T.C.

NECMETTİN ERBAKAN

ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YENİ BİR SINIFI

Muhammed Burak ARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Muhammed Burak ARI tarafından hazırlanan "Hemen Hemen Kosimplektik Manifoldların Yeni Bir Sınıfı" adlı tez çalışması 13/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Dr. Öğr. Üyesi Gülay KORU YÜCEKAYA	....
Danışman Prof. Dr. Nesip AKTAN	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Muhammed Burak ARI

Tarih: 13.06.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YENİ BİR SINIFI

Muhammed Burak ARI

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2019, 44 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Dr. Öğr. Üyesi Gülay KORU YÜCEKAYA
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Bu çalışmanın amacı; ξ karakteristik vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldları incelemektir. W_2-yarı simetrik hemen hemen kosimplektik manifoldlar ve $W_2 = 0$ koşulunu sağlayan hemen hemen kosimplektik manifoldlar üzerine çalışılmıştır. Ayrıca W_2 eğrilik tensörünü içeren hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile ilgili bazı sonuçlarda elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen kosimplektik manifold, k-nulluk dağılımı, W_2-eğrilik tensörü.

ABSTRACT

MS THESIS

A NEW CLASS OF ALMOST COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Muhammed Burak ARI

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2019, 44 Pages

Jury
Prof.Dr. Nesip AKTAN
Asst.Prof.Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA
Asst.Prof.Dr. Üyesi Melek ERDOĞDU

The purpose of this paper is to investigate almost cosymplectic manifolds with the characteristic vector field ξ belongs to the k-nullity distributions. We have studied on almost cosymplectic manifolds satisfying $W_2 = 0$ and W_2-semisymmetric almost cosymplectic manifolds. Moreover, some results related to almost cosymplectic manifolds admitting W_2-curvature tensor are also obtained.

Keywords: Almost cosymplectic manifold, k-nullity distribution, W_2-curvature tensor.

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Nesip AKTAN' a en içten dileklerimle teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren ve destek olan sevgili eşim Nurgül ARI' ya ve tüm aileme teşekkür ederim.

Muhammed Burak ARI
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

g	:	Metrik tensörü
ξ	:	Karakteristik vektör alanı
ϕ	:	Tensör alanı
η	:	1-form
M	:	Manifold
$£$	:	Lie türev operatörü
$[,]$	:	Lie parantez operatörü
Φ	:	Temel 2-form
$\otimes$	:	Tensör çarpımı
D	:	Değme dağılımı
∇	:	Levi-Civita konneksiyonu
R	:	Riemann eğrilik tensörü
S	:	Ricci eğrilik tensörü
ω	:	Hacim form
h	:	Tensör alanı
N	:	Nijenhuis tensör alanı
$\chi(M)$	:	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri alanında manifold teorisi önemli bir yere sahiptir. Manifoldlar, topolojik uzaylar üzerine kurulu bazı özel şartlara sahip ve yerel olarak Öklid uzayı olan yapılardır (Willmore, 1959). Bu sayede manifold üzerinde diferensiyellenebilir yapılar tanımlanıp bazı hesaplamalar yapmak mümkün hale gelir. (Willmore, 1959).

Son yıllarda hemen hemen değme geometri ve ilgili konulara karşı hem pür geometri açısından hem de fizik alanındaki geniş uygulamalardan dolayı giderek artan bir ilgi olmuştur (Cappelletti-Montano ve Ark., 2013). Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir (C^{∞}) sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M'ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak J. Gray 1959 yılında tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi\ ,\ \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan ϕ; $(1,1)$-tipli bir tensör alanı, ξ; bir vektör alanı ve η; 1-form olmak üzere (ϕ,ξ,η)-üçlüsü ile ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Riemann manifoldlar, temelde tek boyutlu ve çift boyutlu manifoldlar olmak üzere iki gruba ayrılır (Yano ve Kon, 1984). Çift boyutlu manifoldlar kompleks manifoldlar olarak adlandırılırken tek boyutlu manifoldlara değme manifold denir

(Yano ve Kon, 1984). Tek boyutlu manifoldların süper çekim ve M-teori gibi bazı fiziksel teoriler için çok önemli olduğu kanıtlanmıştır (Cappelletti-Montano ve Ark., 2013).

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak 1969 yılında Goldberg ve Yano tarafından kosimplektik manifold tanımlanmıştır (Goldberg ve Yano, 1969). Kosimplektik manifoldlar, hemen hemen değme manifoldların önemli bir sınıfını oluşturur. Bu çalışmada kosimplektik manifold ile; η, kapalı 1-form ve ω, 2-form olmak üzere $\eta\wedge\omega^{\eta}$ hacim formu ile donatılmış $(2n+1)$-boyutlu düzgün bir manifold kastedilmektedir. Bu tanım Libermann'ın 1958'de yaptığı kosimplektik manifoldun orijinal tanımıdır (Cappelletti-Montano ve Ark., 2013). Daha sonra Blair "kosimplektik" kavramını farklı bir anlamda yani normallik koşulunu sağlayan uygun bir hemen hemen değme metrik yapı ile donatılmış kosimplektik manifoldları ifade etmek için kullanmıştır.

S. Tanno 1969 yılında maksimum boyuta sahip otomorfizm gruplarının bağlantılı hemen hemen değme metrik manifoldlarını sınıflandırmıştır. Böyle bir M manifoldu için ξ'yi içeren düzlem kesitlerinin parçalı eğriliği c, gibi küçük bir sabittir. Eğer $c>0$ ise; M, sabit parçalı eğriliğin homojen Sasakian manifoldudur. Eğer $c=0$ ise, M, sabit holomorfik parçalı eğriliğin bir Kaehler manifoldu ile bir çember veya bir aralığın çarpımıdır. Eğer $c<0$ ise; M, bir $R\times_f C^n$ çarpım uzayıdır. 1971 yılında Kenmotsu bazı özel koşulları sağlayan değme Reimann manifoldlarının bir sınıfı üzerine çalışmıştır. Daha sonra bu sınıf Kenmotsu manifoldlar olarak adlandırılmıştır.

Olszak 1981 yılında yaptığı çalışmada; hemen hemen kosimplektik manifoldların yapısı üzerine çalışmıştır. Hemen hemen değme metrik yapının hemen hemen kosimplektik olması için belirlenmiş yeterli koşulları vermiştir. Ayrıca konformal olarak düz veya sabit ϕ-kesit eğriliğine sahip hemen hemen kosimplektik manifoldların skaler eğriliği üzerine belirli kısıtlamalar getirmiştir (Olszak, 1981).

