



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**GRAFLARDA SOMBOR İNDEKSİ ÜZERİNE  
BİR ÇALIŞMA**

**Şerife Nur SARIKAYA  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Eylül-2024  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Şerife Nur SARIKAYA tarafından hazırlanan “Graflarda Sombor İndeksi Üzerine Bir Çalışma” adlı tez çalışması 27/09/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

#### Danışman

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Yunus YUMAK

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ....../.../20.. gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şerife Nur SARIKAYA

Tarih:27.09.2024

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### GRAFLARDA MOSTAR İNDEKSİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Şerife Nur SARIKAYA

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2024, 34 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ  
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER  
Dr. Öğr. Üyesi Yunus YUMAK

Graf Teori, uygulamalı cebirin kullanımı çok geniş olan bir alanıdır. Günlük hayatta ve bilim dallarında birçok probleme çözüm olan bu teoriye son zamanlarda ilgi artmıştır. Topolojik indeksler ise çeşitliliği ve uygulama alanı oldukça fazla olan graf parametrelerindedir. Sombor indeksi yakın zamanda tanıtılmış olup birçok çalışması yapılmıştır. Tez toplamda 5 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teorisinin tanımı, kullanım alanları ve tarihçesi ardından temel kavramlar ve bazı özel graflar ele alınmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılan kaynakların araştırılması ve içerik bilgileri sunulmuştur.

Üçüncü bölümde Sombor indeksten bahsedilmiştir. Sombor İndeksi'nin grafların temel yapısal özellikleri üzerindeki etkileri incelenmiş ve çeşitli graf türleri üzerinde örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde birtakım cebirsel grafların tensör çarpımının Sombor indeksleri ele alınmıştır.

Beşinci bölümde sonuçlar ve öneriler kısmı yer almaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Graf, Graf Çarpımı, Sıfır-Bölen Graf, Sombor İndeks, Tensör Çarpımı

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**A STUDY ON THE SOMBOR INDEX IN GRAPS**

**Şerife Nur SARIKAYA**

**Necmettin Erbakan University Institute of Science and Technology  
Department of Mathematics**

**Advisor: Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ**

**2024, 34 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ**

**Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER**

**Asst. Prof. Dr. Yunus YUMAK**

Graph Theory is a very widely used field of applied algebra. This theory, which provides solutions to many problems in daily life and in scientific branches, has recently gained interest. Topological indices are among the graph parameters with a wide variety and application area. The Sombor index has been introduced recently and many studies have been conducted. The thesis consists of 5 main sections in total.

In the first section, the definition of graph theory, its areas of use and history are discussed, followed by basic concepts and some special graphs.

In the second section, the research and content information of the sources used in the thesis are presented.

In the third section, the Sombor index is mentioned. The effects of the Sombor Index on the basic structural properties of graphs are examined and examples are given on various types of graphs.

In the fourth section, the Sombor indices of the tensor product of some algebraic graphs are discussed.

In the fifth section, the results and suggestions section is included.

**Keywords:** Graph, Graph Multiplication, Zero-Divisor Graph, Sombor Index, Tensor Multiplication

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitim sürecinde bana yol gösteren, yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyen ve beni hiç yalnız bırakmayan canım anneme, babama ve ablama sonsuz teşekkür ediyorum.

Çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen meslektaşım Büşra Aydın'a teşekkürü bir borç bilirim.

Şerife Nur SARIKAYA  
KONYA-2024

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1. Graflar ve Özellikleri .....	2
1.2. Graf Çarpımları.....	7
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>9</b>
<b>3. SOMBOR İNDEKS</b> .....	<b>15</b>
<b>4. BİR CEBİRSEL GRAFIN TENSÖR ÇARPIMINDA TOPOLOJİK İNDEKSLER</b> .....	<b>25</b>
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>29</b>
5.1 Sonuçlar .....	31
5.2 Öneriler .....	31
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	<b>32</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$G(V,E)$	Graf
$K_n$	Tam graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
$T$	Ağaç graf
$S_n$	Yıldız graf
$C_n$	Çevre graf
$P_n$	Yol graf
$L_n$	Ladder graf
$T_{r,s}$	Larva graf
$W_n$	Tekerlek graf
$d(u,v)$	$u$ ve $v$ köşeleri arası uzaklık
$\text{Rad}(G)$	$G$ nin radiusu
$\text{Diam}(G)$	$G$ nin çapı
$\chi(G)$	Renklendirme sayısı
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\Gamma(R)$	Sıfır-bölen halka
$\sigma(G)$	Minimum derece
$G_1 \times G_2$	Tensör çarpım grafi
$G_1 * G_2$	Graf çarpımı

### Kısaltmalar

$M_1(G)$	$G$ grafının birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	$G$ grafının ikinci Zagreb indeksi
$\text{girth}(G)$	$G$ grafının girth i
$SO(G)$	Sombor indeksi

## 1. GİRİŞ

Graf teorisinin ortaya çıkışı ya da temelinin atılmaya başlandığı olay için genel fikir 1736 yılında İsviçreli Leonhard Euler tarafından çözüme ulaştırılmaya çalışılmış olan Königsberg Köprüsü problemidir.

Şehrin hikayesi 1736'da bir nehir kıyısında yer alan Prusya'da Königsberg adlı bir şehirde başlıyor. Bu problem şehirde yaşayan halk tarafından öne sürülmüştür.



Şekil 1. Königsberg Köprüsü

Königsberg, şehirlilerin dikkatini çeken Pregel ırmağı ve ırmağın oluşturduğu bir ada ve bir yarımadaı birbirine bağlayan 7 tane köprüden oluşmuştur. Königsberg köprüsü problemi, bir adanın çatallı bir nehre uzanan yedi tane köprünün her birinin üstünden, hiçbir köprüyü iki kez geçmeden başlangıç noktasına dönmenin mümkün olup olmadığı ile ilgili bir bilmeceydi. Leonhard Euler kafasını karıştıran bir soruyla karşılaştı:

*“Königsberg’deki tüm köprüleri hiçbirini birden fazla geçmeden gezmek mümkün mü?”*

İşte bu problem graf teorisinin çıkış noktası ve basit bir yürüyüş bilmece si neredeyse tüm bilim alanlarında kullanılan grafların temelidir. Matematiğin bu dallarında çığır açan ilerlemeler için araç görevi gördü. Graf teorisine ve uygulama alanlarına olan ilgi son yıllarda artış gösterdi. Bu artıştaki sebep günlük hayatta karşılaştığımız bir sürü soruna bu teori ile çözüm bulunulabilmesidir.

