



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KADEMELİ LİNEER NÖRMLU UZAYLARDA  
LACUNARY  $I$  – İSTATİSTİKSEL  
YAKINSAKLIK**

**Şeyma BOLAT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Temmuz-2024  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Şeyma BOLAT tarafından hazırlanan “Kademeli lineer normlu uzaylarda lacunary  $I$  –istatistiksel yakınsaklık” adlı tez çalışması 02/07/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Fatih NURAY

#### Danışman

Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK

### İmza

.....

.....

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ....../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Şerife Yurdağül KUMCU  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şeyma BOLAT

02.07.2024

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### KADEMELİ LİNEER NÖRMLU UZAYLARDA LACUNARY $I$ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Şeyma BOLAT

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2024, 36 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

Prof. Dr. Fatih NURAY

Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK

Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasında ilk bölüm kaynak araştırması ve tezin amacına ayrılmıştır. İkinci bölüm, temel tanımlar, kavramlar ve teoremlerin yer aldığı bölümdür. Üçüncü bölümde, bu tez çalışması için temel kavramlardan birisi olan kademeli lineer normlu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık için yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Dördüncü bölümde, yine temel kavramlardan olan kademeli lineer normlu uzaylarda  $I$  – istatistiksel yakınsaklık ile ilgili daha önce elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir. Beşinci bölümde, bu tez çalışması ile ilk kez elde edilmiş olan orijinal tanım ve sonuçlar verilmiştir. Altıncı bölümde ise bu tez çalışmasının sonuç ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** İdeal yakınsaklık,  $I$  – istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, kademeli lineer normlu uzaylar, lacunary dizileri, lacunary istatistiksel yakınsaklık.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**LACUNARY  $I$  –STATISTICAL CONVERGENCE IN GRADUAL NORMED  
LINEAR SPACES**

**Şeyma BOLAT**

**The Graduate School of Natural and Applied Science of Necmettin Erbakan  
University**

**The Degree of Master of Mathematics**

**Advisor: Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ**

**2024, 36 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ**

**Prof. Dr. Fatih NURAY**

**Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK**

In this thesis study consisting of six chapters, the first chapter is devoted to source research and the purpose of the thesis. The second part contains basic definitions, concepts and theorems. In the third chapter, studies on lacunary statistical convergence in graded linear normed spaces, which is one of the basic concepts for this thesis, are examined. In the fourth chapter, previously obtained results regarding  $I$ -statistical convergence in graded linear normed spaces, which is also one of the basic concepts, are expressed. In the fifth chapter, the original definition and results obtained for the first time with this thesis study are given. In the sixth chapter, the results and recommendations of this thesis are included.

**Keywords:** Ideal convergence,  $I$  –statistical convergence, statistical convergence, gradual normed linear spaces, lacunary sequences, lacunary statistical convergence.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Ereğli Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ'e; hayatımın her alanında yanımda olan sevgili Aileme ve sevgili eşime saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şeyma BOLAT  
KONYA-2024



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Kaynak Araştırması .....	1
1.2. Tezin Amacı.....	4
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	5
3. KADEMELİ LİNEER NORMLU UZAYLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	14
4. KADEMELİ LİNEER NORMLU UZAYLARDA $I$ –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	17
5. KADEMELİ LİNEER NORMLU UZAYLARDA LACUNARY $I$ -İSTATİSTİKSELYAKINSAKLIK.....	20
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR .....	33

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$2^{\mathbb{N}}$	: Doğal sayılar kümesinin alt kümeleri
$(X, d)$	: Metrik uzay
$(L, +, \cdot)$	: Lineer uzay
$(N, \ \cdot\ )$	: Normlu uzay
$\chi_A$	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$d(A)$	: A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$S$	: İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\theta = (k_r)$	: Lacunary dizisi
$I_r$	: Lacunary dizisinin elemanlarından oluşan aralık
$S_\theta$	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$N_\theta$	: Lacunary toplanabilir diziler uzayı
$ \sigma_1 $	: Kuvvetli Cesaro toplanabilir diziler kümesi
$I$	: İdeal
$F(I)$	: I ideali ile ilişkili süzgeç
$I_f$	: $\mathbb{N}$ 'nin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal
$I_d$	: $\mathbb{N}$ 'nin asimptotik yoğunluğu sıfır olan kümelerinden oluşan ideal
$GLNS(X, \ \cdot\ _G)$	: Kademeli lineer normlu uzay
$S^I - \ \cdot\ _G$	: Kademeli $I$ – istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$S_\theta^I - \ \cdot\ _G$	: Kademeli lacunary $I$ – istatistiksel yakınsak diziler kümesi

$N_\theta^I - \|\cdot\|_G$  : Kademeli lacunary  $I$  – toplanabilir diziler kümesi

$\sigma_1^I - \|\cdot\|_G$  : Kademeli  $I$  – Cesàro toplanabilir diziler kümesi

$\tilde{r}$  : Kademeli sayı

$A_{\tilde{r}}$  : Kademeli sayıyı ifade eden fonksiyon

$G(\mathbb{R})$  : Tüm kademeli sayılar kümesi

$G^*(\mathbb{R})$  : Negatif değer almayan kademeli sayılar kümesi



## 1. GİRİŞ

### 1.1. Kaynak Araştırması

Klasik analizde çok önemli bir yer tutan yakınsaklık kavramı, 1951 yılında Fast (1951) tarafından genelleştirilmiş ve istatistiksel yakınsaklık ortaya çıkmıştır. Yine Steinhaus (1951) aynı yıl Fast'tan bağımsız şekilde bu kavramı tanımlamıştır. Bu yeni yakınsaklık türü istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılmıştır.  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi olmak üzere, istatistiksel yakınsaklık, bu kümenin bir  $A$  alt kümesinin asimptotik (doğal) yoğunluğu kavramına dayanır. Doğal yoğunluk,  $A_n = \{k \in A : k \leq n\}$  olmak üzere  $d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n}$  şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan  $|A_n|$  ifadesi,  $A_n$  kümesinde yer alan elemanların sayısıdır. İstatistiksel yakınsaklık kavramını şu şekilde de ifade etmek mümkündür: Bir reel sayı dizisinin belirtilen komşuluk dışındaki elemanlarının indislerinden oluşan kümenin asimptotik yoğunluğu sıfırdır.

Schoenberg 1959 yılında istatistiksel yakınsaklık kavramının bir toplanabilme metodu olarak incelenip incelenemeyeceğini araştırmış; bunun yanında bu kavramın daha önce çalışılmayan önemli özelliklerini ele almıştır. Fridy 1985'te bu kavram üzerine önemli bir temel çalışmayı ortaya koymuş; topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık Maio ve Kočinac tarafından 2008 yılında tanımlanmıştır. Connor 1988'de istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p-Cesaro toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiş; Patterson asimptotik istatistiksel denk dizileri tanımlayarak bu çalışmaları başka bir açıdan ele almıştır. Fridy'nin (1993) "İstatistiksel limit noktaları" adlı çalışmasında istatistiksel limit noktaları tanımlanmıştır. Buna göre,  $x = (x_k)$  dizisinin istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası,  $(x_{k_n})$  alt dizisinin asimptotik yoğunluğu yardımıyla tanımlanmış ve bazı analitik özellikleri incelenmiştir. Mesela,  $x = (x_k)$  dizisi sınırlı ise istatistiksel yığılma noktasına sahiptir fakat istatistiksel limit noktasına sahip olmak zorunda değildir.

