



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



***n.* FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ
İKİNCİ KUVVETLERİNİN ALTERED
DİZİLERİ VE *r*-ARDIŞIK EN BÜYÜK ORTAK
BÖLEN DİZİLERİ**

Emre KANKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**OCAK-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Emre KANKAL tarafından hazırlanan “***n*. Fibonacci ve Lucas Sayılarının İkinci Kuvvetlerinin Altered Dizileri ve *r*-Ardışık En Büyük Ortak Bölen Dizileri**” adlı tez çalışması 13 / 01 / 2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Necati TAŞKARA

.....

Danışman

Doç. Dr. Fikri KÖKEN

.....

Üye

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim KALAYCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Emre KANKAL

Tarih: 13.01.2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

***n*. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ İKİNCİ KUVVETLERİNİN ALTERED DİZİLERİ VE *r*-ARDIŞIK EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN DİZİLERİ**

Emre KANKAL

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Fikri KÖKEN

2023, 56 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Doç. Dr. Fikri KÖKEN**

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ana sonuçlarda kullanılacak olan bölünebilme ve en büyük ortak bölen özellikleri ile Fibonacci ve Lucas dizileri hakkındaki literatürdeki bilinen özelliklerinden bahsedilmektedir.

İkinci bölümde incelenen altered Fibonacci ve Lucas dizileri hakkında benzer olarak yapılan literatürdeki kaynak araştırmaları verilmektedir.

Ana bölümlerimiz olan üçüncü ve dördüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarının özellikleri göz önünde tutularak n . Fibonacci ve Lucas sayılarının karesinden $\{\pm 1, \pm 9\}$ değerlerinin eklenip veya çıkarılması ile elde edilen altered sayılardan alt Fibonacci ve Lucas dizilerinin oluştuğu görülür. Altered dizilerinin Fibonacci ve Lucas dizilerle bağlantıları elde edilir. Bu yüzden, bu altered dizilerin en az Fibonacci ve Lucas sayıları kadar öneme sahip olduğu gösterilir. Fibonacci ve Lucas dizilerinin indirgeme ve bölünebilme özelliklerinden faydalanarak; altered dizilerin benzeri indirgeme bağlantıları ve Binet formülleri verilmektedir. Benzer olarak, Fibonacci ve Lucas sayılarının ardışık terimlerinin en büyük ortak bölen özelliklerine göre altered sayılarının üzerinde r -ardışık terimlerinin en büyük ortak bölen dizileri araştırılarak Fibonacci ve Lucas alt dizi bağlantıları araştırılmaktadır.

Son bölüm içinde çalışma boyunca yapılan araştırma, bulgu ve gözlemlere göre elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Altered Fibonacci Sayıları, Altered Lucas Sayıları, En büyük ortak bölen (EBOB) dizileri, Fibonacci dizisi, Lucas dizisi

ABSTRACT

MS THESIS

ALTERED SEQUENCES OF SECOND POWERS OF THE n . FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS AND r -CONSECUTIVE GREATEST COMMON DIVISOR SEQUENCES

Emre KANKAL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc.Prof. Dr. Fikri KÖKEN

2023, 56 Pages

Jury

Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Assoc.Prof. Dr. Fikri KÖKEN

This study consists of five chapters. In the subsections in the first chapter, the divisibility and greatest common divisor properties and the known properties in the literature about Fibonacci and Lucas sequences that will be used in the main results are mentioned.

In the second part, similar literature studies about altered Fibonacci and Lucas sequences are mentioned.

In the third and fourth sections, which are our main sections, it is seen that sub-Fibonacci and Lucas sequences are formed from altered numbers obtained by adding or subtracting the values $\{\pm 1, \pm 9\}$ from the square of the n . Fibonacci and Lucas numbers, taking into account the properties of Fibonacci and Lucas numbers. The relations of altered sequences with Fibonacci and Lucas sequences are obtained. Therefore, it is shown that these altered sequences are at least as important as the Fibonacci and Lucas numbers. By making use of the reduction and divisibility properties of the Fibonacci and Lucas sequences; Similar reduction relations of altered sequences and Binet formulas are given. Similarly, Fibonacci and Lucas subsequence connections are investigated by searching the largest common divisor sequences of r -consecutive terms on altered numbers according to the greatest common divisor properties of consecutive terms of Fibonacci and Lucas numbers.

In the last section, the results and suggestions obtained according to the research, findings and observations made during the study are given.

Keywords: Altered Fibonacci Numbers, Altered Lucas Numbers, Greatest Common Divisor (GCD) Sequences, Fibonacci Sequence, Lucas Sequence

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca her zaman değerli görüş ve katkıları ile bana destek olan beni yönlendiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Fikri KÖKEN'e teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Her zaman yanımda olan sevgili annem Senem KANKAL'a, sevgili babam İbrahim KANKAL'a ve kıymetli eşim Hatice KANKAL'a sevgi ve minnet duygularımı sunarım.

Emre KANKAL
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Bölünebilme ve En Büyük Ortak Bölen Özellikleri	1
1.2. Fibonacci Sayıları ve Fibonacci Sayılarından Türetilen Diziler.....	4
1.3. Lucas Sayıları ve Lucas Sayılarından Türetilen Diziler.....	7
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	10
2.1. Altered Fibonacci Dizileri.....	10
2.2. Altered Lucas Dizileri.....	14
2.3. Brocard-Ramanujan Denklemleri.....	16
3. FİBONACCİ SAYISININ İKİNCİ KUVVETİNİN ALTERED DİZİLERİ...18	
3.1. $\{G_n^{(2)}\}$ n . Fibonacci Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi	19
3.2. $\{H_n^{(2)}\}$ n . Fibonacci Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizileri.....	25
4. LUCAS SAYISININ İKİNCİ KUVVETİNİN ALTERED DİZİLERİ	32
4.1. $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi.....	33
4.2. $\{H_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi.....	39
4.3. $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi.....	40
4.4. $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizileri	42
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	49
5.1. Sonuçlar	49
5.2. Öneriler.....	50
6. KAYNAKLAR.....	51
EKLER	53
ÖZGEÇMİŞ.....	59

SİMGELER VE KISALTMALAR

$b \mid a$	$a = bc, c \in \mathbb{Z}$ eşitliği ile b böler a veya a 'ya b 'nin bir katı
(a, b)	a ile b 'nin en büyük ortak böleni $ebob(gcd), = ebob(a, b)$
F_n	n . Fibonacci sayısı
L_n	n . Lucas sayısı
α	Altın Oran $= (1 + \sqrt{5}) / 2$
β	$1 - \text{Altın Oran} = 1 - \alpha = (1 - \sqrt{5}) / 2$
G_n	Altered Fibonacci sayısı, $\{G_n\} = \{F_n + (-1)^n\}$ ile tanımlanan
H_n	Altered Fibonacci sayısı, $\{H_n\} = \{F_n - (-1)^n\}$ ile tanımlanan
$l_n(a)$	Altered Lucas ebob sayısı, $\{l_n(a)\}_{n \geq 0} = \{ebob(L_n + a, L_{n+1} + a)\}$ dizisi
$f_n(a)$	Altered Fibonacci ebob sayısı, $\{f_n(a)\}_{n \geq 0} = \{ebob(F_n + a, F_{n+1} + a)\}$ dizisi
L_n^+	Altered Lucas sayısı, $L_{2k}^+ = L_{2k} - 1, L_{2k+1}^+ = L_{2k+1} + 3$
L_n^-	Altered Lucas sayısı, $L_{2k}^- = L_{2k} + 1, L_{2k+1}^- = L_{2k+1} - 3$
$L_{n,1}^+$	(L_n^+, L_{n+1}^+) , L_n^+ ve L_{n+1}^+ altered Lucas sayılarının en büyük ortak böleni
$L_{n,1}^-$	(L_n^-, L_{n+1}^-) , L_n^- ve L_{n+1}^- altered Lucas sayılarının en büyük ortak böleni
$G_n^{(2)}$	n . Fibonacci sayısının ikinci kuvvetinin altered sayısı, $G_n^{(2)} = F_n^2 + (-1)^n$
$G_{n,r}^{(2)}$	r -ardışık altered Fibonacci ebob sayısı $G_{n,r}^{(2)} = ebob(G_n^{(2)}, G_{n+r}^{(2)})$
$H_n^{(2)}$	n . Fibonacci sayısının ikinci kuvvetinin altered sayısı, $H_n^{(2)} = F_n^2 - (-1)^n$
$H_{n,r}^{(2)}$	r -ardışık altered Fibonaaci ebob sayısı $H_{n,r}^{(2)} = ebob(H_n^{(2)}, H_{n+r}^{(2)})$
$G_{L(n)}^{(2)}(a)$	n . Lucas sayısının ikinci kuvvetinin a 'ya göre altered sayısı, $G_{L(n)}^{(2)}(a) = L_n^2 + (-1)^n a$
$G_{L(n),r}^{(2)}(a)$	r -ardışık altered Fibonaaci ebob sayısı $G_{L(n),r}^{(2)}(a) = (G_{L(n)}^{(2)}(a), G_{L(n+r)}^{(2)}(a))$
$H_{L(n)}^{(2)}(a)$	n . Lucas sayısının ikinci kuvvetinin altered sayısı, $H_{L(n)}^{(2)}(a) = L_n^2 - (-1)^n a$
$H_{L(n),r}^{(2)}(a)$	r -ardışık altered Lucas ebob sayısı $H_{L(n),r}^{(2)}(a) = (H_{L(n)}^{(2)}(a), H_{L(n+r)}^{(2)}(a))$

1. GİRİŞ

Bu bölüm, 3 alt kısımdan oluşmaktadır; birinci kısımda ana bölümlerimizde kullanılacak olan bölünebilme ve en büyük ortak bölen (EBOB) özelliklerinden bahsedilecektir. Diğer iki kısımda çalışmanın ana temasının üzerine kurulu olduğu Fibonacci ve Lucas dizilerinin özellikleri yer alacaktır.

1.1. Bölünebilme ve En Büyük Ortak Bölen Özellikleri

Bu kısımda, ilk olarak bölünebilmenin tanımına ardından özelliklerine yer verilecektir. İkinci olarak, en büyük ortak bölen tanımına yer verip, bölme algoritmasının tanımına ve özelliklerine yer verilecektir (Çallıalp F., 1999; Koshy T., 2007).

1.1.1. Bölünebilme

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $a = bc$ olacak şekilde bir c tam sayısı var ise b , a 'yi böler veya a , b ile bölünür denir. Ayrıca $b|a$ şeklinde ifade edilir. a ya b 'nin bir katı, b ye a 'nın bir böleni denilir. c , a 'nın b 'yi tamamlayan böleni olarak adlandırılır. c sayısını bulma işlemine ise a 'yı b 'ye bölme işlemi adı verilir.

Böler kavramını kullanarak bölünebilme özelliklerinin ispatlarını kolayca görebiliriz. Bu yüzden, bölünebilme kavramı ile ilgili temel özellikler şimdi ispatsız olarak verelim (Çallıalp F., 1999; Koshy T., 2007).

- $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $a|0$ sağlanır. Çünkü, $0 = a0$ ve $0 \in \mathbb{Z}$ şeklindedir.
- $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $0|a \Leftrightarrow a = 0$ şeklindedir.
- $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $\pm 1|a$ ve $\pm a|a$ şeklindedir.
- $a|b \Rightarrow \pm a|\pm b$ şeklindedir.
- $a|b$ ve $b|c \Rightarrow a|c$ şeklindedir.
- $a|b$ ve $b|a \Rightarrow a = \pm b$ şeklindedir.
- $a|b \Rightarrow ca|cb$ şeklindedir.
- $c \neq 0$ ve $ca|cb \Rightarrow a|b$ şeklindedir.
- $a_1|b_1, a_2|b_2 \Rightarrow a_1a_2|b_1b_2$ şeklindedir.

- $a|b$ ve $a|c \Rightarrow a|b+c$ şeklindedir.
- $b|a$ ve $a \neq 0 \Rightarrow 1 \leq |b| \leq |a|$ şeklindedir. $b|a$ olduğundan $a=bc$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z}$ vardır ki $a \neq 0$, olduğundan $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ olur. Buradan $|b| \geq 1$, $|c| \geq 1$ elde edilmiş olur ki, böylece $|a| = |b||c| \geq |b|$ yani $|a| \geq |b|$ olur. Böylece $1 \leq |b| \leq |a|$ olduğunu kanıtlar.

Ayrıca, $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ olmak üzere $n|a-b$ şeklinde ise a, b 'ye n modülüne göre kongrüent denir ki $a \equiv b \pmod{n}$ ile gösterilir.

Lemma 1.1 $a, b, c, d, k, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ ve $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$ olmak üzere

$$(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n} \quad (1.1)$$

$$ac \equiv bd \pmod{n} \quad (1.2)$$

$$(a+k) \equiv (b+k) \pmod{n}, \quad (ka) \equiv (kb) \pmod{n} \quad (1.3)$$

şeklindedir (Çallıalp F., 1999).

İspat: Verilen hipotezlerde kongrüent tanımı kullanılırsa bölünebilmenin özellikleri ile

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n|a-b \\ c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow n|c-d \end{array} \right\} \Rightarrow n|[(a-b) \pm (c-d)] \Rightarrow n|[(a \pm c) - (b \pm d)]$$

olur ki $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$ elde edilir.

Benzer şekilde;

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n|a-b \\ c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow n|c-d \end{array} \right\} \Rightarrow n|[(a-b) \pm (c-d)] \Rightarrow n|[(a \pm c) - (b \pm d)]$$

olur ki $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$ elde edilir. ■

Şimdi, kongrüansın diğer temel özelliklerini ispatsız olarak verelim.

- $a, b, n, k \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ olmak üzere $k \not\equiv 0 \pmod{n}$, $(k, n) = d$ ve $ka \equiv kb \pmod{n}$

için $a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}$ şeklinde sağlanır.

- $f(x)$, katsayıları tamsayılardan olan bir polinom fonksiyonu ve $a \equiv b \pmod{n}$ olmak üzere $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$ olduğu görülür.
- $a, b, n, k \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ ve $a \equiv b \pmod{n}$, $k|n$ ise $a \equiv b \pmod{k}$ olduğu görülür.

- $a, b, n, k \in \mathbb{Z}, n > 0$ ve $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere $a \equiv b \pmod{n}$ ise $(a, n) = (b, n)$ şeklindedir.

$a, b, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ ve $a \not\equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere

$$ax \equiv b \pmod{n} \quad (1.4)$$

verilen denklik bağıntısına *bir bilinmeyenli lineer kongrüans bağıntısı* denir. Bu denkliği gerçekleyen x tamsayıların kümesine de çözüm kümesi denilir.

- (1.4)'de verilen $ax \equiv b \pmod{n}$ kongrüansının çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart $ebob(a, n) | b$ şeklindedir.
- (1.4)'de verilen $ax \equiv b \pmod{n}$ çözümlerinden aynı kalan sınıfına ait çözümlerimize *kongürent çözümler*, aynı kalan sınıfına ait olmayanlarına *inkongrüent çözümler* deriz.
- (1.4)'de verilen $ax \equiv b \pmod{n}$ kongrüansında $(a, n) = d$ ve $d | b$ ise kongrüansın, $\text{mod } m$ tam d tane inkongrüansında çözümü vardır deriz. Bu çözümler; x_0 bir çözüm olsun ve $m' = \frac{m}{d}$ olmak üzere; $x_0, x_0 + m', x_0 + 2m', \dots, x_0 + (d-1)m'$ şeklindedir.
- $(a, n) = 1 \Rightarrow ax \equiv b \pmod{n}$ kongrüansının tek çözümü vardır.
- p asal sayı olmak üzere ve $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, $(p, a) = 1 \Rightarrow ax \equiv b \pmod{p}$ kongrüansının tek bir çözüme sahiptir.

1.1.2. En Büyük Ortak Bölen

İlk olarak “Sıfırdan farklı iki veya daha fazla pozitif tam sayının en büyük ortak böleni (EBOB), bu tam sayıların hepsini de bölen en büyük pozitif tam sayıdır” şeklindeki tanımı böler kavramı kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

$a, b, c \neq 0$ iki tam sayı olmak üzere;

$$d | a \text{ ve } d | b \quad (1.5)$$

$$c | a \text{ ve } c | b \quad (1.6)$$

ise $c | d$ şartlarını sağlayan pozitif d tamsayısına a ile b 'nin *en büyük ortak böleni* denir ve $ebob(a, b)$ veya (a, b) ile gösterilir (Çallıalp F., 1999; Koshy T., 2007).

- $1|b$ ve $1|c$ olduğundan $(b,c) \geq 1$ şeklindedir.
- $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ sıfır olmayan tam sayılar olmak üzere; $a \neq 0$ için $a|b_1, a|b_2, \dots, a|b_n$ ise a tam sayısına $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ tam sayılarının ortak böleni denir.
- $d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere b ve c tam sayılarının ortak böleni ise;
 $d = (b,c) = bx_0 + cy_0$ olacak şekilde x_0 ve y_0 tam sayıları vardır.
- $m, a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \geq 0 \Rightarrow (ma, mb) = m(a, b)$ şeklindedir.
- $d|a, d|b$ ve $d \geq a \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$ şeklindedir.
- Ayrıca iki sayının ebob değerine göre
 $(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (a, b + ac)$ (1.7)

eşitlikleri geçerlidir (Çallıalp F., 1999; Koshy T., 2007).

1.2. Fibonacci Sayıları ve Fibonacci Sayılarından Türetilen Diziler

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (1.8)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu sayıların oluşturduğu kümeye Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ifadesi ile gösterilir. Fibonacci dizisinin ilk 13 terimi aşağıdaki tabloda görülmektedir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tablo 1.1. Fibonacci Sayıları

Ayrıca, (1.8)'da verilen ikinci dereceden indirgeme bağıntısına ait $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad (\alpha = -\beta^{-1}) \quad (1.9)$$

olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için n . Fibonacci sayısı olan F_n değeri

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (1.10)$$

kapalı formu ile verilebilir ve bu formül *Binet formülü* olarak bilinir (Koshy, T., 2001).

(1.10)'daki Binet formülü kullanılarak birçok özelliğin ispatı kolaylıkla gösterilir. Fibonacci sayılarının indislerini negatif tam sayılara genişleten; $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$, $n \geq 1$ yada Cassini formülü olarak bilinen $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, veya indis toplam $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} = F_{m+n}$ ve fark formülleri $F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$ Binet formülü ile ispat edilebilecek özelliklerden bazılarıdır (Koshy, T., 2001).