Örneğin bilgi teknolojisinde graflar, veri işleme ve hesaplama cihazlarında kullanılabilir. Graf veritabanları ile büyük veri gibi büyük miktardaki veriler sağlıklı bir şekilde saklanıp yönetilebilmektedir. Sosyal ağlar graflar kullanılarak tanımlanır ve bu ağlar üzerinde sosyolojik araştırmalar yapılır. Fizik ve kimyada graf teorisi aynı zamanda atomları ve molekülleri, aralarındaki bağları ve kimyasal bileşikleri temsil etmek için de

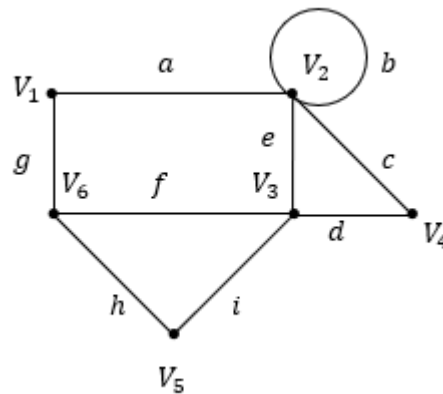
kullanılır. Biyolojide türlerin nerede bulunduğunu, nereye göç ettiklerini kaydetmek ve türler arasındaki bağlantıları ortaya çıkarmak için kullanılır. Graflar ve graf teorisi aynı zamanda matematik, geometri ve topolojide de kullanılır. Ağırlık kullanılan bazı graflar, GPS ve gezi planlamasının yanı sıra trafik akışının ve en uygun rotanın hesaplanması gibi görevler için de kullanılır.

### 1.1. Graflar ve Özellikleri

Bu bölümdeki grafların temel tanımları “*Handbook of Graph Theory*” adlı kitaptan alınmıştır (Gross ve Yellen, 2004).

**Tanım 1.1.1.**  $V$ , elemanları köşeleri oluşturan  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ’lerden oluşan boştan farklı küme ve  $E$ , ayrıt(kenar) olarak isimlendirilen  $V$  kümesinin elemanlarından oluşan sıralı olmayan ikililerden oluşan bir küme olsun. Köşe olarak boş olmayan bir  $V$  kümesinden ve ayrıt olarak  $E$  kümesinden oluşan diagrafa **graf** denir.  $G = (V, E)$  ile gösterilir.  $G$  grafının,  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  köşeler kümesinin eleman sayısına  $G$  nin mertebesi denir ve  $n(G)$  ile gösterilir. Diğer taraftan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  kenar kümesinin eleman sayısına boyut denir ve  $m(G)$  ile gösterilir.

Aşağıdaki şekilde köşe kümesi  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ ,  $n(G) = 6$  ve ayrıt kümesi  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ ,  $m(G) = 9$  olan bir graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.1. Graf Örneği

**Tanım 1.1.2.** Bir grafta köşeler arasında tam bir kenar var ise basit komşuluk (simple adjacency) olarak tanımlanır.

**Tanım 1.1.3.** Herhangi iki nokta arasında en çok bir kenar bulunduran ve ilmek içermeyen grafa **basit graf** denir.

**Tanım 1.1.4.** Bir  $G$  grafında  $u$  köşesini kabul eden kenar sayısına  $u$  köşesinin **derecesi** (degree) denir ve  $d(u)$  ile ifade edilir.

**Tanım 1.1.5.** Bağlantılı bir  $G$  grafının köşeleri arasında bulunan en büyük dış merkezlik **grafın çapı** (diameter) olarak adlandırılır.

$$diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 1.1.6.** Bağlantılı bir  $G$  grafın köşeleri arasında bulunan en küçük dış merkezlik değeri **grafın yarıçapı** (radius) olarak isimlendirilir ve

$$rad(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}$$

ile ifade edilir.

**Teorem 1.1.7.** (Ostrand, 1973) Bağlantılı  $G$  grafi için grafın uzaklığı grafın sadece yarıçapına bağlı olarak sınırlandırılabilir.  $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$  eşitsizliği sağlanır.

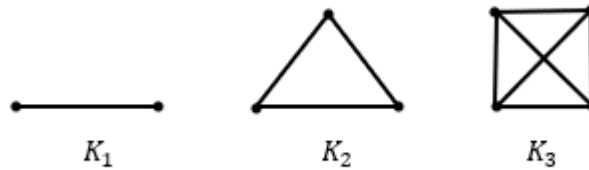
**Tanım 1.1.8.** Bir  $G$  grafının en az dereceye sahip köşesi ve en çok dereceye sahip köşesi sırası ile minimum ve maksimum dereceli köşe olarak adlandırılır. Ayrıca en küçük dereceye sahip köşenin derece sayısına **grafın minimum derecesi**  $\sigma(G)$  ile ifade edilir. Benzer şekilde maksimum dereceli köşenin derecesinin sayısına grafın maksimum derecesi denir ve  $\Delta(G)$  ile ifade edilir.

**Tanım 1.1.9.**  $G_1$  ve  $G_2$  iki graf olsun. Eğer bir  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  fonksiyonu birebir, örten ve her  $u, v \in V(G_1)$  için  $uv \in E(G_1)$  olması için gerek ve yeter şart  $f(u)f(v) \in E(G_2)$  olması koşuluyla sağlıyorsa  $f$  dönüşümü  $G_1$  ve  $G_2$  grafları arasında bir graf izomorfizması denir. Ayrıca, herhangi iki graf arasında en az bir graf izomorfizması tanımlı ise graflar izomorf graflar olarak adlandırılır ve  $G_1 \cong G_2$  ile ifade edilir.

Graflar ile verilen yukarıdaki bazı sonuçlar tüm bağlantılı graflarda olup kullanımları oldukça fazladır.

Şimdi özel grafların bazılarının tanımlarını verelim.

**Tanım 1.1.10.** Bir grafta bulunan her köşe çifti birbirine komşu oluyorsa bu grafa **tam graf** denir.  $n$  köşeli tam graf  $K_n$  ile ifade edilmektedir.  $n$  köşeye sahip tam grafın kenar sayısı  $\frac{n(n+1)}{2}$  ile bulunur. Köşe derecesi ise  $(n - 1)$  ile bulunmaktadır.



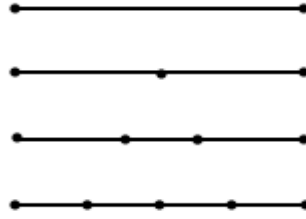
Şekil 1.2. Tam Graf Örneği

**Tanım 1.1.11.** Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan ve tüm tepelerinin derecesi 2 olan grafa **devir graf** veya **çevre graf** denir. Özel olarak,  $n$  tepeli çevre grafı  $n$  ayrıta sahiptir.  $C_n$  ile gösterilir.



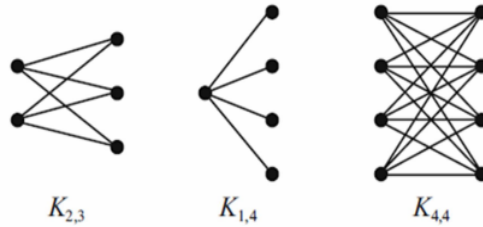
Şekil 1.3. Çevre Graf Örneği

**Tanım 1.1.13.** Uç tepelerinin derecesi 1 olup iç tepelerinin dereceleri ise 2 olan grafa **yol(path) graf** denir.  $n$  tepeli bir yol graf  $n-1$  ayrıta sahiptir. Yol graf  $P_n$  ile gösterilmektedir.



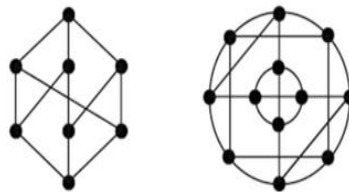
Şekil 1.4. Yol Graf Örneği

**Tanım 1.1.14.** Bir grafin düğümleri  $V_1$  ve  $V_2$  şeklinde iki ayrık ve birbirinden bağımsız küme olsun. Eğer kenarları  $V_1$  deki köşelerle  $V_2$  deki köşelerin birleşimiyle oluşuyorsa, bu grafa **iki parçalı graf** denir.  $V_1$  ve  $V_2$  deki tüm köşeler karşılıklı birbirleriyle birleştirilmiş ise bu graflara **iki parçalı tam graf** denir.  $|V_1| = m$  ve  $|V_2| = n$  olan iki parçalı tam graf  $K_{m,n}$  ile gösterilir.



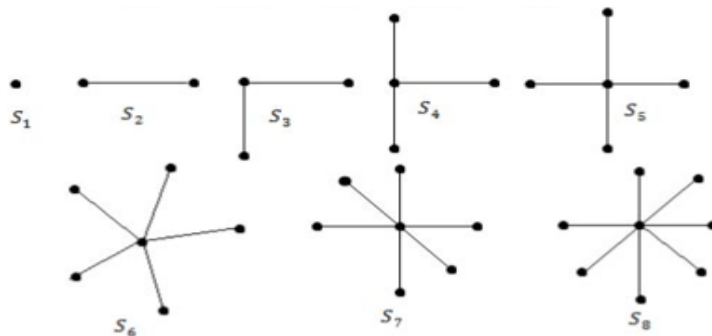
Şekil 1.5. İki Parçalı Tam Graf Örneği

**Tanım 1.1.15.** Bir grafta tüm köşeler aynı dereceye sahipse bu tür graflara **düzgün graf** denir. Grafin tüm köşelerinin derecesi  $r$  ise bu grafa  **$r$ -düzgün graf** denir.  $n$  köşeli bir tam graf için tüm köşelerin derecesi  $n-1$  olduğundan dolayı  $n-1$  dereceli düzgün graftır.



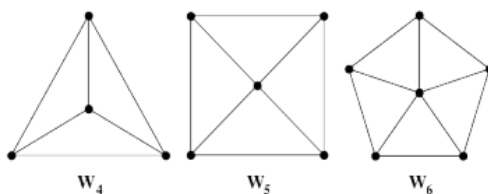
Şekil 1.6. Düzgün Graf Örneği

**Tanım 1.1.16.**  $n$  tepeli bir  $G$  grafının, bir tepesi  $n-1$  dereceli diğer tepeleri 1 dereceli ise bu grafa **yıldız(star) graf** denir. Yıldız graflar tam iki parçalı graf olarak da adlandırılırlar. İki parçalı graflarda özel olarak  $n=1$  alınırsa oluşan  $K_{1,n-1}$  grafı bir yıldız graftır ve  $S_n$  ile gösterilir.



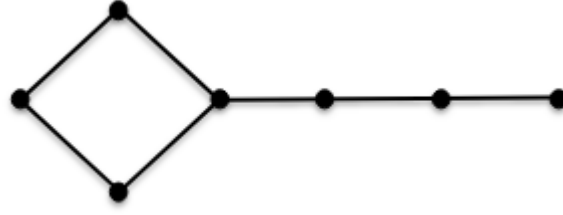
Şekil 1.8. Yıldız Graf Örneği

**Tanım 1.1.17.**  $n$  tepeli bir çevre grafının, her bir tepesinin bir noktadan ayrıt eklenmesiyle oluşan grafa **tekerlek(whell) graf** denir ve  $W_n$  ile gösterilir.



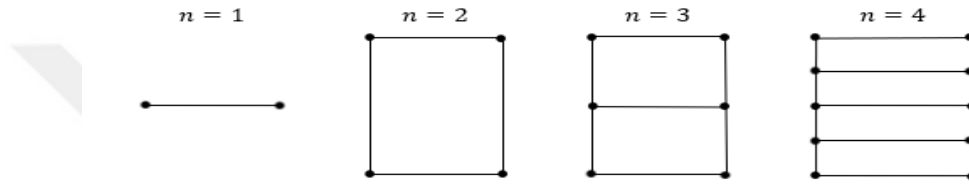
Şekil 1.9. Tekerek Graf Örneği

**Tanım 1.1.18.**  $G$  grafının köşe kümesi  $A$  ve  $B$  gibi iki alt köşe kümesine ayrılabilirse ve  $A$  kümesindeki köşeler bir devir oluşturup,  $B$  kümesindeki köşeler bir patika oluşturuyorsa ve bu devrin bir köşesi ile patikanın bir uç köşesi ortak ise bu grafa **larva(tapdole) graf** denir. Devir kısmındaki köşe sayısı  $r$ , patika kısmındaki köşe sayısı  $s$  olan larva graf  $T_{r,s}$  ile gösterilir.