Toplanabilme Teorisi alanında çalışmalar yapılırken zaman zaman  $x = (x_k)$  reel dizisi yerine farklı özelliklerdeki bazı diziler de kullanılmış, oluşan yeni sonuçlar diğerleri ile karşılaştırılmıştır. Bu dizilerden birisi de lacunary dizileridir. Lacunary dizileri  $k_0 = 0$  ve  $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$  şeklinde tanımlanan artan  $\theta = (k_r)$  dizileridir. Bu

dizi yardımıyla  $J_r := (k_{r-1}, k_r]$  aralığı ve  $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$  oranı tanımlanır. Lacunary dizileri kullanarak elde edilen bu yeni yakınsaklık türü lacunary istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır ve lacunary istatistik yakınsak diziler kümesi genellikle  $S_\theta$  ile gösterilir. Lacunary istatistik yakınsaklık 1993'te Fridy ve Orhan tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada esas olan, istatistiksel yakınsaklıkta çalışılan  $\{k: k \leq n\}$  kümesinin elemanları yerine  $\theta = (k_r)$  lacunary dizileri için  $\{k: k_{r-1} < k \leq k_r\}$  aralığındaki elemanların kullanılmasıdır. Bu çalışmaya paralel olarak 1993'te Fridy lacunary istatistiksel toplanabilme ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Lacunary istatistiksel yakınsak kavramı, Şengül ve Et (2014) tarafından bir  $\alpha$  sayısı kullanılarak genelleştirilmiş, Savaş ve Debnath (2019) ise lacunary  $\phi$ -istatistiksel yakınsaklık üzerine çalışmışlardır.

Kostyrko ve arkadaşları (2000) hem bilinen yakınsaklık hem de istatistiksel yakınsaklığı metrik uzaylarda idealler yardımıyla genelleştiren yeni bir yakınsaklık türü üzerine çalışmışlar ve ideal yakınsaklık ( $I$ -yakınsaklık) kavramını tanımlamışlardır.  $I$ -yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa benzer şekilde, dizinin belirtilen komşuluk dışında kalan elemanlarını dikkate alır. Bu elemanların indislerinden oluşan küme herhangi bir ideale ait ise  $I$ -yakınsaklık elde edilir. Burada  $I$ , doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin belli özellikleri sağlayan bir ailesidir. Buna göre, farklı ideallerin seçimi ile farklı yakınsaklık türleri elde edilebilir. Bu haliyle ideal yakınsaklık bir çok yakınsaklık türünü genelleştiren bir yakınsaklık türü olarak ele alınmış ve bu özelliğiyle bir çok uzayda kullanılmıştır. Bu tanımlamanın ardından Kostyrko ve arkadaşları (2005)  $I$ -yakınsaklık ve  $I$ -ekstremum noktaları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

$I$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı, hem istatistiksel yakınsaklığın hem de ideal yakınsaklığın bir arada kullanılması ile ortaya çıkmış daha genel bir yakınsaklık türüdür. Bu fikir ilk kez Savaş ve Das (2011) tarafından ortaya atılmış; yine Das ve Savaş (2014)  $I$ -istatistiksel yakınsaklık ve lacunary  $I$ -istatistiksel yakınsaklığı  $\alpha$  sayısı ile ele almış; zayıf lacunary  $I$ -istatistiksel yakınsaklık bazı sonuçlar Gümüş (2015) tarafından elde edilmiştir. Debnath ve Rakshit (2018)  $I$ -istatistiksel yakınsaklık kavramını diğer bir açıdan incelemiş; Gümüş (2018), bir  $A$  matrisi kullanarak elde edilmiş olan  $A^I$ -istatistiksel yakınsaklığı bir  $\alpha$  sayısı ile genelleştirmiş, yine Demir ve Gümüş (2024) multiset dizileri için  $I$ -istatistiksel yakınsaklığı çalışmışlardır.

Günlük yaşamda “yaklaşık iki gibi” veya “iki civarında” gibi ifadeleri oldukça sık duyulur ve kullanılır. Benzer şekilde, “orta yaşlı”, “sıcak”, “biraz” gibi ifadeler de

sıklıkla karşılaşılan ifadelerdir. Her ne kadar bu ifadelere herkes tarafından belli bir anlam yüklense de aslında temelinde bir belirsizlik barındırmaktadır. Benzer durumlar bir varlığın toplama, çıkarma veya çarpma yoluyla değiştirilmesi amacıyla verilen talimatlarda da bulunmaktadır. Bu durum matematikte fuzzy sayıları olarak adlandırılan sayıların tanımlanması ile sonuçlanmıştır. Fuzzy sayıları, 1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanmış ve sonrasında birçok matematikçi bu sayıların özelliklerini incelemiştir. Fuzzy sayıları, önemli birçok alanda uygulama alanına sahip olmuştur. Bunlar arasında otomatik kontrol sistemleri, optimizasyon ve bilgi sistemleri yer alır. Fuzzy kümeleri sistemi, belirsizlik içeren ifadelere bir üyelik fonksiyonu yardımıyla üyelik değeri atama mantığına dayanır. Yapılan çalışmalarda, Dubois ve Prade (1978), fuzzy sayıları ile yapılan işlemleri ortaya koymaya çalışmışlar; Heilpern (1992) fuzzy sayılarının beklenen değerleri ile ilgili çalışmıştır. Dubois ve Prade (1987) fuzzy sayılarının değerinin ne olabileceği ile ilgili bir çalışma yapmış, Choobineh ve Li (1993) fuzzy sayılarının nasıl sıralanabileceği üzerine eğilmişlerdir. Fuzzy sayıları ile ilgili bu çalışmalar Kosinski tarafından 2006'da yapılan fuzzy sayı analizi ve diğer çalışmalarla halen devam etmektedir.

Fuzzy sayıları matematikte ilgi çekici olmaya devam ederken bazı araştırmacılar “fuzzy sayıları” ifadesi yerine “fuzzy aralıkları” ifadesini kullanmayı tercih etmiştir. Bunun sebebi, fuzzy sayılarının aslında bir sayı değil aralıkların bir genellemesi olmasıdır. Aynı zamanda fuzzy sayılarının klasik sayıların tüm cebirsel özelliklerini sağladığı söylenemez ve fuzzy aritmetik, sayıların değil aralık aritmetiğinin cebirsel özelliklerini miras alır.

Fuzzy sayıları ile yakından ilgili olan kademeli sayılar, Fortin ve arkadaşları tarafından (2008) yılında tanımlanmıştır. Bu sayılar da yine bir üyelik fonksiyonu yardımıyla üyelik değeri atama temeline dayanır. Fuzzy sayıları belirsizliği temsil etmeyi hedeflerken, kademeli sayılar dijital sistemlerde ve sinyal işleme bağlamında değerlerin yumuşak geçişi ve ayrıklaştırılması ile ilgilidir. Lietard ve Rocacher (2009), kademeli sayılar kullanılarak değerlendirilen toplamlı koşulları ele almışlardır. Sadeqi ve Azari'nin 2011'de ortaya koydukları “Kademeli lineer normlu uzaylar” çalışması bu alandaki önemli çalışmalardan birisidir.

Kademeli lineer normlu uzaylar üzerinde yapılan çalışmalar son birkaç yılda hız kazanmaya başlamıştır. Özellikle bu uzaylardaki dizilerin yakınsaklığı üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Aiche ve Dubois (2012), rastgele fuzzy aralıklar için sıralama

yöntemlerine olasılık ve kademeli sayı yaklaşımlarını uygulamışlar; Eftefagh ve ark. (2020), kademeli lineer normlu uzayların önemli özellikleri ve bir diğer çalışmada da bu uzayların topolojik özelliklerini incelemişlerdir. Choudhury ve ark. 2021’de kademeli lineer normlu uzaylarda  $I$  –yakınsaklığı; 2022’de bu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklığı; 2022’de  $I$  –istatistiksel yakınsaklığı ve yine 2022’de  $I^K$  –istatistiksel yakınsaklık ve sonuçlarını ele almışlardır. Burada hem  $I$  hem de  $K$  birer idealdir.