Şimdi, ana bölümlerde kullanacağımız aşağıdaki eşitliklerin ispatlarını Binet formülünü kullanarak göstereyim.

Lemma 1.2 F_n , n . Fibonacci sayıları için

$$F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2 = F_{2m+1}F_{2n+1} \quad (\text{Tadlock,1965}) \quad (1.11)$$

$$F_{m+n}^2 - F_{m-n}^2 = F_{2m}F_{2n} \quad (\text{Sharpe,1965}) \quad (1.12)$$

geçerlidir (Koshy, T., 2001).

İspat: (1.10)'de verilen Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2 &= \frac{\alpha^{2m+2n+2} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m+2n+2} + \beta^{2m-2n}}{(\alpha - \beta)^2} - 2 \frac{(\alpha\beta)^{m-n} + (\alpha\beta)^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2m+1}\alpha^{2n+1} + \alpha^{2m}(\alpha^{-1})^{2n} + \beta^{2m+1}\beta^{2n+1} + \beta^{2m}(\beta^{-1})^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}, \quad -\alpha = \beta^{-1} \\ &= \frac{\alpha^{2m+1}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) - \beta^{2m+1}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= F_{2m+1}F_{2n+1} \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} F_{m+n}^2 - F_{m-n}^2 &= \frac{\alpha^{2m+2n} - 2\alpha^{m+n}\beta^{m+n} + \beta^{2m+2n}}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{\alpha^{2m-2n} - 2\alpha^{m-n}\beta^{m-n} + \beta^{2m-2n}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2m}(\alpha^{2n} - (\alpha^{-1})^{2n}) - 2[(\alpha\beta)^{m+n} - (\alpha\beta)^{m-n}] + \beta^{2m}(\beta^{2n} - (\beta^{-1})^{2n})}{(\alpha - \beta)^2}, \quad \alpha = -\beta^{-1} \\ &= \frac{\alpha^{2m}(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} - \alpha^{2n})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= F_{2m}F_{2n} \end{aligned}$$

indis değer Binet formlarına göre istenilenler elde edilir. ■

Şimdi, (Koshy, T., 2001; Robbins, N., 1981)'de yer alan Fibonacci sayıları ile bazı bölünebilme özellikleri verelim.

F_m sayısı F_{mn} sayısını böler, $F_m | F_{mn}$ şeklindedir. Örneğin, $F_5 = 5$ ve $F_{25} = 75025$ olduğundan $5 | 25$ için $F_5 | F_{25}$ doğrudur. $F_m | F_n$ gerek ve yeter koşul $m | n$ olmasıdır. Örneğin, $2 | F_n$ gerek ve yeter koşul $3 | n$ veya $3 | F_n$ gerek ve yeter koşul $4 | n$ yada istenilirse $2 | F_{3n}$ veya $3 | F_{4n}$ şeklinde ifade edilebilir.

$n, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere $ebob(F_{qn-1}, F_n) = 1$ şeklindedir.

$m, n, r, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m = qn + r$ için $ebob(F_m, F_n) = ebob(F_n, F_r)$ geçerlidir.

$m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $ebob(F_m, F_n) = F_{ebob(m,n)}$ sağlanır. Sonuç olarak, eğer $(m, n) = 1$ ise $F_m F_n | F_{mn}$ şeklinde olur ki; $F_m | F_{mn}$ ve $F_n | F_{mn}$ dir. Bu yüzden $(F_m, F_n) | F_{mn}$ dir. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)} = F_1 = 1$ olur ki; bu yüzden $F_m F_n | F_{mn}$ şeklindedir (Wall., D.D., 1960).

Eğer $ebob(m, n) = 1$ ise $ebob(F_m, F_n) = 1$ şeklinde sonuçlanır ki; $ebob(15, 26) = 1$ için $F_{15} = 610$ ve $F_{26} = 121393$ değerlerini düşünersek $ebob(610, 121393) = 1$ şeklindedir. O halde Fibonacci sayıları için $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $(F_n, F_{n+2}) = 1$ özellikleri geçerlidir.

Fibonacci sayılarından türetilen dizilere örnek olması açısından F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere (Koshy, T., 2001)'de yer alan bazı özel örnekler verilir.

- F_1 ile F_n arasındaki Fibonacci sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$ olarak

bulunulmuştur. Ayrıca toplam değerinin bir dizi olarak ifade edilebileceği düşünülmüştür. (Dudley, U. ve Tucker B., 1971) çalışmasında altered Fibonacci dizisi olarak adlandırılmıştır ve bu dizi hakkında bir çok özellik verilmiştir.

- F_1 ile F_n arasındaki tek indisli Fibonacci sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} = F_n L_n$

olarak bulunulmuştur. Benzer şekilde çarpım eşitliğinden ilham alınarak

$$F_{2^n} = L_{2^{n-1}} F_{2^{n-1}} = L_{2^{n-1}} (L_{2^{n-2}} F_{2^{n-2}}) = L_{2^{n-1}} L_{2^{n-2}} \dots L_{2^3} L_4 L_2 L_1 \text{ verilir.}$$

- F_1 ile F_n arasındaki çift indisli Fibonacci sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$ şeklindedir. Dudley (Dudley, U. ve Tucker B., 1971) çalışmasında toplam değeri altered Fibonacci dizisi olarak hakkında bir çok özellik vermiştir.
- F_1 ile F_n arasındaki Fibonacci sayılarının kareleri toplamı $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$ olarak bulunulmuştur ki ardışık Fibonacci sayılarını çarpımı şeklinde bir dizidir.

1.3. Lucas Sayıları ve Lucas Sayılarından Türetilen Diziler

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ile $n \geq 0$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad (1.13)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Lucas sayıları denir. Bu sayıların oluşturduğu kümeye Lucas dizisi denir ve $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ ifadesi ile gösterilir. Dizinin elemanlarından bazıları aşağıdaki tablodaki görülebilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

Tablo 1.2. Lucas sayıları

Ayrıca, n . Lucas sayısı olan L_n değeri (1.9)'de verilen $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (1.14)$$

kapalı formu ile verilebilir ve bu formül Binet formülü olarak bilinir (Koshy, T., 2001).

(1.14)'deki Binet formülü kullanılarak Lucas sayılarına ait birçok özelliğin ispatı kolaylıkla gösterilir. Lucas sayılarının indislerini negatif tam sayılara genişleten; $L_{-n} = (-1)^n L_n$, $n \geq 1$ yada Cassini formülü olarak bilinen $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$, veya indis toplam $F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+n}$ ve fark formülleri $(-1)^n (F_{m+1}L_n - F_mL_{n+1}) = L_{m-n}$ Binet Lucas formül ile ispat edilebilecek özelliklerden bazılarıdır (Koshy, T., 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında köprü görevi görebilecek özellikler olarak

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,$$

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n,$$

$$2F_{n+m} = F_m L_n + F_n L_m,$$

$$2L_{n+m} = L_m L_n + 5F_n F_m,$$

$$L_{n+m} = F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1}, \quad L_m L_{n+1} - L_{m+1}L_n = 5(-1)^{n+1} F_{m-n}$$

bağıntıları geçerlidir (Koshy,2001).

Lemma 1.3 L_n, n . Lucas sayısı olmak üzere

$$L_{m+n+1}^2 + L_{m-n}^2 = 5F_{2m+1}F_{2n+1}, \quad (\text{Koshy,1998}) \quad (1.15)$$

$$L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5F_{2m}F_{2n}, \quad (\text{Koshy,1998}) \quad (1.16)$$

bağıntıları geçerlidir (Koshy,2001).

İspat: (1.14)'de verilen Lucas Binet formülü ile $\alpha\beta = -1$ olduğu ve (1.10)'de verilen Fibonacci Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_{m+n+1}^2 + L_{m-n}^2 &= \alpha^{2m+2n+2} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m+2n+2} + \beta^{2m-2n} + 2\left((\alpha\beta)^{m+n+1} + (\alpha\beta)^{m-n}\right) \\ &= \alpha^{2m+1}\alpha^{2n+1} + \alpha^{2m}(\alpha^{-1})^{2n} + \beta^{2m+1}\beta^{2n+1} + \beta^{2m}(\beta^{-1})^{2n}, \quad -\alpha = \beta^{-1} \\ &= \alpha^{2m+1}\left(\alpha^{2n+1} + (\alpha^{-1})\beta^{2n}\right) + \beta^{2m+1}\left(\beta^{2n+1} + (\beta^{-1})\alpha^{2n}\right) \\ &= \alpha^{2m+1}\left(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}\right) - \beta^{2m+1}\left(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}\right) \\ &= 5F_{2m+1}F_{2n+1} \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 &= \alpha^{2m+2n} + 2\alpha^{m+n}\beta^{m+n} + \beta^{2m+2n} - \alpha^{2m-2n} - 2\alpha^{m-n}\beta^{m-n} - \beta^{2m-2n} \\ &= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} - \alpha^{2m}\alpha^{-2n} - \beta^{2m}\beta^{-2n} + 2(-1)^{m+n} - 2(-1)^{m-n} \\ &= \alpha^{2m}\alpha^{2n} + \beta^{2m}\beta^{2n} - \alpha^{2m}(-\beta)^{2n} - \beta^{2m}(-\alpha)^{2n} \\ &= \alpha^{2m}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) + \beta^{2m}\left(\beta^{2n} - \alpha^{2n}\right) \\ &= 5F_{2n}F_{2m} \end{aligned}$$

indislerine göre Binet formları ile istenilenler elde edilir. ■

L_n, n . Lucas sayıları için

$$n \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow L_n \equiv 0 \pmod{2} \quad (1.17)$$

$$n \equiv 2 \pmod{4} \Leftrightarrow L_n \equiv 0 \pmod{3} \quad (1.18)$$

$$n \equiv 0 \pmod{2} \text{ ve } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ise } L_n \equiv 3 \pmod{4} \quad (1.19)$$

özellikleri geçerlidir (Koshy, T., 2001; Robbins, N., 1981).

$m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ olmak üzere $L_m | L_n$ olması için gerek ve yeter şart $n = (2k-1)m$, $k \geq 1$ olmasıdır. Ek olarak $L_m | F_n$ olması için gerek ve yeter şart $2m | n$

şeklindedir (Koshy, T., 2001). O halde $ebob(L_n, L_{n+1})=1$ şeklinde sonuçlanır ki; $(12,13)=1$ için $L_{12} = 322$ ve $L_{13} = 521$ değerlerini düşünürsek $(322,521)=1$ olur.

Lucas sayılarından türetilen dizilere örnek olması açısından;

- L_1 ile L_n arasındaki Lucas sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3$ şeklindedir.

Ayrıca, toplam değeri bir dizi olarak ifade edilebileceği düşünülürse (Koken, F., 2020)'de altered Lucas dizisi olarak tanımlanmış ve özellikleri elde edilmiştir.

- L_1 ile L_{2n-1} arasındaki tek indisli Lucas sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$

olarak verilmiştir.

- L_2 ile L_{2n} arasındaki çift indisli Lucas sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1$

şeklindedir. Ayrıca, bir dizi olarak ifade edilebileceği düşünülmüştür ki, (Koken, F., 2020) çalışmasında altered Lucas dizileri olarak özellikleri verilmiştir.

- L_1 ile L_n arasındaki Lucas sayılarının kareleri toplamı $\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$

şeklindedir (Koshy, T., 2001).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Literatürde görülüyor ki birçok araştırmacı Fibonacci ve Lucas sayılarını kullanarak yeni diziler kurmuşlardır. Bu dizilerin Fibonacci ve Lucas dizilerinin sağladığı özelliklere benzer özellikleri çalışılmıştır (Dudley, U. ve Tucker B., 1971; Hernandez S. ve Luca F., 2003; Chen, K. W., 2011; Jones, L., 2015; Spilker, J., 2016; Rahn, A. ve Kreh, M., 2018).

2.1. Altered Fibonacci Dizileri

Dudley ve ark. (Dudley, U. ve Tucker B., 1971) çalışmasında G_n ve H_n gösterimleri ile iki farklı altered Fibonacci dizisini n 'inci Fibonacci sayısı için indisinin tek veya çift olma durumuna göre sırasıyla $\{-1,1\}$ değerlerini kullanarak $\{G_n\} = \{F_n + (-1)^n\}$ ve $\{H_n\} = \{F_n - (-1)^n\}$ şeklinde tanımlamıştır. Bu sayıların oluşturduğu $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerine altered Fibonacci dizileri denilir ki, bazı eleman örnekleri olarak

$$\{G_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 0, 2, 1, 4, 4, 9, 12, 22, 33, 56, 88, 145, \dots\}$$

$$\{H_n\}_{n=0}^{\infty} = \{-1, 2, 0, 3, 2, 6, 7, 14, 20, 35, 54, 90, 143, \dots\}$$

değerleri verilebilir. Ek olarak, G_n , altered Fibonacci sayıları $G_{4k} = F_{2k-1}L_{2k+1}$, $G_{4k+1} = F_{2k}L_{2k+1}$, $G_{4k+2} = F_{2k+2}L_{2k}$ ve $G_{4k+3} = F_{2k+2}L_{2k+1}$ eşitlikleri ile H_n , altered Fibonacci sayıları $H_{4k} = F_{2k+1}L_{2k-1}$, $H_{4k+1} = F_{2k+1}L_{2k}$, $H_{4k+2} = F_{2k}L_{2k+2}$ ve $H_{4k+3} = F_{2k+1}L_{2k+2}$ eşitlikleri ile verilmiştir.

Bu eşitliklerin çarpım durumlarında olduğu göz önüne alınarak G_n ve H_n sayıları için en büyük ortak bölen ve bölünebilme özellikleri ile $\{(G_n, G_{n+1})\}_{n \geq 0}$ ve $\{(H_n, H_{n+1})\}_{n \geq 0}$ değerleri verilmiş ve *1-ardışık Fibonacci ebob dizileri* olarak isimlendirilmiştir. $0 \leq n \leq 12$ arasındaki indis değerleri için $\{(G_n, G_{n+1})\}_{n \geq 0}$ dizisinin ilk 13 elemanı $\{1, 2, 1, 1, 4, 1, 3, 2, 11, 1, 8, 1, 29\}$ değerlerine sahiptir ki $(G_{4k}, G_{4k+1}) = L_{2k+1}$ ve $(G_{4k+2}, G_{4k+3}) = F_{2k+2}$ şeklinde Fibonacci ve Lucas alt dizilerine eşit olduğu verilmiştir.

Benzer şekilde, $\{(H_n, H_{n+1})\}_{n \geq 0}$, l -ardışık Fibonacci ebob dizinin $0 \leq n \leq 12$ için ilk 13 elemanı $\{1, 2, 3, 1, 2, 1, 7, 2, 5, 1, 18, 1\}$ değerlerini aldığı görülmüştür. Genel olarak, $(H_{4k}, H_{4k+1}) = F_{2k+1}$ ve $(H_{4k+2}, H_{4k+3}) = L_{2k+2}$ şeklinde Fibonacci ve Lucas alt dizilerine eşit olduğu elde edilmiştir (Dudley, U. ve Tucker B., 1971).

Hernandez ve Luca çalışmalarında verilen pozitif a ve b tam sayıları için çeşitli n ve m pozitif sayılarına göre $ebob(F_n + a, F_m + b) > e^{(cm)}$ şeklinde $m > n$ sonsuz sayıda ikilisini sağlayan bir c tam sayısının varlığını ispatlamıştır (Hernandez S. ve Luca F., 2003).

2011'deki Chen'in (Chen, K. W., 2011) çalışmasında n 'inci Fibonacci sayısını $\{a\}$ değerlerini kullanarak $\{F_n + a\}$ şeklinde değiştirerek shifted Fibonacci sayısını tanımlamıştır. Bu sayıların oluşturduğu $\{F_n + a\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine shifted Fibonacci dizisi olarak adlandırmıştır. $\{F_n + a\}_{n=0}^{12}$ dizisinin $a = \{-1, 1\}$ değerleri için sırasıyla elemanları $\{-1, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, \dots\}$ ve $\{1, 2, 2, 3, 4, 6, 9, 14, 22, 35, 56, 90, 145, \dots\}$ olduğunu görülür. Ek olarak, (Dudley, U. ve Tucker B., 1971) çalışmasında da yer alan

$$F_{4k} + 1 = F_{2k-1} L_{2k+1} \quad F_{4k} - 1 = F_{2k+1} L_{2k-1} \quad (2.1)$$

$$F_{4k+1} + 1 = F_{2k+1} L_{2k} \quad F_{4k+1} - 1 = F_{2k} L_{2k+1} \quad (2.2)$$

$$F_{4k+2} + 1 = F_{2k+2} L_{2k} \quad F_{4k+2} - 1 = F_{2k} L_{2k+2} \quad (2.3)$$

$$F_{4k+3} + 1 = F_{2k+1} L_{2k+2} \quad F_{4k+3} - 1 = F_{2k+2} L_{2k+1} \quad (2.4)$$

eşitlikleri de kullanılmıştır.

Bu eşitliklerin çarpım durumları göz önüne alınarak shifted Fibonacci sayıları için en büyük ortak bölen ve bölünebilme özellikleri kullanılarak $\{f_n(a)\}_{n \geq 0} = \{ebob(F_n + a, F_{n+1} + a)\}_{n \geq 0}$ dizileri tanımlanmış *shifted Fibonacci ebob dizileri* olarak adlandırılmıştır. $\{f_n(a)\}_{n \geq 0}$ dizisinin $a = \{-1, 1\}$ değerleri için $f_{4n-1}(1) = F_{2n-1}$, $f_{4n+1}(1) = L_{2n}$, $f_{4n-1}(-1) = L_{2n-1}$ ve $f_{4n+1}(-1) = F_{2n}$ şeklindeki Fibonacci ve Lucas alt dizileri olduğu gösterilmiştir. Benzer şekilde, $\{f_n(a)\}_{n \geq 0}$, shifted Fibonacci ebob dizinin $a \neq \pm 1$ için terimlerinin sınırlı olduğunu

$$f_{2n-1}(a) = (F_{2n-1} + a, F_{2n} + a) \leq |a^2 - 1|, \text{ eğer } a \neq \pm 1$$

$$f_{2n}(a) = (F_{2n} + a, F_{2n+1} + a) \leq a^2 + 1$$

şeklinde göstermiştir (Chen, K. W., 2011). $a=1$ değeri için $f_n(1)$ değerinin bulup eşitsizliklerin karşılaştırmasını sağlamıştır. Her n değeri için,

$$f_{4n}(1) = (F_{4n} + 1, F_{4n+1} + 1) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(1) = (F_{4n+2} + 1, F_{4n+3} + 1) = \begin{cases} 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases},$$

$a=2$ değeri için $f_n(2)$ değeri

$$f_{4n-1}(2) = f_{4n}(2) = 1$$

$$f_{4n+1}(2) = (F_{4n+1} + 2, F_{4n+2} + 2) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(2) = (F_{4n+2} + 2, F_{4n+3} + 2) = \begin{cases} 5, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases},$$

değerleri alır ki periyodik sabit dizilerdir. $a = \{-1, -2\}$ değeri için $f_n(-1)$ ve $f_n(-2)$ değerini

$$f_{4n}(1) = (F_{4n} - 1, F_{4n+1} - 1) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(1) = (F_{4n+2} - 1, F_{4n+3} - 1) = \begin{cases} 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases},$$

olur ki

$$f_{4n-1}(-2) = f_{4n+2}(-2) = 1$$

$$f_{4n+1}(-2) = (F_{4n} - 2, F_{4n+1} - 2) = \begin{cases} 5, & n \equiv 4 \pmod{5} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(-2) = (F_{4n+1} - 2, F_{4n+2} - 2) = \begin{cases} 3, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases},$$

değerleri eşitsizleri karşılaştırmak için kullanılabilir (Chen, K. W., 2011).

