T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEREDEYSE KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR

Adile DÜNDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Adile DÜNDAR

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEREDEYSE KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR

Adile DÜNDAR
Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2021, … Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, neredeyse kosimplektik manifoldlar için eğrilik özellikleri verilerek neredeyse kosimplektik manifoldun Ricci solitonları bulunmuştur. Son bölüm olan dördüncü bölüm ise Ricci solitonlu neredeyse kosimplektik manifoldlar için yeni bir sınıflandırma yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değme manifold, Neredeyse kosimplektik manifold, Ricci solitonlar.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME RESULTS ON NEARLY COSYMPLECTIC MANİFOLDS

Adile DÜNDAR
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS AND COMPUTER

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2021, … Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Asst. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

This thesis study consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction and a general literature information. In the second chapter, necessary basic concepts are given. In the third part, by giving some curvature properties for nearly cosymplectic manifolds, Ricci solitons are investigated for nearly cosymplectic manifolds. In the last section, the fourth section, a new classification is given for almost cosymplectic manifolds with Ricci soliton.

Keywords: Contact manifolds, Nearly cosymplectic manifolds, Ricci solitons.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tez çalışmasının hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, eşim Süleyman DÜNDAR'a, arkadaşım Ayşe GÖKMEN'e ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Adile DÜNDAR
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

D	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	İkinci temel form
$M^n(c)$	c sabit eğrilikli uzay form
∇	Levi-Civita konneksiyonu
L	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
N	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
R	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir $1-$form olan η ile oluşturulan $(\varphi,\xi,\eta)-$üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak, Goldberg ve Yano [23] kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde bir çok çalışmaya imza atmıştır [24], [25].

Kosimplektik manifoldun, bir parçası Kähler olan tek boyutlu manifoldlar olduğunu Lipperman and Blair 1967’de tanımlamıştır [9]. Olszak'ın çalışmalarına paralel olarak Endo da neredeyse kosimplektik manifoldların geometrisini incelemiştir [1].

Hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g), $(\nabla_X \varphi)X = 0$ koşulunu sağlıyorsa neredeyse kosimplektik yapı adını alır [5].

Ricci soliton, Hamilton ın Ricci akışı (Ricci flow) nın özel bir çözümüdür [10]. Sharma, kontakt Riemann geometride ricci soliton çalışmalarına ön ayak olmuştur [12]. Daha sonra Tripathi [13], Nagaraja ve ark. [11] ve diğerleri kontakt metrik manifoldlarda Ricci solitonları geniş bir biçimde çalışmıştır.

[19] ve [31] de yazarlar genelleştirilmiş tekrarlayan manifold özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Aynı zamanda [8], [15], [16] ve [17] de genelleştirilmiş φ-tekrarlayan manifold özellikleri çalışılmıştır.

Bir n-boyutlu M Riemann manifoldunun, eğer eğrilik tensörü R, $\nabla R = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, Cartan nedeniyle lokal olarak simetrik olduğu söylenir, burada ∇, Levi-Civita bağlantısını belirtir. Son elli yılda, lokal simetrik manifoldlar kavramı, birçok yazar tarafından çeşitli şekillerde zayıflatılmıştır, örneğin tekrarlayan manifoldlar A.G.Walker tarafından [34], 2-tekrarlayan manifoldlar A. Lichnerowicz tarafından [35], Ricci tekrarlayan manifoldlar E. M. Patterson tarafından [37], concircular tekrarlayan manifoldlar T. Miyazawa tarafından [36], [21] çalışılmıştır.

Kontakt metrik manifoldların φ-tekrarlayan olması için gerekli notasyonlar Sasakian monifoldlar için De-Shaikh-Biswas [32] ve (κ,μ)-kontakt manifoldlar için Jun-Yildiz-De [33] tarafından tanıtılmıştır.

Riemann manifold üzerindeki pseudo-projektif eğrilik tensörü sırasıyla [32] ve [20] yazarları tarafından çalışılmıştır.

İkinci bölümde, manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, neredeyse kosimplektik yapılar tanıtılmış ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca neredeyse kosimplektik manifoldların Ricci solitonları incelenip bazı özellikler elde edilmiştir. Bu bölümde neredeyse kosimplektik manifoldlar için bazı sonuçlar elde edildi. Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda genelleştirilmiş φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold üzerinde çalışılmıştır. İkici kısımda Ricci-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold ile ilgili sonuç bulunmuştur. Üçüncü kısımda φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold varlığı tartışılmıştır. Dördüncü kısımda pseudo-projective φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold ve beşinci kısımda ise concircular φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold çalışmasına yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M $n-$boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi\left(M\right)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n,\Re)$ olmak üzere,

$$g\ :\ \chi(M^n)\times\chi(M^n)\to C^\infty(M^n,\Re)$$

simetrik, $2-$lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve $\left(M^n,g\right)$ ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir [O'neill; 1983]. M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M^n ye bağlantılı manifold adı verilir [O'neill; 1983].