Şekil 1.10. Larva Graf Örneği

**Tanım 1.1.19.** Mertebesi  $2n$  ve boyutu  $3n-2$  olan düzlemsel ve yönsüz grafa **Ladder graf** denir ve  $L_n$  şeklinde gösterilir.



Şekil 1.11. Ladder Graf Örneği

## 1.2 Graf Çarpımları

Çarpım grafi kimya gibi birçok farklı alanda çeşitli uygulamaları vardır.

Daha sonra aşağıda genel graf çarpım tanımı verilmiştir. Buradaki tanımlar Imrich ve Klavzar'ın Product Graphs: Structure and Recognition (Imrich ve Klavzar, 2000) adlı kitabından alınmıştır.

**Tanım 1.2.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf olsun. Köşeleri  $V(G) \times V(H)$  kartezyen kümesinden oluşan ve kenarları bir nizama bağlı olarak ortaya koyulan grafa  $G$  ve  $H$  **graflarının çarpımı** denir. Graf çarpımı  $G * H$  ile ifade edilir.

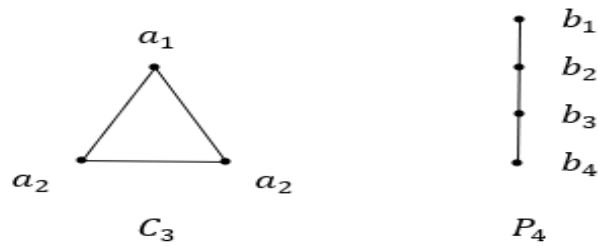
Özel olarak bir çok graf çarpımı yapılmıştır. Grafların köşe kümeleri üzerinde çeşitli kurallar ile çok farklı ve çeşitli graf çarpımları tanımlanmıştır. Bundan bazıları; Tensör, Kartezyen, Ko-normal, homomorfik, modüler çarpımdır. Biz özellikle graf çarpımlarından Tensör çarpım üzerinde çalışacağımız için iki grafın tensör çarpım grafinin tanımını verelim.

**Tanım 1.2.2.**  $G$  grafinin köşe kümesi  $V_1$ ,  $H$  grafinin köşe kümesi  $V_2$  olmak üzere  $V = V_1 \times V_2$  kartezyen kümesinden  $u = (u_1, u_2)$  ile  $v = (v_1, v_2)$  elemanlarını ele alalım.

$$(u_1, v_1) \in E(G) \text{ ve } (u_2, v_2) \in E(H)$$

şartını sağlıyorsa  $u$  ile  $v$  köşeleri komşudur. Oluşan bu grafa  $G$  ile  $H$  **grafının tensör çarpım grafi** denir ve  $G \times H$  ile gösterilir.

**Örnek 1.2.3.**  $C_3$  ve  $P_4$  graflarının tensör çarpımı aşağıdaki gibidir.



**Şekil 1.2.1.**  $C_3$  ve  $P_4$  Grafları ile Tensör Çarpımları

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde öncelikle graf teori ve graf çarpımları ile ilgili kaynaklar verilecektir. Ardından sıfır-bölen graflar ve topolojik indeksler ile ilgili kaynaklar incelenecektir.

### 2.1. Graf Teori ve Graf Çarpımları İle İlgili Kaynak Araştırması

Euler (1953), "*Leonard Euler and the Königsberg bridges*" isimli çalışmada Graf Teorisi Matematik biliminin yeni bir alanı olarak ortaya çıkararak problem yayınlanmıştır.

Frucht ve Harary (1970), "*On the corona of two graphs*" isimli kitap bölümünde iki grafın korona çarpımının iki grubun taç (wreath) çarpımına genel olarak izomorf olduğu gösterilmiştir.

Harary (1994), "*Graph Theory*" isimli çalışmada temel graf teori tanımları ile graf çarpımlarından lexicographic çarpım grafi tanımı verilmiştir. Ayrıca unicyclic graf tanımı verilmiştir.

Klavzar (2000), "*Product Graphs: Structure and Recognition*" isimli çalışmada çarpım graflarının yapısı, köşe ve kenar kümeleri üzerinde geçerli olan eşitlik ve eşitsizlikler verilmiştir.

Gross ve Yellen (2004), "*Handbook of Graph Theory*" isimli çalışmada graf teorisinin en temel ve önemli bilgileri verilmiştir.

Bondy ve Murty (2008), "*Graph Theory*" isimli çalışmada graf teorisinin temel tanımları detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Doslic (2008), "*Vertex-weighted Wiener polynomials for composite graphs*" isimli çalışmada köşe ağırlıklı Wiener polinomları için bileşik graf sınıflarının formülleri verilmiştir.

Mukwembi (2012), “*A note on diameter and the degree sequence of a graph*” isimli çalışmada bağlantılı bir grafın uzaklığı ve derece dizisi üzerinde daha önce çalışılan başka makalelere ek olarak çalışılmıştır.

Basavanagoud ve Patil (2016), “*A note on hyper-Zagreb index of graph operations*” isimli çalışmada corona, kartezyen ve bileşim (composition) graf çarpımlarının hyper-Zagreb indeksleri hesaplanmıştır.

Mijalkov (2018), “*Graph theory to study complex networks in the brain*” isimli tez çalışmasında beyin ağları graf teori ile ifade edilerek çalışılmıştır.

Akgüneş ve Çağan (2018), “*On the dot product graphs over monogenic semigroups*” isimli çalışmada monojenik yarıgrupların kartezyen çarpımı üzerinde tanımlanan nokta çarpım graflarının graf parametreleri incelenmiştir.

