s+1} + \beta L_s)^n \alpha + 5^{n/2} \alpha^{sn} \alpha - (L_{s+1} + \alpha L_s)^n \beta \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn+1} - (-1)^n \beta^{sn+1}) - \beta \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\alpha L_s)^{n-t} + \alpha \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t (\beta L_s)^{n-t} \right] \\
&= \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2\sqrt{5}} \left[5^{n/2} (\alpha^{sn+1} - (-1)^n \beta^{sn+1}) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} (\alpha^{n-t-1} - \beta^{n-t-1}) \right]
\end{aligned}$$

dir ki (3) ve (32) eşitlerini kullanarak;

$$s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{(n-1)/2} L_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^{(s+1)n}}{2} \left[5^{n/2} F_{sn+1} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Tablo 3 ve Tablo 35'deki uygun değerler yerlerine yazılarak benzer işlemler ile diğer elemanlar kolayca gösterilebilir. ■

(236) -- (241) ifadelerinden $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ matrisinin elemanlarının aşağıdaki eşitlikleri geçerlidir.

$ s_{41}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) + s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} (-1)^{(s+1)n} 5^{(n-1)/2} L_{sn+1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{(s+1)n} 5^{n/2} F_{sn+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}, $
$ s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) + s_{42}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} (-1)^{(s+1)n+1} 5^{(n-1)/2} L_{sn}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{(s+1)n+1} 5^{n/2} F_{sn}, & n \text{ çift ise} \end{cases}, $

$s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) + s_{23}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = \begin{cases} (-1)^{(s+1)n} 5^{(n-1)/2} L_{sn-1}, & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{(s+1)n} 5^{n/2} F_{sn-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases},$
$s_{44}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) - s_{41}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = (-1)^{(s+1)n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t-1},$
$s_{21}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) - s_{42}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = (-1)^{(s+1)n+1} \sum_{t=0}^n \left[\binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t} \right],$
$s_{22}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) - s_{23}^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s}) = (-1)^{(s+1)n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} F_{n-t+1}$

Tablo 36

Ek olarak, $S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})$ matrisinin izi;

$$Tr(S_4^{(n)}(L_{-(s+1)}, L_{-s})) = \begin{cases} (-1)^{(s+1)n} \left[5^{(n+1)/2} F_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} L_{n-t} \right], & n \text{ tek ise} \\ (-1)^{(s+1)n} \left[5^{n/2} L_{sn} + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} L_{s+1}^t L_s^{n-t} L_{n-t} \right], & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (243)$$

olduğu görülür.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, ilk olarak (Filipponi P. 1997) çalışmasında yazarın genelleme olarak $(x, y) = (F_s, F_{s+1})$ elemanlarına sahip $S_4^{(n)}(F_s, F_{s+1})$ matrisinin açık olarak verilmediği görüldüğünden bu matrisin yeniden düzenlemesi yapılmıştır. Daha sonra, 3. bölümün her alt bölümünde sırasıyla, $(x, y) = (F_{-s}, F_{-(s+1)})$, $(x, y) = (F_{s+1}, F_s)$ ve $(x, y) = (F_{-(s+1)}, F_{-s})$ sıralı ikililerine göre $S_4^{(n)}(x, y)$ matrisinin özel ve genel elemanları için kapalı form ifadeleri ortaya konulmuştur. Fibonacci sayıları ile yakın ilişkilere sahip Lucas sayıları için 4. bölümde $(x, y) = (L_s, L_{s+1})$, $(x, y) = (L_{-s}, L_{-(s+1)})$, $(x, y) = (L_{s+1}, L_s)$ ve $(x, y) = (L_{-(s+1)}, L_{-s})$ sıralı ikililerine göre genel ve özel elemanlarına sahip $S_4^{(n)}(x, y)$ matrisleri oluşturulmuştur. Her bir matris için bulunan genel terim ifadeleri arasında matrisin elemanlarına göre toplamları ve farkları, ayrıca iz (trace) değerleri verilmiştir.