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi\left(M\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla:\ \chi(M^n)\times\chi(M^n) &\overset{\text{2-lineer}}{\to} \chi(M^n)\\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f,g\in C^\infty(M^n,\Re),\ \forall\ \ X,Y,Z\in\chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z,$

(2) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z,$

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir [26].

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir [26].

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R &: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to \chi(M^n) \\ &R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1,3)-$tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,

(3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

$(4)\ g(R(X,Y)V,W)=g(R(V,W)X,Y),$

özelliklerini sağlar [26].

Önerme 2.1.1. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, $(1,1)-$tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y=\nabla_X EY-E\left(\nabla_X Y\right)$$

dır [26].

Önerme 2.1.2. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alan olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z)=g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir [26].

Önerme 2.1.3. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z)=-g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır [26].

Tanım 2.1.5. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. T_PM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay $\prod$ ve $V,W\in\Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2\neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W)=\frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2}$$

eşitliğine $\prod$ nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [26].

Tanım 2.1.6. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu ve $\left\{e_1,e_2,...,e_n\right\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S\ :\ \chi(M^n)\times\chi(M^n)\to\Re$$

$$(X,Y)\to S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

şeklinde tanımlı $(0,2)-$tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrca, $(0,2)-$tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır [28].

Tanım 2.1.7. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu ve $\left\{e_1,e_2,...,e_n\right\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r=\sum_{i=1}^{n}S(e_i,e_i)$$

değerine M^n nin skalar eğriliği denir [28].

Tanım 2.1.8. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^*=\rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar.

Burada her bir noktadaki iki vektör arasndaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak birime eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir [28].

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ olmasıdır [28].

Teorem 2.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanlar için,

$$R(X,Y)Z = k\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

dır [28].

Tanım 2.1.9. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. $n-$ boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir [28].

Sonuç 2.1.1. (M^n, g) bir sabit k eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise} \quad M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır [26].

Tanım 2.1.10. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\varphi : M^n \times M^n \to M^n$$
$$(t, p) \to \phi_1(P)$$

Dönüşümü

(1) $\forall$ $t \in M^n$ için, ϕ_t : $P \to \phi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall$ $t, s \in M^n$ ve $P \in M^n$ için, $\phi_{t+s}(P) = \phi_t(\phi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir $1-$parametreli grubu denir [28].

Tanım 2.1.11. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı V olmak üzere, V ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir $1-$parametreli grup ϕ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(L_V K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[K_p - (\phi_1 K)_p]$$

şeklinde tanımlanan $L_V K$ dönüşümüne V yönünde K nın Lie türevi denir ve $L_V K$ ile gösterilir [28].

Önerme 2.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir V vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $L_V(Y \otimes Z) = (L_V Y) \otimes Z + Y \otimes (L_V Z)$, $(Y, Z$ herhangi tensör alanlar)

(2) $L_V f = X(f)$, (f , K cismi üzerinde bir fonksiyon)

(3) $L_V W = [X,W]$, $W \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir [28].

Tanım 2.1.12. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir [28].

2.2. Hemen hemen değme manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M , $(2n+1)-$boyutlu bir manifold, ϕ,ξ,η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ,ξ,η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(X) = 1, \qquad \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ,ξ,η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir [28].

Tanım 2.2.2. M^{2n+1}, (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapsı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\eta(X) = g(X,\xi), \qquad g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M^{2n+1}

ye de hemen hemen değme metrik manifold denir [28].

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1} (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapsı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X,Y)=-g(X,\phi Y)$$

dır [Yano ve Kon; 1984)].

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel $2-$formu denir [28].

Tanım 2.2.4. (M^n,g) bir Riemann manifold ve $x_1,x_2,\ldots,x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w=\sqrt{|g|}dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n$ ve $g(x)>0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayda $1-$formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır [27].

Tanım 2.2.5. (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir [22].

Sonuç 2.2.2. Φ temel $2-$formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta\wedge\Phi^n\neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2. gereğince (M^n,ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir [Gonzalez; 1990].

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer w $1-$form ise, keyfi X,Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X,Y]$$

dır. Eğer w, 2 -form ise,

$$\begin{aligned}3dw(X,Y,Z) &= X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,Y)) + Z(w(X,Y)) \\ &\quad -w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y)\end{aligned}$$

dır [28].

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X,Y,Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X \phi)Z)$

(ii) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y,\phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$

(iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y,\nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi,\phi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X \Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X,Y,Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplam göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i,\phi X_i,\xi\}$ $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\right\}$$

şeklinde elde edilir [Gonzalez 1990].

Tanım 2.2.7. M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir [28].