## 1.2. Tezin Amacı

Fortin ve arkadaşları tarafından tanımlanmış olan kademeli sayılar temel alınarak; kademeli lineer uzaylarda elde edilmiş olan yakınsaklık türleri hakkında sonuçlar elde etmek bu çalışmanın amacını oluşturmaktadır. Idealler yardımıyla bir çok yakınsaklık türünün genelleştirilebildiği düşünülerek bu alanda yapılan çalışmalar incelenmiş,  $I$  –istatistiksel yakınsaklık tanımında lacunary dizilerinin elemanlarının kullanılması durumunda nasıl sonuçların elde edileceği ortaya konulmuştur. Ayrıca, bu sonuçların daha önceki sonuçlar ile nasıl benzerlik ya da farklılıklar gösterdiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

## 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tez çalışmasının bu bölümünde, temel tanımlar, örnekler ve teoremler sunulmuştur.

**Tanım 2.1. (Asimptotik Yoğunluk)**  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\chi_A$  fonksiyonu  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun.

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k)$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d_n(A) \quad \text{ve} \quad \bar{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d_n(A)$$

olmak üzere

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A)$$

limiti mevcutsa bu limite  $A$  kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Fast, 1951).

**Tanım 2.2. (İstatistiksel Yakınsaklık)** Her  $\varepsilon > 0$  için,  $(x_k)$  reel sayı dizisi için aşağıda tanımlanan limit sıfır oluyorsa yani,

$$d(\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise bu dizi  $L \in \mathbb{R}$  sayısına istatistiksel yakınsaktır. Bu durum  $st - \lim x_k = L$  şeklinde yazılır. İstatistiksel yakınsak diziler kümesi çoğunlukla  $S$  simgesi ile gösterilir. Doğal yoğunluk tanımı gereğince bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

(Fast, 1951).

**Teorem 2.1.**  $d$  fonksiyonu  $A$  kümesinin asimptotik yoğunluğu olmak üzere,  $st - \lim x_k = L$  olması için gerek ve yeter şart  $\lim y_k = L$  ve  $d\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\} = 0$  olacak şekilde yakınsak bir  $y = (y_k)$  dizisinin var olmasıdır (Fast, 1951).

**Tanım 2.3. (Lacunary Dizisi)**  $k_0 = 0$  ve  $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$  şartlarını sağlayan tamsayıların bir  $\theta = (k_r)$  dizisi lacunary dizisi olarak adlandırılır. Burada  $J_r = (k_{r-1}, k_r]$  ve  $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$  şeklindedir.

**Örnek 2.1**  $\theta = (r^2)$  dizisi bir lacunary dizisi tanımlar.

**Örnek 2.2**  $\theta = (r)$  dizisi bir lacunary dizisi tanımlamaz. Çünkü  $k_0 = 0$  olduğu halde  $h_r = k_r - k_{r-1} = 1$  dir.

**Tanım 2.4. (Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık)**  $\theta = (k_r)$  bir lacunary dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $(x_k)$  reel sayı dizisi olmak üzere aşağıda tanımlanan limit sıfır oluyorsa yani,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |k \in J_r : |x_k - L| \geq \varepsilon| = 0$$

ise  $x$  dizisinin  $L$  sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır olduğu söylenir. Bu durum çoğunlukla  $S_\theta - \lim x_k = L$  biçiminde; lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi ise  $S_\theta$  şeklinde gösterilir (Fridy ve Orhan, 1993).

**Tanım 2.5. (Kuvvetli Cesáro toplanabilir diziler)** İstatistiksel yakınsaklık ile yakından alakalı olan ve kuvvetli Cesáro toplanabilir diziler,

$$|C_1| := \left\{ x : \text{for some } L, \lim_n \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilir (Fridy ve Orhan, 1993).

**Tanım 2.6. ( $N_\theta$  Uzayı)**

$$N_\theta := \left\{ x : \text{for some } L, \lim_r \left( \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}.$$

**Tanım 2.7. (İdeal)**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi olmak üzere  $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$  ailesi, için eğer,  $\emptyset \in I$ , her  $A, B \in I$  için  $A \cup B \in I$  ve her  $A \in I$  ve her  $B \subseteq A$  için  $B \in I$  oluyorsa  $I$  ailesine bir ideal adı verilir.  $\mathbb{N} \notin I$  oluyorsa bu ideal gerçek ideal;  $I$  bir gerçek ideal olduğunda  $\forall n$  doğal sayısı için  $\{n\} \in I$  sağlanıyorsa bu ideal uygun ideal olarak adlandırılır (Kostyrko ve ark., 2000).

**Tanım 2.8. (Süzgeç)**  $F \subset 2^{\mathbb{N}}$  ailesi için,  $\emptyset \notin F$ , her  $A, B \in F$  için  $A \cap B \in F$  ve her  $A \in F$  ve her  $B \supseteq A$  için  $B \in F$  oluyorsa  $F$  ailesine  $I$  ideali ile ilgili süzgeç denir.

**Önerme 2.1.**  $I$  ideali  $\mathbb{N}$  de bir uygun ideal olsun. Bu durumda

$$F = F(I) = \{M = \mathbb{N} \setminus A : A \in I\}$$

ailesi  $\mathbb{N}$  de bir süzgeçtir.

**Tanım 2.9. ( $I$  – yakınsaklık)**  $x = (x_k)$  reel sayı dizisi olsun. Eğer, her  $\varepsilon > 0$  için,

$$A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi  $I$  idealine ait oluyorsa bu dizi  $L \in \mathbb{R}$  sayısına  $I$  – yakınsaktır (Kostyrko ve ark., 2000).

**Örnek 2.3.**  $I_f$  kümesi,

$$I_f = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sonlu}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu küme uygun ideal özelliklerini sağlar ve bu idealin kullanılması durumunda bilinen yakınsaklık elde edilir.

**Örnek 2.4.**  $I_d$  kümesi,

$$I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $I_d$  bir uygun idealdir ve  $I_d$  – yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

**Tanım 2.10. ( $I$  – istatistiksel yakınsaklık)**  $x = (x_k)$  dizisi verilsin. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $\delta > 0$  sayıları için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\}$$

kümesi  $I$  idealine ait oluyorsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  sayısına  $I$  – istatistiksel yakınsak bir dizidir denir (Savaş ve Das, 2011).

**Örnek 2.5.**  $y = (y_n)$  dizisi,

$$y_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ ile } 10 \text{ arasında ise} \\ n-10, & n \geq 10 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve  $I_d$  ideali göz önüne alınsın.  $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$  olmak üzere  $X$  normlu uzayında  $x = (x_k)$  dizisi,

$$x_k = \begin{cases} ku, & n - [\sqrt{y_n}] + 1 \leq k \leq n, n \notin A \\ ku, & n - y_n + 1 \leq k \leq n, n \in A \\ \theta, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $x$  dizisi  $I$ -istatistiksel yakınsaktır fakat istatistiksel yakınsak değildir. Burada  $u \in X$  sayısı,  $\|u\| = 1$  şeklinde bir sayı ve  $\theta$ ,  $X$  uzayının etkisiz elemanıdır.