(Spilker, J., 2016) çalışmasında, Chen'in sonuçları genelleştirilmiştir. $a \in \mathbb{Z}$ için $\text{ebob}(F_n + a, F_{n+1} + a)$, $a^2 + (-1)^n$ değerlerini böler ise eğer, $a \neq \pm 1$ olduğu zaman $\{\text{ebob}(F_n + a, F_{n+1} + a)\}$ dizisi periyodik ve p periyod değerinin $F_p \equiv 0 \pmod{a^4 - 1}$, $F_{p+1} \equiv 1 \pmod{a^4 - 1}$ ifadelerinden seçilebileceğinden bahsetmiştir.

Ayrıca, $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 1$, $k \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{0,1\}$ olsun ki;

Eğer $F_{2k-i} \equiv \alpha_i \pmod{a^2+1}$, $0 \leq \alpha_i \leq a^2+1$ ise

$$ebob(F_{4k}+a, F_{4k+1}+a) = ebob(a_0 + a\alpha_1, a\alpha_0 - \alpha_1, a^2+1)$$

$$ebob(F_{4k-2}+a, F_{4k-1}+a) = ebob(a_0 + (a-1)\alpha_1, a\alpha_0 - (a+1)\alpha_1, a^2+1)$$

yada, eğer $F_{2k-i} \equiv \beta_i \pmod{a^2-1}$, $0 \leq \alpha_i \leq a^2+1$ ise

$$ebob(F_{4k-1}+a, F_{4k}+a) = ebob((a+1)\beta_1, (a-1)\beta_0 - a\beta_1, a^2-1)$$

$$ebob(F_{4k-3}+a, F_{4k-2}+a) = ebob(\beta_0 - (a+2)\beta_1, (a-1)\beta_0 - (a-1)\beta_1, a^2-1)$$

olduğunu göstermiştir.

Chen'in (Chen, K. W., 2011) çalışmasında verilenlere ek olarak; Rahn ile arkadaşları (Rahn, A. ve Kreh, M., 2018) çalışmalarında $a = \pm 3$ durumunu ele almışlardır. (Chen, K. W., 2011)'deki sınırlar ve (Spilker, J., 2016)'deki periyotların karşılaştırmalarını tekrar kendi sonuçlarına göre değerlendirmiştir. $a = 3$ değeri için $f_n(3)$ değerleri

$$f_{4n-1}(3) = (F_{4n-1}+3, F_{4n}+3) = \begin{cases} 8, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n}(3) = (F_{4n}+3, F_{4n+1}+3) = \begin{cases} 10, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ve } n \equiv 4 \pmod{5} \\ 5, & n \not\equiv 1 \pmod{3} \text{ ve } n \equiv 4 \pmod{5} \\ 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ve } n \not\equiv 4 \pmod{5} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+1}(3) = (F_{4n+1}+3, F_{4n+2}+3) = \begin{cases} 4, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(3) = (F_{4n+2}+3, F_{4n+3}+3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olur ki $a = -3$ değeri için $f_n(3)$ değerleri

$$f_{4n-1}(-3) = (F_{4n-1}-3, F_{4n}-3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n}(-3) = (F_{4n}-3, F_{4n+1}-3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+1}(-3) = (F_{4n+1} - 3, F_{4n+2} - 3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_{4n+2}(-3) = (F_{4n+2} - 3, F_{4n+3} - 3) = \begin{cases} 10, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ve } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 5, & n \not\equiv 2 \pmod{3} \text{ ve } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ve } n \not\equiv 1 \pmod{5} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

değerleri eşitsizleri karşılaştırmak için kullanılabilir (Rahn, A. ve Kreh, M., 2018).

(Jones, L., 2015) çalışmasında $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ başlangıç koşulları ile $n \geq 2$ için $u_n = au_{n-1} + u_{n-2}$, $a \in \mathbb{Z}$ indirgeme bağıntısı ile tanımlanan birinci türden Lucas dizileri üzerinde $U_a \pm k$, $k \in \mathbb{Z}$, shifted dizilerinin primefree özelliği üzerine çalışmıştır. Bu sonuç önceki çalışmalardaki $a = 1$ ve $k = 1, 2, 3$ için yapılmış olan shifted Fibonacci dizilerinin genellemesidir. Ayrıca, $\{U_a \pm k\}$ shifted dizilerin her ikisinde her teriminin en az iki farklı asal çarpanı olacak şekilde sonsuz sayıda $k \in \mathbb{Z}$ değeri olduğunu göstermiştir.

2.2. Altered Lucas Dizileri

Chen'in (Chen, K. W., 2011) çalışmasında Lucas sayıları içinde shifted Lucas sayılarının ebob dizileri $\{l_n(a)\}_{n \geq 0} = \{ebob(L_n + a, L_{n+1} + a)\}_{n \geq 0}$ şeklinde tanımlanmıştır ve $\{a\}$ değerlerine göre $\{l_n(a)\}_{n \geq 0}$ dizilerin sınırlı olduklarını

$$l_{2n-1}(a) = (L_{2n-1} + a, L_{2n} + a) \leq a^2 + 5,$$

$$l_{2n}(a) = (L_{2n} + a, L_{2n+1} + a) \leq |a^2 - 5|$$

eşitsizlikleri ile gösterilmiştir. Her n değeri için,

$$l_{4n-1}(1) = (L_{4n-1} + 1, L_{4n} + 1) = \begin{cases} 6, & n \equiv 2 \pmod{15} \\ 3, & n \equiv 0, 4 \pmod{15} \\ 2, & n \equiv 5 \pmod{6} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$l_{4n}(1) = (L_{4n} + 1, L_{4n+1} + 1) = \begin{cases} 4, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$l_{4n+1}(1) = (L_{4n+1} + 1, L_{4n+2} + 1) = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$l_{4n+2}(1) = (L_{4n+2} + 1, L_{4n+3} + 1) = \begin{cases} 4, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

değerlerini alır ki periyodik sabit dizilerdir. $a=1$ değeri için $l_n(1)$ değerine göre eşitsizliklerin karşılaştırması sağlamıştır (Chen, K. W., 2011).

Koken, (Koken, F., 2020) çalışmasında n . Lucas sayısı için indisinin tek veya çift olma durumuna göre sırasıyla $\{1, 3\}$ değerlerini kullanarak altered Lucas sayısını tanımlamıştır. L_n , n 'inci Lucas sayısı olmak üzere L_n^+ ve L_n^- altered Lucas sayıları; n tek olduğunda $L_n^+ = L_n - 1$, $L_n^- = L_n + 1$; n çift olduğunda $L_n^+ = L_n + 3$, $L_n^- = L_n - 3$ şeklinde tanımlamıştır. Bu sayı kümeleri $\{L_n^+\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{L_n^-\}_{n=0}^{\infty}$ altered Lucas dizileri olarak adlandırılmıştır. Ek olarak çalışmada

$$L_{4k} + 3 = 5F_{2k+1}F_{2k-1} \quad L_{4k} - 3 = L_{2k+1}L_{2k-1} \quad (2.5)$$

$$L_{4k+1} + 1 = L_{2k+1}L_{2k} \quad L_{4k+1} - 1 = 5F_{2k+1}F_{2k} \quad (2.6)$$

$$L_{4k+2} + 3 = L_{2k+2}L_{2k} \quad L_{4k+2} - 3 = 5F_{2k+2}F_{2k} \quad (2.7)$$

$$L_{4k+3} + 1 = 5F_{2k+2}F_{2k+1} \quad L_{4k+3} - 1 = L_{2k+2}L_{2k+1} \quad (2.8)$$

eşitlikleri yer almıştır.

L_n^+ 'nin tanımından yola çıkarak $L_{4k}^+ = 5F_{2k+1}F_{2k-1}$, $L_{4k+1}^+ = 5F_{2k+1}F_{2k}$, $L_{4k+2}^+ = L_{2k+2}L_{2k}$ ve $L_{4k+3}^+ = L_{2k+2}L_{2k+1}$ eşitliklerini gözlemlenmiştir. L_n^- 'nin tanımından yola çıkarak $L_{4k}^- = L_{2k+1}L_{2k-1}$, $L_{4k+1}^- = L_{2k+1}L_{2k}$, $L_{4k+2}^- = 5F_{2k+2}F_{2k}$ ve $L_{4k+3}^- = 5F_{2k+2}F_{2k+1}$ eşitlikleri belirtilmiştir.

L_n^+ ve L_n^- n 'inci altered Lucas sayısı olmak üzere $L_{n,1}^+ = (L_n^+, L_{n+1}^+)$ ve $L_{n,1}^- = (L_n^-, L_{n+1}^-)$ tanımlan ifadesi ortak bölenlerin en büyüğünü gösterirken; bu sayıların oluşturduğu $\{L_{n,1}^+\}_{n \geq 0}$ ve $\{L_{n,1}^-\}_{n \geq 0}$ kümesini *1-ardışık ebob dizisi* olarak tanımlamıştır.

n 'inci $L_{n,1}^+$, dizisi hakkındaki bilgileri yorumlayarak; $\{L_{4k,1}^+\}_{k \geq 1} = \{5F_{2k+1}\}_{k \geq 1}$, Fibonacci alt dizisine eşit olduğunu göstermiştir. Ayrıca, $\{L_{4k-2,1}^+\}_{k \geq 1} = \{L_{2k}\}_{k \geq 1}$, Lucas

alt dizisine eşittir. $L_{n,1}^-$, l -ardışık ebob sayılarının n 'inci değerleri için $L_{4k,1}^- = L_{2k+1}$ ve $L_{4k+2,1}^- = 5F_{2k+2}$ eşitlikleri sağladığı gözlemlenmiştir (Koken, F., 2020).

2.3. Brocard-Ramanujan Denklemleri

Diophantine (Diophantus) denklemi adını M.S. 3. yüzyılda yaşadığı tahmin edilen Antik Yunan matematikçilerden Diophantus'dan alan değişkenleri ve katsayıları tam sayılar olan birden çok değişkene bağlı ve tamsayı çözümleri istenen denklemlerdir. İlk olarak bu tip bir denklemin tamsayı çözümü olup olmadığını araştırılmak zorundadır. Diophantus Arithmetika adlı sadece 6 cildi günümüze ulaşan bir çalışmasında 130 denkleme ve bunların çözümlerine yer vermiştir.

Literatürde, $n, m \in \mathbb{Z}$ ve ! ifadesi faktöriyel sembolü olmak üzere

$$n! \pm 1 = m^2 \quad (2.9)$$

diophantine denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunması, Brocard-Ramanujan problemi (BRP) olarak bilinir. (2.9)'deki Brocard-Ramanujan denkleminin bilinen çözümleri $(n, m) = (4, 5), (5, 11), (7, 71)$ şeklindedir ve Brocard-Ramanujan denkleminin ne zaman bir çözümü olup olmadığı hala açık bir problemdir. (2.9)'deki Brocard-Ramanujan denkleminin bazı varyasyonları birçok yazar tarafından ele alınmıştır ve ek bilgi ve tarihe için (Berndt B.C. ve Galway W.F., 2006; Marques D., 2011; Dabrowski A., 2012; Szalay L., 2012; Pongsriiam P., 2017-a-b) çalışmalarına yönlendirebiliriz.

Marques, (Marques D., 2011) çalışmasında, Brocard-Ramanujan denklemindeki $n!$ ifadesini ardışık Fibonacci sayılarının çarpımı ve m^2 'yi bir Fibonacci sayısının karesi ile değiştirerek (2.9)'deki Brocard-Ramanujan denkleminin bir varyantını düşünüp,

$$F_n F_{n+1} \dots F_{n+k-2} F_{n+k-1} + 1 = F_m^2 \quad (2.10)$$

Diophantine denkleminin pozitif tamsayılar k, m, n değerine göre çözümü olmadığını iddia etmiştir. Ama, $F_2 F_4 + 1 = F_1 F_4 + 1 = F_3^2$ ve $F_2 F_6 + 1 = F_1 F_6 + 1 = F_4^2$ denklemlerine göre (2.10)'deki Fibonacci versiyonu denklemin çözümleri olduğu verilebilmektedir.

Szalay, Marques'in (2.10)'deki Fibonacci versiyonu sonucunun doğru bir versiyonunu (2.10)'den daha genel kabul ederek denklemlerin çözümlerini vermektedir (Szalay L., 2012).

Pongsriiam, (Pongsriiam P., 2017-b) çalışmasında, $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k$, $m \geq 0$, ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$F_{n_1} F_{n_2} \dots F_{n_{k-1}} F_{n_k} \pm 1 = F_m^2 \quad (2.11)$$

$$L_{n_1} L_{n_2} \dots L_{n_{k-1}} L_{n_k} \pm 1 = L_m^2 \quad (2.12)$$

$$F_{n_1} F_{n_2} \dots F_{n_{k-1}} F_{n_k} \pm 1 = L_m^2 \quad (2.13)$$

$$L_{n_1} L_{n_2} \dots L_{n_{k-1}} L_{n_k} \pm 1 = F_m^2 \quad (2.14)$$

diophantine denklemlerininin çözümleri araştırmaya devam edilmiştir. Bu çalışmada, Marques ve Szalay'dan farklı olarak, $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k$ 'in nın farklı olmasını istenmemiştir. Yani (2.11), (2.12), (2.13) ve (2.14)'deki ifadelerde eşit olabilme durumu $m \geq 0$, $l \geq 1$, $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{l-1} < n_l$ ve $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l \geq 1$ olmak üzere göz önüne alındığında sırasıyla

$$F_{n_1}^{a_1} F_{n_2}^{a_2} \dots F_{n_{l-1}}^{a_{l-1}} F_{n_l}^{a_l} \pm 1 = F_m^2$$

$$L_{n_1}^{a_1} L_{n_2}^{a_2} \dots L_{n_{l-1}}^{a_{l-1}} L_{n_l}^{a_l} \pm 1 = L_m^2$$

$$F_{n_1}^{a_1} F_{n_2}^{a_2} \dots F_{n_{l-1}}^{a_{l-1}} F_{n_l}^{a_l} \pm 1 = L_m^2$$

$$L_{n_1}^{a_1} L_{n_2}^{a_2} \dots L_{n_{l-1}}^{a_{l-1}} L_{n_l}^{a_l} \pm 1 = F_m^2$$

denklemlerine eşdeğer olarak çalışılmıştır.

Pongsriiam, çalışmasında ön bilgiler ve önermeler kısmı içerisinde Lemma 2.2 ve Lemma 2.3'de $F_{m-k} F_{m+k} = F_m^2 + (-1)^{m-k+1} F_k^2$ özelliğinden faydalanarak

$$F_m^2 + 1 = \begin{cases} F_{m-1} F_{m+1}, & m \text{ çift ise} \\ F_{m-2} F_{m+2}, & m \text{ tek ise} \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$F_m^2 - 1 = \begin{cases} F_{m-1} F_{m+1}, & m \text{ tek ise} \\ F_{m-2} F_{m+2}, & m \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (2.16)$$

$$L_m^2 - 1 = \begin{cases} F_{3m} / F_m, & m \text{ çift ise} \\ 5F_{m-1} F_{m+1}, & m \text{ tek ise} \end{cases}, \quad (2.17)$$

$$L_m^2 + 1 = \begin{cases} F_{3m} / F_m, & m \text{ tek ise} \\ 5F_{m-1} F_{m+1}, & m \text{ çift ise} \end{cases} \quad (2.18)$$

çarpanlama durumlarını elde etmiş ve kullanmıştır (Pongsriiam P., 2017-b).

3. FİBONACCİ SAYISININ İKİNCİ KUVVETİNİN ALTERED DİZİLERİ

Literatürdeki çalışmalarda görülüyor ki; x bir tam sayı olmak üzere

$$F_n = x^2 \text{ bir tam kare ise } n = 0, \pm 1, 2, 12,$$

$$F_n = 2x^2 \text{ formunda bir sayı ise } n = 0, \pm 3, 6$$

olduğunda geçerlidir (Koshy T., 2001; Robbins, N., 1981). Literatür özeti bölümünde verilenlere ek olarak, altered Fibonacci dizilerinde verilenlere benzer bir özelliği Fibonacci toplam ve Cassini'nin formülleri kullanılarak

$$F_{2^{k+1}-1} + 1 = F_{2^k-1} L_{2^k}$$

şeklinde oluşturulur (Koshy, 2001). Bölüm 1.2'de verilen $F_n^2 + (-1)^n = F_{n+1} F_{n-1}$ ve $5F_n^2 + 4(-1)^n = L_n^2$ ifadelerinde n 'nin tek ve çift olma durumuna göre aşağıdaki;

$$F_{2k}^2 + 1 = F_{2k+1} F_{2k-1}, \quad 5F_{2k}^2 + 4 = L_{2k}^2,$$

$$F_{2k+1}^2 - 1 = F_{2k+2} F_{2k}, \quad 5F_{2k+1}^2 - 4 = L_{2k+1}^2,$$

eşitlikler elde edilir. Ayrıca, (2.1)–(2.4) ile arasındaki verilen eşitliklerin karşılıklı çarpımlarında ve $F_n L_n = F_{2n}$ eşitliği kullanılarak oluşturulan (2.15) ve (2.16) eşitliklerini aşağıdaki lemma'da farklı bir ispat yöntemi ile verilir (P. Pongsriiam, 2017-a-b).