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapsı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \Re$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alan; t, $\Re$ nin bir koordinat ve f, $M \times \Re$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \Re$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = \left(\phi X - f.\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir [28].

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)-$ tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alana F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [28].

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \\ &= -[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir [28].

Tanım 2.2.9. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J=0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [28].

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n}\times\Re$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [28].

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi+2d\eta\otimes\xi=0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [28].

Tanım 2.2.11. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde her X,Y vektör alanları için,

$$g(JX,JY)=g(X,Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir [5].

Tanım 22.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X,Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω $2-$formuna hemen hemen Hermit yapısnın temel $2-$formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlamasıdır [5].

Tanım 2.2.13. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ d\eta = 0 \ (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir [24].

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır [24].

Yardımcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ $2-$formu kapalı ise,

$$\begin{aligned}&(\nabla_{\phi X}\Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \eta(X)\left[d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)\right] \\ &+\eta(Y)\left[d\eta(\phi Z, X) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{L}_\xi g)(Z, \phi X)\right] + \eta(Z)\left[d\eta(X, \phi Y) - d\eta(\phi X, Y)\right] = 0\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [24].

Yardımcı Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y)+(\nabla_X\phi)(Y)-\eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi=0$$

eşitliği geçerlidir [24].

Örnek 2.2.2. E^4 Kaehler manifoldunun $3-$boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J\ :\ E^4\to E^4$$
$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. Ozaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur.Yani $\xi\in\chi\left(S^3\right)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η $1-$formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1,p_2,p_3,p_4)\in S^3$ için;

$$J=\begin{bmatrix}0 & -I_2\\ I_2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1,p_2,p_3,p_4)=(-p_3,-p_{4,}\ p_1,p_2)=-\xi$$

elde edilir. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X,\xi)\xi$ için;

$$g(X,\xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X,\xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi) = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - \left[(x_3 - \lambda p_1) p_3 + (x_4 - \lambda p_2) p_4 + (x_1 + \lambda p_3) p_1 + (x_2 + \lambda p_4) p_2 \right] p_1 \\ -\lambda p_4 - \left[(x_3 - \lambda p_1) p_3 + (x_4 - \lambda p_2) p_4 + (x_1 + \lambda p_3) p_1 + (x_2 + \lambda p_4) p_2 \right] p_2 \\ -\lambda p_1 - \left[(x_3 - \lambda p_1) p_3 + (x_4 - \lambda p_2) p_4 + (x_1 + \lambda p_3) p_1 + (x_2 + \lambda p_4) p_2 \right] p_3 \\ -\lambda p_2 - \left[(x_3 - \lambda p_1) p_3 + (x_4 - \lambda p_2) p_4 + (x_1 + \lambda p_3) p_1 + (x_2 + \lambda p_4) p_2 \right] p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X)=g(\phi X,\xi)$$

$$=g(JX-\eta(X)C,\xi)=0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ,ξ,η,g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur [5].

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla}^2 B$ ikinci kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 B)(Z,W,X,Y)&=(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y B)(Z,W)\\&=\nabla_X^{\perp}((\overline{\nabla}_Y B)(Z,W))-(\overline{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z,W)\\&\quad-(\overline{\nabla}_X B)(Z,\nabla_Y W)-(\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} B)(Z,W)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [30].

3. NEREDEYSE KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle neredeyse kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi ve bazı eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1. (M,φ,ξ,η,g), $(2n+1)-$boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanı X ve Y için, M^{2n+1} üzerinde ([8] p.252)

$$\varphi\xi=0, \qquad \eta(\varphi\xi)=0, \tag{1}$$

$$\varphi^2 X=-X+\eta(X)\xi, \quad g(X,\xi)=\eta(X), \quad \eta(\xi)=1, \tag{2}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y), \tag{3}$$

eşitlikleri sağlanır. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer φ, M üzerinde her vektör alanı X ve Y için

$$(\nabla_X\varphi)Y=0+(\nabla_Y\varphi)X=0 \;, \tag{4}$$

ise ve üzerinde herhangi bir vektör alanı X için $(\nabla_X\varphi)X=0$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman M, neredeyse kosimplektik (φ,ξ,η,g) yapısına sahiptir ve M ye neredeyse kosimplektik manifold adı verilir [1]. Neredeyse kosimplektik yapının $([\varphi,\varphi]+2d\eta\otimes\xi=0)$ normallik koşulu altında kosimplektik yapı olduğu bilinmektedir [1].