Aydın vd. (2020), “*On the Wiener index of the dot product graph over monogenic semigroups*” isimli çalışmada monojenik yarıgruplar üzerinde tanımlanan nokta çarpım grafının Wiener indeksinin sonuçları elde edilmiştir.

Akgüneş vd. (2021), “*Line Graphs of Monogenic Semigroup Graphs*” isimli çalışmada monojenik yarıgrupların line graflarının üzerinde graf parametreleri incelenmiştir.

## **2.2 Sıfır-Bölen Graflar ve Topolojik İndeksler İle İlgili Kaynak Araştırması**

Wiener (1947), “*Structural Determination of Paraffin Boiling Points*” isimli çalışmada topolojik indeks kavramı ortaya çıkmıştır. Parafinlerin kaynama noktası üzerinde çalışılırken bulunan bu topolojik indeks önce yol numarası daha sonra Wiener indeks olarak adlandırılmıştır.

Gutman ve Trinajstic (1972), “*Graph theory and molecular orbitals. Total  $\pi$ -electron energy of alternant hydrocarbons*” isimli çalışmada moleküler yapının toplam  $\pi$ -elektron enerjisinin bağıllığını incelerken yeni bir derece bazlı topolojik indeks olan Zagreb indeksi tanımlanmıştır.

Randic (1993), “*Novel Molecular Descriptor for Structure-Property Studies*” isimli çalışmada hyper-Wiener indeks tanıtılmış ve yalnızca ağaç graflara uygulaması yapılmıştır.

Nikolic ve Trinajstic (1995), “*The Wiener index: Development and Applications*” isimli çalışmada Wiener indeksin QSPR’da uygulaması bulunan bir topolojik indeks olduğu ve diğer topolojik indeksler ile olan karşılaştırılmaları verilmiştir.

Klein vd. (1995), “*On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures*” isimli çalışmada Randic’in tanımladığı hyper-Wiener indeks tekrar tanımlanarak tüm bağlantılı graflara uygulaması verilmiştir.

Beck (1988), “*Coloring of Commutative Ring*” isimli çalışmada halkaların sıfır-bölen graflarının tanımları bulunmuş ve grafin renklendirilmesinde çalışılmıştır.

Devillers ve Balaban (1999), “*Topological indices and related descriptors in QSAR and QSPR*” isimli çalışmada sayısal yapı ilişki modellerinde topolojik indekslerin çok sayıda uygulaması verilmiştir.

Anderson ve Livingston (1999), “*The Zero-divisor Graph of Commutative Ring*” isimli çalışmasında değişmeli halkaların sıfır-bölen grafları ile ilgili birden fazla sonuç elde etmiştir.

Akgüneş ve Togan (2012), “*Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings*” isimli çalışmada özel bir değişmeli halkanın sıfır bölen grafinin graf özellikleri elde edilmiştir.

Das vd. (2013), “*On the Harary index of graph operations*” isimli çalışmada Harary indeksi bazı graf operatörleri üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca Harary indeksinin türevleri bulunmuştur.

Akgüneş ve Çevik (2013), “*A new bound of radius with irregularity index*” isimli çalışmada graf parametrelerinden olan düzensizlik indeksinin yeni ve net bir sınırı bulunmuştur.

Das vd. (2013), “*On a graph of monogenic semigroups*” isimli çalışmada monojenik yarıgruplar üzerinde sıfır bölen grafi tanımlanmıştır.

Das vd. (2013), “*Some properties on the lexicographic product of graphs obtained by monogenic semigroups*” isimli çalışmada monojenik yarıgrupların sıfır bölen graflarının lexicographic çarpım grafları üzerinde bazı graf parametreleri incelenmiştir.

Akgüneş vd. (2014), “*Topological indices on a graph of monogenic semigroups*” isimli çalışmada monojenik yarıgrupların sıfır bölen graflarının köşe derece bazlı bazı topolojik indeksleri incelenmiştir.

De vd. (2016), “*The F-coindex of some graph operations*” isimli çalışmada yeni bir eşindeks olan F-eşindeksi tanımlanmıştır. Ayrıca F-eşindeksinin graf operatörlerinde davranışları incelenerek özellikleri elde edilmiştir.

Akgüneş ve Nacaroğlu (2018), “*On the Sigma index of the monogenic semigroup graphs*” isimli çalışmada monojenik yarıgruplar üzerinde tanımlanan sıfır bölen grafinin Sigma indeksi çalışılmıştır.

Akgüneş ve Nacaroğlu (2019), “*On the sigma index of the corona products of monogenic semigroup graphs*” isimli çalışmada daha önce tanımlanan bir grafin üzerinde topolojik indekslerden sigma indeksi incelenmiştir.

Cruz ve Rada (2019), “*The path and the star as extremal values of vertex-degree-based topological indices among trees*” isimli çalışmada ağaç grafların topolojik

indekslerinin bir sunumu bulunmuş ve bu sunumun bir fonksiyonu elde edilmiştir. Uygulama olarak köşe-derece bazlı üstel topolojik indekslerin uç ağaç grafları verilmiştir.

Aykaç vd. (2019), “*Analysis of Zagreb indices over zero-divisor graphs of commutative rings*” isimli çalışmada özel bir değişmeli halkanın sıfır bölen grafinin üzerinde Zagreb indeksler çalışılmıştır.

Loksha vd. (2020), “*New results on the F-index of graphs based on corona-type products of graphs*” isimli çalışmada Corona tip graf çarpımlarına topolojik indekslerden unutulmuş indeks ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Gutman (2021), “*Geometric Approach to Degree-Based Topological Indices: Sombor Indices*” isimli çalışmada yeni bir köşe-derece bazlı topolojik indeks Sombor indeksi tanıtılmıştır. Ayrıca Sombor indeksinin temel özellikleri elde edilmiştir.

Cruz vd. (2021), “*Sombor Index of Chemical Graphs*” isimli çalışmada Sombor indeksinin kimyasal graflar üzerinde uç grafları çalışılmıştır.

Das vd. (2021), “*On Sombor index*” isimli çalışmada grafların Sombor indeksinin bazı graf parametrelerine bağlı olan sınırları elde edilmiştir.

Flipovski (2021), “*Relations between Sombor index and some degree-based topological indices*” isimli çalışmada Sombor indeksinin Zagreb, Randik ve unutulmuş indeks ile aralarındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Ayrıca çevrim içermeyen graf sınıflarında da benzer ilişkiler elde edilmiştir.