Dacko 2000 yılında ξ vektör alanına sahip k-nulluk dağılımı ile birlikte hemen hemen kosimplektik manifoldlar üzerine çalışmıştır. Pozitif bir λ sabiti için; ξ vektör alanını içeren $(-\lambda^2)$-nulluk dağılımı yapısı olan bir sol invaryant hemen hemen kosimplektik yapı ile verilen G_λ'nın bir Lie grup olması $k<0$ olması durumunda ispatlanmıştır. Ayrıca M manifoldunun Ricci-pseudo simetrik olduğu gösterilmiştir (Dacko, 2000). Diğer taraftan, Pokhariyal ve Mishra tarafından bir Riemann manifoldunda, E-tensör alanları ve W_2 isminde yeni tensör alanları tanımlanmış ve onların özelliklerine çalışılmıştır. Daha sonra, Pokhariyal 1982 yılında bir Sasakian manifoldta bu tensör alanlarının bazı özellikleri üzerine çalışmıştır. Matsumoto, Ianus ve Mihai 1986 yılında W_2 tensör alanları ve W_2'yi içine alan P-Sasakian manifoldlara çalışmıştır. Daha sonra, A. Sarkar 2009 yılında W_2 tensör alanını içeren P-Sasakian manifoldlara çalışmıştır. S, bir (0,2)-tipinde Ricci tensörü olmak üzere W_2 eğrilik tensörü şöyle tanımlanır:

$$W_2(X,Y,U,V) = R(X,Y,U,V) + \frac{1}{n-1}[g(X,U)S(Y,V) - g(Y,U)S(X,V)] \quad (1.1)$$

Yıldız ve De 2010 yılında Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı eğrilik koşullarına çalışmışlardır. İlk olarak $W_2 = 0$ şartını sağlayan Kenmotsu manifoldların geometrik ve relativistik özelliklerine daha sonra W_2-yarı simetrik Kenmotsu manifoldlara çalışmışlardır. Ayrıca, C; konformal eğrilik tensörü, $\tilde{C}$; yarı konformal eğrilik tensörü, $\tilde{Z}$; dairesel eğrilik tensörü, P; yansıtıcı eğrilik tensörü iken, $P \cdot W_2 = 0$, $\tilde{Z} \cdot W_2 = 0$, $C \cdot W_2 = 0$ ve $\tilde{C} \cdot W_2 = 0$ şartlarını sağlayan manifoldları sınıflandırmışlardır (Yıldız ve De, 2010).

Günümüzde nulluk dağılımının çalışılması hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerine oldukça ilgi çekici bir konu olmuştur. k-nulluk dağılımı notasyonu ($k \in \mathbb{R}$) Gray (1966) ve Tanno (1978) tarafından (M,g) Riemann manifoldları çalışmasında herhangi bir $p \in M$ ve $k \in \mathbb{R}$ için;

$$N_p(k) = \{Z \in T_pM: R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\} \quad (1.2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $X,Y \in T_pM$ olmak üzere T_pM; M'nin herhangi bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör uzayını ve R; (1,3)-tipindeki Riemann eğrilik tensörünü gösterir.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde konu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölüm temel tanım ve kavramlar için ayrılmıştır. Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta, Riemann manifoldları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. İkinci alt başlıkta, hemen hemen değme manifoldlara ait temel kavramlar yer almıştır. Üçüncü alt başlıkta, kosimplektik manifoldlara ait temel tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, kosimplektik manifoldların lokal yapısı ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen kosimplektik manifoldların $W_2 = 0$ olma koşulu incelenmiş ve W_2-yarı simetrik kosimplektik manifoldların bazı özellikleri elde edilmiştir.

Son bölüm, ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, kullanılacak olan bazı temel kavramlar alt başlıklar şeklinde verilmiştir.

2.1. Riemann Manifoldları

Bu alt başlıkta, Riemann manifoldlarına ait temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1. M; (n)-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n; üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n,\mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için, M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa; M^n'ye bağlantılı manifold adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\xrightarrow{2-lineer} \chi(M^n) \\ (X,Y) &\longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n,\mathbb{R})$, $\forall X,Y,Z \in \chi(M^n)$ için,

$$(1)\ \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(2)\ \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$(3)\ \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(fY),$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir Afin konneksiyon denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü;$\forall\ X,\ Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyon sıfır torsiyon özelliği),

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği),

şartlarını sağlayan ∇ ya, M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$R: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \chi(M^n)$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1,3)$-tipindeki tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(2) $g(R(X,Y)V, W) = -g(R(X,Y)W, V)$,

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(4) $g(R(X,Y)V, W) = g(R(V,W)X, Y)$

özelliklerini sağlar (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g\big((\nabla_X F)Y, Z\big) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g\big((\nabla_X G)Y, Z\big) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,Y)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal vektör alanları olmak üzere,

$$S: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, (0,2)-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S\,(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skaler eğriliği denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel ($\nabla R = 0$) ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır. Ayrıca, bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.10. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin (1,3)-tipinde Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \qquad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere $(c = div\ C)$,

$$c(X,Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(n-2)}[(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X]$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için, $C = 0$ ve $n = 3$ için, $c = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.11. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir ve n-boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.12. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t,p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t: P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P)=\varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlayan φ ye, M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.1.4. M^n, bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $£_X(Y \otimes Z) = (£_X Y) \otimes Z + Y \otimes (£_X Z)$, $(Y, Z$ herhangi tensör alanları)

(2) $£_X f = X(f)$, $(f, K$ cismi üzerinde bir fonksiyon)

(3) $£_X V = [X, V]$, $V \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.13. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $£_X g = 0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.14. (M^n, g), $(\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.15. $(\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M^n, g) olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X,Y) = g(X,Y)H$$

eşitliği sağlayan M^n ye total umbilik alt manifold denir (Chen, 1973).

Ayrıca $\forall\, X, Y \in \chi(M^n)$ için,

$$B(X,Y) = 0$$

ise, M^n manifolduna total geodeziktir denir (Chen, 1973).

2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu alt başlıkta, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M; $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η ifadeleri de M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η ifadeleri için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\phi\xi = 0, \eta(\phi\xi) = 0, \eta(\xi) = 1 \tag{2.4}$$
$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, (ϕ,ξ,η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1}; (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X,\xi),$$
$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.5}$$

şartlarını sağlayan g metriğine, M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1}, (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X,Y) = -g(X,\phi Y) \tag{2.6}$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n,g) bir Riemann manifold ve $x_1,x_2,\dots,x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $\omega = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise ω ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayında 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak, 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot ve Ark., 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Chinea ve Gonzalez, 1990).

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer ω 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega[X,Y]$$

dır. Eğer ω 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3d\omega(X,Y,Z) = X\big(\omega(Y,Z)\big) + Y\big(\omega(Z,Y)\big) + Z\big(\omega(X,Y)\big) - \omega([X,Y],Z) \\ - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X,Y]) \end{aligned}$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, n, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

(1) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y, (\nabla_X \Phi)Z)$,

(2) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$,

(3) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$,

(4) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$,

(5) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}, X, Y, Z$ vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, olmak üzere, M^{2n+1} in açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = \sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Chinea ve Gonzalez, 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon, 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8. yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerindeki her X,Y vektör alanları için,

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair, 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J,g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair, 2002).

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak, 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ 2-formu kapalı ise,

$$\begin{aligned}(\nabla_{\phi X}\Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X\Phi)(Y,Z) - \eta(X)[d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)] \\ + \eta(Y)\left[d\eta(\phi Z, X) - \frac{1}{2}(\pounds_\xi g)(Z, \phi X)\right] + \eta(Z)[d\eta(\phi X, Y)] = 0\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Olszak, 1981).