**Tanım 2.11. (Metrik Uzay)** Boştan farklı bir  $X$  kümesi üzerinde  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonu tanımlansın.  $d$  fonksiyonu için,  $x, y, z \in X$  olmak üzere,

**M1)**  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

**M2)**  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetri),

**M3)**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa  $d$  fonksiyonu  $X$  uzayında bir metrik;  $(X, d)$  ise bir metrik uzay belirtir. Burada M1, M2 ve M3 şartları metrik aksiyomlarıdır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Örnek 2.6.**  $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $d(x, y) = |x - y|$  olsun. Bu fonksiyon reel sayılarda bir metrik belirtir ve mutlak değer metriği olarak adlandırılır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Örnek 2.7.**  $d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$  şeklindeki fonksiyon bir metrik belirtir ve Öklid metriği olarak adlandırılır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Örnek 2.8.**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $x, y \in X$  olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir metrik belirtir ve ayrık metrik olarak adlandırılır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Tanım 2.12. (Lineer Uzay)** Boş olmayan bir  $L$  kümesi verilsin.  $\mathbb{R}$  ve  $\mathbb{C}$  sırasıyla reel ve kompleks sayılar cismi olmak üzere,

A)  $L$  kümesi  $+$  işlemine göre bir değişmeli gruptur. Yani,

A1) Her  $x, y \in L$  için  $x + y \in L$  dir,

A2) Her  $x, y, z \in L$  için  $x + (y + z) = (x + y) + z$  dir,

A3) Her  $x \in L$  için  $x + \theta = \theta + x = x$  olacak şekilde  $\theta \in L$  vardır,

A4) Her  $x \in L$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde  $-x \in L$  vardır,

A5) Her  $x, y \in L$  için  $x + y = y + x$  dir.

B)  $x, y \in L$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

B1)  $\alpha x \in L$  dir,

B2)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  dir,

B3)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  dir,

B4)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  dir,

B5)  $1.x = x$  dir (Burada 1,  $\mathbb{C}$  cisminin birim elemanıdır)

oluyorsa  $L$  kümesine  $\mathbb{R}$  ve  $\mathbb{C}$  cismi üzerinde bir lineer uzay denir.

**Tanım 2.13. (Normlu Uzay)** Bir lineer  $N$  uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun  $x$  noktasındaki değeri  $\|x\|$  ile gösterilsin. O halde,

$$N1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

şartları sağlanıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $N$  lineer uzayı üzerinde bir norm ve  $(N, \|\cdot\|)$  ikilisine normlu uzay denir.

**Örnek 2.9.**  $\|\cdot\|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|x\| = |x|$  olarak tanımlanırsa  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  uzayı bir normlu uzaydır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Örnek 2.10.**  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$  olarak tanımlanırsa  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  uzayı bir normlu uzaydır ve Öklid normlu uzayı olarak adlandırılır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Tanım 2.14. (Normlu uzaylarda yakınsaklık)**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_k)$  bu uzayda bir dizi olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için  $k > k_0$  için  $\|x_k - L\| < \varepsilon$  koşulunu sağlayacak şekilde bir  $k_0$  sayısı bulunabilirse  $x$  dizisi  $L$  sayısına yakınsaktır denir (bkz. Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.15. (Normlu uzaylarda sınırlı dizi)**  $X$  bir normlu uzay ve  $x = (x_k)$  dizisi bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $\|x_k\| \leq K$  olacak şekilde bir  $K \geq 0$  sayısı bulunabilirse  $x$  dizisi sınırlıdır (bkz. Bayraktar, 2006).

**Tanım 2.16.** Eğer  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu vektör uzayı ise,  $d(x, y) = \|x - y\|$  bir metrik tanımlar. Böylece bir normlu lineer uzay tanımlanan  $d$  metriği ile daima bir metrik uzay gibi değerlendirilebilir (bkz. Bayraktar, 2006).

**Tanım 2.17. (Kademeli Sayı)**  $\tilde{r}$  kademeli sayısı,

$$A_{\tilde{r}}: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan ilişkili fonksiyon ile anlamlıdır. Tüm kademeli sayıların kümesi  $G(\mathbb{R})$  ile gösterilir. Eğer her  $\xi \in (0,1]$  için  $A_{\tilde{r}}(\xi) \geq 0$  oluyorsa bu sayılar negatif değer almayan kademeli sayılar olarak adlandırılır ve bu sayıların kümesi  $G^*(\mathbb{R})$  ile gösterilir (bkz. Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.18.**  $*$  işlemi  $\mathbb{R}$  de bir işlem;  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in G(\mathbb{R})$  kademeli sayıların ifade eden fonksiyonlar

$$A_{\tilde{r}_1} \text{ ve } A_{\tilde{r}_2} \text{ olsun. Bu durumda } \tilde{r}_1 * \tilde{r}_2 \in G(\mathbb{R}) \text{ ifadesi } A_{\tilde{r}_1 * \tilde{r}_2}(\xi), \forall \xi \in (0,1] \text{ fonksiyonu}$$

ile tanımlıdır.  $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$  toplamı ve  $c \tilde{r}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) çarpımı;

$$A_{\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2}(\xi) = A_{\tilde{\gamma}_1}(\xi) + A_{\tilde{\gamma}_2}(\xi) \quad \text{ve} \quad A_{c\tilde{\gamma}}(\xi) = cA_{\tilde{\gamma}}(\xi)$$

şeklinde tanımlanır (bkz. Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.19.** Herhangi bir  $p \in \mathbb{R}$  sayısı için  $\tilde{p}$  sayısını tanımlayan fonksiyon her  $\xi \in (0,1]$  için  $A_{\tilde{p}}(\xi) = p$  şeklindedir. Yani,  $\tilde{0}$  ve  $\tilde{1}$  sabit kademeli sayıları  $A_{\tilde{0}}(\xi) = 0$  ve  $A_{\tilde{1}}(\xi) = 1$  şeklinde ifade edilir (bkz. Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.20. (Kademeli lineer normlu uzay)**  $X$  bir reel lineer uzay ve  $\|\cdot\|_G: X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  bir fonksiyon olsun. Her  $\xi \in (0,1]$  ve her  $x, y \in \mathbb{R}$  için,

$$G1) A_{\|x\|_G}(\xi) = A_{\tilde{0}}(\xi) \text{ ancak ve ancak } x = 0,$$

$$G2) \text{ Herhangi bir } \lambda \in \mathbb{R} \text{ sayısı için } A_{\|\lambda x\|_G}(\xi) = |\lambda| A_{\|x\|_G}(\xi),$$

$$G3) A_{\|x+y\|_G}(\xi) \leq A_{\|x\|_G}(\xi) + A_{\|y\|_G}(\xi)$$

şartları sağlanıyorsa  $(X, \|\cdot\|_G)$  uzayına kademeli lineer normlu uzay denir ve kısaca  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  ile gösterilir (bkz. Choudhury ve Debnath, 2022).

**Örnek 2.11.**  $X = \mathbb{R}_+^n$  ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ve  $\lambda \in (0,1]$  için  $\|\cdot\|_G$  normu,

$$A_{\|\cdot\|_G}(\xi) = e^\xi \sum_{i=1}^n |x_i|$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzaydır (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Örnek 2.12.**  $C[0,1]$  uzayı, bilinen lineer işlemlere göre  $[0,1]$ 'de tanımlanan tüm reel değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere,  $X = C[0,1]$  olsun.  $C[0,1]$ 'de iki norm,

$$\|f\|_0 = \left( \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \|f\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} \{|f(t)|\}$$

olmak üzere,  $\|\cdot\|_G: C[0,1] \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  fonksiyonu,

$$A_{\|f\|_G}(\lambda) = \begin{cases} \|f\|_0, & 0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ ise,} \\ \|f\|_1, & \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \leq \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $(C[0,1], \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzaydır (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.21. (Kademeli lineer normlu uzayda sınırlılık)**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi olsun. Eğer her  $\xi \in (0,1]$  ve  $k \in \mathbb{N}$  için  $A_{\|x_k\|_G}(\xi) \leq B$  olacak şekilde bir  $B = B(\xi) > 0$  sayısı varsa  $(x_k)$  dizisi bu uzayda sınırlıdır denir (bkz. Choudhury ve Debnath, 2022).