Lemma 3.1 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$F_{2k}^2 + 1 = F_{2k+1} F_{2k-1}, \quad (3.1)$$

$$F_{2k+1}^2 - 1 = F_{2k+2} F_{2k}, \quad (3.2)$$

$$F_{2k+1}^2 + 1 = F_{2k+3} F_{2k-1}, \quad (3.3)$$

$$F_{2k}^2 - 1 = F_{2(k+1)} F_{2(k-1)}, \quad (3.4)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Eğer (1.11)'de verilen $F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2 = F_{2m+1} F_{2n+1}$ denklemde $m = k+1$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$F_{k+1+k+1}^2 + F_{k+1-k}^2 = F_{2k+2}^2 + F_1^2 = F_{2k+3} F_{2k+1}$$

elde edilir ki $F_1 = 1$ olduğu için $F_{2(k+1)}^2 + 1 = F_{2k+3} F_{2k+1}$ olur.

(1.12)'da verilen $F_{m+n}^2 - F_{m-n}^2 = F_{2m} F_{2n}$ denklemde $m = k+1$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$F_{k+1+k}^2 - F_{k+1-k}^2 = F_{2k+1}^2 - F_1^2 = F_{2(k+1)} F_{2k}$$

elde edilir ki $F_1 = 1$ olduğu için $F_{2k+1}^2 - 1 = F_{2k+2}F_{2k}$ olur.

(1.11)'de verilen $F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2 = F_{2m+1}F_{2n+1}$ denklemde $m = k+2$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$F_{k+2+k+1}^2 + F_{k+2-k}^2 = F_{2k+3}^2 + F_2^2 = F_{2k+5}F_{2k+1}$$

elde edilir ki $F_2 = 1$ olduğu için $F_{2(k+1)+1}^2 + 1 = F_{2k+5}F_{2k+1}$ olur.

(1.12)'da verilen $F_{m+n}^2 - F_{m-n}^2 = F_{2m}F_{2n}$ denklemde $m = k+2$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$F_{k+2+k}^2 - F_{k+2-k}^2 = F_{2k+2}^2 - F_2^2 = F_{2(k+2)}F_{2k}$$

elde edilir ki $F_2 = 1$ olduğu için $F_{2k}^2 - 1 = F_{2(k+1)}F_{2(k-1)}$ olur. ■

Şimdi, (3.1)-(3.4) arasındaki eşitliklerden ilham alarak bu bölümdeki 2 alt kısım içinde iki farklı altered dizisi tanımı verilerek özelliklerini inceleyelim.

3.1. $\{G_n^{(2)}\}$ n . Fibonacci Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi

Bu kısımda, n . Fibonacci sayısının ikinci kuvvetinde indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 1\}$ değerlerini ekleyerek oluşan diziyi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 3.1 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere F_n sayısının ikinci kuvvetinin altered sayısı $G_n^{(2)}$ ile gösterilerek;

$$G_n^{(2)} = F_n^2 + (-1)^n \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu sayıların oluşturduğu $\{G_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine n . Fibonacci sayının

ikinci kuvvetinin altered dizisi denir. $\{G_n^{(2)}\}_{n \geq 0}$ dizinin $n = 12$ değeri için ilk 13 eleman

örneği Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n^2	0	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921	20736
$G_n^{(2)}$	1	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920	20737

Tablo 3.1. F_n^2 , Fibonacci sayıları ve $G_n^{(2)}$, altered sayıları

Tablo 3.1'deki $G_n^{(2)}$ altered sayılarının değerlerine göre ilk terimi hariç artan bir dizi şeklinde olduğu görülmektedir. Şimdi, $\{G_n^{(2)}\}$ dizisinin genel terimi için n 'nin tek ve çift olma durumuna göre Teorem 3.2 ile verelim.

Teorem 3.2 $G_n^{(2)}$, (3.5)'deki altered sayısı ve F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$G_{2k}^{(2)} = F_{2k+1}F_{2k-1}, \quad (3.6)$$

$$G_{2k+1}^{(2)} = F_{2k+2}F_{2k} \quad (3.7)$$

genel terim ifadeleri geçerlidir.

İspat: Eğer (3.1)'de verilen $F_{2k}^2 + 1 = F_{2k+1}F_{2k-1}$ denklemi ile (3.5)'deki $G_n^{(2)}$ 'nin tanımı kullanılarak

$$G_{2k}^{(2)} = F_{2k}^2 + 1 = F_{2k+1}F_{2k-1}$$

ve ayrıca (3.2)'de verilen $F_{2k+1}^2 - 1 = F_{2k+2}F_{2k}$ denklemi ile (3.5)'deki $G_n^{(2)}$ 'nin tanımı kullanılarak

$$G_{2k+1}^{(2)} = F_{2k+1}^2 - 1 = F_{2k+2}F_{2k}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere, (3.5)'deki altered sayısının genel terimi

$$G_n^{(2)} = F_{n+1}F_{n-1}, \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat: Tek ve çift olma durumuna göre verilen (3.6) ve (3.7)'deki denklemlerden açıkça görülmektedir. ■

(3.5)'deki $G_n^{(2)}$ altered sayısının Fibonacci ve Lucas indirgeme bağıntıları şeklindeki ilişkilerinin nasıl olduğunu inceleyelim.

Teorem 3.4 $G_n^{(2)}$, (3.5)'deki n . altered sayısı olmak üzere

$$G_n^{(2)} + G_{n+1}^{(2)} = F_{2n+1}, \quad (3.9)$$

$$G_{n+1}^{(2)} - G_{n-1}^{(2)} = F_{2n}, \quad (3.10)$$

ifadeleri verilir.

İspat: (3.8)'deki genel terim eşitliği ile $F_n L_n = F_{2n}$ ve $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ eşitlikleri kullanarak;

$$G_n^{(2)} + G_{n+1}^{(2)} = F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+2}F_n = F_{n+1}F_{n-1} + (F_{n+1} + F_n)F_n = F_{2n+1}$$

$$G_{n+1}^{(2)} - G_n^{(2)} = F_{n+2}F_n - F_nF_{n-2} = F_n(F_{n+1} + F_n - F_{n-2}) = F_nL_n$$

istenilen bağlantılar elde edilir. ■

Şimdi (3.5)'deki n . altered sayısı $G_n^{(2)}$ için Binet benzeri bir formül verilir.

Teorem 3.5 $G_n^{(2)}$, n . altered sayısı ve $\alpha = 1 - \beta = (1 + \sqrt{5})/2$ altın oran olmak üzere

Binet benzeri formülü

$$G_n^{(2)} = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{5} \quad (3.11)$$

şeklindedir.

İspat: (3.8)'deki genel terim eşitliğinde (1.10)'daki Fibonacci Binet formülünün yerine yazılması ile istenilen direkt elde edilir. ■

$\{G_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ altered dizisinin ardışık elemanlarından indisleri arasındaki farkı r olan

iki sayının en büyük ortak bölenini kullanılarak bir dizi tanımlayalım.

Tanım 3.2 $G_n^{(2)}$, n . altered sayısı olmak üzere

$$G_{n,r}^{(2)} = (G_n^{(2)}, G_{n+r}^{(2)}) \quad (3.12)$$

ile tanımlan ifadede ortak bölenlerin en büyüğünü gösterilirken; bu sayıların oluşturduğu $\{G_{n,r}^{(2)}\}_{n \geq 0} = \{(G_n^{(2)}, G_{n+r}^{(2)})\}_{n \geq 0}$ dizisine, r -ardışık altered Fibonacci ebob dizisi

denir.

(3.12)'de $r = 1$ alınırsa $\{G_{n,1}^{(2)}\}_{n \geq 0} = \{(G_n^{(2)}, G_{n+1}^{(2)})\}_{n \geq 0}$ 1-ardışık ebob altered

dizisinin ilk 13 elemanı Tablo 3.2'de örneklendirilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$G_n^{(2)}$	1	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920	20737
$G_{n,1}^{(2)}$	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1

Tablo 3.2. $G_n^{(2)}$, altered sayıları ve $G_{n,1}^{(2)}$, 1-ardışık altered Fibonacci ebob sayıları

Tablo 3.2'deki verilerden görülüyor ki; $\{G_{n,1}^{(2)}\}_{n \geq 0}$ dizisi artan yada azalan veya sabit bir dizi şeklinde değildir. Fakat, 1-ardışık ebob altered dizisinin belirli periyotlarda özel değerler aldığı gözlemlenir ki bu durumu Teorem 3.6 ile verelim.

Teorem 3.6 $G_{n,1}^{(2)}$, n . 1-ardışık ebob altered sayılarının genel terimleri

$$G_{2k,1}^{(2)} = (G_{2k}^{(2)}, G_{2k+1}^{(2)}) = \begin{cases} 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (3.13)$$

$$G_{2k+1,1}^{(2)} = (G_{2k+1}^{(2)}, G_{2k+2}^{(2)}) = \begin{cases} 2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklindedir.

İspat: (3.6) ve (3.7) denklemlerine göre

$$G_{2k,1}^{(2)} = (G_{2k}^{(2)}, G_{2k+1}^{(2)}) = (F_{2k}^2 + 1, F_{2k+1}^2 - 1) = (F_{2k+1}F_{2k-1}, F_{2k+2}F_{2k})$$

yazılabilir ki, $(F_n, F_{n+1}) = 1$ özelliğinden

$$(F_{2k+1}, F_{2k+2}) = (F_{2k+1}, F_{2k}) = (F_{2k-1}, F_{2k}) = 1$$

olduğu görülür. $(F_{2k-1}, F_{2k+2}) = d$ durumu incelenir. Biliyoruz ki; $2|F_{3n}$ özelliğinden

$$2k - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ ve } 2k + 2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow F_{2k+2} \equiv F_{2k-1} \pmod{2}$$

$$k \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow (F_{2k-1}, F_{2k+2}) = 2$$

olur ki

$$G_{2k,1}^{(2)} = (F_{2k+1}F_{2k-1}, F_{2k+2}F_{2k}) = \begin{cases} 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) denklemlerine göre

$$G_{2k+1,1}^{(2)} = (G_{2k+1}^{(2)}, G_{2k+2}^{(2)}) = (F_{2k+1}^2 - 1, F_{2k+2}^2 + 1) = (F_{2k+2}F_{2k}, F_{2k+3}F_{2k+1})$$

yazılabilir ki, $(F_n, F_{n+1}) = 1$ özelliğinden

$$(F_{2k+2}, F_{2k+3}) = (F_{2k+2}, F_{2k+1}) = (F_{2k}, F_{2k+1}) = 1$$

olduğundan $(F_{2k}, F_{2k+3}) = d$ durumu incelenir. Benzer şekilde

$$2k \equiv 0 \pmod{3} \text{ ve } 2k + 3 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow F_{2k} \equiv F_{2k+3} \pmod{2}$$

$$k \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (F_{2k}, F_{2k+3}) = 2$$

olur ki

$$G_{2k+1,1}^{(2)} = (F_{2k+2}F_{2k}, F_{2k+3}F_{2k+1}) = \begin{cases} 2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.7 $G_{n,1}^{(2)}$, n . 1-ardışık ebob altered sayısı

$$G_{n,1}^{(2)} = (G_n^{(2)}, G_{n+1}^{(2)}) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1, 4 \pmod{6} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (3.15)$$

şeklindedir.

İspat: (3.13) ve (3.14) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } k \equiv 2 \pmod{3} \text{ ve } n = 2k + 1 \text{ için } k \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlerini düşünersek

$$2k \equiv 4 \pmod{6} \text{ ve } 2k + 1 \equiv 1 \pmod{6}$$

elde edilir ki bu istenilendir. ■

(3.12)'de $r = 2$ değerine göre $\{G_{n,2}^{(2)}\}_{n \geq 0} = \{(G_n^{(2)}, G_{n+2}^{(2)})\}_{n \geq 0}$ 2-ardışık ebob altered

dizisinin ilk 13 terimi için Tablo 3.3'ü oluşturalım.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$G_n^{(2)}$	1	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920	20737
$G_{n,2}^{(2)}$	1	3	2	3	5	24	13	21	34	165	89	144	233

Tablo 3.3. $G_n^{(2)}$, altered sayıları ve $G_{n,2}^{(2)}$, 2-ardışık altered Fibonacci ebob sayıları

Tablo 3.3'deki $\{G_{n,2}^{(2)}\}$, 2-ardışık ebob dizisinin azalmayan ve belirli bir kurala göre değerler aldığı görülmektedir. Bu dizinin genel terimlerini Teorem 3.8'de verilir.

Teorem 3.8 $G_{n,2}^{(2)}$, n . 2-ardışık ebob altered sayıları

$$G_{2k,2}^{(2)} = (G_{2k}^{(2)}, G_{2k+2}^{(2)}) = F_{2k+1}, \quad (3.16)$$

$$G_{2k+1,2}^{(2)} = (G_{2k+1}^{(2)}, G_{2k+3}^{(2)}) = \begin{cases} 3F_{2k+2}, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ F_{2k+2}, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.17)$$

olarak verilir.

İspat: (3.6) denklemine göre

$$G_{2k,2}^{(2)} = (G_{2k}^{(2)}, G_{2k+2}^{(2)}) = (F_{2k}^2 + 1, F_{2k+2}^2 + 1) = (F_{2k+1}F_{2k-1}, F_{2k+3}F_{2k+1})$$

yazılabilir ki, $G_{2k,2}^{(2)} = F_{2k+1} (F_{2k-1}, F_{2k+3})$ olduğu görülmektedir. O halde

$(F_{2k-1}, F_{2k+3}) = d$ durumunu inceleyelim. Biliyoruz ki; $3|F_{4n}$ özelliğinden

$$2k - 1 \not\equiv 0 \pmod{4} \text{ ve } 2k + 3 \not\equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow (F_{2k-1}, F_{2k+3}) = 1$$

olur ki

$$G_{2k,2}^{(2)} = F_{2k+1}(F_{2k-1}, F_{2k+3}) = F_{2k+1}$$

elde edilir. (3.7) denklemine göre

$$G_{2k+1,2}^{(2)} = (G_{2k+1}^{(2)}, G_{2k+3}^{(2)}) = (F_{2k+1}^2 - 1, F_{2k+3}^2 - 1) = (F_{2k+2}F_{2k}, F_{2k+4}F_{2k+2})$$

yazılabilir ki, $G_{2k+1,2}^{(2)} = F_{2k+2}(F_{2k}, F_{2k+4})$ olduğu görülür. O halde $(F_{2k}, F_{2k+4}) = d$

durumunu incelenirse

$$2k \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{ve} \quad 2k+4 \equiv 0 \pmod{4} \quad \Leftrightarrow \quad F_{2k} \equiv F_{2k+4} \pmod{3}$$

$$k \equiv 0 \pmod{2} \quad \Leftrightarrow \quad (F_{2k}, F_{2k+4}) = 3$$

olur ki

$$G_{2k+1,2}^{(2)} = F_{2k+2}(F_{2k}, F_{2k+4}) = \begin{cases} 3F_{2k+2}, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ F_{2k+2}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.9 $G_{n,2}^{(2)}$, n . 2-ardışık ebob altered sayısı

$$G_{n,2}^{(2)} = (G_n^{(2)}, G_{n+2}^{(2)}) = \begin{cases} 3F_{n+1}, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ F_{n+1}, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

İspat: (3.16) ve (3.17) denklemlerine göre

$$n = 2k \quad \text{için} \quad G_{2k,2}^{(2)} = F_{2k+1},$$

$$n = 2k+1 \quad \text{için} \quad k \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{ile} \quad G_{2k+1,2}^{(2)} = 3F_{2k+2},$$

$$n = 2k+1 \quad \text{için} \quad k \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{ile} \quad G_{2k+1,2}^{(2)} = F_{2k+2}$$

değerlerini düşünersek

$$2k \equiv 0, 2 \pmod{4} \quad \text{için} \quad G_{2k,2}^{(2)} = F_{2k+1},$$

$$2k+1 \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{için} \quad G_{2k+1,2}^{(2)} = 3F_{2k+2},$$

$$2k+1 \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{için} \quad G_{2k+1,2}^{(2)} = F_{2k+2}$$

elde edilir ki bu istenilendir. ■

Teorem 3.10 $G_{n,2}^{(2)}$, n . 2-ardışık ebob altered sayısı olmak üzere

$$G_{n+1,2}^{(2)} + G_{n,2}^{(2)} = \begin{cases} F_{n+1} + L_{n+2}, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ L_{n+3}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ F_{n+3}, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.19)$$

olarak verilir.

İspat: (3.18) denkleminde göre

$$G_{n+1,2}^{(2)} + G_{n,2}^{(2)} = \begin{cases} F_{n+2} + 3F_{n+1} = F_{n+3} + 2F_{n+1}, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 3F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+4}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

durumları göz önüne alınırsa (1.8)'deki indirgeme formülü ve $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ eşitliği kullanılırsa istenilen elde edilir. ■

3.2. $\{H_n^{(2)}\}$ n . Fibonacci Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizileri

Bu kısımda, n . Fibonacci sayısının ikinci kuvveti için indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 1\}$ değerlerini çıkartarak bulunan altered sayılarını tanımlayalım.

Tanım 3.3 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere F_n sayısının ikinci kuvvetinin altered sayısı $H_n^{(2)}$ ile gösterilerek

$$H_n^{(2)} = F_n^2 - (-1)^n \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu $\{H_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine n . Fibonacci sayısının ikinci kuvvetinin altered dizisi denir. $\{H_n^{(2)}\}_{n \geq 0}$ dizinin $n = 12$ değeri için ilk 13 eleman örneği Tablo 3.4 de verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n^2	0	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921	20736
$H_n^{(2)}$	-1	2	0	5	8	26	63	170	440	1157	3024	7922	20735

Tablo 3.4. F_n^2 , Fibonacci sayıları ve $H_n^{(2)}$, altered Fibonacci sayıları

Tablo 3.4'deki $H_n^{(2)}$ sayılarına göre ilk iki terimi hariç artan bir dizi şeklinde olduğu görülmektedir. Teorem 3.11 ile $H_n^{(2)}$ sayılarının genel terimi verilmektedir.