Teorem 2.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \nabla_X\xi = -\phi^2 X \,;\, \forall\, X, Y \in \chi(M^{2n+1})$$

dır (Kenmotsu, 1972).

Tanım 2.2.13. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye Einstein manifoldu adı verilir (Öztürk, 2009).

Tanım 2.2.14. S; Ricci tensörü, a ve b; M üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

koşulunu sağlayan M, K-değme manifolduna η-Einstein manifold denir (Parasad ve Haseeb, 2017).

Tanım 2.2.15. n-boyutlu M Kenmotsu manifoldu,

$$R(X, Y) \cdot W_2 = 0$$

koşulunu sağlıyorsa manifolda W_2-yarı simetriktir (Yıldız ve De, 2010).

2.3. Kosimplektik Manifoldlar

Bu alt başlıkta, hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ \ d\eta = 0 \ \ (\eta, \text{kapalıdır}) \qquad (2.8)$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak, 1981).

Yardımcı Teorem 2.3.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) + 2d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z,X)\eta(Y) \tag{2.9}$$

dir. Burada $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ tensör alanları sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.10}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = \big(£_{\phi X}\eta\big)Y - \big(£_{\phi Y}\eta\big)X \tag{2.11}$$

dir (Blair, 2002).

Önerme 2.3.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X,Y vektör alanları için,

$$hX = \frac{1}{2}\big(£_\xi\phi\big)X,\ h(\xi) = 0 \tag{2.12}$$

$$\nabla_\xi\xi = 0,\ \nabla_\xi\phi = 0 \tag{2.13}$$

$$(\phi\circ h)X + (h\circ\phi X) = 0 \tag{2.14}$$

$$\text{İz}(h) = 0 \tag{2.15}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = 0 \tag{2.16}$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo, 2007); (Kim ve Pak, 2005).

Önerme 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için

$$\nabla_X \xi = -\phi h X \tag{2.17}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\phi Y, hX) \tag{2.18}$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo, 2007); (Kim ve Pak, 2005).

İspat. (Pastore ve Dileo, 2007) ve (Kim ve Pak, 2005) deki işlem adımları takip edilerek sonuçlar kolaylıkla bulunabilir.

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi \circ \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair, 2002).

Önerme 2.3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = -\eta(Y)hx \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlar (Ayar, 2012).

İspat. Nijenhuis tensör alanı kullanılarak direkt hesaplamalarla,

$$\phi N(X, Y) + N(\phi X, Y) = 2\eta(X)hy, \tag{2.20}$$

$$\eta\big(N(\phi X,Y)\big)=0 \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.9) ifadesinden

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big)=g(N(Y,Z),\phi X)$$

şeklinde olup (2.20) ve (2.21) ifadeleri kullanılarak ispat tamamlanır (Ayar, 2012).

Teorem 2.3.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart ∇_ϕ ve ∇_η kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak, 1981).

Önerme 2.3.4. M, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda Levi-Civita konneksiyonu her X,Y,Z vektör alanı için

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big)=g(N(Y,Z),\phi X)$$

eşitliği elde edilir. Burada D dağılımı integrallenebilir olduğundan, her $X\in D$ için, $\pounds_\xi\eta=0$ ve $[X,\xi]\in D$ dir (Öztürk ve Ark., 2014).

Tanım 2.3.2. M^n, bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p\in M^n$ noktası için T_PM^n nin r-boyutlu altuzayı $(r\leq n)$ D ve D_P nin bir koleksiyonu $D=\{D_P\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1,\dots,X_r\}$ vektör alanları U nun her $q\in M^n$ noktasında hala D_P nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılım ve $\{X_1,\dots,X_r\}$ kümesine U üzerinde D için bir lokal baz denir (Sharpe, 1997).

Tanım 2.3.3. M^n, bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. M^n nin bir haritası $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ kümesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe, 1997).

Tanım 2.3.4. M^n, bir C^∞ manifold, M^n nin r-boyutlu bağlantılı alt manifoldu N ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. Her $p \in N$ için, $D_p = T_pN$ ise N ye M^n nin r-boyutlu integral alt manifoldu denir (Sharpe, 1997).

Önerme 2.3.5. M^n bir C^∞ manifold ve w, M^n üzerinde C^∞ sınıfından bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(Kerw_p) = r$ sabit ise $Kerw_p$ M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılımdır (Sharpe, 1997).

Teorem 2.3.2. (Frobenius Teoremi) M^n, bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olmasıdır (Sharpe, 1997).

Önerme 2.3.6. M^n, bir C^∞ manifold, w, M^n üzerinde C^∞ sınıfından bir 1-form ve her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(Kerw_p) = r$ sabit olsun. Böylece $D = \{Kerw_p : p \in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in Kerw$ için $dw(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe, 1997).

Önerme 2.3.7. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter şart her X, Y vektör alanı için

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi A$$

olmasıdır.

Burada $AX = -\nabla_X \xi$ ve $h = \frac{1}{2}(£_\xi \phi)$ olarak alınmıştır (Olszak ve Dacko, 1998).

Bu koşul;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX$$

şeklinde yazılabilir (Küpeli ve Ark., 2015).

Önerme 2.3.8. M bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. M üzerinde $(1,1)$-tipinde A tensör alanı $A = -\nabla\xi$ şeklinde tanımlanırsa A bir simetrik operatördür ve

$$(1)\ A(\xi) = 0$$

$$(2)\ A \circ \phi + \phi \circ A = 0$$

$$(3)\ \operatorname{tr}(A) = 0$$

$$(4)\ \nabla_X\xi = -\phi hX$$

ifadeleri sağlanır (Öztürk ve Ark., 2014).

Önerme 2.3.9. M, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. M üzerinde $(1,1)$-tipinde h tensör alanı, $h = \frac{1}{2}(£_\xi\phi)$ şeklinde tanımlanırsa h, bir simetrik operatördür ve

$$(1)\ h(\xi) = 0$$

$$(2)\ h \circ \phi + \phi \circ h = 0$$

$$(3)\ tr(h) = 0$$

$$(4)\ tr(\phi h) = 0$$

ifadeleri sağlanır (Blair, 1970).

Önerme 2.3.10. M, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. R, Riemann eğrilik tensörü ve S, Ricci tensör alanı olmak üzere M üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için

$$R(X,Y)\xi = (\nabla_Y\phi h)X - (\nabla_X\phi h)Y$$

$$R(X,\xi)\xi = -h^2X + \phi(\nabla_\xi h)X$$

$$R(\xi,X)\xi = -\phi R(\xi,\phi X)\xi = 2h^2X$$

$$S(X,\xi) = -(div(\phi h))X$$

$$S(\xi,\xi) = -tr(h^2)$$

eşitlikleri sağlanır (Öztürk ve Ark., 2014).

Önerme 2.3.11. M, bir kosimplektik manifold ve $\widetilde{M}$, D dağılımının bir integral manifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$'nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart h'nin sıfır olmasıdır (Öztürk ve Ark., 2014).

Önerme 2.3.12. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y) + (\nabla_{X\phi})(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak, 1981).

Önerme 2.3.13. Bir hemen hemen kosimplektik manifold, bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathfrak{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak, 2005).

Önerme 2.3.14. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral alt manifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak, 2005).