Kulli (2021), “ *$\delta$  –Sombor index and its exponential for certain nanotubes*” isimli çalışmada Sombor indeksinin bir çeşidi tanımlanarak bazı moleküler graflar üzerinde uygulaması yapılmıştır.

Aguilar-Sanchez vd. (2021), “*Normalized Sombor indices as complexity measures of random networks*” isimli çalışmada Sombor indeksi üç farklı ağa uygulanmıştır. Ayrıca ortalama Sombor indeksinin uygulamasına da yer verilmiştir.

Mendez-Bermudez vd. (2021), “*Mean Sombor index*” isimli çalışmada Sombor indeksinin bir kuvveti olarak ortalama Sombor indeksi tanımlanmıştır. Ayrıca bu kuvvetin birçok değeri düşünülerek ortalama sombor indeksinin diğer topolojik indekslerle olan ilişkisi ortaya konmuştur.

Milovanovic vd. (2021), “*On some mathematical properties of Sombor indices*” isimli çalışmada Sombor indeksi, indirgenmiş Sombor indeksi ve ortalama Sombor indeksinin sınırları elde edilmiştir. Ayrıca diğer köşe-derece bazlı topolojik indekslerle ilişkisi ortaya konmuştur.

Rada vd. (2021), “*General properties on Sombor indices*” isimli çalışmada daha önce tanımlanan çeşitli Sombor indekslerinin yeni sınırları elde edilmiştir. Özel olarak Sombor indeksi ve indirgenmiş Sombor indeksleri arasında eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerin hangi graflarda eşitliğe dönüşeceği bulunmuştur. Yine bahsedilen Sombor indekslerinin topolojik indeksler ile ilgili olan ilişkileri de incelenmiştir.

Ünal Oğuz (2021), “*An application of Sombor index over a special class of semigroup graph*” isimli çalışmada yarı grupların özel bir sınıfı üzerinde topolojik indekslerden Sombor indeksi çalışılmıştır.

Horoldagva ve Xu (2023), “*On Sombor index of Graphs*” isimli çalışmada bağlantılı bir grafın Sombor indeksinin net sınırları bulunmuştur.

### 3. SOMBOR İNDEKSİ

Topolojik indeksler, başta kimyasal graflar olmak üzere birçok uygulamaya sahip olan sabit sayılardır. Moleküler graf aracılığıyla elde edilen moleküler bir yapının sayısal tanımlayıcılarıdır. Topolojik indeksler yapı-özellik ilişkisinde(QSPR), yapı-aktivite ilişkilerinde(OSAR) ve nanoteknolojide kullanılır. Farmakolojide yapısal tasarım moleküllerini incelemek için kullanılır. Ayrıca kaynama noktası, buharlaşma entalpisi, stabilite vb. gibi belirli fizikokimyasal özellikleri tahmin etmemizi sağlar. QSPR araştırmasında, moleküler yapıları moleküler graflara dönüştürürken elde edilen graf tanımlayıcıları olan topolojik indekslerin geliştirilmesi çok kritik bir adımdır. Topolojik indekslerin genellikle moleküler grafların yeniden oluşturulmasına izin vermediğini de belirtmek gerekir. Topolojik indeksler, grafla iyi temsil edilebilen geniş nesne ve yapı sınıflarını araştırmak için çok yönlü araçlardır.

#### 3.1 Sombor İndeksi

Sombor indeksi köşe-derece bazlı topolojik indeksin alternatif bir yorumu olarak Gutman tarafından oldukça yakın zamanda tanıtıldı (Gutman, 2021). Kısa zamanda da Sombor indeksi topolojik indeksler içinde popüler bir hale gelmiştir.

Bu bölümde öncelikle Sombor indeksinin tanımı verilecek ardından tanımının uygulamasının daha anlaşılır olması için Sombor indeksinin özel graflardaki değerleri verilecektir. Yakın zamanda tanımlanmış olmasına rağmen yapılan birçok çalışmadaki Sombor indeksi ile ilgili sonuçlara değinilecektir. Bu sonuçlar grafların Sombor indeksinin grafların parametrelerine bağlı olan sınırları ile Sombor indeksinin diğer topolojik indeksler ile olan ilişkisini içermektedir.

**Tanım 3.1.1.** (Gutman, 2021)  $G$  bir graf,  $deg(u)$  ve  $deg(v)$  bu grafın komşu olan  $u$  ve  $v$  köşelerinin dereceleri olmak üzere  $G$  grafının Sombor indeksi

$$SO(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \sqrt{deg(u)^2 + deg(v)^2}$$

dir.

Burada  $deg(u)$  ve  $deg(v)$   $G$  grafının komşu olan  $u$  ve  $v$  köşelerinin dereceleridir.

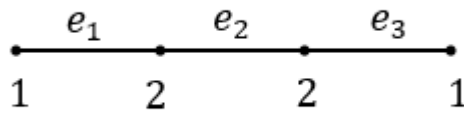
Sombor indeksi tanımı temel geometriye dayanmaktadır. Komşu olan köşelerin derecelerinin kartezyen koordinat sisteminde uzaklıklarının toplamıdır. Sombor indeksinin temel özellikleri Gutman tarafından belirlenmiştir. Ayrıca herhangi bir graf için Sombor indeksinin extremal grafları elde edilmiştir. Daha sonra Sombor indeksi herhangi bir köşe-derece bazlı topolojik indeksinin özel bir durumu olarak görülebileceği gösterilmiştir (Gutman, 2021).

Sombor indeksi ile ilgili çalışmaların yanında çeşitli Sombor indeksleri ve ortalama Sombor indeksi tanımlandı (Mendez-Bermudez vd., 2021). Ardından bir moleküler grafın  $\delta$  –Sombor indeksi tanıtıldı (Kulli, 2021). Üstelik  $\delta$  –Sombor indeksi dikkate alınarak  $\delta$  –Sombor üstel indeksi bazı nanotüpler için elde edildi. Dahası Sombor indeksi Ağ Teorisinde uygulaması çalışıldı (Aguilar-Sanchez vd., 2021). Sombor indeksi ve diğer köşe-derece bazlı topolojik indeksler arasında bir çok sayıda eşitsizlik elde edilmiştir (Das vd., 2021; Flipovski, 2021; Milovanovic vd., 2021; Rada vd., 2021).