Teorem 3.11 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere $H_n^{(2)}$, n . altered sayıları için

$$H_{2k}^{(2)} = F_{2k}^2 - 1 = F_{2k+2}F_{2k-2}, \quad (3.21)$$

$$H_{2k+1}^{(2)} = F_{2k+1}^2 + 1 = F_{2k+3}F_{2k-1} \quad (3.22)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Eğer (3.4)'da verilen $F_{2k}^2 - 1 = F_{2(k+1)}F_{2(k-1)}$ ve (3.20)'deki $H_n^{(2)}$ 'nin tanımı kullanılırsa

$$H_{2k}^{(2)} = F_{2k}^2 - 1 = F_{2k+2}F_{2k-2}$$

elde edilir. (3.3)'da verilen $F_{2k+1}^2 + 1 = F_{2k+3}F_{2k-1}$ denklemde ve (3.20)'deki $H_n^{(2)}$ 'nin tanımını kullanılarak

$$H_{2k+1}^{(2)} = F_{2k+1}^2 + 1 = F_{2k+3}F_{2k-1}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.12 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere $H_n^{(2)}$, n . altered sayıları için

$$H_n^{(2)} = F_{n+2}F_{n-2} \quad (3.23)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tek ve çift olma durumuna göre verilen (3.6) ve (3.7)'deki denklemlerden açıkça görülmektedir. ■

$H_n^{(2)}$ altered sayısının Fibonacci ve Lucas indirgeme bağıntıları şeklindeki ilişkilerinin nasıl olduğunu inceleyelim.

Teorem 3.13 $H_n^{(2)}$, n . altered sayıları olmak üzere

$$H_n^{(2)} + H_{n+1}^{(2)} = F_{2n+1}, \quad (3.24)$$

$$H_{n+1}^{(2)} - H_{n-1}^{(2)} = F_{2n}, \quad (3.25)$$

ifadeleri verilir.

İspat: (3.23)'deki eşitlik ile $F_n L_n = F_{2n}$ ve $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ eşitlikleri kullanarak;

$$H_n^{(2)} + H_{n+1}^{(2)} = F_{n+2}F_{n-2} + F_{n+3}F_{n-1} = F_{n+2}F_{n-2} + (F_{n+2} + F_{n+1})F_{n-1} = F_{2n+1}$$

$$H_{n+1}^{(2)} - H_{n-1}^{(2)} = F_{n+3}F_{n-1} - F_{n+1}F_{n-3} = F_{n-2}F_{n+1} + F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_n F_{n-1}$$

istenilen elde edilir. ■

(3.20)'deki $H_n^{(2)}$, n . altered sayıları için Binet benzeri bir formülü verelim.

Teorem 3.14 $H_n^{(2)}$, n . altered sayısının Binet formülü

$$H_n^{(2)} = \frac{(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{5}, \quad (3.26)$$

verilir.

İspat: (3.23)'deki eşitlikde (1.10)'deki Fibonacci Binet formülünün bir uygulaması şeklinde olarak görülür. ■

Tanım 3.4 $H_n^{(2)}$ n . altered sayısını olmak üzere

$$H_{n,r}^{(2)} = (H_n^{(2)}, H_{n+r}^{(2)}) \quad (3.27)$$

tanımlan ifadesi r ardışık indisleri olan $H_n^{(2)}$ sayıların ortak bölenlerin en büyüğünü

gösterirken; bu sayıların oluşturduğu $\{H_{n,r}^{(2)}\}_{n \geq 0} = \{(H_n^{(2)}, H_{n+r}^{(2)})\}_{n \geq 0}$ dizisine, r -ardışık

altered Fibonacci ebob dizisi denir.

(3.27) denkleminde $r=1$ değeri için $\{H_{n,1}^{(2)}\}_{n \geq 0}$, dizisinin ilk 13 elemanı Tablo

3.5'deki gibi örneklendirilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H_n^{(2)}$	-1	2	0	5	8	26	63	170	440	1157	3024	7922	20735
$H_{n,1}^{(2)}$	1	2	5	1	2	1	1	10	1	1	2	1	5

Tablo 3.5. $H_n^{(2)}$, altered sayıları ve $H_{n,1}^{(2)}$, 1-ardışık altered Fibonacci ebob sayıları

Tablo 3.5'deki gözlemlere göre $\{H_{n,1}^{(2)}\}$ dizisi artan yada azalan veya sabit bir dizi şeklinde değildir. Acaba, l -ardışık altered ebob dizisinin belirli periyotlarda özel değerler aldığı düşünebilir mi?

Teorem 3.15 $\{H_{n,1}^{(2)}\}_{n \geq 0}$, 1-ardışık altered ebob dizisinin n 'inci sayıları

$$H_{2k,1}^{(2)} = (H_{2k}^{(2)}, H_{2k+1}^{(2)}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 11 \pmod{15} \\ 5, & k \equiv 1, 6 \pmod{15} \\ 2, & k \equiv 2, 5, 8, 14 \pmod{15} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (3.28)$$

$$H_{2k+1,1}^{(2)} = (H_{2k+1}^{(2)}, H_{2k+2}^{(2)}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 3 \pmod{15} \\ 5, & k \equiv 8, 13 \pmod{15} \\ 2, & k \equiv 0, 6, 9, 12 \pmod{15} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.29)$$

şeklindedir.

İspat: (3.21) ve (3.22) denklemlerine göre

$$H_{2k,1}^{(2)} = (H_{2k}^{(2)}, H_{2k+1}^{(2)}) = (F_{2k+2}F_{2k-2}, F_{2k+3}F_{2k-1})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+2}, F_{2k+3}) = (F_{2k-2}, F_{2k-1}) = 1$ olduğu bilindiğine göre

$$H_{2k,1}^{(2)} = (F_{2k-2}, F_{2k+3})(F_{2k+2}, F_{2k-1})$$

çarpım değerinin sonucu aranır. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ ve $(m, n) = (m, n - m)$ özellikleri kullanılırsa;

$$(F_{2k-2}, F_{2k+3}) = F_{(2k-2, 2k+3)} = F_{(2k-2, 2k+3-2k+2)} = F_{(2k-2, 5)} = F_5, \quad 2k-2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = F_{(2k+2, 2k-1)} = F_{(2k+2-2k+1, 2k-1)} = F_{(3, 2k-1)} = F_3, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

düşünülürse $(F_{2k-2}, F_{2k+3}) = 5$, $k \equiv 1 \pmod{5}$ ve $(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = 2$, $k \equiv 2 \pmod{3}$ elde edilir ki; Çin kalan Teoremine göre düzenlenirse $H_{2k,1}^{(2)} = 10$, $k \equiv 11 \pmod{15}$ olur. Diğer durumlara göre olası çarpım değerleri incelenirse

$$H_{2k,1}^{(2)} = (F_{2k-2}, F_{2k+3})(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 11 \pmod{15} \\ 5, & k \equiv 1, 6 \pmod{15} \\ 2, & k \equiv 2, 5, 8, 14 \pmod{15} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğu görülür. (3.21) ve (3.22) denklemlerine göre

$$H_{2k+1,1}^{(2)} = (H_{2k+1}^{(2)}, H_{2k+2}^{(2)}) = (F_{2k+3}F_{2k-1}, F_{2k+4}F_{2k})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+3}, F_{2k+4}) = (F_{2k-1}, F_{2k}) = 1$ olduğuna göre

$$H_{2k+1,1}^{(2)} = (F_{2k+3}, F_{2k})(F_{2k-1}, F_{2k+4})$$

çarpım değerinin sonucu aranır. Ebob özellikleri kullanılarak

$$(F_{2k}, F_{2k+3}) = F_{(2k, 2k+3)} = F_{(2k, 2k+3-2k)} = F_{(2k, 3)} = F_3, \quad 2k \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = F_{(2k+4, 2k-1)} = F_{(2k+4-2k+1, 2k-1)} = F_{(5, 2k-1)} = F_5, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{5}$$

düşünülürse $(F_{2k}, F_{2k+3}) = 2$, $k \equiv 0 \pmod{3}$ ve $(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = 5$, $k \equiv 3 \pmod{5}$ elde edilir ki; Çin kalan Teoremine göre düzenlenirse $H_{2k+1,1}^{(2)} = 10$, $k \equiv 3 \pmod{15}$ olur ki benzer şekilde diğer durumlara incelenirse

$$H_{2k+1,1}^{(2)} = (F_{2k}, F_{2k+3})(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 3 \pmod{15} \\ 5, & k \equiv 8, 13 \pmod{15} \\ 2, & k \equiv 0, 6, 9, 12 \pmod{15} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.16 $\{H_{n,1}^{(2)}\}_{n \geq 0}$, n . 1-ardışık altered Fibonacci ebob sayısı

$$H_{n,1}^{(2)} = (H_n^{(2)}, H_{n+1}^{(2)}) = \begin{cases} 10, & n \equiv 7 \pmod{15} \\ 5, & n \equiv 2, 12 \pmod{15} \\ 2, & n \equiv 1, 4, 10, 13 \pmod{15} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.30)$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.28) ve (3.29) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } H_{2k,1}^{(2)} = 10, \quad 2k \equiv 22 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 7 \pmod{15}, \quad H_{n,1}^{(2)} = 10,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } H_{2k+1,1}^{(2)} = 10, \quad 2k + 1 \equiv 7 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 7 \pmod{15}, \quad H_{n,1}^{(2)} = 10$$

diğerlerini düşünürsek

$$n = 2k \text{ için } H_{2k,1}^{(2)} = 5, \quad 2k \equiv 2, 12 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 2, 12 \pmod{15}, \quad H_{n,1}^{(2)} = 5,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } H_{2k+1,1}^{(2)} = 5, \quad 2k + 1 \equiv 17, 27 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 2, 12 \pmod{15}, \quad H_{n,1}^{(2)} = 5$$

elde edilir ki benzer işlemler ile diğer değerlerde bulunabilir. ■

(3.27) denkleminde $r = 2$ değeri için $\{(H_n, H_{n+2})\}_{n \geq 0}^{12}$ 2-ardışık altered ebob dizisinin ilk 13 terimlerini Tablo 3.6'daki gibi örnekleyelim.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H_n^{(2)}$	-1	2	0	5	8	26	63	170	440	1157	3024	7922	20735
$H_{n,2}^{(2)}$	1	1	8	1	1	2	1	1	8	1	1	2	1

Tablo 3.6. $H_n^{(2)}$, altered sayıları ve $H_{n,2}^{(2)}$, 2-ardışık altered Fibonacci ebob sayıları

Tablo 3.6'deki gözlemlere göre $\{H_{n,2}^{(2)}\}_{n \geq 0}$ dizisi artan yada azalan veya sabit bir dizi şeklide değildir. Fakat, periyodik bir dizi şeklinde gibi görülmektedir.

Teorem 3.17 $\{H_{n,2}^{(2)}\}_{n \geq 0}$ n . 2-ardışık altered Fibonacci ebob sayısı

$$H_{2k,2}^{(2)} = (H_{2k}^{(2)}, H_{2k+2}^{(2)}) = \begin{cases} 8, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (3.31)$$

$$H_{2k+1,2}^{(2)} = (H_{2k+1}^{(2)}, H_{2k+3}^{(2)}) = \begin{cases} 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.32)$$

şeklindedir.

İspat: (3.21) denklemine göre

$$H_{2k,2}^{(2)} = (F_{2k+2}F_{2k-2}, F_{2k+4}F_{2k})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+2}, F_{2k}) = (F_{2k+2}, F_{2k+4}) = (F_{2k-2}, F_{2k}) = 1$ olduğu kullanırsa

$$H_{2k,2}^{(2)} = (F_{2k-2}, F_{2k+4}) = F_{(2k-2, 2k+4)} = F_{(2k-2, 6)} = F_{2(k-1, 3)} = F_6, \quad k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlendirilirse

$$H_{2k,2}^{(2)} = \begin{cases} F_6, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ F_2, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.22) denklemine göre

$$H_{2k+1,2}^{(2)} = (F_{2k+3}F_{2k-1}, F_{2k+5}F_{2k+1})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+3}, F_{2k+5}) = (F_{2k+3}, F_{2k+1}) = (F_{2k-1}, F_{2k+1}) = 1$ 'e göre

$$H_{2k+1,2}^{(2)} = (F_{2k-1}, F_{2k+5}) = F_{(2k-1, 2k+5)} = F_{(2k-1, 6)} = F_3, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlendirilirse

$$H_{2k+1,2}^{(2)} = \begin{cases} F_3, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ F_1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.18 $\{H_{n,2}^{(2)}\}_{n \geq 0}$, n . 2-ardışık altered Fibonacci ebob sayısı

$$H_{n,2}^{(2)} = (H_n^{(2)}, H_{n+1}^{(2)}) = \begin{cases} 8, & k \equiv 2 \pmod{6} \\ 2, & k \equiv 5 \pmod{6} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.33)$$

değerini alır.

İspat: (3.31) ve (3.32) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } H_{2k,2}^{(2)} = 8, \quad 2k \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow n \equiv 2 \pmod{6}, \quad H_{n,2}^{(2)} = 8,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } H_{2k+1,2}^{(2)} = 2, 2k + 1 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{6}, H_{n,2}^{(2)} = 2$$

elde edilir ki diğer durumlarda benzer şekilde gösterilebilir. ■

4. LUCAS SAYISININ İKİNCİ KUVVETİNİN ALTERED DİZİLERİ

Tam kare olan Lucas sayıları var mıdır? Biliyoruz ki $L_1 = 1$ ve $L_3 = 4$ tam karedir. Bunlardan başka var mıdır? Aslında, $n = 0$ ve $n = \pm 6$ için Lucas sayısının $L_n = 2x^2$, $x \in \mathbb{Z}$ formunda yazılabildiği (1.17), (1.18), (1.19) ile verilen formüllere dayandırarak ispat edilir (Koshy, 2001; Robbins, N., 1981).

Bu bölümde n . Lucas sayısının karesi ele alınarak bazı altered sayı örnekleri incelenir. Gerekli birçok ön bilgi 1.3 kısmında yer almaktadır, bunlardan Lucas Cassini formülü $L_n^2 - 5(-1)^n = L_{n+1}L_{n-1}$ ve başka bir Lucas eşitliği $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$ ifadelerinde n 'nin tek ve çift olma durumuna değerlendirilirse;

$$\begin{aligned} L_{2k}^2 - 5 &= L_{2k+1}L_{2k-1} & L_{2k}^2 - 4 &= 5F_{2k}^2 \\ L_{2k+1}^2 + 5 &= L_{2k+2}L_{2k} & L_{2k+1}^2 + 4 &= 5F_{2k+1}^2 \end{aligned}$$

denklemlerine dönüştüğü görülür.

Ayrıca, (2.5)–(2.8)'de verilen karşılıklı eşitliklerin iki kare farkı çarpımlarında, $F_n L_n = F_{2n}$ özelliği kullanılarak (2.17) ve (2.18)'deki bazı durumlardaki denklemlerin oluşturduğu görülür. (P. Pongsriiam, 2017-a-b)'deki çalışmada verilen (2.17) ve (2.18) denklemlerinin ispatları farklı bir ispat yöntemi ile Teorem 4.1'de verilir.

Teorem 4.1 F_n , n . Fibonacci sayısı ve L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere;

$$L_{2k}^2 + 1 = 5F_{2k-1}F_{2k+1}, \quad (4.1)$$

$$L_{2k+1}^2 - 1 = 5F_{2(k+1)}F_{2k}, \quad (4.2)$$

$$L_{2k+1}^2 + 9 = 5F_{2k+3}F_{2k-1}, \quad (4.3)$$

$$L_{2k}^2 - 9 = 5F_{2(k+1)}F_{2(k-1)} \quad (4.4)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Eğer (1.15)'de verilen $L_{m+n+1}^2 + L_{m-n}^2 = 5F_{2m+1}F_{2n+1}$ denkleminde $m = k+1$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$L_{k+1+k+1}^2 + L_{k+1-k}^2 = L_{2k+2}^2 + L_1^2 = 5F_{2(k+1)+1}F_{2k+1}$$

elde edilir ki $L_1 = 1$ olduğu için $L_{2(k+1)}^2 + 1 = 5F_{2(k+1)+1}F_{2(k+1)-1}$ olur.

(1.16)'de verilen $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5F_{2m}F_{2n}$ denkleminde $m = k+1$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$L_{k+1+k}^2 - L_{k+1-k}^2 = L_{2k+1}^2 - L_1^2$$

olur ki $L_1 = 1$ olduğu için $L_{2k+1}^2 - 1 = 5F_{2(k+1)}F_{2k}$ olur.

(1.15)'de verilen $L_{m+n+1}^2 + L_{m-n}^2 = 5F_{2m+1}F_{2n+1}$ denkleminde $m = k + 2$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$L_{k+2+k+1}^2 + L_{k+2-k}^2 = L_{2k+3}^2 + L_2^2 = 5F_{2(k+2)+1}F_{2k+1}$$

şeklinde ki $L_2 = 3$ olduğu için $L_{2(k+1)+1}^2 + 9 = 5F_{2(k+1)+3}F_{2(k+1)-1}$ olur.

(1.16)'de verilen $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5F_{2m}F_{2n}$ denkleminde $m = k + 2$ ve $n = k$ değerleri düşünülürse

$$L_{k+2+k}^2 - L_{k+2-k}^2 = L_{2k+2}^2 - L_2^2 = 5F_{2k+4}F_{2k}$$

elde edilir ki $L_2 = 3$ olduğu için $L_{2(k+1)}^2 - 9 = 5F_{2(k+2)}F_{2k}$ olur. ■

(4.1)–(4.4)'de verilen denklemler kullanılarak (3.5) ve (3.20)'de tanımlanan altered Fibonacci sayılara benzer $\{G_{L(n)}^{(2)}(a)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(a)\}$ ile gösterilen altered Lucas sayıları tanımlanır.

4.1. $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi

Bu kısımda, n 'inci Lucas sayısının karesi için indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 1\}$ değerini ekleyerek elde edilen altered Lucas sayısını tanımlayalım.

Tanım 4.1 L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere n . altered sayısı $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ ile gösterilerek

$$G_{L(n)}^{(2)}(1) = L_n^2 + (-1)^n \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}_{n=0}^{\infty}$ kümesine *altered dizisi*

denir. $0 \leq n \leq 12$ için $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ dizisinin ilk 13 eleman örneği Tablo 4.1 verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n^2	4	1	9	16	49	121	324	841	2209	5776	15129	39601	103684
$G_{L(n)}^{(2)}(1)$	5	0	10	15	50	120	325	840	2210	5775	15130	39600	103685

Tablo 4.1. L_n^2 , Lucas sayıları ve $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayıları

Tablo 4.1'deki $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ sayılarının özel değerleri; ilk değeri hariç dizinin artan bir dizi olduğunu işaret ediyor ki; $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ dizisinin genel terimleri Teorem 4.2'de verilir.