İspat. Eğer yapı normal ise, her X vektör alanı için,

$$\begin{aligned} N(X,\xi) &= N_\phi(X,\xi) + 2d\eta(X,\xi)\xi \\ &= -\phi[\phi X,\xi] + \phi^2[X,\xi] + 2d\eta(X,\xi)\xi \\ &= 2\phi hX = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Bu nedenle, $h = 0$ dır. Diğer yandan, her bir X, Y vektör alanları için

$$N_{\phi}(X,Y) = [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] - [X,Y] \qquad (2.23)$$

elde edilir. Açıkça görülür ki, $N_J = 0$ olması için ancak ve ancak J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir olmalıdır. Bu nedenle (2.17) ve (2.18) ile ispat tamamlanır.

Önerme 2.3.15. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ D değme dağılımının integral alt manifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi = 0$ olmasıdır (Ayar, 2012)

İspat. Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_{\phi}(X, \xi) = 2\phi h X$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edilirse, $Y \in D$ için, $\mathrm{h}(Y) = 0$ elde edilir. $h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (2.16) ifadesi $\nabla\xi = 0$ eşitliğini gerektirir. (2.16) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla\xi = 0$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanı için $N_{\phi}(X,Y) = N_{J_D}(X,Y) = 0$ dır. Böylece D dağılımının integral alt manifoldları Kaehler yapıdadır (Ayar, 2012).

Sonuç 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen kosimplektik manifoldu $\nabla\xi = 0$ şartını sağlıyorsa bir kosimplektik manifolddur (Ayar, 2012).

İspat. Boyutunun 3 olması durumunda, D dağılımının integral alt manifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadır. Böylece Önerme 2.3.14 den dolayı ispat tamamlanır (Ayar, 2012).

Yardımcı Teorem 2.3.3. $£_{\xi}$; ξ yönündeki Lie türev operatörünü göstermek üzere hemen hemen kosimplektik manifoldlar için A tensör alanı tarafından aşağıdaki koşullar sağlanır;

$$A^2 X = -fX + f\eta(X)\xi \qquad (2.24)$$

$$(\nabla_{\xi}A)X = 0 \tag{2.25}$$

$$(£_{\xi}A)X = 0 \tag{2.26}$$

burada f pozitif olmayan bir fonksiyonu gösterir (Dacko, 2000).

3. k-NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, X, Y herhangi vektör alanları olmak üzere, $k \leq 0$ sabit sayı iken,

$$R_{XY}\xi = k(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldlar ele alınmıştır. İlk olarak, istisnai bir durum olan $k = 0$ durumu ele alınmıştır.

Teorem 3. 1. Hemen hemen kosimplektik bir M manifoldu ξ vektör alanını içeren 0-nulluk dağılımına sahiptir ancak ve ancak M, bir açık aralık ile bir Kaehler manifoldun lokal çarpımıdır (Dacko, 2000).

İspat. (2.24) eşitliğinde f fonksiyonu yerine $k = 0$ alınırsa $A = 0$ olur. Diğer taraftan $A = 0$ $(\nabla\xi = 0)$ olur ancak ve ancak M, bir açık aralık ile bir hemen hemen Kaehler manifoldun lokal çarpımı olduğu açıktır.

Bu bölümün geri kalanında (3.1) koşulunu sağlayan hemen hemen kosimplektik manifoldların lokal yapısı $k < 0$ olmak üzere ele alınmıştır.

Önerme 3.1. $k < 0$ olmak üzere M, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. Bu durumda M, Kaehler liflere sahip hemen hemen kosimplektik manifolddur (Dacko, 2000).

İspat. (3.1) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} &R_{XY\phi Z\xi} - R_{\phi X\phi Y\phi Z\xi} - R_{\phi XYZ\xi} - R_{X\phi YZ\xi} \\ &= -2k\big(\eta(Y)g(X,\phi Z) - \eta(X)g(Y,\phi Z)\big) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Aşağıdaki eğrilik özelliği hemen hemen kosimplektik manifoldlar için bilinen bir özelliktir:

$$R_{XY\phi Z\xi} - R_{\phi X\phi Y\phi Z\xi} - R_{\phi XYZ\xi} - R_{X\phi YZ\xi} = -2(\nabla_{AZ}\phi)(X,Y)$$

Bu iki denklem arasındaki ilişkiden,

$$k\big(\eta(Y)g(X,\phi Z) - \eta(X)g(Y,\phi Z)\big) = (\nabla_{AZ}\phi)(X,Y)$$

elde edilir. Son ifade de AZ yerine Z yazılırsa

$$A^2X = -kX + k\eta(X)\xi \tag{3.3}$$

bulunur ve (3.3) ifadesi dikkate alınarak

$$\eta(Y)g(X,\phi Z) - \eta(X)g(Y,\phi Z) = -(\nabla_Z\phi)(X,Y) + \eta(Z)\big(\nabla_\xi\phi\big)(X,Y)$$

bulunur. Öyleyse $\nabla_\xi\phi = 0$ iken,

$$\big(\nabla_{Z\phi}\big)X = -g(\phi AZ,X)\xi + \eta(X)\phi AZ \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. Böylece, giriş bölümünde belirtilen sonuç ile birlikte, M, Kaehler liflere sahip hemen hemen kosimplektik bir yapıdır. (3.4) ifadesi zaten daha önce (Endo, 1994) tarafından elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.1. $£_\xi^2 = £_\xi \circ £_\xi$ iken ve $k < 0$ olmak üzere, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen kosimplektik manifold için;

$$\big(£_{\xi g}\big)(X,Y) = -2g(AX,Y) \tag{3.5}$$

$$\big(£_\xi^2 g\big)(X,Y) = -4kg(X,Y) + 4k\eta(X)\eta(Y) \tag{3.6}$$

ifadeleri elde edilir (Dacko, 2000).

İspat. (3.3) ifadesinin herhangi bir hemen hemen kosimplektik manifold için gerçekten elde edileceği (Dacko ve Olszak, 1998)'de gösterilmiştir. (3.5) ifadesi kullanılarak;

$$(£_\xi^2)(X,Y) = \left(£_\xi(£_\xi g)\right)(X,Y) = 4g(A^2X,Y) - 2g\left(\left(£_\xi A\right)X,Y\right)$$

elde edilir. Bu ifade ise; (3.3) ve $\left(£_\xi A\right)X = 0$ ifadeleri yardımıyla (3.6) ifadesine dönüşür.

(Öztürk, 2009)' da Önerme 7.2.4.' de, $\alpha = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ olarak alınırsa; ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldlar için aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(\nabla_X\phi)Y = -g(\phi AX,Y)\xi + \eta(Y)\phi AX \tag{3.7}$$

$$(\nabla_X\xi) = -AX \tag{3.8}$$

$$R(X,Y)\xi = k(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \tag{3.9}$$

$$S(X,\xi) = 2nk\eta(X) \tag{3.10}$$

$$R(X,\xi)Y = k(\eta(Y)X - g(X,Y)\xi) \tag{3.11}$$

$$R(X,\xi)\xi = k(X - \eta(X)\xi) = -k\phi^2X \tag{3.12}$$

(Yıldız ve De, 2010).