**Tanım 2.22. (Kademeli lineer normlu uzayda yakınsaklık)**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0,1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $k \geq k_0$  olduğunda  $A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $k_0 = k_0(\xi) \in \mathbb{N}$  sayısı bulunabilirse  $(x_k)$  dizisi bu uzayda  $x \in X$  sayısına yakınsaktır denir (bkz. Choudhury ve Debnath, 2022).

**Tanım 2.23. (Kademeli lineer normlu uzayda istatistiksel yakınsaklık)**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0,1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli istatistiksel yakınsak denir ve  $S(G) - \lim x = x$  şeklinde gösterilir (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Tanım 2.24. (Kademeli lineer normlu uzayda lacunary istatistiksel yakınsaklık)**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi,  $\xi \in (0,1]$  ve  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli lacunary istatistiksel yakınsak denir ve  $S_\theta(G) - \lim x = x$  şeklinde gösterilir (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Örnek 2.13.**  $X = \mathbb{R}$  ve  $(x_k) = (k^2) \in \mathbb{R}$  dizisi için  $\|\cdot\|_G$  normu,

$$A_{\|x\|_G}(\xi) = e^{\xi}|x|$$

olarak tanımlansın.

$$\theta = (\theta_n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise,} \\ 3^n, & n \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere  $(x_k)$  dizisi  $S_\theta(G)$  –yakınsak değildir (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Tanım 2.25. (Kademeli lineer normlu uzayda  $I$  –yakınsaklık)**  $(x_k)$  dizisi

$GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0,1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\{k \in \mathbb{N} : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

olması durumunda  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli  $I$  – yakınsaktır denir (Choudhury ve Debnath, 2021).

**Tanım 2.26. (Kademeli lineer normlu uzayda  $I$  – istatistiksel yakınsaklık)**  $(x_k)$  dizisi

$GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0,1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

olması durumunda  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır denir (Choudhury ve Debnath, 2022).

### 3. KADEMELİ LİNEER NÖRMLÜ UZAYLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Choudhury ve Debnath (2022) tarafından çalışılmış olan kademeli lineer normlu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına dair tanımlamalar, örnekler ve elde edilen sonuçlar verilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklığın lacunary dizileri kullanılarak tekrar ele alınmasından sonra, kademeli lineer normlu uzaylarda da lacunary istatistiksel yakınsaklık ilgi çekici olmuştur.  $(X, \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında herhangi bir  $x = (x_k)$  dizisi için lacunary istatistiksel yakınsaklık şu şekilde tanımlanır.

**Tanım 3.1.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi,  $\xi \in (0,1]$  ve  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} = 0$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli lacunary istatistiksel yakınsak denir ve  $S_\theta(G) - \lim x = x$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.1.**  $X = \mathbb{R}^m$  ve  $\lambda \in (0,1]$  için  $\|\cdot\|_G$  normu  $A_{\|\cdot\|_G}(\xi) = e^\xi \sum_{i=1}^n |x_i|$  olarak verilsin. Lacunary dizisi

$$\theta = (k_r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \text{ ise,} \\ 3^r, & r \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere  $(x_i)$  dizisi

$$(x_i) = \begin{cases} (0,0, \dots, 0, m), & i = p^2, p \in \mathbb{N} \text{ ise,} \\ (0,0,0, \dots, 0) & \text{diğer,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{i \in J_r : A_{\|x_i - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = 3 \lim_r \frac{1}{3^r} |\{i \in (3^{r-1}, 3^r] : A_{\|x_i - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3 \lim_r \frac{1}{3^r} |\{i \leq 3^r : A_{\|x_i - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| \\
&\leq 3 \lim_r \frac{[\sqrt{r}]}{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $[p]$  ifadesi  $\leq p$  özelliğini sağlayan en büyük tamsayıdır. O halde  $(x_i)$  dizisi 0 sayısına kademeli lacunary istatistiksel yakınsaktır.

**Örnek 3.2.**  $X = \mathbb{R}$  ve  $(x_i) = (i^2) \in \mathbb{R}$  dizisi için  $\|\cdot\|_G$  normu  $A_{\|x\|_G}(\xi) = e^\xi |x|$

olarak tanımlansın.

$$\theta = (k_r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \text{ ise,} \\ 3^r, & r \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere;

- Eğer  $x \leq 0$  ise  $\varepsilon = \frac{1}{2} e^\xi$  seçilirse,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{i \in J_r : A_{\|x_i - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = \lim_r \frac{3}{r} \left| \left\{ i \in (3^{r-1}, 3^r] : A_{\|i^2 - x\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{2} e^\xi \right\} \right| = 1$$

olduğundan  $(x_i)$  dizisi lacunary istatistiksel yakınsak değildir.

- Eğer  $x > 0$  ise bu durumda  $x_{i_0-1} \leq x \leq x_{i_0}$  olacak şekilde bir  $i_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu durum iki alt durumda incelenebilir.

$$0 < x < 1 \text{ ise } \varepsilon = \frac{1}{2} e^\xi \min\{x, 1-x\} \text{ olmak üzere, } \lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in J_r : A_{\|x_i - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = 1$$

olur ki yine  $(x_i)$  dizisi lacunary istatistiksel yakınsak değildir.

$$x \geq 1 \text{ ise } \varepsilon = \frac{1}{2} e^\xi \min\{x - x_{i_0} - 1, x_{i_0} - x\} \text{ seçilirse,}$$

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{i \in J_r : A_{\|x_i - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}| = 1$$

olur ki  $(x_i)$  dizisi lacunary istatistiksel yakınsak değildir.

**Teorem 3.1.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında  $x_k \rightarrow x (S_\theta(G))$  şeklinde bir dizi ve  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda bu dizinin  $(S_\theta(G))$ -limiti tektir.

**Teorem 3.2.**  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  dizileri  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında iki dizi ve  $x_k \rightarrow x (S_\theta(G))$  ve  $y_k \rightarrow y (S_\theta(G))$  olsun. Bu durumda,

- i)  $x_k + y_k \rightarrow x + y (S_\theta(G))$
- ii)  $cx_k \rightarrow cx (S_\theta(G))$

dir.

#### 4. KADEMELİ LİNEER NÖRMLU UZAYLARDA $I$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Choudhury ve Debnath (2022) tarafından çalışılmış olan kademeli lineer normlu uzaylarda  $I$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili tanımlamalar, bazı örnekler ve elde edilen sonuçlar ele alınmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık ve  $I$ -yakınsaklık kavramlarının birlikte kullanılarak daha genel sonuçlar elde edilmesini sağlayan  $I$ -istatistiksel yakınsaklık Savaş ve Das (2011) tarafından tanımlanmıştır. Bu kavramın kademeli lineer normlu uzaylarda ele alınması ile çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

**Tanım 4.1.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0,1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

olması durumunda  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli  $I$ -istatistiksel yakınsaktır denir.

**Örnek 4.1.**  $X = \mathbb{R}^m$  ve  $\|\cdot\|_G$  normu  $A_{\|\cdot\|_G}(\xi) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_k}$  olarak verilsin.  $I = I_d$  olmak üzere,

$$\mu_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 10 \text{ ise,} \\ n-10, & n \geq 10 \text{ ise,} \end{cases} \quad \text{ve} \quad S = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$$

olsun. Bu halde  $x_k = \begin{cases} (0,0,0,\dots,0,k), & n - [\mu_n] + 1 \leq k \leq n, n \notin S, \\ (0,0,0,\dots,0,k), & n - \mu_n + 1 \leq k \leq n, n \in S, \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$

dizisinin kademeli  $I$ -istatistiksel yakınsaklık durumu incelensin.

$\forall \varepsilon > 0$  için  $(0 < \varepsilon < 1)$  ve  $n \rightarrow \infty$  ve  $n \notin S$  için,

$$\frac{1}{\mu_n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = \frac{[\mu_n]}{\mu_n} \rightarrow \infty$$

ve dolayısıyla her  $\delta > 0$  ve bazı  $k_1 \in \mathbb{N}$  ler için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subseteq S \cup \{1, 2, \dots, k_1\}$$

elde edilir.  $\lim_n \left( 1 - \frac{\mu_n}{n} \right) = 0$  olduğundan her  $n \geq k_2$  için  $1 - \frac{\mu_n}{n} < \frac{\delta}{2}$  olacak şekilde  $k_2$

vardır. O halde,

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n - \mu_n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \frac{1}{n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\leq 1 - \frac{\mu_n}{n} + \frac{1}{n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\mu_n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

ve böylece,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\}$$

$$\subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_n} \left| \left\{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \cup \{1, 2, \dots, k_2\}$$

$$\subset S \cup \{1, 2, \dots, k_3\}$$

olur. Burada  $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$  dir.  $d(S) = 0$  olduğundan,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

yani  $(x_k)$  dizisi 0'a kademeli  $I$ -istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 4.1.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi ve  $\xi \in (0, 1]$  olsun. Aynı

zamanda  $x_k \xrightarrow{Ist-\|\cdot\|_G} x$  olması durumunda bu limit tektir.

**Teorem 4.2.**  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayı bir kademeli lineer normlu uzay ve  $(x_k)$  dizisi bu uzayda bir dizi olsun. Eğer bu dizi  $x$  sayısına kademeli istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda  $x$ 'e kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 4.3.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X, \|\cdot\|_G)$  uzayında bir dizi olsun. Eğer bu dizi  $x$  sayısına kademeli  $I$  – yakınsak ise bu durumda  $x$ 'e kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 4.4.**  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  dizileri  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında iki dizi ve  $(x_k)$  dizisi  $x$ 'e,  $(y_k)$  dizisi  $y$ 'ye kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda,

- i)  $(x_k + y_k)$  dizisi  $x + y$ 'ye kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır.
- ii)  $(cx_k)$  dizisi  $cx$ 'e kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır.

## 5. KADEMELİ LINEER NORMLU UZAYLARDA LACUNARY $I$ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde kademeli lineer normlu uzaylarda lacunary  $I$  – istatistiksel yakınsaklık kavramının nasıl ele alınabileceği incelenmiştir. Bu bölümde verilmiş olan tanım, teorem ve sonuçlar bu çalışmada elde edilmiş sonuçlardır.

1965’de Fuzzy kümelerinin Zadeh tarafından tanımlanmasının ardından bu alanda birçok çalışma yapılmaya başlanmıştır. Bu sayılar fuzzy sayıları olarak adlandırılmasına rağmen aslında aralıkların bir genelleştirilmesidir. Aynı zamanda fuzzy sayılarının klasik sayıların tüm cebirsel özelliklerini sağladığını söylemek doğru olmaz. Ayrıca fuzzy sayıları sayıların değil, aralık aritmetiğinin cebirsel özelliklerini miras alır. Bu nedenle birçok yazar “fuzzy sayıları” yerine “fuzzy aralıkları” ifadesini kullanmayı tercih etmiştir. Fortin ve ark. (2008) tarafından tanımlanan kademeli sayılar, bu durum içinde yeni çalışmalara kapı aralamıştır. Kademeli sayılar esas olarak  $(0,1]$  aralığında tanımlanan ilgili atama fonksiyonu ile tanımlanırlar. Kademeli sayılar, reel sayılarla aynı cebirsel özelliklere sahiptir ve bir çok özelliği ile fuzzy sayılarından ayrılırlar. Choudhury ve Debnath (2022) tarafından verilen ve bizim de bu çalışmada kullanacağımız kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsak tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Tanım 5.1.**  $I$  bir uygun ideal ve  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun. Her  $\xi \in (0,1]$ ;  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  ve bazı  $x \in X$  sayıları için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $X$  sayısına kademeli  $I$  – istatistiksel yakınsaktır . Bu durum

$x_k \rightarrow x(S^I - \|\cdot\|_G)$  şeklinde gösterilir (Debnath ve Debnath, 2022).

Buna göre bir önceki bölümde verilen tanımlar göz önüne alınarak kademeli lineer normlu uzaylarda yeni tanım ve teoremler şu şekilde ifade edilebilir:

**Tanım 5.2.**  $I$  bir uygun ideal,  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun. Her  $\xi \in (0, 1]$ ;  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  ve bazı  $x \in X$  sayıları için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli lacunary  $I$  – istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum  $x_k \rightarrow x(S_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 5.3.**  $I$  bir uygun ideal ve  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olmak üzere, her  $\xi \in (0, 1]$ ;  $\varepsilon > 0$  ve bazı  $x \in X$  sayıları için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli  $I$  – Cesàro toplanabilirdir denir. Bu durum  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 5.4.**  $I$  bir uygun ideal,  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun. Her  $\xi \in (0, 1]$ ;  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  ve bazı  $x \in X$  sayıları için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa  $(x_k)$  dizisi  $x$  sayısına kademeli lacunary  $I$  – toplanabilirdir denir. Bu durum  $x_k \rightarrow x(N_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 5.1.**  $I$  bir uygun ideal,  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun Bu durumda bu dizinin kademeli lacunary  $I$  – istatistiksel limiti tektir.

**İspat:**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi ve  $x \neq y$  için  $x_k \rightarrow x(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  ve  $x_k \rightarrow y(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  olsun. Tanımdan,

$$Z_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

ve

$$Z_2 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \in F(I)$$

yazılır.  $\delta = A_{\left\| \frac{x-y}{2} \right\|_G}(\xi)$  seçilsin. Bu iki kümenin kesişimleri boş kümeden farklıdır ve her

$p \in Z_1 \cap Z_2$  için

$$\begin{aligned} \delta = A_{\|x-y+x_p-x_p\|_G}(\xi) &\leq A_{\|x_p-x\|_G}(\xi) + A_{\|x_p-y\|_G}(\xi) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda  $x = y$  dir.

**Teorem 5.2.**  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  dizileri  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  uzayında  $x_k \rightarrow x(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  ve  $y_k \rightarrow y(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  şeklinde iki dizi olsunlar. Bu durumda,

i)  $x_k + y_k \rightarrow x + y(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  dir.

ii)  $c \in R$  reel sayısı için  $cx_k \rightarrow cx(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  dır.

**İspat:**

i)  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  uzayında  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  dizileri için  $x_k \rightarrow x(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  ve  $y_k \rightarrow y(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  olsun. Buna göre,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \in I$$

ve

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|y_k - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \in I$$

sağlanır. İspatı tamamlamak için  $\delta' > 0$  olduğunda,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|(x_k + y_k) - (x+y)\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta' \right\} \in I$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} A_{\|(x_k + y_k) - (x+y)\|_G}(\xi) &= A_{\|(x_k - x) + (y_k - y)\|_G}(\xi) \\ &\leq A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) + A_{\|y_k - y\|_G}(\xi) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} &\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|(x_k + y_k) - (x+y)\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \\ &\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \\ &\cup \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|y_k - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \end{aligned}$$

ve  $\delta' = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$  oluşu göz önüne alındığında ifadenin sağ taraf ideale ait olduğundan sol tarafının da ideale ait olduğu görülür.

ii) Bu ispat için, i şıkkına benzer şekilde  $\delta'' > 0$  için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|(cx_k - cx)\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta'' \right\} \in \mathcal{I}$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\{k \in J_r : A_{\|(cx_k - cx)\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} = \{k \in J_r : |c| A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2|c|} \right\}$$

$$\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\}$$

$\delta'' = \frac{\delta}{2|c|}$  seçilirse ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun.