5.2 Öneriler

Bu çalışmadaki $ebob(x, y) = 1$ özelliğine sahip olan Fibonacci ve Lucas sayıları göz önüne alınmıştır. Ayrıca, $ebob(F_s, F_{s+2}) = 1$, $ebob(L_s, L_{s+2}) = 1$ ve $ebob(F_s, L_s) = 1$ olduğu durumlarına ve negatif özelliklerine göre elemanları seçilen $S_4^{(n)}(x, y)$ matrislerinin elemanları için genel ifade çalışması yapılabilir. Bu genel ifadelere sahip elemanlar arasında toplam ve fark eşitlikleri ya da matrisler üzerinde genel tanımlara sahip norm işlemlerine göre eşitlikler elde edilebilir.

Ayrıca elde edilen $S_4^{(n)}(x, y)$, Fibonacci ve Lucas matrisleri için 2. bölümde (56) -- (61) denklemleri arasında yer alan Fibonacci eşitlikleri ile (69) -- (75) denklemleri arasındaki Lucas eşitlikleri benzeri ifadeler hesaplanabilir. Ek olarak $S_4^{(n)}(x, y)$, Fibonacci ve Lucas matris kümeleri üzerinde Hadamard, Kronecker, KhatriRao veya Tracy-Sing çarpımları çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Bruggles, ID. and Hoggatt, V.E.Jr., 1963, A Primer for the Fibonacci numbers-Part IV. *The Fibonacci Quarterly*, 1(4), 65–71.
- Civciv, H. and Türkmen, R., 2008, On the (s,t) -Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 87 161–173.
- Civciv, H. and Türkmen, R., 2008, Notes on the (s,t) -Lucas and Lucas matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 89, 271–285.
- Debnart, L., 2011, A short history of the Fibonacci and golden numbers with their applications. *Inter. Jour. of Math. Educa.in Sci. and Technol.* 42, 337–367.
- Demirtürk, B. 2010, Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods, *International Mathematical Forum*, 5, no. 3, 99–107.
- Davod, K. S., 2006, Positive İnteger Powers of The Tridiagonal Toeplitz Matrices, *International Mathematical Forum*, no.22, 1061–1065.
- Dunlap, R A., 1998, The golden ratio and Fibonacci numbers, World Scientific.
- Elouafi, M., Aiat Hadj, A.D., 2009, On the powers and the inverse of a tridiagonal matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 211, 137–141.
- Filipponi, P. 1997, A Family of 4-by-4 Fibonacci Matrices. *The Fibonacci Quarterly*, 35.4, 300–307.
- Gantmacher, F.R., 1977, The Theory of Matrices. Vol. 1. New York: Chelsea.
- Gutiérrez-Gutiérrez, J., 2008, Positive integer powers of certain tridiagonal matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 202, 133–140.
- Gutiérrez-Gutiérrez, J., 2008, Powers of tridiagonal matrices with constant diagonals, *Applied Mathematics and Computation*, 206, 885–891.
- Hoggatt, V. E. and Bicknell, M. Jr., 1964, Some New Fibonacci Identities. *The Fibonacci Quarterly*, 2-1, 29–32.
- King, C. H., 1960, Some Properties of the Fibonacci Numbers. Master's Thesis, San Jose State College.
- Koken, F. and Bozkurt, D., 2010, On Lucas numbers by the matrix method. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(4), 471–475.
- Koken, F., 2019, The Representations of the Fibonacci and Lucas matrices, Iranian J. Sci. Tech., Trans. A: Sci. 43 2443–2448.
- Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley and Sons Inc, NY.

- Lehmer, D. H., 1975, Fibonacci and Related Sequences in Periodic Tridiagonal Matrices. *The Fibonacci Quarterly*, 13.2, 150–158.
- Nalli, A., 2006, On the Hadamard product of Fibonacci Q^n matrix and Fibonacci Q^{-n} matrix, *Interna. Jour. of Contemporary Mathematical Sciences*, 1(16), 753–761.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with zero row-I, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 149–154.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order-I, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 783–787.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row -I, *Applied Mathematics and Computation*, 169, 1390–1394.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order-I, *Applied Mathematics and Computation*, 171, 1214–1217.
- Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order-II, *Applied Mathematics and Computation*, 172, 245–251.
- Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row-II, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 490–499.
- Silvester, J. R., (1979), Fibonacci properties by matrix method, *Mathematical Gazette* , 63, 188–191.
- Strang, G., 1998, Introduction to linear algebra. 2nd ed. Wellesley (MA): Wellesley-Cambridge.
- Vajda, S., 1989, Fibonacci and Lucas numbers and the golden section. Chichester: Ellis Horwood Limited New York: John Wiley and Sons.

EKLER**EK-1** F_n Fibonacci ve L_n Lucas Sayılarının $n = 0 - 61$ arası değerleri

n	F_n	L_n	n	F_n	L_n
0	0	2	31	1346269	3010349
1	1	1	32	2178309	4870847
2	1	3	33	3524578	7881196
3	2	4	34	5702887	12752043
4	3	7	35	9227465	20633239
5	5	11	36	14930352	33385282
6	8	18	37	24157817	54018521
7	13	29	38	39088169	87403803
8	21	47	39	63245986	141422324
9	34	76	40	102334155	228826127
10	55	123	41	165580141	370248451
11	89	199	42	267914296	599074578
12	144	322	43	433494437	969323029
13	233	521	44	701408733	1568397607
14	377	843	45	1134903170	2537720636
15	610	1364	46	1836311903	4106118243
16	987	2207	47	2971215073	6643838879
17	1597	3571	48	4807526976	10749957122
18	2584	5778	49	7778742049	17393796001
19	4181	9349	50	12586269025	28143753123
20	6765	15127	51	20365011074	45537549124
21	10946	24476	52	32951280099	73681302247
22	17711	39603	53	53316291173	119218851371
23	28657	64079	54	86267571272	192900153618
24	46368	103682	55	139583862445	312119004989
25	75025	167761	56	225851433717	505019158607
26	121393	271443	57	365435296162	817138163596
27	196418	439204	58	591286729879	1322157322203
28	317811	710647	59	956722026041	2139295485799
29	514229	1149851	60	1548008755920	3461452808002
30	832040	1860498	61	2504730781961	5600748293801

EK-2 F_{-n} Fibonacci ve L_{-n} Lucas Sayılarının $n = 0 - 61$ arası değerleri

n	F_n	L_n	n	F_n	L_n
0	0	2	-31	1346269	-3010349
-1	1	-1	-32	-2178309	4870847
-2	-1	3	-33	3524578	-7881196
-3	2	-4	-34	-5702887	12752043
-4	-3	7	-35	9227465	-20633239
-5	5	-11	-36	-14930352	33385282
-6	-8	18	-37	24157817	-54018521
-7	13	-29	-38	-39088169	87403803
-8	-21	47	-39	63245986	-141422324
-9	34	-76	-40	-102334155	228826127
-10	-55	123	-41	165580141	-370248451
-11	89	-199	-42	-267914296	599074578
-12	-144	322	-43	433494437	-969323029
-13	233	-521	-44	-701408733	1568397607
-14	-377	843	-45	1134903170	-2537720636
-15	610	-1364	-46	-1836311903	4106118243
-16	-987	2207	-47	2971215073	-6643838879
-17	1597	-3571	-48	-4807526976	10749957122
-18	-2584	5778	-49	7778742049	-17393796001
-19	4181	-9349	-50	-12586269025	28143753123
-20	-6765	15127	-51	20365011074	-45537549124
-21	10946	-24476	-52	-32951280099	73681302247
-22	-17711	39603	-53	53316291173	-119218851371
-23	28657	-64079	-54	-86267571272	192900153618
-24	-46368	103682	-55	139583862445	-312119004989
-25	75025	-167761	-56	-225851433717	505019158607
-26	-121393	271443	-57	365435296162	-817138163596
-27	196418	-439204	-58	-591286729879	1322157322203
-28	-317811	710647	-59	956722026041	-2139295485799
-29	514229	-1149851	-60	-1548008755920	3461452808002
-30	-832040	1860498	-61	2504730781961	-5600748293801