Teorem 3.2. M, bir hemen hemen kosimplektik manifold ve (ϕ,ξ,η,g) ise hemen hemen kosimplektik yapı olsun. $k < 0$ olmak üzere; k-nulluk dağılımı M

manifoldunun ξ vektör alanı yapısını içerir ancak ve ancak $\lambda = \sqrt{|k|}$ iken herhangi $p \in M$ noktası için bir $(U, (t, x^1, \dots, x^{2n}))$, $p \in U$, koordinat komşuluğu vardır,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \eta = dt, \tag{3.13}$$

$$g = dt \otimes dt + e^{2\lambda t} \sum_{\mu=1}^{n} dx^{\mu} \otimes dx^{\mu} + e^{-2\lambda t} \sum_{\mu==1}^{n} dx^{n+\mu} \otimes dx^{n+p}, \tag{3.14}$$

$$\phi = e^{2\lambda t} \sum_{\mu=1}^{n} dx^{\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{n+\mu}} - e^{-2\lambda t} \sum_{\mu=1}^{n} dx^{n+\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{3.15}$$

(Olszak, 1987).

İspat. (Olszak, 1987) ve Önerme 3.1. ile ilgili prosedür izlenerek (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektik yapısının lokal yapısı tanımlanabilir. $\tilde{p} \in \tilde{U}$, $p = (0, \tilde{p})$, $\tilde{U}$; $(2n)$-boyutlu bir manifold ve $(-a, a)$; t koordinatına sahip açık bir aralık olmak üzere p'nin bir U komşuluğu vardır öyle ki $U = (-a, a) \times \tilde{U}$ dır. Ayrıca, $\tilde{U}$ üzerinde temel formları t parametresine bağlı olmayan, $-a < t < a$ olmak üzere (J_t, G_t) Kaehler yapılarının 1-parametreli bir ailesi mevcuttur ve U hemen hemen kosimplektik yapısı aşağıdaki gibidir:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \ \eta = (dt, 0), \ \phi = (0, J_t), g = dt \otimes dt + G_t \tag{3.16}$$

$\tilde{U}$; $t = 0$ ile verilen bir hiper yüzey olarak düşünülürse $(J, G) = (J_0, G_0)$ Kaehler yapısı $\tilde{U}$ üzerinde yalnızca indirgenmiş bir Kaehler yapısıdır. $\tilde{U}$'nun sınırlı bir A operatörü $\tilde{A}$ gösterilsin. Böylece, $\tilde{A}$; $\tilde{U}$'nun bir şekil operatörüdür ve aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{A}J + J\tilde{A} = 0$$

son ifade ile birlikte

$$A^2 X = -kX + k\eta(X)\xi$$

ifadesi $\tilde{A}$'nın $-\lambda$ ve λ sabit özdeğerlerinin her ikisinin de aynı çoklukta olmasını gerektirir. $-\lambda$ ve λ özdeğerlerinin özdağılımları D_- ve D_+ ile gösterilirse;

$$dimD_- = dimD_+ = n$$

olur. $\tilde{A}$ şekil operatörü Codazzi eşitliğini sağlamalıdır;

$$R_{\tilde{X}\tilde{Y}}\xi = -(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{A})\tilde{Y} + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{A})\tilde{X}$$

(3.1) ifadesi kullanılırsa aşağıdaki eşitlik

$$0 = -(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{A})\tilde{Y} + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{A})\tilde{X}$$

şeklinde olur.

Bir Codazzi tensör alanı olan ve iki farklı sabit özdeğere sahip olan $\tilde{A}$ tensör alanı paralel olmalıdır. Buna denk olarak D_- ve D_+ dağılımları da paraleldir ve G; Riemann metriği lokal olarak farklı iki metriğin çarpımı olarak ifade edilebilir. $(\tilde{U}, G)$; $\tilde{p}$'nin Riemann çarpım komşuluğuna kısıtlanır ayrıca G_1, G_2 sırasıyla $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ üzerinde Riemann metrikleri ve $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$'de D_- , D_+ dağılımlarının integral alt manifoldları olmak üzere; $\tilde{p}_1 \in \tilde{U}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{U}_2, \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$,

$$G = G_1 \times G_2$$

ve

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2.$$

H ikinci temel formu G_1 ve G_2'ye bağlı olarak ifade edilebilir, daha açık olarak

$$H(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1) = -\lambda G_1(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)\,, H(\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) = \lambda G_2(\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2), H(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_2) = 0. \qquad (3.17)$$

Yukarıda ve devamında $\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1, \tilde{Z}_1$ ve $\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2, \tilde{Z}_2$ sırasıyla $\tilde{U}_1$ $\tilde{U}_2$'ye teğet vektör alanlarını göstermektedir. G'nin eğrilik tensörü $\tilde{R}^1$ ile gösterilmektedir. Bilindiği üzere Riemann metrik çarpımında

$$\tilde{R}^1_{\tilde{X}_1\tilde{Y}_1}\tilde{Z}_1 = \tilde{R}_{\tilde{X}_1\tilde{Y}_1}\tilde{Z}_1 \text{ , } \tilde{R}^1_{\tilde{X}_1\tilde{Y}_1}\tilde{Z}_2 = 0$$

olur. Bu sonuç G_1'in lokal olarak düz olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde G_2'nin de lokal olarak düz olduğunu gösterir. $\widetilde{U}_1$; $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinatlarına sahip $\tilde{p}_1$'in bir komşuluğuna ve $\widetilde{U}_2$; $(x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$ koordinatlarına sahip $\tilde{p}_2$'nin bir komşuluğuna kısıtlanır öyle ki

$$G_1 = \textstyle\sum_{\mu=1}^{n} dx^{\mu} \otimes dx^{\mu},\ G_2 = \sum_{\mu=1}^{n} dx^{n+\mu} \otimes dx^{n+\mu} \tag{3.18}$$

J'nin katsayılarının $\widetilde{U}$ üzerindeki $(x^1, \ldots, x^{2n})$ koordinatlarına göre sabit olduğu görülmektedir. Bu da ortonormal bazın

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, J\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, J\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

holonomik olmasını sağlar. Lineer koordinatlar aynı ifadeler ile gösterilen $(x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$ koordinatlarıyla

$$J\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{n+\mu}} \tag{3.19}$$

şeklinde değiştirilir ve (3.18) de verilen G_2'nin lokal gösterimi elde edilir. (J, G)'nin $\Omega\left(\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(J\tilde{X}, \tilde{Y})\right)$ temel formu için (3.19) ifadesi ile

$$\Omega = 2\textstyle\sum_{\mu=1}^{n} dx^{\mu} \wedge dx^{n+\mu} \tag{3.20}$$

elde edilir. Şimdi $U = (-a, a) \times \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2$ üzerindeki g metriğine geri dönelim. g_{ij}; $(x^0 = t, x^1, \ldots, x^{2n})$ koordinatlarına sahip g metriğinin bileşenleri olsun. (3.16) ifadesi, $g_{00} = 1$, $g_{i0} = 0$, $1 \leq i \leq 2n$'dir. $1 \leq i, j \leq 2n$ olmak üzere g_{ij} fonksiyonları;

$$\alpha_{ij}(x^1, .., x^{2n}) = g_{ij}(0, x^1, .., x^{2n}) \tag{3.21}$$

$$\beta_{ij}(x^1,\ldots,x^{2n}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(0,x^1,\ldots,x^{2n}) \tag{3.22}$$

iken ;

$$g_{ij} = a_{ij}cosh(2\lambda t) - \frac{1}{\lambda}\beta_{ij}sinh(2\lambda t) \tag{3.23}$$

ifadesinin tek çözümüne sahip olan aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = 4\lambda^2 g_{ij} \tag{3.24}$$