**Örnek 3.1.2.**  $P_4$  grafının sombor indeksini bulalım.  $P_4$  grafı, dört düğüme ve üç kenara sahip basit bir yol grafıdır. Her düğüm birbirine bağlı ve iki komşusu vardır. Şimdi düğüm ve kenarları bulalım.

Düğümmler:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

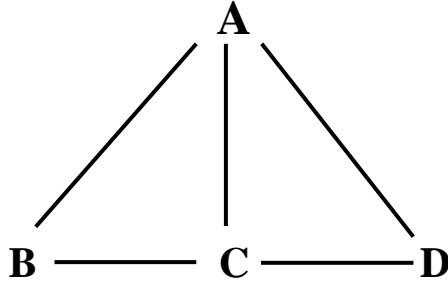
Kenarlar:  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$



$$\begin{aligned}
 SO(G) &= \sum \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} \\
 &= \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{2^2 + 2^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{5} \\
 &= \sqrt{8} + 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$P_4$  grafının Sombor İndeksi  $SO(G) = \sqrt{8} + 2\sqrt{5}$  olur.

**Örnek 3.1.3.** Aşağıdaki grafın Sombor indeksini, düğümler arasındaki bağlantıların derecelerine göre hesaplayalım.



Düğümler  $V(G)=\{A, B, C, D\}$

Kenarlar  $E(G)=\{AB, AC, AD, BC, CD\}$

Düğümlerin derecesi

$d(A)=3$  (B,C,D ile)

$d(B)=2$  (A,C ile)

$d(C)=3$  (A,B,D ile)

$d(D)=2$  (A,C ile)

$$1. \text{Kenar } AB = \sqrt{d(A)^2 + d(B)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$2. \text{Kenar } AC = \sqrt{d(A)^2 + d(C)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$3. \text{Kenar } AD = \sqrt{d(A)^2 + d(D)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$4. \text{Kenar } BC = \sqrt{d(B)^2 + d(C)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$5. \text{Kenar } CD = \sqrt{d(C)^2 + d(D)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$SO(G) = \sqrt{13} + \sqrt{18} + \sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{13}$$

$$= 4\sqrt{13} + \sqrt{18}$$

$$= 4\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$$

Sombor indeksi yakın zamanda tanıtılmış olmasına rağmen topolojik indeksler arasında önemli ve popüler bir duruma gelmiştir. Sombor indeksi tanımı ve uygulaması açısından oldukça fazla kullanım alanı ortaya çıkmıştır. Ayrıca diğer indeksler ile olan ilişkisi de göze çarpmıştır.

Sombor indeksinin genel graflar için sınırları grafin köşe sayısı ve en büyük ile en küçük derecesine bağlı olarak elde edilmiştir. Verilen eşitsizliklerin eşitlik olarak sağlanması grafların tam ya çoğunlukla düzgün graf (yalnızca birkaçında ise tam graf) olma durumunda gerçekleşmektedir.

Bir  $r$ -düzgün grafinin her bir köşesinin derecesi  $r$  ve mertebesi  $n$  olmak üzere toplam kenar sayısı  $\frac{nr}{2}$  tanedir. Dolayısıyla herhangi bir  $r$ -düzgün grafin Sombor indeks değeri  $\frac{\sqrt{2}}{2}nr$  dir.

**Teorem 3.1.3.** (Das vd., 2021) Herhangi bir  $G$  grafinin Sombor indeksi sınırları grafin köşe sayısı  $n$  ve en büyük ile en küçük derecesi  $\Delta$  ile  $\delta$  olmak üzere

$$\frac{n\delta^2}{\sqrt{2}} \leq SO(G) \leq \frac{n\Delta^2}{\sqrt{2}}$$

şeklindedir. Ayrıca eşitlikler grafin düzgün grafa izomorf olması durumunda sağlanır.

**İspat.** Bir  $G$  grafi  $n$  köşeli,  $\Delta$  en büyük dereceli ve  $\delta$  en küçük dereceli olsun. O halde, El Sıkışma Lemma'sından;

$$n\delta \leq \sum_{v_i \in V(G)} d_G(v_i) = 2m \leq n\Delta$$

elde edilir. Buradan grafin Sombor indeksinin tanımı düşünüldüğünde;

$$\frac{n\delta^2}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}\delta m \leq SO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} \leq \sqrt{2} \Delta m \leq \frac{n\Delta^2}{\sqrt{2}}$$

sınırlar grafin köşe sayısı, en büyük ve en küçük derecesine bağlı olarak elde edilir. Grafın düzgün graf olması halinde eşitliklerin sağlanacağı düzgün grafa tüm köşelerin derecelerinin eşit olmasından açıkça görülür.

**Sonuç 3.1.4.** (Das vd., 2021) Herhangi bir  $G$  grafinin Sombor indeksinin üst sınırı grafin yalnızca köşe sayısına bağlı ifade edilebilir.

$$SO(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{\sqrt{2}}$$

Ayrıca eşitlik grafin bir tam grafa izomorf olması durumunda gerçekleşir.

**İspat.** Herhangi bir  $G$  grafinin en büyük derecesi  $\Delta \leq n - 1$  şeklinde köşe sayısı ile sınırlanabilir. Bununla birlikte Teorem 3.3.1.1. düşünüldüğünde sonuç açıktır.

Aşağıda vereceğimiz teorem grafin özel graflardan iki parçalı graf olması halinde üstel Sombor indeksinin üst sınırlarıdır.

**Teorem 3.1.5.** (Das vd., 2021)  $G$  grafi iki parçalı  $n$  köşeli bir graf olsun. O halde iki parçalı  $G$  grafinin Sombor indeksinin üst sınırları

$$SO(G) \leq \begin{cases} \frac{n^3}{4\sqrt{2}} & n \text{ çift} \\ \frac{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 + 1}}{4\sqrt{2}} & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

Kimyasal grafların Sombor indeksi üzerinde de çalışma yapılmıştır (Cruz vd., 2021). Bu çalışmada kimyasal grafların Sombor indekslerinin sınırları elde edilmiştir.