Ayrıca bir hemen hemen değme metrik yapı (φ,ξ,η,g) nin kosimplektik olması için gerek ve yeter koşulun φ nin paralel olması gerektiği de bilinmektedir ([1]). Bizim için bundan sonra M ¸ neredeyse kosimplektik bir manifold ve bir vektör alanıdır. ξ de Killing vektör alanı ise,

$$g(\nabla_Y\xi,Z)+g(Y,\nabla_Z\xi)=0 \tag{5}$$

yazılabilir. H tensor alanı,

$$\nabla_X \xi = HX \tag{6}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda H , (2.1) den ter simetrik olup,

$$H\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \tag{7}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Ayrıca R, S ve Q sırasıyla (1,3) tipinde Riemannian eğrilik tensorü, (0,2) tipinde Ricci tensör ve $g(QX, Y) = S(X, Y)$ eşitliği ile verilen Ricci operatör olmak üzere aşağıdaki bağıntılar [3] ve [4] ten

$$g((\nabla_X \varphi)Y, HZ = \eta(Y)g(H^2 X, \varphi Z) - \eta(X)g(H^2 Y, \varphi Z), \tag{8}$$

$$tr(H^2) = sabit\ , \tag{9}$$

$$R(Y, Z)\xi = \eta(Y)H^2 Z - \eta(X)H^2 Y, \tag{10}$$

$$S(Z, \xi) = -tr(H^2)\eta(Z), \tag{11}$$

$$(\nabla_W R)(X, Y)\xi = \nabla_W R(X, Y)\xi - R(\nabla_W X, Y)\xi - R(X, \nabla_W Y)\xi - R(X, Y)\nabla_W \xi. \tag{12}$$

şeklinde verilebilir. Neredeyse kosimplektik manifold M üzerinde (g, V, λ) Ricci soliton olsun. Ricci solitonlar g Riemann metrik, V vektör alanı, λ reel skaler, S Ricci tensör M üzerinde ve L_V Lie türev operatörü olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0\ , \tag{13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ricci solitona eğer,

- $\lambda < 0$ ise büzüşen,
- $\lambda = 0$ ise durağan,
- $\lambda > 0$ ise genişleyen

denir.

(13) te $V=\xi$ alınır ve (6) kullanılırsa

$$S(X,Y)=-\lambda g(X,Y), \tag{14}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikten, r skalar eğrilik olmak üzere,

$$QX=-\lambda X, \tag{15}$$

$$S(X,\xi)=\lambda\eta(X), \tag{16}$$

$$r=-\lambda n \tag{17}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca kovaryant türev tanımından,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi)=\nabla_W S(Y,\xi)-S(\nabla_W Y,\xi)-S(Y,\nabla_W \xi), \tag{18}$$

olduğu bilinmektedir..

3.1. Genelleştirilmiş φ-Tekrarlayan Neredeyse Kosimplektik Manifold

Bu kısımda genelleştirilmiş φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold ile ilgili önemli bir sonuç elde edilmiştir.

Tanım 3.1.1. M neredeyse kosimplektik manifold, R eğrilik tensörü olsun. Eğer her X,Y,Z,W vektör alanları için,

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z)=A(W)R(X,Y)Z+B(W)\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}. \tag{19}$$

Koşulu sağlanıyor ise M manifolduna genelleştirilmiş φ-tekrarlayandır denir. Burada A ve B,

$$A(W) = g(W,\rho_1), \qquad B(W) = g(W,\rho_2),$$

şeklinde tanımlı ρ_1 ve ρ_2 (sırasıyla A ve B nin birim vektör alanları) ile birleştirilmiş sıfırdan farklı 1-formlardır.

Teorem 3.1.1. Genelleştirilmiş $\varphi-$tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifold için ρ_1 ve ρ_2 (sırasıyla A ve B nin birim vektör alanları) ile birleştirilmiş A ve B 1-formları ile lineer bağımlıdır.

İspat 3.1.1. (2) eşitliği (19) a uygulanırsa,

$$-(\nabla_w R)(X,Y)Z) + \eta((\nabla_w R)(X,Y)Z)\xi = A(W)R(X,Y)Z + B(W)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}.$$

elde edilir ve elde edilen denkleme U ile iç çarpım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} -g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U) &= A(W)g(R,X,Y)Z,U) \\ &+ B(W)\{g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)\}, \end{aligned} \tag{20}$$

bulunur. $\{e_i\}$, $(i = 1,2,...,2n+1)$ manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (20) de $X = U = e_i$ yazıp i üzerinden toplam alınırsa,

$$-(\nabla_W S)(Y,Z) + \sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i) = A(W)S(Y,Z) + B(W)(2n)g(Y,Z), \tag{21}$$

eşitliği bulunur. Tekrardan (21) de Z yerine ξ alınıp (2) ve (11) kullanılırsa,

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi) + \sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi)\eta(e_i) = A(W)S(Y,\xi) + B(W)(2n)g(Y,\xi)$$