Teorem 4.2 F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere, $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, (4.5) denkleminde verilen n . altered Lucas sayısı

$$G_{L(2k)}^{(2)}(1) = 5F_{2k-1}F_{2k+1}, \quad (4.6)$$

$$G_{L(2k+1)}^{(2)}(1) = 5F_{2(k+1)}F_{2k} \quad (4.7)$$

şeklindedir.

İspat: Eğer (4.1) denkleminde (4.5)'deki $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ 'nin tanımı kullanılırsa,

$$G_{L(2k)}^{(2)}(1) = L_{2k}^2 + 1 = 5F_{2k+1}F_{2k-1}$$

ve ayrıca, (4.2) denkleminde (4.5)'deki $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ 'nin tanımı kullanılarak

$$G_{L(2k+1)}^{(2)}(1) = L_{2k+1}^2 - 1 = 5L_{2(k+1)}F_{2k}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 F_n , Fibonacci sayısı olmak üzere $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, n . altered sayısı için

$$G_{L(n)}^{(2)}(1) = 5F_{n+1}F_{n-1}, \quad (4.8)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tek ve çift olma durumuna göre verilen (4.6) ve (4.7)'deki denklemlerinden açıkça görülmektedir. ■

Şimdi, $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ n . altered sayısının, Fibonacci ve Lucas indirgeme bağıntıları şeklindeki ilişkilerinin nasıl olduğunu inceleyelim.

Teorem 4.4 $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, n . altered sayısı ve F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$G_{L(n)}^{(2)}(1) + G_{L(n+1)}^{(2)}(1) = 5F_{2n+1}, \quad (4.9)$$

$$G_{L(n+1)}^{(2)}(1) - G_{L(n-1)}^{(2)}(1) = 5F_{2n} \quad (4.10)$$

ifadeleri verilir.

İspat: (4.8)'de verilen genel terim ifadesi ile $F_n L_n = F_{2n}$ ve $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ eşitlikleri kullanılırsa;

$$G_n^{(2)}(1) + G_{n+1}^{(2)}(1) = 5F_{n+1}F_{n-1} + 5F_{n+2}F_n = 5(F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) + F_n^2) = 5F_{2n+1}$$

$$G_{n+1}^{(2)}(1) - G_{n-1}^{(2)}(1) = 5(F_{n+2}F_n - F_nF_{n-2}) = 5F_n(F_{n+1} + F_n - F_{n-2}) = 5F_nL_n$$

istenilenler elde edilir. ■

(4.8)'deki $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ sayısı için Binet benzeri bir formül vereceğiz.

Teorem 4.5 $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, n . altered Lucas sayısı ve $\alpha = 1 - \beta$ altın oran olmak üzere;

$$G_{L(n)}^{(2)}(1) = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \quad (4.11)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (4.8)'deki genel terim eşitliğinde (1.10)'deki Fibonacci Binet formülünün bir uygulaması şeklinde direkt görülür. ■

Tanım 4.2 $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, n . altered sayısı olmak üzere

$$G_{L(n),r}^{(2)}(1) = (G_{L(n)}^{(2)}(1), G_{L(n+r)}^{(2)}(1)) \quad (4.12)$$

tanımlan ifadesi indisleri arasındaki farkı r olan $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ sayılarının ortak bölenlerin en büyüğünü gösterirken; bu sayıların oluşturduğu $\{G_{L(n),r}^{(2)}(1)\}$ kümesine, r -ardışık altered Lucas ebob dizisi denir.

$r=1$ için $\{G_{L(n),1}^{(2)}(1)\}$, $0 \leq n \leq 11$ dizisinin ilk 12 eleman örneği aşağıdaki tabloda verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G_{L(n)}^{(2)}(1)$	5	0	10	15	50	120	325	840	2210	5775	15130	39600
$G_{L(n),1}^{(2)}(1)$	5	10	5	5	10	5	5	10	5	5	10	5

Tablo 4.2. $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayıları ve $G_{L(n),1}^{(2)}(1)$, l -ardışık altered Lucas ebob sayıları

Tablo 4.2'de verilerden görülüyor ki; $\{G_{L(n),1}^{(2)}(1)\}$ dizisi artan ya da azalan veya sabit bir dizi şeklinde değildir. Fakat, l -ardışık altered ebob dizisinin belirli periyotlarda özel değerler aldığı gözlemlenmektedir.

Teorem 4.6 $\{G_{L(n),1}^{(2)}(1)\}$, n . l -ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$G_{L(2k),1}^{(2)}(1) = (G_{L(2k)}^{(2)}(1), G_{L(2k+1)}^{(2)}(1)) = \begin{cases} 10, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (4.13)$$

$$G_{L(2k+1),1}^{(2)}(1) = \left(G_{L(2k+1)}^{(2)}(1), G_{L(2k+2)}^{(2)}(1) \right) = \begin{cases} 10, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.14)$$

şeklindedir.

İspat: (4.6) ve (4.7) denklemlerine göre

$$G_{L(2k),1}^{(2)}(1) = \left(G_{L(2k)}^{(2)}(1), G_{L(2k+1)}^{(2)}(1) \right) = 5(F_{2k+1}F_{2k-1}, F_{2k+2}F_{2k})$$

yazılabilir ki, $(F_n, F_{n+1}) = 1$ özelliğinden $(F_{2k+1}, F_{2k+2}) = (F_{2k+1}, F_{2k}) = (F_{2k-1}, F_{2k}) = 1$

olduğu bilinmektedir. O halde $(F_{2k-1}, F_{2k+2}) = d$ durumunu inceleyelim. Biliyoruz ki;

$2|F_{3n}$ özelliğinden

$$2k-1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ ve } 2k+2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow F_{2k+2} \equiv F_{2k-1} \pmod{2}$$

$$k \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow (F_{2k-1}, F_{2k+2}) = 2$$

olur ki

$$G_{L(2k),1}^{(2)}(1) = 5(F_{2k+1}F_{2k-1}, F_{2k+2}F_{2k}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) denklemlerine göre

$$G_{L(2k+1),1}^{(2)}(1) = \left(G_{L(2k+1)}^{(2)}(1), G_{L(2k+2)}^{(2)}(1) \right) = 5(F_{2(k+1)}F_{2k}, F_{2k+1}F_{2k+3})$$

yazılabilir ki, $(F_n, F_{n+1}) = 1$ özelliğinden

$$(F_{2k+2}, F_{2k+3}) = (F_{2k+2}, F_{2k+1}) = (F_{2k}, F_{2k+1}) = 1$$

olduğundan $(F_{2k}, F_{2k+3}) = d$ durumu incelenir ki;

$$2k \equiv 0 \pmod{3} \text{ ve } 2k+3 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow F_{2k} \equiv F_{2k+3} \pmod{2}$$

$$k \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (F_{2k}, F_{2k+3}) = 2$$

bulunur. Değerleri yerlerine yazılırsa

$$G_{L(2k+1),1}^{(2)}(1) = 5(F_{2(k+1)}F_{2k}, F_{2k+1}F_{2k+3}) = \begin{cases} 10, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7 $G_{L(n),1}^{(2)}(1)$, n . 1-ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$G_{L(n),1}^{(2)}(1) = \left(G_{L(n)}^{(2)}(1), G_{L(n+1)}^{(2)}(1) \right) = \begin{cases} 10, & n \equiv 1, 4 \pmod{6} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.15)$$

dir.

İspat: (4.13) ve (4.14) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } k \equiv 2 \pmod{3} \text{ ve } n = 2k + 1 \text{ için } k \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlerini düşünürsek

$$2k \equiv 4 \pmod{6} \text{ ve } 2k + 1 \equiv 1 \pmod{6}$$

elde edilir ki bu istenilendir. ■

$$\left\{ G_{L(n),2}^{(2)}(1) \right\}_{n \geq 0} = \left\{ \left(G_{L(n)}^{(2)}(1), G_{L(n+2)}^{(2)}(1) \right) \right\}_{n \geq 0}, \text{ 2-ardışık altered Lucas ebob dizisinin}$$

ilk 13 terimi için Tablo 4.3 oluşturalım.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G_{L(n)}^{(2)}(1)$	5	0	10	15	50	120	325	840	2210	5775	15130	39600
$G_{L(n),2}^{(2)}(1)$	5	15	10	15	25	120	65	105	170	825	445	720

Tablo 4.3. $G_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered sayıları ve $G_{L(n),2}^{(2)}(1)$, 2-ardışık altered Lucas ebob sayıları

Tablo 4.3'deki $\left\{ G_{L(n),2}^{(2)}(1) \right\}_{n \geq 0}^{12}$ 2-ardışık altered Lucas ebob dizisinin azalmayan, $n \geq 2$ için artan bir dizi ve belirli bir kurala göre değerler aldığı görülmektedir. Teorem 4.8 ile bu dizisinin genel terim ifadeleri verilir.

Teorem 4.8 $\left\{ G_{L(n),2}^{(2)}(1) \right\}_{n \geq 0}$, n . 2-ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$G_{L(2k),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+1}, \quad (4.16)$$

$$G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = \begin{cases} 15F_{2k+2}, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ 5F_{2k+2}, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.17)$$

verilir.

İspat: (4.6) denklemine göre

$$G_{L(2k),2}^{(2)}(1) = \left(G_{L(2k)}^{(2)}(1), G_{L(2k+2)}^{(2)}(1) \right) = 5F_{2k+1} (F_{2k-1}, F_{2k+3})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k-1}, F_{2k+3}) = d$ durumunu inceleyelim. Biliyoruz ki, $3 \mid F_{4n}$ özelliğinden

$$2k - 1 \not\equiv 0 \pmod{4} \text{ ve } 2k + 3 \not\equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow (F_{2k-1}, F_{2k+3}) = 1$$

olur ki

$$G_{L(2k),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+1} (F_{2k-1}, F_{2k+3}) = 5F_{2k+1}$$

elde edilir.

(4.7) denklemine göre

$$G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = \left(G_{L(2k+1)}^{(2)}(1), G_{L(2k+3)}^{(2)}(1) \right) = 5F_{2k+2}(F_{2k}, F_{2k+4})$$

şeklindedir ki, $(F_{2k}, F_{2k+4}) = d$ durumunu incelenir. Görülüyor ki;

$$2k \equiv 0 \pmod{4} \text{ ve } 2k+4 \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow F_{2k} \equiv F_{2k+4} \pmod{3}$$

$$k \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow (F_{2k}, F_{2k+4}) = 3$$

olur yerlerine yazılırsa

$$G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+2}(F_{2k}, F_{2k+4}) = \begin{cases} 15F_{2k+2}, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ 5F_{2k+2}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.9 $G_{L(n),2}^{(2)}(1)$, n . 2-ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$G_{L(n),2}^{(2)}(1) = \left(G_{L(n)}^{(2)}(1), G_{L(n+2)}^{(2)}(1) \right) = \begin{cases} 15F_{n+1}, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 5F_{n+1}, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.18)$$

şeklindedir.

İspat: (4.16) ve (4.17) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } G_{L(2k),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+1}, \quad n = 2k+1 \text{ için } k \equiv 1 \pmod{2} \text{ ile}$$

$$G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+2} \text{ ve } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ ile } G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = 15F_{2k+2} \text{ değerlerini düşünürsek}$$

$$2k \equiv 0, 2 \pmod{4} \text{ için } G_{L(2k),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+1} \text{ ile birlikte } 2k+1 \equiv 3 \pmod{4} \text{ için}$$

$$G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = 5F_{2k+2} \text{ ve } 2k+1 \equiv 1 \pmod{4} \text{ için } G_{L(2k+1),2}^{(2)}(1) = 15F_{2k+2}$$

elde edilir ki bu istenilendir. ■

Teorem 4.10 $G_{L(n),2}^{(2)}(1)$, n . 2-ardışık altered Lucas ebob sayısı ve F_n , n . Fibonacci ve L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere

$$G_{L(n+1),2}^{(2)}(1) + G_{L(n),2}^{(2)}(1) = \begin{cases} 5(F_{n+1} + L_{n+2}), & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 5L_{n+3}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 5F_{n+3} & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.19)$$

şeklinde verilir.

İspat: (4.18) denkleminde göre

$$G_{L(n+1),2}^{(2)}(1) + G_{L(n),2}^{(2)}(1) = \begin{cases} 5(F_{n+2} + 3F_{n+1}) = 5(F_{n+3} + 2F_{n+1}), & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 5(3F_{n+2} + F_{n+1}) = 5(F_{n+2} + F_{n+4}), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 5(F_{n+1} + F_{n+2}) = 5F_{n+3} & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğu göz önüne alınırsa Fibonacci indirgeme formülü ve $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ eşitliği kullanılırsa istenilen elde edilir. ■

4.2. $\{H_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi

Bu kısımda, n . Lucas sayısının ikinci kuvveti için indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 1\}$ değeri çıkarılarak altered Lucas sayısını tanımlayalım.

L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere $H_{L(n)}^{(2)}(1)$, n . altered Lucas sayısı

$$H_{L(n)}^{(2)}(1) = L_n^2 - (-1)^n \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlansın, bu sayıların oluşturduğu $\{H_{L(n)}^{(2)}(1)\}_{n=0}^{\infty}$ kümesine *altered Lucas dizisi* denir. Bu dizinin ilk 13 terimi için Tablo 4.4'deki değerler verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n^2	4	1	9	16	49	121	324	841	2209	5776	15129	39601	103684
$H_{L(n)}^{(2)}(1)$	3	2	8	17	48	122	323	842	2208	5777	15128	39602	103683

Tablo 4.4. L_n^2 , Lucas sayıları ve $H_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayıları

(4.20) denkleminde verilen $H_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayısı için

$$H_{L(2k)}^{(2)}(1) = L_{2k}^2 - 1 = F_{3k}L_{3k} / F_kL_k, \quad (4.21)$$

$$H_{L(2k+1)}^{(2)}(1) = L_{2k+1}^2 + 1 = F_{6k+3} / F_{2k+1} \quad (4.22)$$

eşitlikleri geçerli olduğu (2.17) ve (2.18)'de verilen eşitliklerdeki indisinin tek veya çift olma durumuna göre aşıkardır. Bu ifadeler aynı zamanda 3. Bölümde yer alan eşitliklerine göre $5F_{2k}^2 + 3 = L_{2k}^2 - 1$ ve $5F_{2k+1}^2 - 3 = L_{2k+1}^2 + 1$ şeklinde yazılabilir. Tablo 4.4'deki değerlerin araştırmasını tamsayı dizilerinin çevrimiçi ansiklopedisinde yaptığımızda $a(n) = 5F_n^2 + 3(-1)^n$ (**A000045**) şeklinde çalışıldığı görülür.

$H_{L(n)}^{(2)}(1)$ sayıları için $\{H_{L(n),r}^{(2)}(1)\} = \left\{ \left(H_{L(n)}^{(2)}(1), HG_{L(n+r)}^{(2)}(1) \right) \right\}_{n \geq 0}$, ortak bölenlerin

en büyüğünü gösterirken; bu sayıların oluşturduğu $\{H_{L(n),r}^{(2)}(1)\}$ kümesine, *r-ardışık altered ebob Lucas dizisi* denir.

$r = 1$ için $\{H_{L(n),1}^{(2)}(1)\}$, $0 \leq n \leq 12$ dizisinin ilk 13 eleman örneği Tablo 4.5'deki şekilde örneklenir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H_{L(n)}^{(2)}(1)$	3	2	8	17	48	122	323	842	2208	5777	15128	39602	103683
$H_{L(n),1}^{(2)}(1)$	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1

Tablo 4.5. $H_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayıları ve $H_{L(n),1}^{(2)}(1)$, I -ardışık altered Lucas ebob sayıları

$H_{L(n),1}^{(2)}(1)$, n . I -ardışık altered Lucas ebob altered sayısı

$$H_{L(n),1}^{(2)}(1) = (H_{L(n)}^{(2)}(1), H_{L(n+1)}^{(2)}(1)) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak gözlemlenir ki ekler bölümünde $n = 30$ değerine kadar örneklenmiştir.

$r = 2$ için $\{H_{L(n),2}^{(2)}(1)\}$, $0 \leq n \leq 12$ dizisinin elemanları Tablo 4.6'de verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H_{L(n)}^{(2)}(1)$	3	2	8	17	48	122	323	842	2208	5777	15128	39602	103683
$H_{L(n),2}^{(2)}(1)$	1	1	8	1	1	2	1	1	8	1	1	2	1

Tablo 4.6. $H_{L(n)}^{(2)}(1)$, altered Lucas sayıları ve $H_{L(n),2}^{(2)}(1)$, I -ardışık altered Lucas ebob sayıları

$H_{L(n),1}^{(2)}(1)$, n 'inci I -ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$H_{L(n),1}^{(2)}(1) = (H_{L(n)}^{(2)}(1), H_{L(n+1)}^{(2)}(1)) = \begin{cases} 8, & n \equiv 2 \pmod{6} \\ 2, & n \equiv 5 \pmod{6} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak gözlemlenir ki ekler bölümünde $n = 30$ değerine kadar örneklenmiştir.

$r = 3$ için $\{H_{L(n),3}^{(2)}(1)\}$, $0 \leq n \leq 30$ dizisinin elemanları eklerde verilir.

4.3. $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizisi

Bu kısımda, n . Lucas sayısının ikinci kuvveti için indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 9\}$ değerini ekleyerek altered Lucas sayısını tanımlayalım.

L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere $G_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered Lucas sayısı

$$G_{L(n)}^{(2)}(9) = L_n^2 + (-1)^n 9 \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlansın ve bu sayıların oluşturduğu $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine *altered Lucas dizisi* denir. Tablo 4.7’de $n = 11$ değerine kadar $G_{L(n)}^{(2)}(9)$ sayılarının değerleri verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L_n^2	4	1	9	16	49	121	324	841	2209	5776	15129	39601
$G_{L(n)}^{(2)}(9)$	13	-8	18	7	58	112	333	832	2218	5767	15138	39592

Tablo 4.7. L_n^2 , Lucas sayıları ve $G_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları

$G_{L(n)}^{(2)}(9)$ sayılarının artan bir dizi şeklinde olduğu görülmektedir, fakat Fiboancci veya Lucas sayıları ilgileri tespit edilemedi.

Şimdi, $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin elemanlarında indisleri arasındaki farkı r olan ardışık iki sayının en büyük ortak böleni olarak $G_{L(n),r}^{(2)}(9) = (G_{L(n)}^{(2)}(9), G_{L(n+r)}^{(2)}(9))$ ile tanımlanır ki; bu sayıların oluşturduğu $\{G_{L(n),r}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$ dizisine, *r-ardışık altered Lucas ebob dizisi* denir.