2. dereceden diferensiyel denklemi (3.6) ifadesi ile sağlanmalıdır. (3.21) ifadesine göre, α_{ij}; $\widetilde{U}$ üzerinde $G = G_0$ indirgenmiş metriğinin bileşenleridir. (3.5) ifadesinden H ikinci temel formu;

$$H(\tilde{X},\tilde{Y}) = g(\tilde{A}\tilde{X},\tilde{Y}) = g(A\tilde{X},\tilde{Y}) = -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(\tilde{X},\tilde{Y})$$

şeklinde verilmiştir. (3.22) ifadesinde bulunan β_{ij}'ler $\widetilde{U}$ üzerindeki H ikinci temel formlarının bileşenleridir. (3.17) ve (3.18) ifadelerindeki formüllerden;

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij},\ \beta_{\mu v} = -\lambda\delta_{\mu v},\ \beta_{(n+\mu)(n+v)} = \lambda\delta_{\mu v},$$

dir. Ayrıca $\beta_{ij} = 0$ olur. Sonuç olarak; (3.23) yardımıyla

$$g_{\mu v} = e^{2\lambda t}\delta_{\mu v},\ g_{(n+\mu)(n+v)} = e^{-2\lambda t\delta_{\mu v}}, \tag{3.25}$$

dir. Ayrıca $g_{ij} = 0$'dir. (3.14) ifadesi bunu kanıtlar. (3.16) ve (3.22) ifadelerindeki formüllerden

$$\Phi_{\mu(n+v)} = -\Phi_{(n+v)\mu} = \delta_{\mu v} \tag{3.26}$$

dir ve diğer durumlarda $\Phi_{ij} = 0$'dır. (3.19) ve (3.20) ifadeleri yardımıyla ve $\phi_i^j = \sum_s \Phi_{is} g^{sj}$ ifadesinden ϕ operatörünün bileşenleri;

$$\phi_v^{n+\mu} = e^{2\lambda t}\delta_v^\mu,\ e_{n+v}^\mu = -e^{-2\lambda t}\delta_v^\mu \tag{3.27}$$

dir. Ayrıca $\phi_i^j = 0$'dır. Bu ise (3.15) ifadesini verir. Diğer taraftan, (3.13), (3.14), (3.15) ifadelerinde lokal olarak bir hemen hemen kosimplektik yapının verildiğini kabul edelim.

$\mu = 1, \ldots, n$ için;

$$E_0 = \xi = \frac{\partial}{\partial t}, E_\mu = e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, E_{n+\mu} = e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial x^{n+\mu}}$$

ifadelerinden oluşan $\{E_0, E_1, \ldots, E_{2n}\}$ bir ortonormal baz tanımlar. Sıfırdan farklı $[E_i, E_j]$ Lie parantez operatörleri için,

$$[E_0, E_\mu] = -\lambda E_\mu, [E_{0,} E_{n+\mu}] = \lambda E_{n+\mu} \tag{3.28}$$

olur. Ayrıca sıfırdan farklı kovaryant türevleri;

$$\begin{gathered} \nabla_{E_\mu} E_0 = \lambda E_\mu, \nabla_{E_\mu} E_\mu = -\lambda E_0, \\ \nabla_{E_{n+\mu}} E_0 = -\lambda E_{n+\mu}, \nabla_{E_{n+\mu}} E_{n+\mu} = \lambda E_0 \end{gathered} \tag{3.29}$$

bulunur ve (3.28) ve (3.29) yardımıyla $i < j$ olmak üzere herhangi $i, j = 1, \ldots, 2n$ için; $R_{E_i E_j} E_0 = 0$, $R_{E_i E_j} E_0 = \lambda^2 E_j$ 'dir.

Sonuç olarak; $k = -\lambda^2$ ile (3.1) ifadesi elde edilir (Dacko, 2000).

4. W_2-YARI SİMETRİK HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, W_2-yarı simetrik hemen hemen kosimplektik manifoldlar ve $W_2 = 0$ koşulunu sağlayan hemen hemen kosimplektik manifoldlar incelenmiştir. Bu bölümde elde edilmiş olan sonuçlar orijinaldir.

Teorem 4.1. (M, ϕ, ξ, η, g), $2n + 1$-boyutlu , ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. Eğer M manifoldu $W_2 = 0$ koşulunu sağlıyor ise bu durumda M manifoldu Einstein manifoldudur.

İspat. $X, Y, U, V \in M$ olmak üzere (1.1) ifadesinden,

$$R(X, Y, U, V) = \frac{1}{2n}[g(Y, U)S(X, V) - g(X, U)S(Y, V)] \tag{4.1}$$

elde edilir. Burada $X = U = \xi$ alınarak (4.1) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$R(\xi, Y, \xi, V) = \frac{1}{2n}[\eta(Y)S(\xi, V) - S(Y, V)] \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada ξ ile Y'nin bir kez yerleri değiştiğinde,

$$R(Y, \xi, \xi, V) = -\frac{1}{2n}[\eta(Y)S(\xi, V) - S(Y, V)] \tag{4.3}$$

bulunur. Buradan

$$R(X, Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) ifadesinde $Y = \xi$ alınırsa;

$$R(X, \xi)\xi = k(X - \eta(X)\xi) \tag{4.5}$$

bulunur. (4.3) ifadesinden,

$$g(R(Y,\xi)\xi,V) = -\frac{1}{2n}[\eta(Y)S(\xi,V) - S(Y,V)] \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ifadesi kullanılarak;

$$g(k(Y-\eta(Y)\xi),V) = -\frac{1}{2n}[\eta(Y)(k(n-1)\eta(V) - S(Y,V))] \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) ifadesi düzenlenirse;

$$kg(Y,V) - k\eta(Y)\eta(V) = -k\eta(Y)\eta(V) + \frac{1}{2n}S(Y,V) \tag{4.8}$$

bulunur. Son ifadeden,

$$S(Y,V) = 2nkg(Y,V) \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece M manifoldu bir Einstein manifoldudur.

Teorem 4.2. (M,ϕ,ξ,η,g), $2n+1$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldu $W_2 = 0$ koşulunu sağlayan bir Einstein manifoldu olsun. Böylece M; $H^{2n+1}(k)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izomorftur.

İspat: (4.9) ifadesi (4.1) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$R(X,Y,U,V) = \frac{1}{2n}[2nkg(Y,U)g(X,V) - 2nkg(X,U)g(Y,V)] \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) ifadesi düzenlenirse;

$$R(X,Y,U,V) = \frac{1}{2n}2nk[g(Y,U)g(X,V) - g(X,U)g(Y,V)] \tag{4.11}$$

bulunur ve (4.11) ifadesi son kez düzenlenirse;

$$R(X,Y,U,V) = k[g(Y,U)g(X,V) - g(X,U)g(Y,V)] \qquad (4.12)$$

bulunur. Buradan ise,

$$R(X,Y)U = k[g(Y,U)X - g(Y,V)U]$$

bulunur. Bu ise Teorem 2.1.2.'den manifoldun sabit eğriliğinin $k < 0$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile ispat tamamlanır.

Özellik 4.1. (M,ϕ,ξ,η,g), $2n+1$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde, W_2-eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) $W_2(X,Y,U,\xi) = (k-1)[g(Y,U)\eta(X) - g(X,U)\eta(Y)]$,

(2) $W_2(X,Y,\xi,\xi) = 0$,

(3) $W_2(\xi,Y,U,\xi) = (k-1)[g(Y,U) - \eta(U)\eta(Y)]$,

(4) $W_2(X,\xi,Y,\xi) = (k-1)g(\phi Y,\phi U)$.

İspat. (1.1) ifadesinde $V = \xi$ alınır ve (1.2) ifadesi kullanılırsa;

$$W_2(X,Y,U,\xi) = (k-1)[g(Y,U)\eta(X) - g(X,U)\eta(Y)] \qquad (4.11)$$

(1) özelliği bulunur. (4.11) ifadesinde $U = \xi$ alınırsa;

$$W_2(X,Y,\xi,\xi) = 0 \qquad (4.12)$$

(2) özelliği elde edilir. (4.11) ifadesinde $X = \xi$ alınırsa;

$$W_2(\xi,Y,U,\xi) = (k-1)[g(Y,U) - \eta(U)\eta(Y)] \qquad (4.13)$$

(3) bulunur. Burada (2.5) ifadesinden faydalanılarak (4) özelliği;

$$W_2(X,\xi,Y,\xi) = (k-1)g(\phi Y,\phi U) \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. M manifoldu W_2-yarı simetrik ise bir η-Einstein manifoldudur.

İspat. Tanım 2.2.15. yardımıyla;

$$\begin{aligned} &R(X,Y)W_2(Z,U)V - W_2(R(X,Y)Z,U)V - W_2(Z,R(X,Y)U)V \\ &-W_2(Z,U)R(X,Y)V = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) ifadesi ξ ile işleme alınırsa;

$$\begin{aligned} &g(R(X,Y)W_2(Z,U)V,\xi) - g(W_2(R(X,Y)Z,U)V,\xi) - g(W_2(Z,R(X,Y)U)V,\xi) \\ &-g(W_2(Z,U)R(X,Y)V,\xi) = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur. Son ifadede $X=\xi$ alınırsa;

$$\begin{aligned} &g(R(\xi,Y)W_2(Z,U)V,\xi) - g(W_2(R(\xi,Y)Z,U)V,\xi) - \\ &g(W_2(Z,R(\xi,Y)U)V,\xi) - g(W_2(Z,U)R(\xi,Y)V,\xi) = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (1.2) ifadesinde $X=\xi$ alınarak, bu ifade (4.17) de kullanılırsa, (4.17) ifadesinin ilk terimi;

$$\begin{aligned} &g(R(\xi,Y)W_2(Z,U)V,\xi) \\ &\qquad = kW_2(Z,U,V,Y) - k(k-1)\eta(Y)\eta(Z)g(U,V) \\ &\qquad + k(k-1)\eta(Y)\eta(U)g(Z,V) \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. Benzer şekilde (1.1) ve (1.2) ifadeleri kullanılarak (4.17) ifadesinin ikinci terimi;

$$g(W_2(R(\xi,Y)Z,U)V,\xi)$$
$$= k(k-1)[g(U,V)g(\phi Y,\phi Z) - \eta(V)\eta(U)g(Z,Y) + \eta(Z)\eta(U)g(Y,V)] \quad (4.19)$$

şeklinde elde edilir. Tekrar (1.1) ve (1.2) ifadeleri kullanılırsa;

$$g(W_2(Z,R(\xi,Y)U)V,\xi)$$
$$= k(k-1)[\eta(V)\eta(Z)g(U,Y) - \eta(U)\eta(Z)g(V,Y) - g(Z,V)g(\phi Y,\phi U)] \quad (4.20)$$

bulunur. (4.17) ifadesinin son terimi içinde tekrar (1.1) ve (1.2) ifadeleri kullanılırsa;

$$g(W_2(Z,U)R(\xi,Y)V,\xi)$$
$$= k(k-1)[\eta(V)\eta(U)g(Y,Z) - \eta(V)\eta(Z)g(U,Y)] \quad (4.21)$$

şeklinde elde edilir. (4.18), (4.19), (4.20) ve (4.21) eşitlikleri (4.17) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$kW_2(Z,U,V,Y) - k(k-1)\eta(Y)\eta(Z)g(U,V) + k(k-1)\eta(Y)\eta(U)g(Z,V)$$
$$-k(k-1)[g(U,V)g(\phi Y,\phi Z) - \eta(V)\eta(U)g(Z,Y) + \eta(Z)\eta(U)g(V,Y)]$$
$$-k(k-1)[\eta(V)\eta(Z)g(U,Y) - \eta(U)\eta(Z)g(V,Y) - g(Z,V)g(\phi Y,\phi U)]$$
$$-k(k-1)[\eta(V)\eta(U)g(Y,Z) - \eta(V)\eta(Z)g(U,Y)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse;

$$kW_2(Z,U,V,Y) - k(k-1)\eta(Y)\eta(Z)g(U,V) + k(k-1)\eta(Y)\eta(U)g(Z,V)$$
$$- k(k-1)g(U,V)g(\phi Y,\phi Z) + k(k-1)g(Z,V)g(\phi Y,\phi U)$$
$$= 0$$

bulunur. Son eşitlikte (2.5) ifadesi kullanılarak;

$$W_2(Z,U,V,Y) = (k-1)[g(Y,Z)g(U,V) - g(V,Z)g(Y,U)]$$

elde edilir. Bu eşitlik (1.1) ifadesinde yerine yazılarak gerekli işlemler yapılır ve Tanım 2.2.14. göz önünde bulundurulursa;

$$S(U,Y) = [3(n-1)(k-1) - k(2-n)]\eta(U)\eta(Y) + (n-1)g(U,Y)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde W_2-yarı simetrik ve $W_2 = 0$ koşullarını sağlayan ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldlar ele alınarak aşağıdaki yeni sonuçlara ulaşılmıştır.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n + 1)$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. Eğer M manifoldu $W_2 = 0$ koşulunu sağlıyorsa, bu durumda M manifoldu; Einstein manifoldudur.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n + 1)$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik M manifoldu $W_2 = 0$ koşulunu sağlayan bir Einstein manifoldu olsun. Böylece M; $H^{2n+1}(k)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izomorftur.

Teorem 3. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n + 1)$-boyutlu, ξ vektör alanını içeren k-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik bir manifold olsun. M manifoldu W_2-yarısimetrik ise bir η-Einstein manifoldudur.

Literatürde W_2-yarı simetrik ve $W_2 = 0$ koşullarını sağlayan, ξ vektör alanını içeren (k, μ)-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile ilgili yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle, (k, μ)-nulluk dağılımına sahip hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile ilgili tanımlanabilecek bu yeni sınıflarının geometrik özellikleri açık bir problemdir.

KAYNAKLAR

Arı, N., 2018, Nulluk dağılımına sahip hemen hemen α-kosimplektik manifoldların bir sınıfı üzerine, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Ayar, G., 2012, İntegral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik uzay formları, *Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Düzce.

Balkan, Y. S. 2016, Yaklaşık C- Manifoldların Geometrisi, *Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Düzce.

Baikoussis, C. and Koufogiors, T., 1993, On a type of contact manifolds, *J. Geom.* 46,1-9.

Blair, D. E., 1970, Contact manifolds in Riemann Geometry, *Springer-Verlag*, New York.

Blair, D. E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry, *Lect. Notes Math.*, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York., 509.

Blair, D. E., 2002, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, *Progress in Mathematics*, Birkhâuser Boston, 203.

Cappelleti-Montano, B., De Nicola A. and Yudin, I., 2013, A survey on cosymplectic geometry, *Math.* DG 21 Nov.

Chen, B. Y. 1973, Geometry of submanifolds, *Marcel Dekker*, New York.

Chinea, D., Gonzalez, C., 1990, A classification of almost contact metric manifolds, *Annali di Matematica pura ed applicata,* 156 (4), 15-36.

Chinea, D., de León, M. and Marrero, J. C., 1993, Stability of invariant foliations on almost contact manifolds, *Publ. Math.* Debrecen 43, 41-52.

Dacko, P., 2000, On Almost Cosymplectic Manifolds with the Structure Vector Field ξ Belonging to the k-Nullity Distribution, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol.5, No.2, pp. 47-60.

Dacko, P. and Olszak, Z., 1998, On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kȧhlerian leaves, Rend., *Sem. Mat.* Univ. Pol. Torino 56, 89-103.

De, U. C., Pathak, G., 2004, On 3-dimensional Kenmotsu manifolds, *Indian J. Pure Applied Math.* 35, 159-165.

De, U. C., Sarkar, A., 2009 On a type of P-Sasakian manifolds, *Math. Reports*, 11 (61), 139-144.

Deszcz, R., 1992, On pseudosymmetric spaces, *Bull. Soc. Math.* Belg. 44, Ser. A, 1-34.

Deszcz, R., Verstraelen, L. and Yaprak, Ş., 1994, Warped products realizing a certain condition of pseudosymmetry type imposed on the Weyl curvature tensor, *Chin. J. Math.* 22, 139-157.

Dileo, G., Pastore, A. M., 2007, Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 14, 343-354.

Eisenhart, L. P., 1949, Riemannian Geometry, *Princeton University Press*.

Endo, H., 1994, On Ricci curvatures of almost cosymplectic manifolds, *An. Ştiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, Mat.* 42, 75-83.

Endo, H., 1996, On some properties of almost cosymplectic manifolds, *An. Ştiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, Mat.* 42, 79-94.

Endo, H., 1997, On some invariant submanifolds in certain almost cosymplectic manifolds, *An. Ştiint. Univ. " Al. I. Cuza" Iaşi, Mat.* 43, 383-395.

Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., 2004, Riemann Geometry, *3rd ed., XVI, Springer Universitext*, ISBN: 9783540204930, 322.

Goldberg, S. I. and Yano, K., 1969, Integrability of almost cosymplectic structures, *Pacific J. Math.* 31, 373-382.

Gray, A., 1966, Spaces of constancy of curvature operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17, 897-902.

Jun, J-B., De, U. C. and G. Pathak, 2005, On Kenmotsu manifolds, *J. Korean Math. Soc.* 42, 435-445.

Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* (2) 24, 93-103.

Kim, T. W., Pak, H. K., 2005, Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Math. Sinica, Ene. Ser. Aug.*, 21 (4), 841-846.

Küpeli Erken, I., Dacko, P., Murathan, C., 2015, Almost α-paracosymplectic manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, Volume88, Pages 30-51.

Matsumoto, K., Ianus, S. and I. Mihai, 1986, On P −Sasakian manifolds which admit certain tensor fields, *Publ. Math.* Debrecen 33, 61-65.

O'Neill, B., 1983, Semi Riemannian Geometry, *A. Press*, London.

Olszak, Z., 1981, On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math.* J. 4, 239-250.

Olszak, Z., 1987, Almost cosymplectic manifolds with Kähslerian leaves, *Tensor N. S.* 46, 117-124.

Özgür, C., De, U. C., 2006, On the quasi-conformal curvature tensor of a Kenmotsu manifold, *Mathematica Pannonica* 17/2, 221-228.

Öztürk, H., 2009, Hemen hemen α-kosimplektik (k, μ, v)-uzayları, Doktora Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Afyon.

Öztürk, H., Murathan, C., Aktan, N., Turgut Vanlı, A., 2014, Almost α-cosymplectic f-manifolds, *ANALELE ŞTIINTIFICE ALE UNIVERSITĂTII, "ALL CUZA" DIN IAŞI (S.N.) MATEMATICĂ*, Tomul LX, f.1.

Parasad, R., Haseeb, A., 2017, Conformal curvature tensor on K-contact manifolds with respect to the quarter-symmetric metric connection, *Facta Universitatis (NIŚ) SER. MATH. INFORM.* Vol. 32, No 4, 503-514.

Pokhariyal, G. P., 1982, Study of a new curvature tensor in a Sasakian manifold, *Tensor N. S.* 36, 222-225.

Pokharial, G. P., Mishra, R. S., 1970, The curvature tensor and their relativistic significance, *Yokohoma Math. J.* 18, 105-108.

Sharma, R. and Blair, D. E., 1996, Conformal motion of contact manifolds with characteristic vector field in the k −nullity distribution, *Illinois J. Math.* 40, 553-563.

Sharma, R., 1998, Addendum: " Conformal motion of contact manifolds with characteristic vector field in the k −nullity distribution" by Sharma and D. E. Blair, *Illinois J. Math.* 42 673-677.

Sharpe, R. W., 1997, Differential Geometry, *Graduate Texts in Math.* Springer.

Spivak, M., 1965, Calculus on manifolds, *Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc.,* ISBN: 0805902193.

Tanno, S., 1969, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* 21, 21-38.

Tanno, S., 1988, Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds, *Tóhoku Math. J.* 40, 441-448.

Yano, K., Sawaki, S., 1968, Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, *J. Differential Geometry* 2, 161-184.

Yano, K., Kon, M., 1984, Structures on Manifolds, *Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp.,* Singapore.

Yıldız, A. ve De, U. C., 2010, On a type of Kenmotsu manifolds, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, Vol. 12, pp. 289-298.

Willmore, T. J., 1959, An introduction to differential geometry, *London: Oxford Univ. Press* (Clarendon).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Muhammed Burak ARI
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	
Telefon	**:**	
Faks	**:**	
e-mail	**:**	selburak1905@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Gültepe Lisesi	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2013
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi	2019

YAYINLAR

Arı, M. B., Aktan, N., A New Class of Almost Cosymplectic Manifolds, 2st *International Conference on Mathematical and Related Sciences-ICMRS 2019*, Antalya- Turkey.