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi) + \sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi)\eta(e_i) = \{-tr(H^2)A(W) + (2n)B(W)\}\eta(Y), \tag{22}$$

sonucu elde edilir. (22) de eşitliğin sol tarafındaki ikinci terime (2) uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi)\eta(e_i)=\eta((\nabla_W R)(\xi,Y)\eta(\xi)=g((\nabla_W R)(\xi,Y)\xi,\xi), \tag{23}$$

bulunur. (23) te (6), (7) ve (10) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_W R)(\xi,Y)\xi,\xi) &= g(\nabla_W R(\xi,Y)\xi,\xi)-g(R(\nabla_W\xi,Y)\xi,\xi)\\
&\quad -g(R(\xi,\nabla_W Y)\xi,\xi)-g(R(\xi,Y)\nabla_W\xi,\xi)\\
&= g(\nabla_W R(\xi,Y)\xi,\xi)-g(R(HW,Y)\xi,\xi)\\
&\quad -g(R(\xi,\xi)\xi,\nabla_W Y)-g(R(\xi,Y)HW,\xi)\\
&= g(\nabla_W R(\xi,Y)\xi,\xi)-g(R(HW,\xi)\xi,Y)\\
&= g(\nabla_W H^2Y,\xi)-g(H^3W,Y)\\
&= g(Y,H^3W)-g(H^3W,Y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

ve buradan,

$$g((\nabla_W R)(\xi,Y)\xi,\xi)=0\,, \tag{24}$$

elde edilir. (24) te bulunan eşitlik (22) de yerine yazılırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi)=\{tr(H^2)A(W)-(2n)B(W)\}\eta(Y), \tag{25}$$

eşitliği bulunur. (18), (6) ve (11) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\nabla_W S)(Y,\xi) &= \nabla_W S(Y,\xi)-S(\nabla_W Y,\xi)-S(Y,\nabla_W\xi)\\
&= [\nabla_W(-\eta(Y)tr(H^2))]+tr(H^2)\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW)\\
&= [-tr(H^2)g(\nabla_W Y,\xi)-tr(H^2)g(Y,\nabla_W\xi)]+tr(H^2)\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW),
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak denklem,

$$\nabla_w S(Y,\xi)=-tr(H^2)g(Y,HW)-S(Y,HW)\,, \tag{26}$$

formunu alır. (25) ve (26) nın sol taraf eşitliklerinden,

$$-tr(H^2)g(Y,HW)-S(Y,HW)=\{tr(H^2)A(W)-(2n)B(W)\}\eta(Y), \tag{27}$$

bulunur. Y yerine ξ alınıp, (27) de (7) kullanılırsa,

$$A(W)=\left(\frac{2n}{tr(H^2)}\right)B(W), \tag{28}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. Ricci-Tekrarlayan Neredeyse Kosimplektik Manifold

Bu kısımda Ricci tekrarlayan neredeyse kosimplektik monifold varlığı tartışılmıştır.

Tanım 3.2.1. Eğer sıfırdan farklı A mevcut ise neredeyse kosimplektik manifolda Ricci tekrarlayan manifold denir öyle ki,

$$(\nabla_w S)(Y,Z)=A(W)S(Y,Z). \tag{29}$$

Teorem 3.2.1. Neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip Ricci tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold yoktur.

İspat 3.2.1. Denklem (29) da Z yerine ξ alınıp (11) kullanılırsa,

$$(\nabla_w S)(Y,\xi)=-tr(H^2)A(W)\eta(Y), \tag{30}$$

elde edilir. (18) e (6) ve (11) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_W S)(Y,\xi) &= \nabla_W S(Y,\xi)-S(\nabla_W Y,\xi)-S(Y,\nabla_W \xi)\\ &=[\nabla_W(-\eta(Y)trH^2)]+trH^2\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW)\\ &=[-trH^2 g(\nabla_W Y,\xi)-trH^2 g(Y,\nabla_W \xi)]+trH^2\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW),\end{aligned}$$

böylece,

$$\nabla_w S(Y,\xi) = -[tr(H^2)g(Y,HW) + S(Y,HW)], \tag{31}$$

bulunur. (30) ve (31) göz önüne alındığında sol taraf eşitliğinden,

$$S(Y,HW) = -tr(H^2)g(Y,HW) + tr(H^2)A(W)\eta(Y), \tag{32}$$

bulunur. (32) de Y yerine ξ alınıp (7) kullanılırsa,

$$A(W) = 0, \tag{33}$$

sonucu bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. φ -Tekrarlayan Neredeyse Kosimplektik Manifold

Bu kısımda φ -tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold varlığı tartışılmıştır.

Tanım 3.3.1. Eğer sıfırdan farklı 1-form A mevcut ise neredeyse kosimplektik manifolda φ -tekrarlayan manifold [14] denir öyle ki her X , Y , Z , W vektör alanları için,

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z = A(W)R(X,Y)Z \tag{34}$$

dir.

Teorem 3.3.1. Neredeyse kosimplektik manifold üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip φ **-** tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold yoktur.