$\{G_{L(n),1}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$, dizisinin $n = 11$ değeri için Tablo 4.8’de örnekleyelim.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G_{L(n)}^{(2)}(9)$	13	-8	18	7	58	112	333	832	2218	5767	15138	39592
$G_{L(n),1}^{(2)}(9)$	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1

Tablo 4.8. $G_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları ve $G_{L(n),1}^{(2)}(9)$, I -ardışık altered Lucas ebob sayıları

$G_{L(n),1}^{(2)}(9)$, n . I -ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$G_{L(n),1}^{(2)}(9) = (G_{L(n)}^{(2)}(9), G_{L(n+1)}^{(2)}(9)) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak gözlemlenir ki ekler bölümünde $n = 30$ değerine kadar verilir.

$\{G_{L(n),2}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}^{11}$ 2-ardışık altered Lucas ebob dizisinin Tablo 4.9'deki gibi olduğu görülür.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G_{L(n)}^{(2)}(9)$	13	-8	18	7	58	112	333	832	2218	5767	15138	39592
$G_{L(n),2}^{(2)}(9)$	1	1	2	7	1	16	1	1	2	1	1	56

Tablo 4.9. $G_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları ve $G_{L(n),2}^{(2)}(9)$, 2-ardışık altered Lucas ebob sayıları

Tablo 4.9'daki veriler herhangi bir periyotta olduğunu göstermemektedir, fakat ekler kısmında verilen örnek veriler incelendiğinde

$$\{G_{L(n),2}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}^{23} = \{1, 1, 2, 7, 1, 16, 1, 1, 2, 1, 1, 56, 1, 1, 2, 1, 1, 16, 1, 7, 2, 1, 1, 8\}$$

değerlerini aldığı mod24 göre periyodik bir dizi olduğu görülmüştür.

$$r = 3 \text{ için } \{G_{L(n),3}^{(2)}(9)\}, 0 \leq n \leq 30 \text{ dizisinin elemanları eklerde bulunabilir.}$$

4.4. $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ n . Lucas Sayısının İkinci Kuvvetinin Altered Dizileri

Bu kısımda, n . Lucas sayısının ikinci kuvveti için indisinin tek veya çift olma durumuna göre $\{\pm 9\}$ değeri çıkarılarak oluşturulan altered Lucas sayısını tanımlayalım.

Tanım 4.3 L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere $H_{L(n)}^{(2)}$, n . altered Lucas sayısı

$$H_{L(n)}^{(2)}(9) = L_n^2 - (-1)^n 9 \quad (4.24)$$

şeklinde. Bu sayıların oluşturduğu $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}_{n=0}^{\infty}$ kümesine *altered Lucas dizisi* denir.

Tablo 4.10'da $H_{L(n)}^{(2)}$ altered Lucas sayısı için ilk 13 terim görülebilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n^2	4	1	9	16	49	121	324	841	2209	5776	15129	39601	103684
$H_{L(n)}^{(2)}(9)$	-5	10	0	25	40	130	315	850	2200	5785	15120	39610	103675

Tablo 4.10. L_n^2 , Lucas sayıları ve $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları

Teorem 4.11 $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered Lucas sayısı için genel terim eşitlikleri

$$H_{L(2k)}^{(2)}(9) = L_{2k}^2 - 9 = 5F_{2(k+1)}F_{2(k-1)}, \quad (4.25)$$

$$H_{L(2k+1)}^{(2)}(9) = L_{2k+1}^2 + 9 = 5F_{2k+3}F_{2k-1} \quad (4.26)$$

şeklinde geçerlidir.

İspat: (4.24)'deki tanım ve (4.4)'de verilen $L_{2k}^2 - 9 = 5F_{2(k+1)}F_{2(k-1)}$ kullanılırsa

$$H_{L(2k)}^{(2)}(9) = L_{2k}^2 - 9 = 5F_{2(k+1)}F_{2(k-1)}$$

elde edilir. (4.24)'deki tanım ve (4.3)'deki $L_{2k+1}^2 + 9 = 5F_{2k+3}F_{2k-1}$ denklemi kullanılırsa

$$H_{L(2k+1)}^{(2)}(9) = L_{2k+1}^2 + 9 = 5F_{2k+3}F_{2k-1}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.12 $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered Lucas sayısı ve F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$H_{L(n)}^{(2)}(9) = 5F_{n+2}F_{n-2} \quad (4.27)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tek ve çift olma durumuna göre verilen (4.25) ve (4.26)'deki denklemlerden açıkça görülmektedir. ■

Şimdi, $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered Lucas sayısının, Fibonacci ve Lucas indirgeme bağıntıları şeklindeki ilişkilerinin nasıl olduğunu inceleyelim.

Teorem 4.13 $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n 'inci altered Lucas sayısı ve F_n , Fibonacci sayısı olmak üzere

$$H_{L(n)}^{(2)}(9) + H_{L(n+1)}^{(2)}(9) = 5F_{2n+1}, \quad (4.28)$$

$$H_{L(n+1)}^{(2)}(9) - H_{L(n-1)}^{(2)}(9) = 5F_{2n}, \quad (4.29)$$

ifadeleri verilir.

İspat: (4.27)'deki eşitlik ile $F_n L_n = F_{2n}$ ve $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ifadeleri kullanılırsa;

$$H_{L(n)}^{(2)}(9) + H_{L(n+1)}^{(2)}(9) = 5F_{n+2}F_{n-2} + 5F_{n+3}F_{n-1} = 5(F_{n+2}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n+1}F_{n-1}) = 5F_{2n+1}$$

$$H_{L(n+1)}^{(2)}(9) - H_{L(n-1)}^{(2)}(9) = 5(F_{n+3}F_{n-1} - F_{n+1}F_{n-3}) = 5(F_{n+2}F_{n-1} + F_{n-2}F_{n+1}) = 5F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$$

istenilenler elde edilir. ■

$H_{L(n)}^{(2)}(9)$ sayısı için Binet benzeri bir formül Teorem 4.14'deki gibi elde edilir.

Teorem 4.14 $\alpha = 1 - \beta = (1 + \sqrt{5})/2$ olmak üzere $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered sayısının Binet Formülü

$$H_{L(n)}^{(2)}(9) = (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) \quad (4.30)$$

şeklindedir.

İspat: (4.27) eşitliğinde (1.10)'deki Binet formülünün bir uygulaması şeklinde direkt görülür. ■

Şimdi, $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin elemanlarında ardışık elemanlarından indisleri arasındaki farkı r olan iki sayının en büyük ortak böleni kullanılarak bir dizi tanımlayacağız.

Tanım 4.4 $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, n . altered Lucas sayısı olmak üzere

$$H_{L(n),r}^{(2)}(9) = (H_{L(n)}^{(2)}(9), H_{L(n+r)}^{(2)}(9)) \quad (4.31)$$

ile tanımlan ifadesi ortak bölenlerin en büyüğünü gösterirken; bu sayıların oluşturduğu $\{H_{L(n),r}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$ kümesine, r -ardışık altered Lucas ebob dizisi denir.

$\{H_{L(n),1}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$ dizisinin $n = 11$ değeri için örnekleri Tablo 4.11'de verilir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$H_{L(n)}^{(2)}(9)$	-5	10	0	25	40	130	315	850	2200	5785	15120	39610
$H_{L(n),1}^{(2)}(9)$	5	10	25	5	10	5	5	50	5	5	10	5

Tablo 4.11. $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları ve $H_{L(n),1}^{(2)}(9)$, 1 -ardışık altered Lucas ebob sayıları

Tablo 4.11'deki gözlemlere göre $\{H_{L(n),1}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$ dizisi artan yada azalan veya sabit bir dizi şeklide değildir. Acaba, bu dizinin belirli periyotlarda özel değerler aldığı düşünülürse aşağıdaki teorem ile bunu verebiliriz.

Teorem 4.15 $\{H_{L(n),1}^{(2)}(9)\}$, n . 1 -ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$H_{L(2k),1}^{(2)}(9) = (H_{L(2k)}^{(2)}(9), H_{L(2k+1)}^{(2)}(9)) = \begin{cases} 50, & k \equiv 11 \pmod{15} \\ 25, & k \equiv 1, 6 \pmod{15} \\ 10, & k \equiv 2, 5, 8, 14 \pmod{15} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$H_{L(2k+1),1}^{(2)}(9) = \left(H_{L(2k+1)}^{(2)}(9), H_{L(2k+2)}^{(2)}(9) \right) = \begin{cases} 50, & k \equiv 3 \pmod{15} \\ 25, & k \equiv 8, 13 \pmod{15} \\ 10, & k \equiv 0, 6, 9, 12 \pmod{15} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.33)$$

dir.

İspat: (4.25) ve (4.26) denklemlerine göre

$$H_{L(2k),1}^{(2)}(9) = \left(H_{L(2k)}^{(2)}(9), H_{L(2k+1)}^{(2)}(9) \right) = 5(F_{2k+2}F_{2k-2}, F_{2k+3}F_{2k-1})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+2}, F_{2k+3}) = (F_{2k-2}, F_{2k-1}) = 1$ 'e göre

$$H_{L(2k),1}^{(2)}(9) = 5(F_{2k-2}, F_{2k+3})(F_{2k+2}, F_{2k-1})$$

olur. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ ve $(m, n) = (m, n-m)$ özellikleri kullanılırsa;

$$(F_{2k-2}, F_{2k+3}) = F_{(2k-2, 2k+3)} = F_{(2k-2, 2k+3-2k+2)} = F_{(2k-2, 5)} = F_5, \quad 2k-2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = F_{(2k+2, 2k-1)} = F_{(2k+2-2k+1, 2k-1)} = F_{(3, 2k-1)} = F_3, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

düşünülürse $(F_{2k-2}, F_{2k+3}) = 5$, $k \equiv 1 \pmod{5}$ ve $(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = 2$, $k \equiv 2 \pmod{3}$ elde

edilir ki; Çin kalan Teoremine göre düzenlenirse

$$H_{L(2k),1}^{(2)}(9) = 5(F_{2k-2}, F_{2k+3})(F_{2k+2}, F_{2k-1}) = \begin{cases} 50, & k \equiv 11 \pmod{15} \\ 25, & k \equiv 1, 6 \pmod{15} \\ 10, & k \equiv 2, 5, 8, 14 \pmod{15} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğu görülür.

(4.25) ve (4.26) denklemlerine göre

$$H_{L(2k+1),1}^{(2)}(9) = \left(H_{L(2k+1)}^{(2)}(9), H_{L(2k+2)}^{(2)}(9) \right) = 5(F_{2k+3}F_{2k-1}, F_{2k+4}F_{2k})$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+3}, F_{2k+4}) = (F_{2k-1}, F_{2k}) = 1$ 'e göre

$$H_{L(2k+1),1}^{(2)}(9) = 5(F_{2k+3}, F_{2k})(F_{2k-1}, F_{2k+4})$$

olur. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ ve $(m, n) = (m, n-m)$ özellikleri kullanılırsa;

$$(F_{2k}, F_{2k+3}) = F_{(2k, 2k+3)} = F_{(2k, 2k+3-2k)} = F_{(2k, 3)} = F_3, \quad 2k \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = F_{(2k+4, 2k-1)} = F_{(2k+4-2k+1, 2k-1)} = F_{(5, 2k-1)} = F_5, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{5}$$

düşünülürse $(F_{2k}, F_{2k+3}) = 2$, $k \equiv 0 \pmod{3}$ ve $(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = 5$, $k \equiv 3 \pmod{5}$ elde

edilir ki; Çin kalan Teoremine göre düzenlenirse

$$H_{L(2k+1),1}^{(2)}(9) = 5(F_{2k}, F_{2k+3})(F_{2k+4}, F_{2k-1}) = \begin{cases} 50, & k \equiv 3 \pmod{15} \\ 25, & k \equiv 8, 13 \pmod{15} \\ 10, & k \equiv 0, 6, 9, 12 \pmod{15} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.15’de $n = 2k$ ve $n = 2k + 1$ olarak elde edilen eşitlikler $H_{L(n),1}^{(2)}(9)$ sayıları adına genelleştirilerek Teorem 4.15 ile verilmiştir.

Teorem 4.16 $\{H_{L(n),1}^{(2)}\}_{n \geq 0}$, 1-ardışık kare altered Lucas *EBOB* dizisinin n ’inci sayısı

$$H_{L(n),1}^{(2)}(9) = (H_{L(n)}^{(2)}(9), H_{L(n+1)}^{(2)}(9)) = \begin{cases} 50, & n \equiv 7 \pmod{15} \\ 25, & k \equiv 2, 12 \pmod{15} \\ 10, & k \equiv 1, 4, 10, 13 \pmod{15} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.34)$$

verilir.

İspat: (4.32) ve (4.33) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } H_{L(2k),1}^{(2)}(9) = 50, \quad 2k \equiv 22 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 7 \pmod{15}, \quad H_{n,1}^{(2)}(9) = 50,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } H_{L(2k+1),1}^{(2)}(9) = 50, \quad 2k + 1 \equiv 7 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 7 \pmod{15}, \quad H_{L(n),1}^{(2)}(9) = 50$$

diğerlerini düşünürsek

$$n = 2k \text{ için } 2k \equiv 2, 12 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 2, 12 \pmod{15}, \quad H_{L(n),1}^{(2)}(9) = 25,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } 2k + 1 \equiv 17, 27 \pmod{15} \Rightarrow n \equiv 2, 12 \pmod{15}, \quad H_{L(n),1}^{(2)}(9) = 25$$

elde edilir ki benzer işlemler ile istenilen bulunabilir. ■

$\{H_{L(n),2}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}^{11}$ 2-ardışık altered Lucas ebob dizisi terimlerini örnekleyelim.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$H_{L(n)}^{(2)}(9)$	-5	10	0	25	40	130	315	850	2200	5785	15120	39610
$H_{L(n),2}^{(2)}(9)$	5	5	40	5	5	10	5	5	40	5	5	10

Tablo 4.12. $H_{L(n)}^{(2)}(9)$, altered Lucas sayıları ve $H_{L(n),2}^{(2)}(9)$, 2-ardışık altered Lucas ebob sayıları

Tablo 4.12 'deki gözlemlere göre $\{H_{L(n),2}^{(2)}(9)\}_{n \geq 0}$ dizisi artan yada azalan veya sabit bir dizi şeklide değildir. Fakat, periyodik bir dizi şeklinde gibi görülmektedir.

Teorem 4.17 $H_{L(n),2}^{(2)}(9)$, n . 2-ardışık altered Lucas ebob sayısı için

$$H_{L(2k),2}^{(2)}(9) = \left(H_{L(2k)}^{(2)}(9), H_{L(2k+2)}^{(2)}(9) \right) = \begin{cases} 40, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases}, \quad (4.35)$$

$$H_{L(2k+1),2}^{(2)}(9) = \left(H_{L(2k+1)}^{(2)}(9), H_{L(2k+3)}^{(2)}(9) \right) = \begin{cases} 10, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.36)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (4.25) denklemine göre

$$H_{L(2k),2}^{(2)}(9) = \left(L_{2k}^2 - 9, L_{2k+2}^2 - 9 \right) = 5 \left(F_{2k+2} F_{2k-2}, F_{2k+4} F_{2k} \right)$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+2}, F_{2k}) = (F_{2k+2}, F_{2k+4}) = (F_{2k-2}, F_{2k}) = 1$ olduğundan

$$H_{L(2k),2}^{(2)}(9) = 5 \left(F_{2k-2}, F_{2k+4} \right) = 5F_{(2k-2,2k+4)} = 5F_{2(k-1,3)} = 5F_6, \quad k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlendirilirse

$$H_{L(2k),2}^{(2)}(9) = \begin{cases} 5F_6, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 5F_2, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.26) denklemine göre

$$H_{L(2k+1),2}^{(2)}(9) = \left(L_{2k+1}^2 + 9, L_{2k+3}^2 + 9 \right) = 5 \left(F_{2k+3} F_{2k-1}, F_{2k+5} F_{2k+1} \right)$$

yazılabilir ki, $(F_{2k+3}, F_{2k+5}) = (F_{2k+3}, F_{2k+1}) = (F_{2k-1}, F_{2k+1}) = 1$ 'e göre

$$H_{L(2k+1),2}^{(2)}(9) = 5 \left(F_{2k-1}, F_{2k+5} \right) = 5F_{(2k-1,2k+5)} = 5F_{(2k-1,6)} = 5F_3, \quad 2k-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

değerlendirilirse

$$H_{L(2k+1),2}^{(2)}(9) = \begin{cases} 5F_3, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 5F_1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.17'de $n = 2k$ ve $n = 2k + 1$ değerleri için ayrı ayrı verilen eşitlikler

$H_{L(n),2}^{(2)}(9)$ sayıları adına birleştirilerek verilmiştir.

Teorem 4.18 $H_{L(n),2}^{(2)}$, n . 2-ardışık altered Lucas ebob sayısı

$$H_{L(n),2}^{(2)}(9) = \left(H_{L(n)}^{(2)}(9), H_{L(n+2)}^{(2)}(9) \right) = \begin{cases} 40, & k \equiv 2 \pmod{6} \\ 10, & k \equiv 5 \pmod{6} \\ 5, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.37)$$

verilir.

İspat: (4.37) ve (4.36) denklemlerine göre

$$n = 2k \text{ için } H_{L(2k),2}^{(2)}(9) = 40, \quad 2k \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow n \equiv 2 \pmod{6}, \quad H_{L(n),2}^{(2)}(9) = 40,$$

$$n = 2k + 1 \text{ için } H_{L(2k+1),2}^{(2)}(9) = 10, \quad 2k + 1 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{6}, \quad H_{L(n),2}^{(2)}(9) = 10$$

elde edilir ki diğer durumlarda istenilen aşıkardır. ■

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas dizilerinin literatürdeki var olan özelliklerinden ilham alınarak n 'inci Fibonacci ve Lucas sayılarının ikinci kuvvetleri için bir $\{a\}$ tamsayı değeri kullanarak altered sayıları tanımlanmıştır. Kaynaklar kısmında yer alan notasyon ve gösterimler dikkate alınarak Fibonacci sayıları için sadece $a = \{\pm 1\}$ değerine göre çalışıldığından $G_n^{(2)}$ ve $H_n^{(2)}$ gösterimleri kullanılmıştır. Lucas sayıları için $a = \{\pm 1, \pm 9\}$ değerine göre çalışıldığından $G_{L(n)}^{(2)}(a)$ ve $H_{L(n)}^{(2)}(a)$ gösterimleri kullanılmıştır. Bu oluşturulan altered dizilerinin Fibonacci ve Lucas alt dizileriyle ilgili bağıntıları elde edilmiştir ki bu değerlerin çarpım şeklindeki alt diziler olduğu görülmüştür. Bu altered dizilere ait ardışık toplam ve fark değerleri ile Binet benzeri formülleri elde edilmiştir.

Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri dikkate alınarak, altered sayılarının bölünebilme özellikleri ve ardışık terimlere göre en büyük ortak bölen hesaplamalarının yapılmasıyla elde edilen Fibonacci ve Lucas alt dizileri veya periyodik dizi örnekleri verilmiştir.

Altered dizilerinin hesaplarında ve kontrollerinde Microsoft Excel programından yararlanılarak Ekler kısmı içerisinde;

- **Ek 1.** F_n^2 için verilen $\{G_n^{(2)}\}$ ve $\{H_n^{(2)}\}$ altered dizilerinin ve 1-ardışık ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri
- **Ek 2.** $\{G_n^{(2)}\}$ ve $\{H_n^{(2)}\}$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri
- **Ek 3.** L_n^2 için verilen $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ altered dizilerinin ve 1-ardışık $\{(G_{L(n)}^{(2)}, G_{L(n+1)}^{(2)})\}$ ve $\{(H_{L(n)}^{(2)}, H_{L(n+1)}^{(2)})\}$ ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri
- **Ek 4.** $\{G_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(1)\}$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

- **Ek 5.** L_n^2 için verilen $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ altered dizilerinin ve 1-ardışık $\{(G_{L(n)}^{(2)}, G_{L(n+1)}^{(2)})\}$ ve $\{(H_{L(n)}^{(2)}, H_{L(n+1)}^{(2)})\}$ ebob dizilerinin ilk $n=0-30$ arasındaki terimleri
- **Ek 6.** $\{G_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(9)\}$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin ilk $n=0-30$ arasındaki terimleri alt kısımlarında verilmiştir.

3'üncü ve 4'üncü bölümlerde verilen n . Fibonacci ve Lucas sayılarının ikinci kuvvetinin altered dizileri için elde edilen özellikler birer araştırma makalesi olarak yayınlanma sürecine başlanmıştır.

5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında sayılar teorisinde önemli bir yere sahip tamsayı dizileri içindeki Fibonacci ve Lucas sayılarının kareleri üzerine bazı $\{\pm 1, \pm 9\}$ değerine göre kurulmuş olan altered sayılarından oluşturulan tam sayı dizilerinden ve r -ardışık terimlerinin en büyük ortak bölen dizileri konusunda tanımlamalar ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir ki bu özelliklere ek birçok denklem verilebilir. Örneğin, ebob özelliklerine en yakın bağlantı en küçük ortak kat sayıları verilebilir.

$\{\pm 1\}$ değerleri için tanımlanan $\{G_n^{(2)}\}$ ve $\{H_n^{(2)}\}$ altered Lucas dizilerine ek olarak seçilen değerler daha farklı sabit değerler için $\{G_n^{(2)}(a)\}$ ve $\{H_n^{(2)}(a)\}$, $a \in \mathbb{Z}$ yada indislere bağlı Fibonacci veya Lucas sayı değerleri kullanılabilir.

$a = \{\pm 1, \pm 9\}$ değerleri için tanımlanan $\{G_{L(n)}^{(2)}(a)\}$ ve $\{H_{L(n)}^{(2)}(a)\}$ altered Lucas dizilerine ek olarak seçilen değerler daha farklı sabit değerler yada indislere bağlı Fibonacci veya Lucas sayı değerleri kullanılabilir.

Pell, Pell-Lucas; Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas; Mersenne, Fermat sayıları (vb.) gibi farklı tamsayı dizileri hakkında benzeri çalışmalar yapılabilir.

Tam sayı dizileri ve matris teorideki literatürdeki yapılan çalışmalar göz önüne alındığında bu çalışmadaki altered dizilerin matris kuvvetleri, determinant ve permanent ile ilişkileri incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Berndt B. C. and Galway, W. F., 2000, *On the Brocard–Ramanujan Diophantine equation $n! \pm 1 = m^2$* , Ramanujan Journal. 4, no. 1, 41–42.
- Chen, K. W., 2011, *Greatest common divisors in shifted Fibonacci sequences*, J. Integer. Seq., 14, Article: 11, 4.7.
- Çallıalp F., 1999, *Sayılar teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Dabrowski, A., 2012, *On the Brocard–Ramanujan problem and generalizations*, Colloquium. Mathematicum. 126, no. 1, 105–110.
- Dudley, U. and Tucker B., 1971, *Greatest common divisors in altered Fibonacci sequences*, Fibonacci Quart., 9, 89–91.
- Hernandez S. and Luca F., 2003, *Common factors of shifted Fibonacci numbers*, Period. Math. Hungar., 47, 95–110.
- Jones, L., 2015, *Primefree shifted Lucas sequences*, Acta Arith. 170, no. 3, 287–298, DOI: 10.4064/aa170-3-5.
- Koshy T., 2001, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley and Sons Inc, NY.
- Koken, F., 2020, *The Gcd sequences of the Altered Lucas sequences*, Annales Mathematicae Silesianae 34, no. 2, 222–240. DOI: 10.2478/amsil-2020-0005.
- Koshy T., 2007, *Elementary number theory with applications*, 2nd ed. Academic Press, California.
- Marques, D., 2011, *The Fibonacci version of the Brocard–Ramanujan Diophantine equation*, Portugaliae. Mathematica, Vol 68, No. 2, 185–189.
- Marques, D., 2011, *The Fibonacci version of a variant of the Brocard–Ramanujan Diophantine equation*, Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol 56, Num. 2 219-224.
- Pongsriiam, P., 2017-a, *Fibonacci and Lucas numbers which are one away from their products*, Fibonacci Quarterly, Vol. 55, Num. 1.29–40.
- Pongsriiam, P., 2017-b, *Fibonacci and Lucas Numbers Associated with Brocard–Ramanujan Equation*, Commun. Korean Math. Soc. 32, No. 3, pp. 511–522
- Rahn A. and Kreh M., 2018, *Greatest Common Divisors of Shifted Fibonacci Sequences Revisited*, Journal of Integer Sequences, Vol. 21, Article 18,6.7.
- Robbins, N., 1981, *Fibonacci and Lucas numbers of the forms $w^2 - 1$, $w^3 \pm 1$* , Fibonacci Quart. 19, 4, 369–373.

Spilker, J., 2016, *The GCD of the Shifted Fibonacci Sequence*. In: Sander J., Steuding J., Steuding R. (eds) *From Arithmetic to Zeta-Functions*, Springer, pp. 473–483.

Szalay, L., 2012, *Diophantine equations with binary recurrences associated to the Brocard–Ramanujan problem*, *Port. Math.* 69, no. 3, 213–220.

EKLER

EK-1 F_n^2 için verilen $G_n^{(2)}$ ve $H_n^{(2)}$ altered dizilerinin ve l -ardışık $(G_n^{(2)}, G_{n+1}^{(2)})$ ve $(H_n^{(2)}, H_{n+1}^{(2)})$ ebob dizilerinin $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	F_n	F_n^2	$G_n^{(2)}$	$G_{n,l}^{(2)}$	$H_n^{(2)}$	$H_{n,l}^{(2)}$
0	0	0	1	1	-1	1
1	1	1	0	2	2	2
2	1	1	2	1	0	5
3	2	4	3	1	5	1
4	3	9	10	2	8	2
5	5	25	24	1	26	1
6	8	64	65	1	63	1
7	13	169	168	2	170	10
8	21	441	442	1	440	1
9	34	1156	1155	1	1157	1
10	55	3025	3026	2	3024	2
11	89	7921	7920	1	7922	1
12	144	20736	20737	1	20735	5
13	233	54289	54288	2	54290	2
14	377	142129	142130	1	142128	1
15	610	372100	372099	1	372101	1
16	987	974169	974170	2	974168	2
17	1597	2550409	2550408	1	2550410	5
18	2584	6677056	6677057	1	6677055	1
19	4181	17480761	17480760	2	17480762	2
20	6765	45765225	45765226	1	45765224	1
21	10946	119814916	119814915	1	119814917	1
22	17711	313679521	313679522	2	313679520	10
23	28657	821223649	821223648	1	821223650	1
24	46368	2149991424	2149991425	1	2149991423	1
25	75025	5628750625	5628750624	2	5628750626	2
26	121393	14736260449	14736260450	1	14736260448	1
27	196418	38580030724	38580030723	1	38580030725	5
28	317811	101003831721	101003831722	2	101003831720	2
29	514229	264431464441	264431464440	1	264431464442	1
30	832040	692290561600	692290561601	1	692290561599	1

EK-2 $G_n^{(2)}$ ve $H_n^{(2)}$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	$G_n^{(2)}$	$G_{n,2}^{(2)}$	$G_{n,3}^{(2)}$
0	1	1	1
1	0	3	10
2	2	2	2
3	3	3	1
4	10	5	2
5	24	24	2
6	65	13	5
7	168	21	2
8	442	34	2
9	1155	165	1
10	3026	89	2
11	7920	144	10
12	20737	233	1
13	54288	1131	2
14	142130	610	2
15	372099	987	1
16	974170	1597	10
17	2550408	7752	2
18	6677057	4181	1
19	17480760	6765	2
20	45765226	10946	2
21	119814915	53133	5
22	313679522	28657	2
23	821223648	46368	2
24	2149991425	75025	1
25	5628750624	364179	2
26	14736260450	196418	10
27	38580030723	317811	1
28	101003831722	514229	2
29	264431464440	2496120	2
30	692290561601	1346269	1

$H_n^{(2)}$	$H_{n,2}^{(2)}$	$H_{n,3}^{(2)}$
-1	1	2
2	1	26
0	8	1
5	1	2
8	1	2
26	2	1
63	1	2
170	1	2
440	8	13
1157	1	2
3024	1	2
7922	2	1
20735	1	2
54290	1	2
142128	8	1
372101	1	26
974168	1	2
2550410	2	1
6677055	1	2
17480762	1	2
45765224	8	1
119814917	1	2
313679520	1	26
821223650	2	1
2149991423	1	2
5628750626	1	2
14736260448	8	1
38580030725	1	2
101003831720	1	2
264431464442	2	13
692290561599	1	2

EK-3 L_n^2 için verilen $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ ve $H_{L(n)}^{(2)}(1)$ altered dizilerinin ve l -ardışık $(G_{L(n)}^{(2)}, G_{L(n+1)}^{(2)})$ ve $(H_{L(n)}^{(2)}, H_{L(n+1)}^{(2)})$ ebob dizilerinin $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	L_n	L_n^2	$G_{L(n)}^{(2)}(1)$	$G_{L(n),l}^{(2)}(1)$	$H_{L(n)}^{(2)}(1)$	$H_{L(n),l}^{(2)}(1)$
0	2	4	5	5	3	1
1	1	1	0	10	2	2
2	3	9	10	5	8	1
3	4	16	15	5	17	1
4	7	49	50	10	48	2
5	11	121	120	5	122	1
6	18	324	325	5	323	1
7	29	841	840	10	842	2
8	47	2209	2210	5	2208	1
9	76	5776	5775	5	5777	1
10	123	15129	15130	10	15128	2
11	199	39601	39600	5	39602	1
12	322	103684	103685	5	103683	1
13	521	271441	271440	10	271442	2
14	843	710649	710650	5	710648	1
15	1364	1860496	1860495	5	1860497	1
16	2207	4870849	4870850	10	4870848	2
17	3571	12752041	12752040	5	12752042	1
18	5778	33385284	33385285	5	33385283	1
19	9349	87403801	87403800	10	87403802	2
20	15127	228826129	228826130	5	228826128	1
21	24476	599074576	599074575	5	599074577	1
22	39603	1568397609	1568397610	10	1568397608	2
23	64079	4106118241	4106118240	5	4106118242	1
24	103682	10749957124	10749957125	5	10749957123	1
25	167761	28143753121	28143753120	10	28143753122	2
26	271443	73681302249	73681302250	5	73681302248	1
27	439204	192900153616	192900153615	5	192900153617	1
28	710647	505019158609	505019158610	10	505019158608	2
29	1149851	1322157322201	1322157322200	5	1322157322202	1
30	1860498	3461452808004	3461452808005	5	3461452808003	1

EK-4 $G_{L(n)}^{(2)}(1)$ ve $H_{L(n)}^{(2)}(1)$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	$G_{L(n)}^{(2)}(1)$	$G_{L(n),2}^{(2)}(1)$	$G_{L(n),3}^{(2)}(1)$	$H_{L(n)}^{(2)}(1)$	$H_{L(n),2}^{(2)}(1)$	$H_{L(n),3}^{(2)}(1)$
0	5	5	5	3	1	1
1	0	15	50	2	1	2
2	10	10	10	8	8	2
3	15	15	5	17	1	17
4	50	25	10	48	1	2
5	120	120	10	122	2	2
6	325	65	25	323	1	1
7	840	105	10	842	1	2
8	2210	170	10	2208	8	2
9	5775	825	5	5777	1	1
10	15130	445	10	15128	1	2
11	39600	720	50	39602	2	2
12	103685	1165	5	103683	1	17
13	271440	5655	10	271442	1	2
14	710650	3050	10	710648	8	2
15	1860495	4935	5	1860497	1	1
16	4870850	7985	50	4870848	1	2
17	12752040	38760	10	12752042	2	2
18	33385285	20905	5	33385283	1	1
19	87403800	33825	10	87403802	1	2
20	228826130	54730	10	228826128	8	2
21	599074575	265665	25	599074577	1	17
22	1568397610	143285	10	1568397608	1	2
23	4106118240	231840	10	4106118242	2	2
24	10749957125	375125	5	10749957123	1	1
25	28143753120	1820895	10	28143753122	1	2
26	73681302250	982090	50	73681302248	8	2
27	192900153615	1589055	5	192900153617	1	1
28	505019158610	2571145	10	505019158608	1	2
29	1322157322200	12480600	10	1322157322202	2	2
30	3461452808005	6731345	5	3461452808003	1	17

EK-5 L_n^2 için verilen $G_{L(n)}^{(2)}(9)$ ve $H_{L(n)}^{(2)}(9)$ altered dizilerinin ve l -ardışık $(G_{L(n)}^{(2)}, G_{L(n+1)}^{(2)})$ ve $(H_{L(n)}^{(2)}, H_{L(n+1)}^{(2)})$ ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	L_n	L_n^2	$G_{L(n)}^{(2)}(9)$	$G_{L(n),1}^{(2)}(9)$	$H_{L(n)}^{(2)}(9)$	$H_{L(n),1}^{(2)}(9)$
0	2	4	13	1	-5	5
1	1	1	-8	2	10	10
2	3	9	18	1	0	25
3	4	16	7	1	25	5
4	7	49	58	2	40	10
5	11	121	112	1	130	5
6	18	324	333	1	315	5
7	29	841	832	2	850	50
8	47	2209	2218	1	2200	5
9	76	5776	5767	1	5785	5
10	123	15129	15138	2	15120	10
11	199	39601	39592	1	39610	5
12	322	103684	103693	1	103675	25
13	521	271441	271432	2	271450	10
14	843	710649	710658	1	710640	5
15	1364	1860496	1860487	1	1860505	5
16	2207	4870849	4870858	2	4870840	10
17	3571	12752041	12752032	1	12752050	25
18	5778	33385284	33385293	1	33385275	5
19	9349	87403801	87403792	2	87403810	10
20	15127	228826129	228826138	1	228826120	5
21	24476	599074576	599074567	1	599074585	5
22	39603	1568397609	1568397618	2	1568397600	50
23	64079	4106118241	4106118232	1	4106118250	5
24	103682	10749957124	10749957133	1	10749957115	5
25	167761	28143753121	28143753112	2	28143753130	10
26	271443	73681302249	73681302258	1	73681302240	5
27	439204	192900153616	192900153607	1	192900153625	25
28	710647	505019158609	505019158618	2	505019158600	10
29	1149851	1322157322201	1322157322192	1	1322157322210	5
30	1860498	3461452808004	3461452808013	1	3461452807995	5

EK-6 $G_{L(n)}^{(2)}(9)$ ve $H_{L(n)}^{(2)}(9)$ altered dizilerinin ve 2-ardışık ve 3-ardışık ebob dizilerinin ilk $n = 0 - 30$ arasındaki terimleri

n	$G_{L(n)}^{(2)}(9)$	$G_{L(n),2}^{(2)}(9)$	$G_{L(n),3}^{(2)}(9)$	$H_{L(n)}^{(2)}(9)$	$H_{L(n),2}^{(2)}(9)$	$H_{L(n),3}^{(2)}(9)$
0	13	1	1	-5	5	5
1	-8	1	2	10	5	10
2	18	2	2	0	40	130
3	7	7	1	25	5	5
4	58	1	2	40	5	10
5	112	16	2	130	10	10
6	333	1	1	315	5	5
7	832	1	2	850	5	10
8	2218	2	2	2200	40	10
9	5767	1	1	5785	5	65
10	15138	1	2	15120	5	10
11	39592	56	2	39610	10	10
12	103693	1	1	103675	5	5
13	271432	1	2	271450	5	10
14	710658	2	2	710640	40	10
15	1860487	1	1	1860505	5	5
16	4870858	1	2	4870840	5	130
17	12752032	16	2	12752050	10	10
18	33385293	1	1	33385275	5	5
19	87403792	7	2	87403810	5	10
20	228826138	2	2	228826120	40	10
21	599074567	1	1	599074585	5	5
22	1568397618	1	2	1568397600	5	10
23	4106118232	8	2	4106118250	10	130
24	10749957133	1	1	10749957115	5	5
25	28143753112	1	2	28143753130	5	10
26	73681302258	2	2	73681302240	40	10
27	192900153607	7	1	192900153625	5	5
28	505019158618	1	2	505019158600	5	10
29	1322157322192	16	2	1322157322210	10	10
30	3461452808013	1	1	3461452807995	5	65

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : EMRE KANKAL
Uyruğu : T.C

Telefon
Faks
e-mail

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Kaman Anadolu Öğretmen Lisesi	2009
Üniversite	: Ahi Evran Üniversitesi /Eğitim Fak./İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
Yüksek Lisans	:	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014	Cacabey Sağlık Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
2015	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR