



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



LİNEER OLMAYAN BİR FARK DENKLEM
SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

BAHRİYE YILMAZYILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Bahriye YILMAZYILDIRIM tarafından hazırlanan "Lineer Olmayan Bir Fark Denklem Sisteminin Çözümü" adlı tez çalışması 25/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Danışman

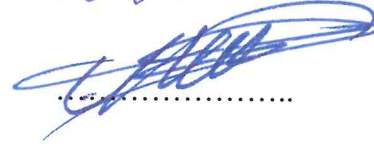
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA


İmza







Yukarıdaki sonucu onaylarım.


Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.


Bahriye YILMAZYILDIRIM

25/01/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bahriye YILMAZYILDIRIM

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

2019, 51 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU**

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, fark denklemlerinin önemi ve bu denklemler ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, fark denklem sistemleri üzerine yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgilerin sunulduğu literatür araştırması verildi.

Üçüncü bölümde, bazı rasyonel fark denklem sistemlerinin çözülebilirliği üzerine yapılmış bir çalışmadan bazı kısımlar verildi.

Dördüncü bölümde, a negatif olmayan bir reel parametre ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + ay_n z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + az_n x_n}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemi tanımlandı ve bu sistemin genel çözümü a parametresi ve başlangıç şartları cinsinden elde edildi. Ayrıca çözümlerin formülleri yardımıyla bu çözümlerin asimptotik davranışları incelendi.

Beşinci bölümde, bulunan teorik sonuçları doğrulayan bazı nümerik örnekler verildi.

Altıncı bölümde, çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Asimptotik davranış, Fark denklem sistemi, Genel çözüm, Rasyonel fark denklemi.

ABSTRACT**MS THESIS****SOLUTION OF A NONLINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEM****Bahriye YILMAZYILDIRIM**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor:Dr. Durhasan Turgut TOLLU**2019, 51 Pages****Jury**

**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

This study consists of six sections.

In the first section, the importance of difference equations and general definitions and theorems about these equations are given.

In the second section, a literature research was given in which information on some studies on difference equation systems were presented.

In the third section, some parts of a work on the solvabilities of some systems of rational difference equations were given.

In the fourth section, we show that the following systems of nonlinear difference equations

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + ay_n z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + az_n x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

where a is a nonnegative real parameter and initial values are real numbers, was solved in terms of the parameter a and the initial values. Also, the asymptotic behaviors of the solutions was investigated via formulas of the solutions.

In the fifth section, some numerical examples which verify found theoretical results were given.

In the sixth section, conclusions and suggestions on this thesis were given.

Keywords: Asymptotic behavior, General solution, Rational difference equation, System of difference equations.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalından Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca bilgilerimi benimle paylaşan, fikirleriyle bakış açımı geliştirip zenginleştiren ve çalışmam süresince sabırla desteğini sürdüren Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU hocama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bahriye YILMAZYILDIRIM
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler	2
1.3. Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri	4
1.4. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri.....	6
1.5. Fibonacci Sayıları	8
1.6. Riccati Fark Denklemi	10
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	14
3. BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ	22
3.1. $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}$ Denklem Sistemi	22
3.2. $x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}$ Denklem Sistemi	24
3.3. $x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}$ Denklem Sistemi.....	28
4. $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + ay_n z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + az_n x_n}$ DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ	31
4.1. $a = 0$ Durumu	31
4.2. $a > 0$ Durumu	36
4.3. Çözümlerin Asimptotik Davranışı	41
5. NÜMERİK ÖRNEKLER.....	44
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	47
ÖZGEÇMİŞ	51

1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu kısımda, fark denklemleri ve sistemlerine neden ihtiyaç duyulduğu üzerinde duruldu.

Fark denklemleri sadece diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, demografi ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alır. Süreklilik halleriyle verilen diferansiyel denklemlerin yerine, bu denklemlere benzer olan fark denklemleri ayırık zamanlarda meydana gelen olayları formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkmıştır. Bu denklemlerde bağımsız değişken tam sayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Örneğin, genetik alanda kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım ile ekonomide fiyat değişim problemleri açıkça sürekli olmayan problemlerdir. Zira, bağımsız değişkenler birinde kuşak; diğerinde duruma göre gün, hafta, ay veya yıldır ve ikisi de doğal olarak ayırık cümleler üzerinde tanımlıdır. Böylece fark denklemi kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir.

İki veya daha fazla bağımlı değişken içeren birinci basamaktan fark denklem sistemleri biyoloji, fizik, tıp ve mühendislik problemlerinde yaygın bir şekilde ortaya çıkar. Bu yüzden fark denklem sistemlerini incelemek de ayrıca önemlidir. (Bereketoğlu ve Kutay, 2012)

1.2. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Burada verilen tanım ve teoremler çalışmamızın teorik olarak gelişmesinde önemli bir rol oynar.

Tanım 1.2.1. (Kaydırma operatörü) $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanan E operatörüne *kaydırma (öteleme) operatörü* denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 1.2.2. (Fark Denklemi) $n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, n bağımsız değişken ve x bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (1.1)$$

eşitliğine *fark denklemi* denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Fark denklemleri literatüründe bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) için $x(n)$ sembolü yerine genellikle x_n alt indisli sembolü kullanılır. Bu çalışmanın bundan sonraki kısımlarında kullanım kolaylığından dolayı, yerine göre bu alt indisli kullanım tercih edildi.

Tanım 1.2.3. (Mertebe-Basamak) Bir fark denkleminde bağımlı değişkenin en büyük ve en küçük indislerinin farkına denklemin mertebesi (basamağı) denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 1.2.1. Tanım 1.2.3.'e göre

$$x_{n+4} - x_{n+3} - 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + 5x_n = 0$$

ve

$$x_{n+5} + x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n-2} = 1$$

denklemlerinin mertebeleri sırasıyla, $n+4-n=4$ ve $n+5-(n-2)=7$ 'dir. Özel olarak $x_{n+1} = 2n+1$ denklemi ise sıfırıncı mertebeden olup bir fonksiyondur. Literatürde bu tip durumlar “aşıkâr durum” olarak ifade edilir.

Fark denklemleri bazı özelliklerine göre sınıflandırılabilirler. Bu sınıflandırma ile ilgili bazı tanımlar aşağıda verildi.

Tanım 1.2.5. (Lineer Fark Denklemi) $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli diziler ve \mathbb{N}_{n_0} üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere,

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + \dots + a_k(n)x_n = g(n) \quad (1.2)$$

biçimindeki denklemlere k . mertebeden lineer fark denklemleri denir.

Lineer fark denklemleri katsayıları ve $g(n)$ 'nin durumuna göre sınıflandırılırlar.

- i) Eğer (1.2) denklemde $g(n)=0$ ise denkleme *lineer homojen fark denklemi*,
- ii) $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $a_i(n) = a_i$ olacak şekilde katsayılar sabit ise denkleme *sabit katsayılı lineer fark denklemi*,
- iii) $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $a_i(n)$ katsayılarından en az biri bağımsız değişkenin fonksiyonu ise denkleme *değişken katsayılı lineer fark denklemi* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Örnek 1.2.2. Tanım 1.2.4. ve Tanım 1.2.5.'e göre; $a_0(n) \neq 0$, $a_1(n) \neq 0$, $f(n) \neq 0$ ve n bağımsız değişkeninin verilen fonksiyonları, $b_0, b_1, b_2 \neq 0$ reel sabitler olmak üzere,

$$a_0(n)y_n + a_1(n)y_{n+1} = f(n)$$

denklemleri birinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan bir fark denklemi ve

$$b_0y_{n-1} + b_1y_n + b_2y_{n+1} = 0$$

denklemini ise ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemdir.

1.3. Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

Bu kısımda, birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin bazı özel durumları ele alınıp çözümünün nasıl elde edildiği verildi. Buradaki sonuçlar (Levy ve Lessman, 1992) kaynağından alındı.

Eğer $a \neq 0$ reel sabit ise

$$x_{n+1} = ax_n, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3)$$

denklemini birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemdir. Bu denklem için

$$x_{n+1} = ax_n = a \cdot ax_{n-1} = \dots = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n+1)\text{-tane}} x_0$$

yazılabildiğinden (1.3) denkleminin genel çözümü $x_n = a^n x_0$ olarak verilir. Doğal olarak $a=1$ ise, $x_n = x_0$ dir. Eğer a, b reel sabit ve $ab \neq 0$ ise,

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.4)$$

denklemini birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan bir fark denklemdir. Bu denklemde eğer $a=1$ ise,

$$x_{n+1} = x_n + b = x_{n-1} + 2b = \dots = x_0 + (n+1)b$$

olup genel çözüm $x_n = x_0 + nb$ olarak bulunur. Bu denklemde eğer $a \neq 1$ ise, denklem

$$x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a \left(x_n - \frac{b}{1-a} \right)$$

şeklinde olup (1.3) denklemini formunda yazılabilir. Dolayısıyla, denklemin çözümü

$$x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

olarak verilir. Eğer $(a_n)_{n \geq 0}$ bir sıfır dizisi değilse

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.5)$$

denklemini birinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen bir fark denklemdir. (1.5) denkleminin genel çözümü (1.3) denkleminde olduğu gibi

$$x_{n+1} = a_n x_n = a_n a_{n-1} x_{n-1} = \cdots = a_n a_{n-1} \cdots a_0 x_0$$

olarak bulunabilir. Böylece (1.5) denkleminin genel çözümü $x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ olarak

verilebilir. Burada $\prod_{i=0}^{n-1} a_i = 1$ olduğu kabul edilir.

Eğer $(a_n)_{n \geq 0}$ ve $(b_n)_{n \geq 0}$ birer sıfır dizisi değilse

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.6)$$

denklemini birinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan bir fark denklemdir. Bu denklemin genel çözümü de benzer yöntemler kullanılarak elde

edilebilir. (1.6) denklemini $\prod_{i=0}^n a_i$ çarpımı ile bölünürse

$$\frac{x_{n+1}}{\prod_{i=0}^n a_i} = \frac{x_n}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} + \frac{b_n}{\prod_{i=0}^n a_i} \quad (1.7)$$

denklemini elde edilir. (1.7) denkleminde

$$\frac{x_{n+1}}{\prod_{i=0}^n a_i} = \frac{x_n}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} + \frac{b_n}{\prod_{i=0}^n a_i} = \frac{x_{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-2} a_i} + \frac{b_n}{\prod_{i=0}^n a_i} + \frac{b_{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} = \cdots = x_0 + \frac{b_n}{\prod_{i=0}^n a_i} + \frac{b_{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} + \cdots + \frac{b_0}{a_0}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan son eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse (1.6) denkleminin genel çözümü

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \quad (1.8)$$

olarak bulunur.

1.4. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

(1.2) denkleminin özel bir hali,

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad a, b \text{ reel sabitler ve } b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.9)$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemdir. (1.9) denkleminin genel çözümünü bulmak için bu denklemin, $c, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (veya $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$) için $x_n = \lambda^n$ olacak şekilde bir çözümünün var olduğunu kabul edelim. Yani;

$$\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.10)$$

olur. (1.10) denkleminde, ikinci dereceden olan

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (1.11)$$

denklemini bulunur ki bu denkleme (1.9) denkleminin *karakteristik denklemi* denir. Bilindiği gibi, (1.11) denklemini iki reel ya da iki kompleks köke sahiptir. Bu kökler ise

$\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ 'dir. Bu kökler için üç durum vardır ve bu üç duruma göre genel

çözüm farklı formlarda ortaya çıkar.

(i) **Köklerin reel ve eşit olması durumu:** Eğer $a^2 = 4b$ ise $\lambda_+ = \lambda_- = \frac{-a}{2}$ olacak

şekilde çakışık iki kök vardır. Bu durumda (1.9) denklemini,

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + \frac{a^2}{4}x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.12)$$

formundadır. (1.9) denklemini,

$$\left(x_{n+2} + \frac{a}{2}x_{n+1} \right) = -\frac{a}{2} \left(x_{n+1} + \frac{a}{2}x_n \right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.13)$$

olarak yazılabilir ve

$$\left(x_{n+1} + \frac{a}{2}x_n\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^n \left(x_1 + \frac{a}{2}x_0\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.14)$$

şeklinde birinci mertebeye indirgenmiş bir denklem elde edilir. (1.14) denkleminin genel çözümü ise

$$x_n = x_0 \left(-\frac{a}{2}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-i-1} \left(-\frac{a}{2}\right)^i \left(x_1 + \frac{a}{2}x_0\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.15)$$

şeklinde verilir ve bazı düzenlemelerden sonra,

$$x_n = x_1 n \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-1} - x_0 (n-1) \left(-\frac{a}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.16)$$

olarak elde edilir.

(ii) **Köklerin reel ve farklı olması durumu:** Eğer $a^2 > 4b$ ise reel ve ayrık iki kök

vardır. Bu durumda (1.9) denklemi,

$$(x_{n+2} - \lambda_- x_{n+1}) = \lambda_+ (x_{n+1} - \lambda_- x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.17)$$

olarak yazılabilir ve benzer işlemlerden sonra (1.9) denkleminin çözümü

$$x_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-} x_1 - \frac{\lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1}}{\lambda_+ - \lambda_-} b x_0 \quad (1.18)$$

şeklinde yazılabilir.

(iii) **Köklerin kompleks olması durumu:** Eğer $a^2 < 4b$ ise kökler kompleks

eşlenik köklerdir. Yani, $\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$ olur. Bilindiği gibi herhangi kompleks

eşlenik z_1 ve z_2 sayıları için,

$$z_1 = e^{r+i\phi} = e^r (\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.19)$$

ve

$$z_2 = e^{r-i\phi} = e^r (\cos \phi - i \sin \phi) \quad (1.20)$$

gösterimleri vardır.

Bu durumda (1.9) denkleminin çözümü yine (1.18) şeklinde verilir. (1.19) ve (1.20) gösterimleri kullanılacak olursa $|\lambda_+| = |\lambda_-| = \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} = \sqrt{b}$ ve

$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{-a}\right)$ olmak üzere genel çözüm

$$x_n = b^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin(n\phi)}{\sin(\phi)} x_1 + b^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin((n-1)\phi)}{\sin(\phi)} x_0 \quad (1.21)$$

olarak bulunur (Tollu ve ark. 2014).

Sonraki iki kısım üçüncü bölümdeki sonuçları elde etmek için verildi.

1.5. Fibonacci Sayıları

İkinci mertebeden lineer fark denklemlerinin en klasik örneklerinden birisi,

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad (1.22)$$

şeklinde verilen Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısıdır (Koshy, 2001). (1.22) denkleminin tek çözümü,

$$\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \quad (1.23)$$

Fibonacci dizisidir. Burada F_n , n -inci Fibonacci sayısıdır.

(1.22) denkleminin karakteristik denklemi, $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ karakteristik köklerine sahip olan

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (1.24)$$

kuadratik denklemdir. (1.18) genel çözümüne (1.22) denkleminin başlangıç şartları ve (1.24) karakteristik denkleminin kökleri uygulanırsa Fibonacci sayılarının Binet formülü olarak bilinen

$$F_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (1.25)$$

eşitliği elde edilir. Burada F_n , n -inci *Fibonacci sayısı*dır (Koshy, 2001).

Fibonacci sayılarının çok çeşitli özellikleri vardır. Örneğin,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad (1.26)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1, \quad (1.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda_+ \quad (1.28)$$

eşitlikleri bunlardan yalnızca birkaç tanesidir (Koshy, 2001).

Örnek 1.5.1. z_0 ve z_1 reel başlangıç şartları olmak üzere (1.9) ikinci mertebeden lineer fark denkleminin özel bir hali,

$$z_{n+2} - z_{n+1} - z_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.29)$$

denklemdir. (1.29) denkleminin genel çözümü,

$$z_n = F_n z_1 + F_{n-1} z_0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.30)$$

şeklinde Fibonacci dizisinin terimleri yardımıyla ifade edilebilir. Burada F_n , n -inci Fibonacci sayısıdır (Cull ve ark., 2004).

Örnek 1.5.2. t_0 ve t_1 reel başlangıç şartları olmak üzere (1.9) fark denkleminin başka bir özel hali,

$$t_{n+2} + t_{n+1} - t_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.31)$$

denklemdir. (1.31) denkleminin genel çözümü

$$t_n = (-1)^{n-1} (F_n t_1 - F_{n-1} t_0), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.32)$$

şeklinde Fibonacci dizisinin terimleri yardımıyla ifade edilebilir. Burada F_n , n -inci Fibonacci sayısıdır (Tollu ve ark. 2014).

1.6. Riccati Fark Denklemleri

Çözülebilir lineer olmayan fark denklemlerinin en klasik örneklerinden birisi, Riccati fark denklemi olarak bilinen

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}, \quad d \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.33)$$

denklemdir. Burada $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $a, b, c, x_0 \in \mathbb{R}$ 'dir. Eğer $d = 0$ ise (1.33) denklemi birinci mertebeden homojen olmayan lineer bir denklemdir. Eğer $ad - bc = 0$ ise bu durumda denklem

$$x_{n+1} = \frac{bc/d + bx_n}{c + dx_n} = \frac{b}{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.34)$$

olacak şekilde sabittir. Eğer $d \neq 0$ ve $ad - bc \neq 0$ ise bu durumda

$$x_n = \left(\frac{b+c}{d} \right) y_n - \frac{c}{d} \quad (1.35)$$

değişken değiştirmesi yapılarak (1.33) denklemini, bir parametrelili

$$y_{n+1} = \frac{-R + y_n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.36)$$

denkleminde dönüştürülür. Burada, y_0 başlangıç şartı sıfırdan farklı bir reel sayıdır ve

$R = \frac{bc - ad}{(b + c)^2}$ sayısı *Riccati Sayısı* olarak adlandırılır. $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ değişken değişirmesi

(1.36) denklemini, (1.29) lineer ikinci mertebeye fark denkleminin özel bir hali olan

$$z_{n+2} - z_{n+1} + Rz_n = 0, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.37)$$

denkleminde dönüştürür. Burada, $z_0, z_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (1.37) denkleminin karakteristik denklemini,

$$\theta^2 - \theta + R = 0 \quad (1.38)$$

olup, $\theta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4R}}{2}$ karakteristik köklerine sahiptir. Bu durumda, (1.37) denkleminin çözümü,

$$z_{n+1} = \frac{\theta_+^{n+1} - \theta_-^{n+1}}{\theta_+ - \theta_-} z_1 - \frac{\theta_+^n - \theta_-^n}{\theta_+ - \theta_-} Rz_0 \quad (1.39)$$

olur. (1.39) çözümü, $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ değişken değişirmesinde yerine yazılırsa $R_n = \frac{\theta_+^n - \theta_-^n}{\theta_+ - \theta_-}$

olmak üzere,

$$y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{R_{n+1}y_0 - RR_n}{R_n y_0 - RR_{n-1}} \quad (1.40)$$