Bu durumda;

- i) Eğer  $x_k \rightarrow x(N_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  ise  $x_k \rightarrow x(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  dir.
- ii) Eğer  $(x_k)$  dizisi kademeli sınırlı ise  $x_k \rightarrow x(S_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  olduğunda  $x_k \rightarrow x(N_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  dir.

**İspat:**

i) Her  $\varepsilon > 0$  için  $x_k \rightarrow x(N_\theta^T - \|\cdot\|_G)$  olsun. Tanım gereğince her  $\xi \in (0, 1]$  için,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) &\geq \sum_{\substack{k \in J_r \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \\ &\geq \varepsilon \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf için gerekli işlemler yapıldığında,

$$\frac{1}{\varepsilon h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur ki her  $\delta > 0$  için,

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \delta$$

yani

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \delta \right\}$$

elde edilir. Idealin ikinci özelliği göz önüne alındığında,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

bulunur. Elde edilen bu durum ispatı tamamlar yani  $x_k \rightarrow x(S_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  dir.

**ii)** Teoremin bu kısmında eğer dizi kademeli sınırlılık şartını sağlıyorsa yukarıdaki ifadenin tersinin de doğru olacağı belirtilmiştir. Kabul edelim ki  $x_k \rightarrow x(S_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  olsun. Kademeli sınırlılık şartı gereğince her  $k \in \mathbb{N}$  için  $A_{\|x_k\|_G}(\xi) \leq B$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $B$  sayısı vardır. Biliyoruz ki her  $\xi \in (0, 1]$  için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in J_r \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2}}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \\ &+ \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in J_r \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \\ &\leq \frac{B}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2B} \right\} \in I.$$

Bu aitlik durumu gereğince,

$$\begin{aligned} &\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2B} \right\} \end{aligned}$$

olur ki bu durum bize  $x_k \rightarrow x(N_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  oluşunu verir.

Bir sonraki teoremde kademeli  $I$ -istatistiksel yakınsaklık ile kademeli lacunary  $I$ -istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Theorem 5.4.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun.

- i)  $\liminf q_r > 1$  olsun. Eğer  $x_k \rightarrow x(S^\top - \|\cdot\|_G)$  ise bu durumda  $x_k \rightarrow x(S_\theta^\top - \|\cdot\|_G)$  dir.
- ii)  $\limsup q_r < \infty$  olsun. Eğer  $x_k \rightarrow x(S_\theta^\top - \|\cdot\|_G)$  ise bu durumda  $x_k \rightarrow x(S^\top - \|\cdot\|_G)$  dir.

**İspat:**

i) Kabul edelim ki  $\liminf q_r > 1$  olsun. Bu durumda yeterince büyük  $r$  sayıları için  $q_r \geq 1 + \lambda$  olacak şekilde bir  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Bu ise gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

anlamına gelir.  $x_k \rightarrow x(S^\top - \|\cdot\|_G)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  ve her  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \left| \{k \leq k_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| &\geq \frac{1}{k_r} \left| \{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \\ &\geq \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{1}{h_r} \left| \{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir.  $\delta > 0$  için her iki küme birlikte düşünüldüğünde,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r} \left| \{k \leq k_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \geq \frac{\delta \lambda}{1 + \lambda} \right\}$$

kapsama bağıntısı oluşur ki kabulden ifadenin sağ tarafı ideale ait olduğundan aranan kümenin de ideale ait yani  $x_k \rightarrow x(S_\theta^\top - \|\cdot\|_G)$  oluşu elde edilir.

ii) Eğer  $\limsup q_r < \infty$  ise her  $r$  için  $q_r < K$  olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı vardır. Kabulden dolayı  $x_k \rightarrow x(S_\theta^\top - \|\cdot\|_G)$  olduğundan  $\varepsilon, \delta, \eta > 0$  sayıları için  $C_1$  ve  $C_2$  kümeleri,

$$C_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \{k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| < \delta \right\}$$

ve

$$C_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| < \eta \right\}$$

şeklinde tanımlansın.  $F(I)$  de  $I$  idealine bağlı olarak elde edilen süzgeç olmak üzere  $C_1 \in F(I)$  olduğu açıktır. Eğer  $C_2 \in F(I)$  oluşu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$j \in C_1$  için,

$$A_j = \frac{1}{h_j} \left| \left\{ k \in J_j : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| < \delta$$

olarak tanımlayalım.  $n \in \mathbb{N}$  sayısını bazı  $r \in C_1$  sayıları için  $k_{r-1} < n < k_r$  şeklinde seçelim. Bu halde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \leq k_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in J_1 : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \dots + \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} \frac{1}{h_1} \left| \left\{ k \in J_1 : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in J_r : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \\ &\leq \left\{ \sup_{j \in C_1} A_j \right\} \frac{k_r}{k_{r-1}} \\ &< K \delta \end{aligned}$$

olur.  $\eta = \frac{\delta}{K}$  seçilirse,  $\cup \{n : k_{r-1} < n < k_r, r \in C_1\} \subset C_2$  olması da dikkate alındığında  $C_2 \in F(I)$  elde edilir.

Bir sonraki teorem kademeli  $I$ -Cesàro toplanabilme ile kademeli lacunary  $I$ -toplanabilme arasındaki ilişkiyi inceler.

**Teorem 5.5.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun.

i) Eğer  $\liminf q_r > 1$  ise  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  olduğunda  $x_k \rightarrow x(N_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  dir.

ii) Eğer  $\limsup q_r < \infty$  ise  $x_k \rightarrow x(N_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  olduğunda  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  dir.

**İspat:**

i)  $\varepsilon > 0$ ,  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  ve  $\liminf q_r > 1$  olsun. Teorem 5.4. ten biliyoruz ki yeterince büyük  $r$  sayıları için  $q_r \geq 1 + \lambda$  olacak şekilde bir  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Bu ise gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

anlamına gelir. Lacunary dizileri yardımıyla tanımlanan  $J_r = (k_{r-1}, k_r]$  aralığı düşünüldüğünde,

$$\frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{k_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi)$$

yazılabilir. Diğer yandan  $h_r$  tanımı ve  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$  oluşu kullanılırsa,

$$\frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi)$$

ve dolayısıyla,

$$\left\{ k_r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon \lambda}{1 + \lambda} \right\} \supseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\}$$

bulunur ki bu da elde edilmek istenen kapsama ilişkisidir.

ii) İspatın bu kısmında  $x_k \rightarrow x(N_\theta^I - \|\cdot\|_G)$  ve  $\limsup q_r < \infty$  olduğunu kabul edelim.

Yine Teorem 5.4. ten bilindiği üzere, her  $r$  için  $q_r < K$  olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı vardır. Her  $j \in T_1$  için,

$$D_j = \frac{1}{h_j} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon_1$$

olmak üzere  $T_1$  ve  $T_2$  kümeleri şu şekilde tanımlansın:

$$T_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon_1 \right\}$$

ve

$$T_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon_2 \right\}.$$

Burada  $T_1 \in F(I)$  olacağı açıktır.  $n \in \mathbb{N}$  sayısını bazı  $r \in C_1$  sayıları için  $k_{r-1} < n < k_r$  şeklinde seçelim. Bu halde her  $\xi \in (0, 1]$  için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) = \frac{1}{k_{r-1}} \left( \sum_{k \in J_1} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) + \sum_{k \in J_2} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) + \dots + \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} \left( \frac{1}{h_1} \sum_{k \in J_1} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} \left( \frac{1}{h_2} \sum_{k \in J_2} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) + \dots + \left( \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \left( \frac{1}{h_r} \sum_{k \in J_r} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) \right) \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} D_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} D_2 + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} D_r \leq \left( \sup_{j \in \Gamma} D_j \right) \frac{k_1}{k_{r-1}} < \varepsilon_1 K \end{aligned}$$

olur.  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{K}$  seçimi ve  $\cup \{n : i_{r-1} < n < i_r, r \in T_1\} \subset T_2$  ifadesi ile birlikte  $T_2 \in F(I)$  elde edilir.