İspat 3.3.1. Neredeyse kosimplektik φ -tekrarlayan M manifoldu ele alınsın. Bu durumda (2) ve (34) yardımıyla,

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R(X,Y)Z)\xi = A(W)R(X,Y)Z \tag{35}$$

elde edilir.

Denklem (35) e U ile iç çarpım uygulanırsa,

$$-g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U)+\eta((\nabla_W R(X,Y)Z)\eta(U)=A(W)g(R(X,Y)Z,U) \tag{36}$$

bulunur. $\{e_i\}$, $(i=1,2,...,2n+1)$ manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (36) da $X=U=e_i$ yazıp i üzerinden toplam alınırsa,

$$-\nabla_W \sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i,Y,Z,e_i)+\sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=A(W)\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i,Y,Z,e_i) \tag{37}$$

(37) de eşitliğin sol tarafının ikinci kısmının,

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=\eta((\nabla_W R)(\xi,Y)\xi)\eta(\xi)=g((\nabla_W R)(\xi,Y)\xi,\xi)=0 \tag{38}$$

olduğu daha önce ispatlanmıştı. Böylece (37),

$$-(\nabla_W S)(Y,Z)=A(W)S(Y,Z) \tag{39}$$

formunu alır. (39) da Z yerine ξ alınıp (11) kullanılırsa,

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi)=-tr(H^2)A(W)\eta(Y)\quad , \tag{40}$$

elde edilir. (18) de (6) ve (11) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_W S)(Y,\xi)&=\nabla_W S(Y,\xi)-S(\nabla_W Y,\xi)-S(Y,\nabla_W \xi)\\ &=[\nabla_W(-\eta(Y)trH^2)]+trH^2\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW)\\ &=[-trH^2 g(\nabla_W Y,\xi)-trH^2 g(Y,\nabla_W\xi)]+trH^2\eta(\nabla_W Y)-S(Y,HW),\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = -[S(Y,HW) + tr(H^2)g(Y,HW)], \tag{41}$$

elde edilir. (40) ve (41) kullanılarak,

$$S(Y,HW) = -tr(H^2)[g(Y,HW) + A(W)\eta(Y)], \tag{42}$$

bulunur. (42) de Y yerine ξ alınırsa,

$$S(\xi,HW) = -tr(H^2)[g(\xi,HW) + A(W)\eta(\xi)], \tag{43}$$

elde edilir. (43) te (2), (7) ve (14) kullanılarak,

$$-\lambda g(HW,\xi) = tr(H^2)A(W),$$

$$tr(H^2)A(W) = 0,$$

$$A(W) = 0, \tag{44}$$

elde edilir. Tanımda A sıfırdan farklı olarak verildiğinden dolayı çelişki elde edilmiş olur. Bu ise ispatı tamamlar.

3.4. Pseudo-Projektif φ-Tekrarlayan Neredeyse Kosimplektik Manifold

Bu kısımda pseudo-projektif φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold üzerinde Ricci solitonlu önemli bir sonuca ulaşılmıştır.

Tanım 3.4.1. Neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerinde, a ve b sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, pseudo-projective eğrilik tensörü $\tilde{P}$ [20]

$$\tilde{P}(X,Y)Z = aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y]$$
$$-\frac{r}{2n+1}\left(\frac{a}{2n} + b\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \tag{45}$$

şeklindedir.

Tanım 3.4.2. Eğer keyfi X, Y, Z, W vektör alanları için sıfırdan farklı 1-form A mevcut ise neredeyse kosimplektik M manifolduna pseudo-projektif φ - tekrarlayan manifold denir öyle ki,

$$\varphi^2((\nabla_W \tilde{P})(X,Y)Z) = A(W)\tilde{P}(X,Y)Z. \tag{46}$$

Teorem 3.4.1. Pseudo- projektif φ - tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

İspat 3.4.1. Bir pseudo-projektif φ -tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifoldu ele alınsın. (2) ve (46) yardımıyla,

$$-(\nabla_W \tilde{P})(X,Y)Z + \eta((\nabla_W \tilde{P})(X,Y)Z)\xi = A(W)\tilde{P}(X,Y)Z, \tag{47}$$

elde edilir. (47) ye U ile iç çarpım uygulanılırsa,

$$-g((\nabla_W \tilde{P})(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W \tilde{P})(X,Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\tilde{P}(X,Y)Z,U), \tag{48}$$

sonucu bulunur. $\{e_i\}$, $(i = 1,2,...,2n+1)$ manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (48) de $X = U = e_i$ yazıp i üzerinden toplam alınırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = A(W)\{S(Y,Z) - \frac{r}{2n+1} g(Y,Z)\}, \tag{49}$$

bulunur. (49) da Z yerine ξ alınıp (2) ve (11)i kullanılırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = A(W)\{tr(H^2) - \frac{r}{2n+1}\}\eta(Y), \tag{50}$$

eşitliği elde edilir. Denklem (18) de (6) ve (11) kullanılırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = -[S(Y,hX) + tr(H^2)g(Y,hX)], \tag{51}$$

bulunur. (50) ve (51) in sol taraf eşitliğinden,

$$S(Y,hX) = A(W)\{tr(H^2) + \frac{r}{2n+1}\}\eta(Y) - tr(H^2)g(Y,hX), \tag{52}$$

elde edilir. (52) de Y yerine ξ alınıp (7), (13) ve (17) kullanılarak,

$$A(W)\{tr(H^2) - \frac{\lambda n}{2n+1}\} = 0,$$

bulunur. Boş kümeden farklı A için,

$$\lambda = \frac{tr(H^2)(2n+1)}{n}, \tag{53}$$

sonucu bulunur. $n > 0$ olduğundan λ nın işareti $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

3.5. Concircular φ-Tekrarlayan Neredeyse Kosimplektik Manifold

Bu kısımda concircular φ-tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold üzerindeki Ricci soliton ile ilgili önemli bir sonuca varılmıştır.

Tanım 3.5.1. (M,g) concircular eğrilik tensörü [21]

$$\widetilde{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{54}$$

şeklinde verilmiştir.

Tanım 3.5.2. Eğer keyfi X,Y,Z,W için sıfırdan farklı A mevcut ise neredeyse kosimplektik manifolda concircular φ - tekrarlayan manifold denir öyle ki,

$$\varphi^2((\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z) = A(W)\tilde{C}(X,Y)Z\,. \tag{55}$$

Teorem 3.5.1. Concircular φ- tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

İspat 3.5.1. Concircular φ- tekrarlayan neredeyse kosimplektik bir M manifoldu verilmiş olsun.. (2) ve (55) gereğince,

$$-(\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z + \eta((\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z)\xi = A(W)\tilde{C}(X,Y)Z, \tag{56}$$

elde edilir. (56) da U ile iç çarpım uygulanırsa,

$$-g((\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\tilde{C}(X,Y)Z,U),. \tag{57}$$

bulunur. $\{e_i\}$, $(i = 1,2,...,2n+1)$ manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (57) de $X = U = e_i$ yazıp i üzerinden toplam alınırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = -A(W)\{S(Y,Z) - \frac{r}{2n+1}g(Y,Z)\}, \tag{58}$$

bulunur. (58) de Z yerine ξ alınıp (2) ve (11) kullanılırsa, sabit r için,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = A(W)\eta(Y)\{tr(H^2) + \frac{r}{2n+1}\}, \tag{59}$$

elde edilir. (18) de (6) ve (11) kullanılırsa,

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = -[S(Y,HW) + tr(H^2)g(Y,HW)]\,, \tag{60}$$

bulunur. (59) ve (60) ın sol taraf eşitliğinden,

$$S(Y,HW) = -\{tr(H^2) + \frac{r}{2n+1}\}A(W)\eta(Y) - tr(H^2)g(Y,HW)\,, \tag{61}$$

elde edilir. (61) de Y yerine ξ alınıp (2), (7) ve (14) kullanılarak,

$$A(W)\{tr(H^2) + \frac{r}{2n+1}\} = 0\,, \tag{62}$$

bulunur. (62) de (17) kullanılırsa, boş kümeden farklı A için,

$$\lambda = \frac{tr(H^2)(2n+1)}{n}, \tag{63}$$

sonucu elde edilir. $n > 0$ olduğundan λ nın işareti $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Neredeyse kosimplektik manifoldlar üzerine hazırlanan bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Teorem. Concircular φ- tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

Teorem. Pseudo- projektif φ- tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerindeki Ricci soliton $tr(H^2)$ nin işaretine bağlıdır.

Teorem. Neredeyse kosimplektik manifold üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip φ- tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold yoktur.

Teorem. Neredeyse kosimplektik M manifoldu üzerinde Ricci soliton verilmiş olsun. O halde Ricci solitona sahip Ricci tekrarlayan neredeyse kosimplektik manifold yoktur.

Teorem. Genelleştirilmiş $\varphi -$ tekrarlayan neredeyse kosimplektik M manifold için ρ_1 ve ρ_2 (sırasıyla A ve B nin birim vektör alanları) ile birleştirilmiş A ve B 1-formları ile lineer bağımlıdır.

Benzer yapılar neredeyse Sasakian manifoldlar gibi diğer manifold türlerinde incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Olszak, Z. - Nearly Sasakian manifolds, Tensor, N.S., 33(1979), 277-286.

[2] Olszak, Z. -Five-dimensional nearly Sasakian manifolds, Tensor, N.S., 34, 273-276 (1980).

[3] Endo, H.: On the curvature tensor of nearly cosymplectic manifolds of constant ϕ-sectional curvature. An. S¸tiint. Univ. Al. I. Cuza Ia¸si. Mat. 51(2), 439- 454 (2005)

[4] De Nicola, A., Dileo, G. & Yudin, I., On Nearly Sasakian and Nearly Cosymplectic Manifolds, Annali di Matematica (2017). https://doi.org/10.1007/s10231-017-0671-2.

[5] Blair, D.E. - Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Math. 203, Birkhauser Boston 2002.

[6] Blair, DE, Showers, D.K., Almost Contact Manifolds with Killing Structures Tensors II. J. Dier. Geom. 9(1974), 577-582.

[7] Blair, D.E., Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math. 509, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[8] Chaubey, S. K., (2013), On generalized ϕ-tekrarlayan trans-Sasakian manifolds, (to appear).

[9] Libermann, P., Sur les automorphismes innit·esimaux des structures symplectiques et de atructures de contact, 1959, Coll. G·eom. Di. Globale, pp. 3759.

[10] Hamilton, R.S., The Ricci flow on surfaces, `Mathematical and General relativity (Santa Cruz, CA, 1986)', American Math. Soc. Contemp. Math. 71 (1988), 237-262.

[11] Nagaraja, H.G.and Premalatha C.R., Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, Journal of Mathematical Analysis 3 (2) (2012), 18-24.

[12] Sharma, R., Certain results on K-contact and (k,µ)-contact manifolds, J. Geom. 89 (2008), 138-147.

[13] Tripathi, M.M., Ricci solitons in contact metric manifolds, arXiv:0801, 4222v1, [math DG] (2008).U.C. De, On ϕ-tekrarlayan Kenmotsu manifolds, Turk J. Math. 33 (2009), 17-25.

[14] De, U.C., On ϕ-tekrarlayan Kenmotsu manifolds, Turk J. Math. 33 (2009), 17--25.

[15] Jaiswal, J. P. and Ojha, R. H., (2009) , On generalized ϕ-tekrarlayan LP-Sasakian manifolds, Kyungpook Math. J., 49, pp. 779-788.

[16] Basari, A. and Murathan, C., (2008), On generalized ϕ-tekrarlayan Kenmotsu manifolds, Fen Derg. 3(1), pp. 91-97.

[17] Patil, D. A., Prakasha, D. G. and Bagewadi, C. S., (2009), On generalized ϕ-tekrarlayan Sasakian manifolds, Bull. of Math. Anal. and Appl., 1 (3), pp. 42-48.

[18] Jaiswal, J. P. and Ojha, R. H., (2009) , On generalized ϕ-tekrarlayan LP-Sasakian manifolds, Kyungpook Math. J., 49, pp. 779-788.

[19] De, U. C. and Guha, N., (1991), On generalized tekrarlayan manifolds, J. Nat. Acad. Math. India, 9, pp. 85-92.

[20] Prasad, B., A pseudo projective curvature tensor on Riemannian manifold, Bull. Cal. Math. Soc. 94 (2002), 163-169.

[21] K. Yano, Concircular geometry-I. Concircular transformations, Proceedings of the Japan Academy 16 (1940), 195-200.

[22] Gallot, S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (2004).

[23] Goldberg S. I., Yano K., *Integrability of almost cosymplectic structure*, Pacific J. Math., 31 (1969) 373-382.

[24] Olszak, Z., *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math, 4(2) (1981) 239-250.

[25] Olszak, Z., *Locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Coll. Math., 57 (1989) 73-87.

[26] O'neill, B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, (1983).

[27] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, (1965).

[28] Yano, K., Kon M., *Structures on manifolds,* Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp. Singapore, (1984).

[29] Chinea, D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds,* Annali di Matematica pura ed applicata, 156 (4) (1990**)** 15-36.

[30] Bang-Yen C., *Geometry of submanifolds*, New York, M. Dekker, (1973).

[31] Cihan, O ., On generalized recurrent Kenmotsu manifolds, Word Applied Sci. J., 2(1), (2007), pp.29-33.

[32] U. C. De, A. A. Shaikh and S. Biswas, On φ-recurrent Sasakian manifolds, Novi. Sad. J. Math. 33(2003), 13-48.

[33] J.B. Jun, A. Yildiz and U.C. De, On φ-recurrent (κ, μ)-contact metrik manifolds, Bull. Korean. Math. Soc., 45(2008), 689-700.

[34] Walkar, A. G., On Ruse's spaces of recurrent curvature, Proc. London Math. Soc. 52 (1950), 36–64.

[35] Lichnerowicz, A., Courbure, nombres de Betti, et espaces symmetriques, Proc. of the Intern. Congress of Math., vol. 2, 1952, pp. 216–223.

[36] Miyazawa, T., On Riemannian space admitting some recurrent tensor, TRU Math. J. 2(1996), 11–18.

[37] Patterson, E. M., Some theorems on Ricci recurrent spaces, J. London. Math. Soc. 27 (1952), 287–295.