çözümü bulunur. Son olarak (1.40) çözümü de (1.35) değişken değişirmesinde yerine yazılırsa (1.33) Riccati denkleminin genel çözümü

$$x_n = \left(\frac{b+c}{d} \right) \frac{R_{n+1} \frac{dx_0 + c}{b+c} - RR_n}{R_n \frac{dx_0 + c}{b+c} - RR_{n-1}} - \frac{c}{d} \quad (1.41)$$

olarak elde edilir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Örnek 1.6.1. (1.33) denkleminde $a=b=d=1$ ve $c=0$ için $R=-1$ olur ve (1.33) denklemi

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.42)$$

denklemine indirgenir. Bu durumda (1.38) denkleminin kökleri $\theta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ olup (1.25) eşitliği ve (1.41) çözümünden

$$x_n = \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} \quad (1.43)$$

genel çözümü elde edilir (Tollu, 2014).

Teorem 1.6.1. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.44)$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.6.1. Eğer \bar{x} için (1.44) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ ise \bar{x} noktasına (1.44) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.6.2. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.44) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına da asal periyod adı verilir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.6.3. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü er geç p

periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en k¼c¼k pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili yayınlanmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verildi.

Xianyi ve Deming (2003); yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.1)$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerinin yarı döngü analizini yaparak global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları verdiler.

Xianyi ve Deming (2004); (2.1) denkleminin bir genelleştirmesi olarak

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-2}} \quad \text{ve} \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.2)$$

rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları verdiler.

Abu-Saris ve arkadaşları (2008); çalışmalarında $a \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-k} + a}{x_n + x_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.3)$$

denkleminin tek pozitif denge noktası olan $\bar{x} = \sqrt{a}$ noktasının global asimptotik kararlı olduğunu gösterdiler.

Yalçinkaya ve arkadaşları (2008); $a \in (0, \infty)$ için

$$z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.4)$$

denkleminin global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları belirlediler.

Yalçinkaya (2008); $a \in (0, \infty)$ için

$$z_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.5)$$

denkleminin global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları belirledi.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + y_n}{y_n x_{n-1} - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} + x_n}{x_n y_{n-1} - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.6)$$

rasyonel fark denklem sisteminin her çözümünün 6 periyotlu olduğunu gösterdiler.

Berg ve Stević (2011); u_0 ve v_0 kompleks başlangıç şartları olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.7)$$

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.8)$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.9)$$

fark denklem sistemlerinin

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Riccati fark denkleminin genel çözümü yardımıyla açık olarak çözülebileceğini gösterdiler ve bu sistemlerin genel çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelediler.

Stević (2012); x_0 ve y_0 reel başlangıç şartları, u_n , v_n , w_n ve s_n dizilerinin herbiri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n}, \quad y_{n+1} = \frac{w_n}{1+s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.10)$$

sisteminin on altı olası durumundan on dört tanesi için çözülebilir olduğunu gösterdi.

Tollu ve arkadaşları (2013); Riccati fark denkleminin iki özel hali olan

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.11)$$

denklemlerinin genel çözümlerini Fibonacci sayılarıyla ilişkilendirerek verdiler.

Stević ve arkadaşları (2013); k, l, m, s doğal sayılar ve $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $i = \overline{1 \dots \tau}$, $\tau := \max\{k, l, m, s\}$ olacak şekilde x_{-i} başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-k}x_{n-l}}{ax_{n-m} + bx_{n-s}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.12)$$

yüksek mertebeli rasyonel fark denkleminin

- i. $k = m, l = s,$
- ii. $k = s, l = m,$
- iii. $l = m = k + s$

durumları için çözülebileceğini gösterdiler.

Yazlık ve arkadaşları (2013); çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.13)$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini Padovan sayıları ile ilişkilendirerek formülize ettiler ve buldukları formülleri kullanarak bu sistemlerin bütün çözümlerinin tek bir noktaya yakınsadığını gösterdiler. Ayrıca bu sistemler için çözümleri tanımsız kılan başlangıç şartlarının kümelerini belirlediler.

El-Metwally (2013); $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}}, \quad y_n = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.14)$$

fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını elde ederek bu çözümlerin bazı özelliklerini inceledi.

Tollu ve arkadaşları (2014); x_0 ve y_0 reel başlangıç şartları, p_n , q_n , r_n ve s_n dizilerinin herbiri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.15)$$

sisteminin on altı olası durumundan on dört tanesinin çözülebilir olduğunu gösterdiler. Ayrıca verdikleri genel çözümlerin on iki tanesinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğunu gösterdiler.

Yazlık ve arkadaşları (2015); çözümleri iyi tanımlı yapan keyfi reel başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}}{y_n x_{n-1} (\pm 1 \pm y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}}{x_n y_{n-1} (\pm 1 \pm x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4})}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.16)$$

sistemlerinin açık çözümlerini elde ettiler ve bu çözümlerin davranışlarını incelediler.

Stević ve arkadaşları (2015); $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve başlangıç şartları kompleks sayılar olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{w_n^a}{z_{n-1}^b}, \quad w_{n+1} = \frac{z_n^c}{w_{n-1}^d}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.17)$$

fark denklem sisteminin çözümlerini kapalı formda elde edecek bir metot verdiler.

Haddad ve arkadaşları (2016); a, b, α, β, p sıfırdan farklı reel parametreler olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k+1}^p y_n}{a y_{n-k}^p + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}^p x_n}{\alpha x_{n-k}^p + \beta x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.18)$$

denklem sisteminin çözümleri için kapalı formüller elde ettiler ve $p=1$ özel durumu için denklemin çözümlerinin davranışını araştırdılar.

El-Dessoky (2016a); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm t_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm x_n t_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{\pm 1 \pm y_n x_{n-1} t_{n-2} z_{n-3}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_{n-3}}{\pm 1 \pm z_n y_{n-1} x_{n-2} t_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dört boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığını ve çözümlerin periyodiklik ve sınırlılık gibi bazı özelliklerini inceledi.

El-Dessoky (2016b); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1 + y_{n-2} x_{n-1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\pm 1 \pm x_{n-2} y_{n-1} x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.20)$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

El-Dessoky (2016c); reel başlangıç şartları ve keyfi reel parametreler için,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{a_1 + b_1 z_n y_{n-1} x_{n-2} z_{n-3}}, \\ y_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{a_2 + b_2 x_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{y_{n-3}}{a_3 + b_3 y_n x_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini inceledi.

El-Dessoky (2016d); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1} y_{n-2}}{x_n (\pm 1 \pm y_{n-1} y_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2}}{y_n (\pm 1 \pm x_{n-1} x_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.22)$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini inceledi.

Gümüş ve Soykan (2016); pozitif parametreler ve pozitif başlangıç şartları için

$$u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}}{\beta + \gamma v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}^p}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.23)$$

fark denklem sistemini tanımladılar ve bu sistemin pozitif çözümlerinin davranışını incelediler.

Elsayed ve Ahmed (2016); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2} \pm z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2} \pm x_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2} \pm y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.24)$$

üç boyutlu rasyonel fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını elde ettiler.

Elsayed ve Alghamdi (2016); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-7}}{1 + x_{n-7} y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-7}}{\pm 1 \pm x_{n-3} y_{n-7}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.25)$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelediler.

Elyased ve arkadaşları (2017); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{y_n + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-2}}{\pm x_n \pm x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.26)$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelediler.

Elyased (2017); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3} y_{n-2}}{y_n (\pm 1 \pm x_{n-1} y_{n-2} x_{n-3})}, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-2} y_{n-3}}{x_n (\pm 1 \pm y_{n-1} x_{n-2} y_{n-3})}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.27)$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini inceledi.

Tollu ve arkadaşları (2017); $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{b}{1 + y_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.28)$$

fark denklem sistemini tanımladılar ve bu sistemin çözümlerinin global davranışını incelediler. Ayrıca elde ettikleri sonuçlar için nümerik örnekler verdiler.

Haddad ve arkadaşları (2018); başlangıç şartları ve parametreler sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.29)$$

fark denklem sisteminin iyi tanımlı çözümlerinin formüllerini elde ettiler. Ayrıca $a = b$ durumunda sistemin çözümlerinin davranışını incelediler ve elde ettikleri sonuçlar için nümerik örnekler verdiler.

Türk ve arkadaşları (2018); $a, b, c, d, e, f, p, q \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{au_{n-1}}{b + cv_{n-3}^p}, v_{n+1} = \frac{dv_{n-1}}{e + fu_{n-3}^q}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.30)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelediler.

Yılmazyıldırım ve Tollu (2018); başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + y_n z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + z_n x_n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.31)$$

fark denklem sisteminin genel çözümünü açık formda elde ettiler ve çözümlerin varlığını ve asimptotik davranışını araştırdılar.

Şahinkaya ve arkadaşları (2018); $a \in [0, \infty)$ olmak üzere, başlangıç şartları reel sayı olan

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.32)$$

fark denklem sistemini tanımladılar, bu sistemin genel çözümlerini kapalı formda elde ettiler ve çözümlerin davranışını incelediler.

Tollu ve Yalçınkaya (2019); (2.23) sistemini üç boyutlu bir sisteme genelleştirerek

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 v_{n-2}^p}, v_{n+1} = \frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2 + \gamma_2 w_{n-2}^q}, w_{n+1} = \frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3 + \gamma_3 u_{n-2}^r}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.33)$$

fark denklem sistemini tanımladılar. Ayrıca, pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için bu sistemin çözümlerinin global davranışını araştırdılar.

3. BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Tollu ve arkadaşlarının 2014 yılında bazı rasyonel fark denklem sistemleri üzerine yaptıkları bir çalışmanın bazı kısımları ele alındı. Bu çalışmalarda ortaya konulan rasyonel fark denklem sistemlerinin genel çözümleri, bazı teorik çözüm metotlarına dayandırılmış olup söz konusu metotların bir kısmı bu tezin teorisine de katkı sağladı.

$$3.1. \quad x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n} \quad \text{Denklemler Sistemi}$$

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

sistemi ele alındı. (3.1) sisteminin birinci denklemi (1.42) denkleminin formundadır ve (1.43)'ten

$$x_n = \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} \quad (3.2)$$

genel çözümüne sahiptir. Sistemin ikinci denkleminde

$$y_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{1+x_{n+1}}{1+x_n} y_n = \frac{x_{n+2}}{x_n} y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.3)$$

ifadesine ulaşılır. Tek ve çift indisli terimler için (3.3) denklemini

$$y_{2n+2} = \frac{x_{2n+2}}{x_{2n}} y_{2n}, \quad y_{2n+3} = \frac{x_{2n+3}}{x_{2n+1}} y_{2n+1} \quad (3.4)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. (3.4) sisteminden

$$y_{2n} = y_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x_{2i+2}}{x_{2i}} = \frac{y_0}{x_0} x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.5)$$

ve

$$y_{2n+1} = y_1 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x_{2i+3}}{x_{2i+1}} = \frac{y_1}{x_1} x_{2n+1} = \frac{x_0}{y_0} x_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.6)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece (3.2) formülü (3.5) ve (3.6) ifadelerinde yerine yazılırsa

$$y_{2n} = \frac{y_0}{x_0} \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.7)$$

ve

$$y_{2n+1} = \frac{x_0}{y_0} \frac{F_{2n+2}x_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.8)$$

formülleri elde edilir. Buradan (3.2) formülünden ve (3.7) ile (3.8) formüllerinin birleştirilmesinden

$$x_n = \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_nx_0 + F_{n-1}}, \quad y_n = \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^{(-1)^n} \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_nx_0 + F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.9)$$

genel çözümü elde edilir.

Teorem 3.1.1. $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.1) sisteminin iyi tanımlı bir çözümü ve

$$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ise bu durumda } n \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad (x_{2n}, y_{2n}) \rightarrow \left(\lambda_+, \frac{y_0}{x_0} \lambda_+ \right) \quad \text{ve}$$

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) \rightarrow \left(\lambda_+, \frac{x_0}{y_0} \lambda_+ \right) \quad \text{olur (Tollu ve ark. 2014).}$$

3.2. $x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}$ Denklem Sistemi

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.10)$$

sistemi ele alındı. (3.10) sisteminin birinci denklemini ikincisinde ve ikinci denklemini birincisinde yerine yazılırsa birbirinden bağımsız olan

$$x_{n+2} = \frac{1+2x_n}{1+x_n}, y_{n+2} = \frac{1+2y_n}{1+y_n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.11)$$

denklemlerine ulaşılır. (3.11)'deki denklemler birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla, (3.10) sisteminin genel çözümünü bulmak için bu denklemlerden herhangi birinin çözülmesi yeterlidir. $n \in \mathbb{N}_0$ için $\tilde{x}_n \tilde{x}_{n+2} \neq 0$ ve $\tilde{x}_n \neq \tilde{x}_{n+2}$ olmak üzere, $x_n = \frac{\tilde{x}_{n+2}}{\tilde{x}_n} - 1$ değişken

değiştirmesi ile (3.11)'deki birinci denklem dördüncü mertebeden lineer olan

$$\tilde{x}_{n+4} - 3\tilde{x}_{n+2} + \tilde{x}_n = 0, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.12)$$

denklemine dönüşür. Dikkat edilirse $n \in \mathbb{N}_0$ için (3.12) denklemi

$$(\tilde{x}_{n+4} + \tilde{x}_{n+3} - \tilde{x}_{n+2}) - (\tilde{x}_{n+3} + \tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1}) - (\tilde{x}_{n+2} + \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n) = 0 \quad (3.13)$$

ve

$$(\tilde{x}_{n+4} - \tilde{x}_{n+3} - \tilde{x}_{n+2}) + (\tilde{x}_{n+3} - \tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1}) - (\tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n) = 0 \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. (3.13) ve (3.14) denklemlerine sırasıyla

$$\tilde{x}_{n+2} + \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n = u_n \quad (3.15)$$

ve

$$\tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n = v_n \quad (3.16)$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0 \quad (3.17)$$

ve

$$v_{n+2} + v_{n+1} - v_n = 0 \quad (3.18)$$

denklemleri elde edilir. (3.17) ve (3.18) denklemleri sırasıyla (1.29) ve (1.31) şeklinde oldukları için

$$u_n = F_n u_1 + F_{n-1} u_0 \quad (3.19)$$

ve

$$v_n = (-1)^{n-1} (F_n v_1 - F_{n-1} v_0) \quad (3.20)$$

çözömlerine sahiptirler. (3.15) ve (3.16) değişken değiştirmelerine geri dönölerek sırasıyla

$$\tilde{x}_{n+2} + \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n = F_n (\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + F_{n-1} (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0) \quad (3.21)$$

ve

$$\tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n = (-1)^{n-1} (F_n (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) - F_{n-1} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)), \quad (3.22)$$

ifadelerine ulaşılır. Ayrıca (3.21) ve (3.22) ifadelerinin çift indisli terimleri

$$\tilde{x}_{2n+2} + \tilde{x}_{2n+1} - \tilde{x}_{2n} = F_{2n} (\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + F_{2n-1} (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0) \quad (3.23)$$

ve

$$\tilde{x}_{2n+2} - \tilde{x}_{2n+1} - \tilde{x}_{2n} = (-1)^{2n-1} (F_{2n} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) - F_{2n-1} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)), \quad (3.24)$$

tek indisli terimleri ise

$$\tilde{x}_{2n+3} + \tilde{x}_{2n+2} - \tilde{x}_{2n+1} = F_{2n+1}(\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + F_{2n}(\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0) \quad (3.25)$$

ve

$$\tilde{x}_{2n+3} - \tilde{x}_{2n+2} - \tilde{x}_{2n+1} = (-1)^{2n} (F_{2n+1}(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) - F_{2n}(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)) \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, (3.24) denklemi (3.23) denkleminde ve (3.26) denklemi de (3.25) denkleminde çıkarılarak sırasıyla

$$\tilde{x}_{2n+1} = F_{2n}\tilde{x}_3 - F_{2n-2}\tilde{x}_1, \quad (3.27)$$

ve

$$\tilde{x}_{2n+2} = F_{2n+2}\tilde{x}_2 - F_{2n}\tilde{x}_0, \quad (3.28)$$

ifadeleri elde edilir. Şimdi, (3.27) ve (3.28) ifadeleri daha önce uygulanan $x_n = \frac{\tilde{x}_{n+2}}{\tilde{x}_n} - 1$

değişken değiştirmesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{\tilde{x}_{2n+2}}{\tilde{x}_{2n}} - 1 \\ &= \frac{F_{2n+2}\tilde{x}_2 - F_{2n}\tilde{x}_0}{F_{2n}\tilde{x}_2 - F_{2n-2}\tilde{x}_0} - 1 \\ &= \frac{(F_{2n+2} - F_{2n})\tilde{x}_2 - (F_{2n} - F_{2n-2})\tilde{x}_0}{F_{2n}\tilde{x}_2 - F_{2n-2}\tilde{x}_0} \\ &= \frac{F_{2n+1}\tilde{x}_2/\tilde{x}_0 - F_{2n-1}}{F_{2n}\tilde{x}_2/\tilde{x}_0 - F_{2n-2}} \\ &= \frac{F_{2n+1}(x_0 + 1) - F_{2n-1}}{F_{2n}(x_0 + 1) - F_{2n-2}} \\ &= \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= \frac{\tilde{x}_{2n+3} - 1}{\tilde{x}_{2n+1}} \\
&= \frac{F_{2n+2}\tilde{x}_3 - F_{2n}\tilde{x}_1 - 1}{F_{2n}\tilde{x}_3 - F_{2n-2}\tilde{x}_1} \\
&= \frac{(F_{2n+2} - F_{2n})\tilde{x}_3 - (F_{2n} - F_{2n-2})\tilde{x}_1}{F_{2n}\tilde{x}_3 - F_{2n-2}\tilde{x}_1} \\
&= \frac{F_{2n+1}\tilde{x}_3/\tilde{x}_1 - F_{2n-1}}{F_{2n}\tilde{x}_3/\tilde{x}_1 - F_{2n-2}} \\
&= \frac{F_{2n+1}(1+x_1) - F_{2n-1}}{F_{2n}(1+x_1) - F_{2n-2}} \\
&= \frac{F_{2n+1}(1+2y_0) - F_{2n-1}y_0}{F_{2n}(1+2y_0) - F_{2n-2}y_0} \\
&= \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

olur. Sonuç olarak (3.11)'deki birinci denklemin genel çözümü olan

$$x_{2n} = \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}}, \quad x_{2n+1} = \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.31}$$

formülleri elde edilir. (3.31) formülleri (3.10) sisteminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa y_n değişkenine ait olan

$$y_{2n} = \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}}, \quad y_{2n+1} = \frac{F_{2n+2}x_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.32}$$

formüllerine ulaşılır.

Teorem 3.2.1. $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, (3.10) sisteminin her çözümü (λ_+, λ_+)

noktasına yakınsar (Tollu ve ark. 2014).

3.3. $x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}$ Denklem Sistemi

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.33)$$

sistemi ele alındı. (3.33) sistemini çözmek için sistemin ikinci denkleminde elde edilen

$$x_n = y_{n+1}y_n - 1 \quad (3.34)$$

ifadesi kullanılır. Buradan, (3.34) eşitliği sistemin birinci denkleminde yerine yazılırsa sadece y_n değişkenine bağlı olan ikinci mertebeden

$$y_{n+2}y_{n+1}y_n = 2y_n + 1, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.35)$$

denkleme ulaşılır. Eğer (3.35) denkleminde $y_n = \frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}$ değişken değiştirmesi kullanılırsa üçüncü mertebeden

$$\tilde{y}_{n+3} = 2\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_n, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.36)$$

lineer denklemi elde edilir. Dikkat edilirse (3.36) lineer denklemi

$$(\tilde{y}_{n+3} + \tilde{y}_{n+2}) - (\tilde{y}_{n+2} + \tilde{y}_{n+1}) - (\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_n) = 0, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. (3.37) denkleminde

$$\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_n = w_{n+1} \quad (3.38)$$

değişken değiştirmesi kullanılırsa denklem

$$w_{n+3} - w_{n+2} - w_{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.39)$$

denkleme indirgenir. (3.39) denkleminin de yine (1.29) denkleminin formunda olduğundan (3.39) denkleminin genel çözümü

$$w_{n+1} = F_n w_2 + F_{n-1} w_1, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.40)$$

şeklinde elde edilir. (3.38) değişken değiştirmesinden geri dönüşüm yapılarak

$$\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_n = F_n (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{n-1} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.41)$$

denklemini elde edilir. (3.41) denklemini

$$\tilde{y}_{n+1} - (F_{n-1} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{n-2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0)) = - \left[\tilde{y}_n - (F_{n-2} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{n-3} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0)) \right] \quad (3.42)$$

şeklinde yazılabilir ki bu birinci mertebeden lineer homojen bir fark denklemdir.

Dolayısıyla, (3.42) denklemini

$$\tilde{y}_n - (F_{n-2} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{n-3} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0)) = (-1)^n \left[\tilde{y}_0 - (F_{-2} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{-3} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0)) \right] \quad (3.43)$$

çözümüne sahiptir. $F_{-2} = -1$ ve $F_{-3} = 2$ olduğu dikkate alınır (3.43) çözümü tek ve çift indisli terimler için

$$\tilde{y}_{2n} = F_{2n-2} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{2n-3} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0) + \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0 \quad (3.44)$$

ve

$$\tilde{y}_{2n+1} = F_{2n-1} (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1) + F_{2n-2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0) - (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0) \quad (3.45)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. (3.44) ve (3.45) eşitliklerinden daha önce uygulanan $y_n = \frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}$

değişken değiştirmesiyle geri dönüşüm yapılır sırasıyla

$$y_{2n} = \frac{(F_{2n} + 1)y_0 + (F_{2n-1} - 1)x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1} - 1)y_0 + (F_{2n-2} + 1)x_0 + F_{2n-1}} \quad (3.46)$$

ve

$$y_{2n+1} = \frac{(F_{2n+1} - 1)y_0 + (F_{2n} + 1)x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n} + 1)y_0 + (F_{2n-1} - 1)x_0 + F_{2n}} \quad (3.47)$$

formüllerine ulaşılır. (3.46) ve (3.47) formülleri ile (3.33)'ten

$$x_{2n} = \frac{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1} - 1)y_0 + (F_{2n-2} + 1)x_0 + F_{2n-1}} \quad (3.48)$$

ve

$$x_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n} + 1)y_0 + (F_{2n-1} - 1)x_0 + F_{2n}} \quad (3.49)$$

formülleri elde edilir. Sonuç olarak (3.46) - (3.49) formülleri (3.33) sisteminin genel çözümünü verir.

Teorem 3.3.1. $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, (3.33) sisteminin her çözümü (λ_+, λ_+) noktasına yakınsar (Tollu ve ark. 2014).

$$4. \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + ay_n z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + az_n x_n} \quad \text{DENKLEM SİSTEMİNİN}$$

ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm, tezin orijinal kısmı olup uluslararası hakemli bir dergide yayımlanarak literatüre kazandırıldı (Yılmazyıldırım ve Tollu, 2018).

$a \in [0, \infty)$ ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + ay_n z_n}, z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + az_n x_n} \quad (4.1)$$

fark denklem sistemi tanımlandı, tanımlanan sistemin genel çözümü kapalı formda elde edildi, çözümlerin asimptotik davranışı incelendi ve elde edilen teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verildi.

4.1. $a=0$ Durumu

Bu kısımda, (4.1) sistemi $a=0$ için ele alındı. (4.1) sisteminde $a=0$ alınırsa

$$x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = y_n + z_n, z_{n+1} = z_n + x_n \quad (4.2)$$

fark denklem sistemi elde edilir. (4.2) sisteminin birinci denkleminde y_n çekilirse

$y_n = x_{n+1} - x_n$ ifadesi elde edilip (4.2) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + z_n$$

bulunur. Bu ifadeden de z_n çekilip (4.2) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazılırsa

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - 2x_n = 0 \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Benzer işlemlerle

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - 2y_n = 0 \quad (4.4)$$

ve

$$z_{n+3} - 3z_{n+2} + 3z_{n+1} - 2z_n = 0 \quad (4.5)$$

denklemleri elde edilir. (4.3)-(4.5) denklemleri aynı formda olduklarından (4.2) denklem sisteminin genel çözümü için sadece (4.3) denkleminin çözümünü bulup sistemde yerine koymak yeterli olacaktır. Dikkat edilirse (4.3) denklemi

$$(x_{n+3} - 2x_{n+2}) - (x_{n+2} - 2x_{n+1}) + (x_{n+1} - 2x_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = u_n \quad (4.6)$$

değişken değiştirilmesi uygulanırsa

$$u_{n+1} = u_n - u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.7)$$

denklemini elde edilir. (4.7) denkleminin her $n \geq 4$ için

$$u_{n+1} = u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-1} = -u_{n-2} = u_{n-5}$$

olduğu görülür ki bu (4.7) denkleminin 6 periyotlu olduğunu gösterir. (4.7) denkleminin çözümü ise; $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$u_1 = u_0 - u_{-1}$$

$$u_2 = -u_{-1}$$

$$u_3 = -u_0$$

$$u_4 = -u_0 + u_{-1}$$

$$u_5 = u_{-1}$$

$$u_6 = u_0$$

şeklinde elde edilir. Yani, bu çözüm $i = \overline{0, 5}$ için

$$u_{6n+i} = u_i \quad (4.8)$$

formundadır. (4.6) ve (4.8)'den

$$x_{6n+2+i} - 2x_{6n+1+i} = x_{i+2} - 2x_{i+1} \quad (4.9)$$

eşitliği elde edilir. (4.9) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$x_{6n+2+i} - 2x_{6n+1+i} + x_{6n+1+i} - 2x_{6n+i} = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_{i+1} - 2x_i$$

eşitliği veya

$$x_{6n+2+i} - x_{6n+1+i} - 2x_{6n+i} = x_{i+2} - x_{i+1} - 2x_i, n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.10)$$

ifadesi elde edilir. (4.3) denklemi başka bir formda tekrar yazılırsa

$$(x_{n+3} - x_{n+2} + x_{n+1}) - 2(x_{n+2} - x_{n+1} + x_n) = 0 \quad (4.11)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = v_n \quad (4.12)$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$v_{n+1} - 2v_n = 0 \quad (4.13)$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemin genel çözümü

$$v_n = 2^n v_0 \quad (4.14)$$

şeklindedir. (4.12) ve (4.14)'ten

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 2^n (x_2 - x_1 + x_0) \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) eşitliği için, n yerine $6n+i$ yazılırsa

$$x_{6n+2+i} - x_{6n+1+i} + x_{6n+i} = 2^{6n+i} (x_2 - x_1 + x_0), i = \overline{0,5} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.10) ve (4.16) ifadeleri taraf tarafa çıkarılarak

$$x_{6n+i} = \frac{1}{3} \left[2^{6n+i} (y_1 + x_0) - (y_{i+1} - 2x_i) \right], i = \overline{0,5} \quad (4.17)$$

formülü elde edilir. (4.17) formülünden $i=0$ için, (4.2) sistemindeki denklemler kullanılarak

$$\begin{aligned} x_{6n} &= \frac{1}{3} [2^{6n} (y_1 + x_0) - (y_1 - 2x_0)] \\ &= \frac{1}{3} [2^{6n} (x_0 + y_0 + z_0) - (y_0 + z_0 - 2x_0)] \\ &= \left(\frac{2^{6n} + 2}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) z_0, \end{aligned}$$

elde edilir . Diğer i değerleri için de düzenlemeler yapılırsa (4.3) denkleminin çözümü ve dolayısıyla (4.17) kapalı formülünün açık hali

$$x_{6n} = \left(\frac{2^{6n} + 2}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) z_0, \quad (4.18)$$

$$x_{6n+1} = \left(\frac{2^{6n+1} + 1}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n+1} + 1}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n+1} - 2}{3} \right) z_0, \quad (4.19)$$

$$x_{6n+2} = \left(\frac{2^{6n+2} - 1}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n+2} + 2}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n+2} - 1}{3} \right) z_0, \quad (4.20)$$

$$x_{6n+3} = \left(\frac{2^{6n+3} - 2}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n+3} + 1}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n+3} + 1}{3} \right) z_0, \quad (4.21)$$

$$x_{6n+4} = \left(\frac{2^{6n+4} - 1}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n+4} - 1}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n+4} + 2}{3} \right) z_0, \quad (4.22)$$

$$x_{6n+5} = \left(\frac{2^{6n+5} + 1}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n+5} - 2}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n+5} + 1}{3} \right) z_0, \quad (4.23)$$

şeklinde elde edilir. (4.18)-(4.23) formülleri (4.2) sisteminin birinci denkleminde kullanılırsa

$$y_{6n} = \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) x_0 + \left(\frac{2^{6n} + 2}{3} \right) y_0 + \left(\frac{2^{6n} - 1}{3} \right) z_0, \quad (4.24)$$

$$y_{6n+1} = \left(\frac{2^{6n+1}-2}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right)z_0, \quad (4.25)$$

$$y_{6n+2} = \left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+2}+2}{3}\right)z_0, \quad (4.26)$$

$$y_{6n+3} = \left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+3}-2}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right)z_0, \quad (4.27)$$

$$y_{6n+4} = \left(\frac{2^{6n+4}+2}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right)z_0, \quad (4.28)$$

$$y_{6n+5} = \left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+5}-2}{3}\right)z_0, \quad (4.29)$$

formülleri elde edilir. Benzer şekilde (4.24)-(4.29) formülleri (4.2) sisteminin ikinci denkleminde kullanılırsa

$$z_{6n} = \left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n}+2}{3}\right)z_0, \quad (4.30)$$

$$z_{6n+1} = \left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+1}-2}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right)z_0, \quad (4.31)$$

$$z_{6n+2} = \left(\frac{2^{6n+2}+2}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right)z_0, \quad (4.32)$$

$$z_{6n+3} = \left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+3}-2}{3}\right)z_0, \quad (4.33)$$

$$z_{6n+4} = \left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+4}+2}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right)z_0, \quad (4.34)$$

$$z_{6n+5} = \left(\frac{2^{6n+5}-2}{3}\right)x_0 + \left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right)y_0 + \left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right)z_0, \quad (4.35)$$

formülleri elde edilir.

4.2. $a > 0$ Durumu

Bu kısımda, (4.1) sistemi $a > 0$ için ele alındı. Sırasıyla $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 'dan (4.1) sistemindeki denklemlerden çıkarılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - x_{n+1} = \frac{1 + ax_n y_n - \sqrt{a}x_n - \sqrt{a}y_n}{\sqrt{a}(1 + ax_n y_n)} \quad (4.36)$$

elde edilir. Diğer denklemler içinde düzenlenirse

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - y_{n+1} = \frac{1 + ay_n z_n - \sqrt{a}y_n - \sqrt{a}z_n}{\sqrt{a}(1 + ay_n z_n)}, \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - z_{n+1} = \frac{1 + az_n x_n - \sqrt{a}z_n - \sqrt{a}x_n}{\sqrt{a}(1 + az_n x_n)}, \quad (4.38)$$

ve aynı şekilde $\frac{1}{\sqrt{a}}$, (4.1) sistemindeki denklemlerin her iki tarafına eklenirse

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x_n + y_n}{1 + ax_n y_n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + x_{n+1} = \frac{1 + ax_n y_n + \sqrt{a}x_n + \sqrt{a}y_n}{\sqrt{a}(1 + ax_n y_n)}, \quad (4.39)$$

elde edilir. Diğer denklemler içinde düzenlenirse

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + y_{n+1} = \frac{1 + ay_n z_n + \sqrt{a}y_n + \sqrt{a}z_n}{\sqrt{a}(1 + ay_n z_n)}, \quad (4.40)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + z_{n+1} = \frac{1 + az_n x_n + \sqrt{a} z_n + \sqrt{a} x_n}{\sqrt{a}(1 + az_n x_n)} \quad (4.41)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.36)- (4.38) ve (4.39) - (4.41) denklemlerinden $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(1 + ax_n y_n)(1 + ay_n z_n)(1 + az_n x_n) \neq 0, \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \pm x_n \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \pm y_n \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \pm z_n \right) \neq 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - x_n = X_n^-, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} - y_n = Y_n^-, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} - z_n = Z_n^- \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + x_n = X_n^+, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} + y_n = Y_n^+, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} + z_n = Z_n^+ \quad (4.43)$$

olmak üzere,

$$\frac{X_{n+1}^-}{X_{n+1}^+} = \frac{X_n^- Y_n^-}{X_n^+ Y_n^+}, \quad \frac{Y_{n+1}^-}{Y_{n+1}^+} = \frac{Y_n^- Z_n^-}{Y_n^+ Z_n^+}, \quad \frac{Z_{n+1}^-}{Z_{n+1}^+} = \frac{Z_n^- X_n^-}{Z_n^+ X_n^+} \quad (4.44)$$

sistemi elde edilir. (4.44) sisteminden $n \geq 0$ için iterasyon ile

$$\begin{aligned} \frac{X_1^-}{X_1^+} &= \frac{X_0^- Y_0^-}{X_0^+ Y_0^+}, \quad \frac{Y_1^-}{Y_1^+} = \frac{Y_0^- Z_0^-}{Y_0^+ Z_0^+}, \quad \frac{Z_1^-}{Z_1^+} = \frac{Z_0^- X_0^-}{Z_0^+ X_0^+}, \\ \frac{X_2^-}{X_2^+} &= \frac{X_0^-}{X_0^+} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^2 \frac{Z_0^-}{Z_0^+}, \quad \frac{Y_2^-}{Y_2^+} = \frac{Y_0^-}{Y_0^+} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^2 \frac{X_0^-}{X_0^+}, \quad \frac{Z_2^-}{Z_2^+} = \frac{Z_0^-}{Z_0^+} \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^2 \frac{Y_0^-}{Y_0^+} \\ \frac{X_3^-}{X_3^+} &= \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^2 \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^3 \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^3, \quad \frac{Y_3^-}{Y_3^+} = \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^2 \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^3 \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^3, \quad \frac{Z_3^-}{Z_3^+} = \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^2 \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^3 \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.45)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan anlaşılır ki; (4.44) sisteminin çözümü

$$\frac{X_n^-}{X_n^+} = \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{a_n} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{b_n} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{c_n}, \quad (4.46)$$

$$\frac{Y_n^-}{Y_n^+} = \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{a_n} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{b_n} \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{c_n}, \quad (4.47)$$

$$\frac{Z_n^-}{Z_n^+} = \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{a_n} \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{b_n} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{c_n} \quad (4.48)$$

formundadır. (4.46) - (4.48) arasındaki denklemlerden $n=0$ için

$$\frac{X_0^-}{X_0^+} = \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{a_0} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{b_0} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{c_0}, \quad (4.49)$$

$$\frac{Y_0^-}{Y_0^+} = \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{a_0} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{b_0} \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{c_0}, \quad (4.50)$$

$$\frac{Z_0^-}{Z_0^+} = \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{a_0} \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{b_0} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{c_0} \quad (4.51)$$

olup $a_0 = 1$ ve $b_0 = c_0 = 0$ olduğu anlaşılır. (4.46) - (4.48) arasındaki ifadeler (4.44)'te kullanılırsa $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{a_{n+1}} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{b_{n+1}} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{c_{n+1}} = \left(\frac{X_0^-}{X_0^+} \right)^{a_n+c_n} \left(\frac{Y_0^-}{Y_0^+} \right)^{a_n+b_n} \left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+} \right)^{b_n+c_n} \quad (4.52)$$

ve

$$a_{n+1} = a_n + c_n, \quad b_{n+1} = b_n + a_n, \quad c_{n+1} = c_n + b_n \quad (4.53)$$

eşitlikleri elde edilir. $a_n = x_n$, $b_n = z_n$ ve $c_n = y_n$ için (4.53) sisteminin çözümü (4.2) sisteminin çözümünden elde edilebilir. Eğer $a_0 = 1$ ve $b_0 = c_0 = 0$ olduğu da dikkate alınırsa a_n , b_n ve c_n , dizileri için

$$\begin{cases} a_{6n} = \frac{2^{6n} + 2}{3}, a_{6n+1} = \frac{2^{6n+1} + 1}{3}, a_{6n+2} = \frac{2^{6n+2} - 1}{3} \\ a_{6n+3} = \frac{2^{6n+3} - 2}{3}, a_{6n+4} = \frac{2^{6n+4} - 1}{3}, a_{6n+5} = \frac{2^{6n+5} + 1}{3} \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{6n} = \frac{2^{6n}-1}{3}, b_{6n+1} = \frac{2^{6n+1}-2}{3}, b_{6n+2} = \frac{2^{6n+2}-1}{3} \\ b_{6n+3} = \frac{2^{6n+3}+1}{3}, b_{6n+4} = \frac{2^{6n+4}+2}{3}, b_{6n+5} = \frac{2^{6n+5}+1}{3} \end{array} \right. \quad (4.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{6n} = \frac{2^{6n}-1}{3}, c_{6n+1} = \frac{2^{6n+1}+1}{3}, c_{6n+2} = \frac{2^{6n+2}+2}{3} \\ c_{6n+3} = \frac{2^{6n+3}+1}{3}, c_{6n+4} = \frac{2^{6n+4}-1}{3}, c_{6n+5} = \frac{2^{6n+5}-2}{3} \end{array} \right. \quad (4.56)$$

formülleri elde edilir. Sonuç olarak, (4.46) - (4.48) ve (4.54) - (4.56)'dan (4.1) sisteminin $a > 0$ durumu için genel çözümü

$$x_{6n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n-1}}{3}}}, \quad (4.57)$$

$$x_{6n+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}}, \quad (4.58)$$

$$x_{6n+2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}, \quad (4.59)$$

$$x_{6n+3} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}}, \quad (4.60)$$

$$x_{6n+4} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}}, \quad (4.61)$$

$$x_{6n+5} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} - \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}{\left(X_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Y_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Z_0^+ \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} + \left(X_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Y_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Z_0^- \right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}, \quad (4.62)$$

$$z_{6n+3} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} - \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}} + \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}}, \quad (4.72)$$

$$z_{6n+4} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} - \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} + \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}}, \quad (4.73)$$

$$z_{6n+5} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} - \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} + \left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}} \left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}} \left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}, \quad (4.74)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - x_n = X_n^-, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} - y_n = Y_n^-, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} - z_n = Z_n^-$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + x_n = X_n^+, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} + y_n = Y_n^+, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} + z_n = Z_n^+$$

dır.

4.3. Çözümlerin Asimptotik Davranışı

Bu kısımda, (4.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelendi. Tanım (1.6.1)'den sistemin denge noktaları

$$\bar{x} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{1 + a\bar{x}\bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{y} + \bar{z}}{1 + a\bar{y}\bar{z}}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{z} + \bar{x}}{1 + a\bar{z}\bar{x}}$$

sisteminin çözümüdür. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{y}(a\bar{x}^2 - 1) = 0, \quad \bar{z}(a\bar{y}^2 - 1) = 0, \quad \bar{x}(a\bar{z}^2 - 1) = 0$$

olur. Burada, eğer \bar{x} , \bar{y} ve \bar{z} den herhangi birisi sıfır ise

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 0)$ bir denge noktasıdır. Eğer \bar{x} , \bar{y} ve \bar{z} sıfırdan farklı ise

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

pozitif denge noktası ve

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

negatif denge noktasıdır.

Teorem 4.3.1. (4.1) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $a=0$ ise $n \rightarrow \infty$ için $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)$ 'dur.

(ii) Eğer $a>0$ ise $n \rightarrow \infty$ için $(|x_n|, |y_n|, |z_n|) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ 'dir.

İspat:

(i) İstenen sonuca (4.18) - (4.35) arasındaki denklemlerden doğrudan limit alınarak kolaylıkla ulaşılır.

(ii) İspat x_n , y_n ve z_n için benzerdir. Bu nedenle ispatın sadece x_{6n} için yapılması yeterlidir. (4.57) denklemi, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{6n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{a}x_0}{1 + \sqrt{a}x_0} \right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}} \left(\frac{1 - \sqrt{a}y_0}{1 + \sqrt{a}y_0} \right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}} \left(\frac{1 - \sqrt{a}z_0}{1 + \sqrt{a}z_0} \right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}} - 1 \right) \quad (4.75)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{a}x}{1 + \sqrt{a}x} \quad (4.76)$$

fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyon,

$$\begin{cases} x < 0 \text{ ise } |f(x)| > 1 \\ x > 0 \text{ ise } |f(x)| < 1 \end{cases} \quad (4.77)$$

kurallarını sağlar ve (4.75) formülü ve (4.77) özelliğinden iki durum ortaya çıkar:

(a) Eğer $x_0, y_0, z_0 < 0$ ise $n \rightarrow \infty$ için $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 'dir.

(b) Eğer $x_0, y_0, z_0 > 0$ ise $n \rightarrow \infty$ için $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 'dir.

Diğer durumlar için,

$$(s_n)_{n \geq 0} = \left(\left(\frac{1 - \sqrt{a}x_0}{1 + \sqrt{a}x_0} \right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}} \left(\frac{1 - \sqrt{a}y_0}{1 + \sqrt{a}y_0} \right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}} \left(\frac{1 - \sqrt{a}z_0}{1 + \sqrt{a}z_0} \right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}} \right)_{n \geq 0} \quad (4.78)$$

dizisini ele alalım. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $(s_n) \rightarrow 0$ ise $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ ve

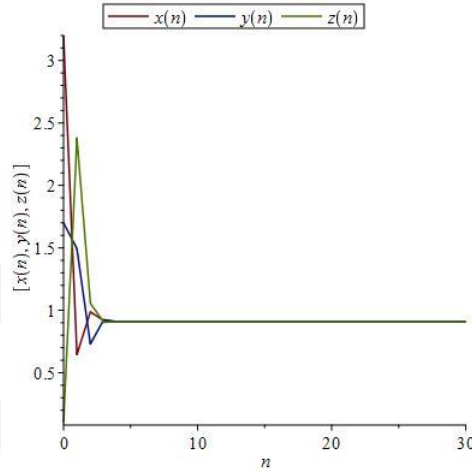
$n \rightarrow \infty$ için $(s_n) \rightarrow \infty$ ise $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 'dir. Böylece ispat

tamamlanır.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

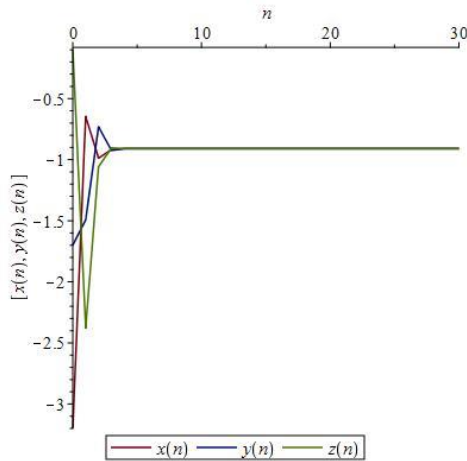
Bu bölümde, başlangıç şartları ve a parametresi için farklı değerler belirlenerek (4.1) sisteminin çözümlerinin grafikleri oluşturuldu. Böylece elde edilen teorik sonuçlar, bazı nümerik örneklerle görsel olarak doğrulandı.

Örnek 5.1. $a=1.21$ parametresi ve $x_0 = 3.2$, $y_0 = 1.7$, $z_0 = 0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $1/\sqrt{a}=1/1.1$ noktasına yakınsadığı Şekil 1’de görülmektedir.



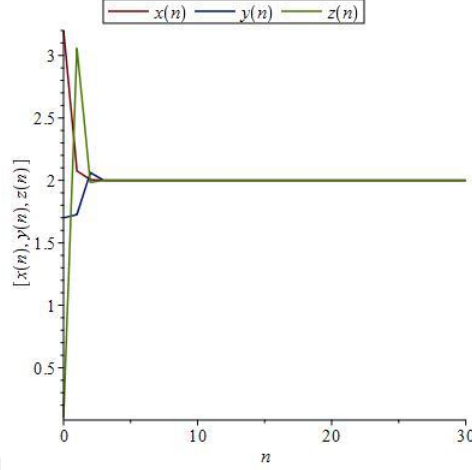
Şekil 1: $a=1.21$, $x_0 = 3.2$, $y_0 = 1.7$, $z_0 = 0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

Örnek 5.2. $a=1.21$ parametresi ve $x_0 = -3.2$, $y_0 = -1.7$, $z_0 = -0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $-1/\sqrt{a}=-1/1.1$ noktasına yakınsadığı Şekil 2’de görülmektedir.



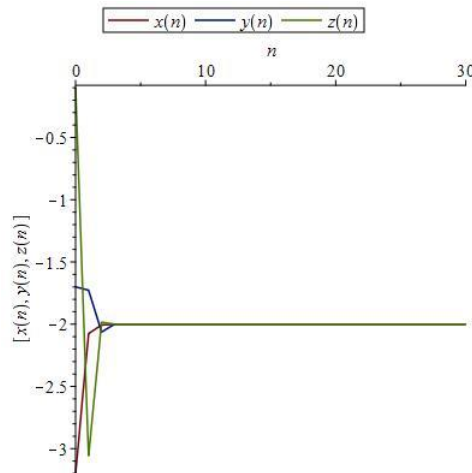
Şekil 2: $a=1.21$, $x_0 = -3.2$, $y_0 = -1.7$, $z_0 = -0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

Örnek 5.3. $a=0.25$ parametresi ve $x_0=3.2$, $y_0=1.7$, $z_0=0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $1/\sqrt{a}=2$ noktasına yakınsadığı Şekil 3'te görülmektedir.



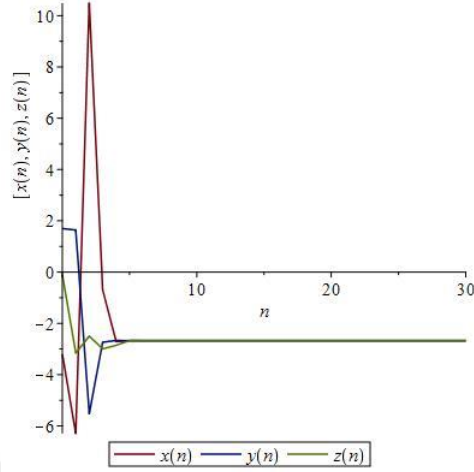
Şekil 3: $a=0.25$, $x_0=3.2$, $y_0=1.7$, $z_0=0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

Örnek 5.4. $a=0.25$ parametresi ve $x_0=-3.2$, $y_0=-1.7$, $z_0=-0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $-1/\sqrt{a}=-2$ noktasına yakınsadığı Şekil 4'te görülmektedir.



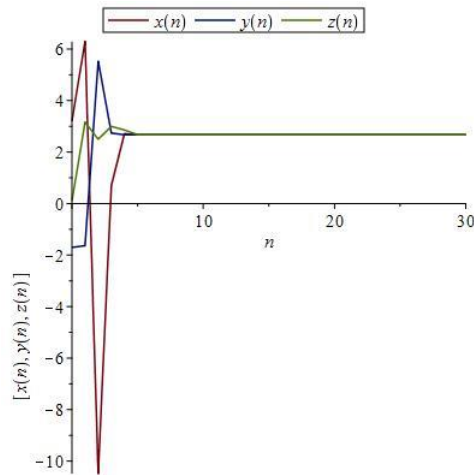
Şekil 4: $a=0.25$, $x_0=-3.2$, $y_0=-1.7$, $z_0=-0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

Örnek 5.5. $a=0.14$ parametresi ve $x_0 = -3.2$, $y_0 = 1.7$, $z_0 = -0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $-1/\sqrt{a} = -1/\sqrt{0.14}$ noktasına yakınsadığı Şekil 5'te görülmektedir.



Şekil 5: $a=0.14$, $x_0 = -3.2$, $y_0 = 1.7$, $z_0 = -0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

Örnek 5.6. $a=0.14$ parametresi ve $x_0 = 3.2$, $y_0 = -1.7$, $z_0 = 0.1$ başlangıç şartları için (4.1) sisteminin çözümlerinin $1/\sqrt{a} = 1/\sqrt{0.14}$ noktasına yakınsadığı Şekil 6'da görülmektedir.



Şekil 6: $a=0.14$, $x_0 = 3.2$, $y_0 = -1.7$, $z_0 = 0.1$ için (4.1) sisteminin çözümleri

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk defa ortaya konulan bir denklem sistemi olan (4.1) sisteminin $a \in [0, \infty)$ ve reel başlangıç şartları için çözülebilir olduğu gösterilerek genel çözüm formları elde edildi. Ayrıca bu formlar kullanılarak çözümlerin asimptotik davranışı incelenmiş ve tüm çözümlerin $1/\sqrt{a}$ ile formüle edilen tek bir noktaya yakınsadığı tespit edildi.

Burada çözümleri incelenen sistem dışında başka sistemler tanımlanıp farklı çalışmalar yapılabilir. Bunun için değişkenlerin yerleri değiştirilebilir veya sistemin mertebesi yükseltilebilir. Bundan sonra sistem çözülüp çözümlerin varlığı ve davranışı incelenebilir. Ayrıca başlangıç şartları ve a parametresi kompleks sayı olarak seçilip inceleme bölgesi genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Abu-Saris, R., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2008, On the asymptotic stability of $x_{n+1} = (x_n x_{n-k} + a)/(x_n + x_{n-k})$, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(5), 1172-1175.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitapevi*, Ankara.
- Berg, L., and Stević S., 2011, On some systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 1713-1718.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Cull, P., Flahive, M., and Robson R., 2004, Difference equations: from rabbits to chaos.
- El-Dessoky, M. M., (2016a), On a solvable for some systems of rational difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 3744-3759.
- El-Dessoky, M. M., 2016b, Solution for rational systems of difference equations of order three, *Mathematics*, 4, 53, 1-12.
- El-Dessoky, M. M., 2016c, On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 2190-2207.
- El-Dessoky, M. M., 2016d, The form of solutions and periodicity for some systems of third-order rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1076-1092.
- El-Metwally, H., 2013, Solutions Form for Some Rational Systems of Difference Equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 903593, 10 pages.
- Elsayed, E. M. and Ahmed, A. M., 2016, Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1026-1038.
- Elsayed, E. M. and Alghamdi, A., 2016, The form of the solutions of nonlinear difference equations systems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(5), 3179-3196.
- Elsayed, E. M., Alotaibi, A. and Almaylabi, A. H., 2017, On a solutions of fourth order rational systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 7(22), 1298-1308.
- Elsayed, E. M., 2017, On a solutions and periodicity of some rational systems of difference equations, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 2(108), 159-171.

- Gumus, M. and Soykan, Y., 2016, Global character of a six dimensional nonlinear system of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 6842521, 7 pages.
- Haddad, N., Touafek, N. and Rabago, J. F. T., 2016, Solution form of a higher-order system of difference equations and dynamical behavior of its special case, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, doi: 10.1002/mma.4248.
- Haddad, N., Tauafek, N. and Rabago, J. F. T., 2018, Well-defined solutions of a system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 56, 439-458.
- Koshy, T., 2001, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley, New York.
- Kurbanli, A. S., Çinar, C. and Şimşek, D., 2011, On the periodicity of solutions of the system of rational difference equations, *Applied Mathematics*, 2, 410-413.
- Levy, H. and Lessman, F., 1992, *Finite Difference Equations*, Dover Publications, Inc., New York.
- Soykan, Y., Göcen, M., Gümüş, M., 2017, *Lineer Fark Denklemleri*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Stević, S., 2012, On some solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5010-5018.
- Stević, S., Alghamdi, M. A., Shahzad, N. and Maturi, D. A., 2013, On a class of solvable difference equations, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Article ID 157943, 7 pages.
- Stević, S., Alghamdi, M. A., Alotaibi, A. and Elyased, E. M., 2015, Solvable product-type system of difference equations of second order, *Electronic Journal of Differential Equations*, 169, 1-20.
- Şahinkaya, A. F., Yalçınkaya, İ. and Tollu, D. T., 2018, A solvable system of nonlinear difference equations, *KMU Electronic Journal of Mathematical Studies*, in press.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2013, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2013:174.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.
- Tollu, D. T., 2014, Bazı rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri üzerine, *Doktora Tezi*, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 24-25.

- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2017, On global behavior of a system of nonlinear difference equations of order two, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 27(3), 373-383.
- Tollu, D. T. and Yalcinkaya, I., 2019, Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 68(1), 1-16.
- Turk, G., Yalcinkaya, I. and Tollu, D. T., 2018, On solutions of a system of two fourth-order difference equations, *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, 25, 85-96.
- Yalcinkaya, I., 2008, On the global asymptotic stability of a second-order system of difference equations, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, Article ID 860152, 12 pages.
- Yalcinkaya, I., Cinar, C. and Simsek D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis*, (6)87, 677-687.
- Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4, 15-20.
- Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2015, On the behaviour of solutions for some systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis & Applications*, 18(1), 166-178.
- Yilmazyıldırım, B. and Tollu D. T., 2018, Explicit solutions of a three-dimensional system of nonlinear difference equations, *Hittite Journal of Science and Engineering*, 5 (2) 119-123, DOI: 10.17350/HJSE19030000082.
- Xianyi, L. and Deming, Z., 2003, Global asymptotic stability in a rational equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(9), 833-839.
- Xianyi, L. and Deming, Z., 2004, Two rational recursive sequences, *Computers & Mathematics with Applications*, 47, 1487-1494.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Bahriye YILMAZYILDIRIM
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Ilgın / 20.01.1995
Telefon : 05435530485
e-mail : bahriye.byy@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Selam Kemer Anadolu Lisesi, Ilgın, Konya	2012
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği ABD, Konya	2016
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2016-2017	Selam Kemer Anadolu Lisesi, Ilgın, Konya	Matematik Öğretmeni
2017-2018	Altınözü Akşemsettin İmam Hatip Ortaokulu, Altınözü, Hatay	Matematik Öğretmeni

YAYINLAR

Yılmazyıldırım, B. and Tollu D. T., 2018, Explicit solutions of a three-dimensional system of nonlinear difference equations, *Hittite Journal of Science and Engineering*, 5 (2) 119-123, DOI: 10.17350/HJSE19030000082.