**Teorem 5.6.**  $(x_k)$  dizisi  $GNLS(X; \|\cdot\|_G)$  kademeli lineer normlu uzayında bir dizi olsun.

i) Eğer  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  ise  $x_k \rightarrow x(S^I - \|\cdot\|_G)$  dir.

ii) Eğer  $(x_k)$  dizisi kademeli sınırlı ve  $x_k \rightarrow x(S^I - \|\cdot\|_G)$  ise  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  dir.

**İspat:**

i)  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  olsun. Kademeli  $I$  – Cesàro toplanabilme tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) &\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \\ &\geq \varepsilon \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\varepsilon n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

bulunur. Herhangi bir  $\delta > 0$  için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \delta \right\}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I \text{ yani } x_k \rightarrow x(S^I - \|\cdot\|_G)$$

istenilen sonuçtur.

ii) Bu kez  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  olduğunu kabul edelim. Dizinin kademeli sınırlı olması sebebiyle her  $k \in \mathbb{N}$  için  $A_{\|x_k\|_G}(\xi) \leq B$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $B$  sayısı vardır. Biliyoruz ki her  $\xi \in (0, 1]$  için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon}}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \\ &\leq \frac{1}{n} B \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \frac{1}{n} \varepsilon \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq B \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Her  $\delta > 0$ ,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{B} \right\}.$$

Kabulden dolayı ifadenin sağ tarafı ideale ait olduğundan,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \in I.$$

Yani  $x_k \rightarrow x(\sigma_1^I - \|\cdot\|_G)$  sonucuna ulaşılır.



## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1965'te Zadeh tarafından tanımlanan fuzzy sayıları ile ilgili çalışmalar halen devam etmektedir. 2008'de Fortin ve arkadaşları tarafından tanımlanan kademeli sayılar da son yıllarda oldukça ilgi çekici hale gelmiştir. Diğer yandan, lineer uzaylarda yakınsaklık tipleri her zaman araştırmacıların ilgisini çekmiş, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık,  $I$  – yakınsaklık ve  $I$  – istatistiksel yakınsaklık gibi yakınsaklık türleri ile daha genel sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Kademeli lineer normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık,  $I$  – yakınsaklık ve  $I$  – istatistiksel yakınsaklığın tanımlanmasının ardından bu çalışmada lacunary  $I$  – istatistiksel yakınsaklık çalışılarak konu farklı bir açıdan ele alınmaya çalışılmış; elde edilen sonuçlar eski çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

## KAYNAKLAR

- Aiche, F. and Dubois, D., 2012, Possibility and gradual number approaches to ranking methods for random fuzzy intervals, *Communications in Computer and Information Science* 299, 9-18.
- Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi*, Ankara.
- Choudhury, C. and Debnath, S., 2021, On  $I$  – convergence of sequences in gradual normed linear spaces, *Facta Universitatis Ser. Math. Inform.*, 36(3), 595-604.
- Choudhury, C. and Debnath, S., 2022, On lacunary statistical convergence of sequences in gradual normed linear spaces, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 49(1), 110-119.
- Choudhury, C. and Debnath, S., 2022, On  $I$  – statistical convergence of sequences in gradual normed linear spaces, *Matematicki Vesnik*, 74(3), 218-228.
- Choudhury, C., Debnath, S. and Eşi, A., 2022, On  $\mathcal{I}^{\kappa}$  – convergence of sequences in gradual normed linear spaces, *The Journal of Analysis* 30, 1455-1465.
- Connor, J., 1988, The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences, *Analysis* 8, 47-63.
- Das, P. and Savaş, E., 2014, On  $I$  – statistical and  $I$  – lacunary statistical convergence of order  $\alpha$ , *Bull. Irani. Math. Soc.*, 40(2), 459-472.
- Debnath, S. and Rakshit, D., 2018, On  $I$  – statistical convergence, *Iran. J. Math. Sci. Inform.*, 13(2), 101-109.
- Demir, N. and Gümüş, H., A study on  $I$  – lacunary statistical convergence of multiset sequences, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, in press.
- Dubois, D. and Prade, H., 1978, Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science*, 9(6), 613-626.
- Dubois, D., and Prade, H., 1987, The mean value of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3), 279-300.
- Dubois, D. and Prade, H., 2007, Gradual elements in a fuzzy set, *Soft Computing* 12, 165-175.

- Erdős, P. and Tenenbaum, G., 1989, Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proceedings of the London Math. Soc.* , 59(3) , 417-438.
- Ettefagh, M., Etemad, S. and Azari, F.Y., 2020, On some properties of sequences in gradual normed spaces, *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(4), 2050085.
- Ettefagh, M., Azari, F.Y. and Etemad, S., 2020, On some topological properties in gradual normed spaces, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics* 35, 549-559.
- Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* 2 , 241-244.
- Fortin, J., Dubois, D. and Fargier, H., 2008, Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16, 388-402.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J., 1981, Densities and summability, *Pacific J. Math.* 95, 293-305.
- Fridy, J.A., 1985, On statistical convergence, *Analysis* 5, No: 4, 301-313.
- Fridy J. A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.* 160, 43-51.
- Fridy, J. A., 1993, Lacunary statistical summability, *J. Math. Anal. Appl.* 173(2), 497-504.
- Fridy, J. A., 1993, Statistical limit points, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118, 1187-1192.
- Gümüş, H., 2018, A new approach to the concept of  $A^I$  –statistical convergence with the number of  $\alpha$ , *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 67(1), 37-45.
- Gümüş, H., 2015, Lacunary Weak  $I$  – Statistical Convergence, *General Math. Notes*, 28(1), 50-58.
- Heilpern, S., 1992, The expected value of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1), 81-86.
- Kosinski, W., 2006, On soft computing and modelling, *Source, Image Processing & Communications*, 11(1), 71-82.

- Kostyrko, P., Šalát T. and Wileynski, W., 2000,  $I$  – Convergence, *Real Analysis Exchange*, 26(2), 669-680.
- Kostyrko, P., Máčaj M., Šalát, T. and Sleziak, M., 2005,  $I$  – convergence and extremal  $I$  – limit points, *Math Slovaca*, 55(4), 443-464.
- Lietard, L. and Rocacher, D., 2009, Conditions with aggregates evaluated using gradual numbers, *Control Cybernet*, 38(2), 395-417.
- Maio, G. D. and Kočinac, L. D. R., 2008, Statistical convergence in topology, *Topology and its Applications*, 156(1), 28-45.
- Miller, H. I., 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347, 1811-1819.
- Patterson, R. F., 2003, On Asymptotically Statistical Equivalent Sequences, *Demonstratio Mathematica* 36(1), 149-153.
- Sadeqi, I. and Azari, F. Y., 2011, Gradual normed linear space, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8(5), 131-139.
- Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly* 66, 361-375.
- Savaş, E. And Das, P., 2011, A generalized statistical convergence via ideals, *Applied Math. Letters* 24, 826-830.
- Savaş, E. and Debnath, S., 2019, Lacunary statistically  $\Phi$ -convergence, *Note Math.*, 39(2), 111-119.
- Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum* 2, 73-74.
- Şengül, H. and Et, M., 2018,  $f$ -lacunary statistical convergence and strong  $f$ -lacunary summability of order  $\alpha$ , *Filomat*, 32(13), 4513-4521.
- Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control* 8, 338-353.
- Zhou, C., 2015, Gradual metric spaces, *Applied Mathematical Sciences* 9, 689-701.
- Zygmund, A., 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.