Aşağıda verilen teoremden kimyasal ve ağaç graflar ile hexagonal sistemler için Sombor indekslerinin grafların köşe sayılarına bağlı olan üst sınırı elde edilmiştir.

**Teorem 3.1.6.** (Cruz vd., 2021)  $G$  grafi  $n$  köşeli olan kimyasal bir graf olsun. Buna göre kimyasal  $G$  grafinin Sombor indeksi

$$SO(G) \leq 8\sqrt{2}n$$

şeklinde üstten sınırlandırılır. Ayrıca eşitlik kimyasal grafin yalnızca 4-düzgün grafa izomorf olması durumunda sağlanır.

**İspat.** Kimyasal bir  $G$  grafi için her  $u \in V(G)$  için  $deg_G(u) \leq 4$  sağlanır. Bir

$$C = \{(x, y) \in P : (x, y) \neq (4, 4)\}$$

kümesi oluşturalım. Burada  $P = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq y \leq 4\}$  şeklindedir.

$C$  kümesinden alınan her  $(x, y)$  sıralı ikilileri için  $\sqrt{x^2 + y^2} - 8\sqrt{2} \frac{x+y}{xy} < 0$  eşitsizliği sağlanır. Ayrıca kimyasal grafların Sombor indekslerinin farklı bir gösterimi

$$SO(G) = \sum_{(x,y) \in P} \sqrt{x^2 + y^2} m_{x,y}$$

şeklindedir. Burada  $m_{x,y}$   $G$  grafinin  $x$  dereceli köşesini  $y$  dereceli köşesi ile birleştiren kenarlarının sayısıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} SO(G) &= 4\sqrt{2}m_{4,4} + \sum_{(x,y) \in C} \sqrt{x^2 + y^2} m_{x,y} \\ &= 8\sqrt{2} \left[ n - \sum_{(x,y) \in C} \frac{x+y}{xy} m_{x,y} \right] + \sum_{(x,y) \in C} \sqrt{x^2 + y^2} m_{x,y} \\ &= 8\sqrt{2}n + \sum_{(x,y) \in C} \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 8\sqrt{2} \frac{x+y}{xy} \right) m_{x,y} \leq 8\sqrt{2}n \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca grafin 4-düzgün graf olması halinde

$$SO(G) = \sqrt{32}m_{4,4} = \sqrt{32}m = \sqrt{32} \frac{4n}{2} = 8\sqrt{2}n$$

bulunması eşitliğin yalnızca 4-düzgün graf için geçerli olduğunu gösterir.

Yine kimyasal graflar için Sombor indeksinin bir alt sınırı elde edilmiştir.

**Teorem 3.1.7.** (Cruz vd., 2021)  $G$  grafi  $n$  köşesi olan kimyasal bir graf olsun. Buna göre kimyasal  $G$  grafinin Sombor indeksi

$$SO(G) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2}n & n \text{ çift} \\ \frac{n-3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{5} & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde grafin köşe sayısına bağlı olan bir alt sınıra sahiptir.

**Sonuç 3.1.8.** (Cruz vd., 2021) Bağlantılı kimyasal bir grafinin Sombor indeksi aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir.

$$2\sqrt{2}(n-3) + 2\sqrt{5} \leq SO(G) \leq 8\sqrt{2}n$$

Ayrıca eşitsizliğin sol tarafı  $G \cong P_n$  ve sağ tarafı  $G$  grafının 4 –düzgün graf olması halinde eşitlik gerçekleşir.

Sombor indeksinin keskin bir alt sınırı ise grafın köşe sayısı ve en büyük derecesine bağlı olarak elde edilmiştir.

**Teorem 3.1.9.** (Horoldagva ve Xu, 2023) Bağlantılı bir  $G$  grafının köşe sayısı  $n$  ve en büyük derecesi  $\Delta \geq 3$  olsun. Buna göre  $G$  grafının Sombor indeksi;

$$SO(G) \geq \begin{cases} \Delta(\sqrt{\Delta^2 + 4} + \sqrt{5}) + 2(n - 2\Delta - 1)\sqrt{2} & \Delta \leq \frac{n-1}{2} \\ (n-1-\Delta)(\sqrt{\Delta^2 + 4} + \sqrt{5}) + (2\Delta - n + 1)\sqrt{\Delta^2 + 1} & \Delta > \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

eşitsizliği ile alttan sınırlıdır.

Sombor indeksinin diğer topolojik indeksler ile olan ilişkisi de çalışmaların çoğunluğunu oluşturmaktadır.

**Teorem 3.1.10.** (Flipovski, 2021)  $G$  grafı  $n$  köşeli bir graf olmak üzere  $G$  grafının Sombor indeksi ile birinci Zagreb indeksi arasında

$$SO(G) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} M_1(G)$$

şeklinde eşitsizlik mevcuttur. Ayrıca eşitlik  $G$  grafının düzgün graf olması halinde sağlanır.

**İspat.**  $G$  grafının komşu köşeleri  $u$  ve  $v$  için dereceleri  $d(u)$  ve  $d(v)$  pozitif sayılar olduğundan  $\sqrt{d(u)^2 + d(v)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(d(u) + d(v))$  eşitsizliği geçerlidir. O halde

$$\begin{aligned} SO(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d(u)^2 + d(v)^2} \geq \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{2}}(d(u) + d(v)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{u \in V(G)} d(u)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} M_1(G) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $G$  grafı  $k$ -düzgün graf olması halinde ise  $SO(G) = \frac{nk^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} M_1(G)$  olduğu açıktır.

**Sonuç 3.1.11.** Bağlantılı ve  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı  $G$  grafının Sombor indeksi

$$SO(G) \geq \frac{2\sqrt{2}m^2}{n}$$

şeklinde bir alt sınıra sahiptir.

**İspat.** Bir  $G$  grafinin köşe sayısı  $n$  ve kenar sayısı  $m$  olmak üzere birinci Zagreb indeksi  $M_1(G) \geq \frac{4m^2}{n}$  ile alttan sınırlandırılılabildiğinden bir önceki teoremden sonuç açıktır.

**Teorem 3.1.12.** (Milovanovic vd., 2021) Bağlantılı bir grafin Sombor indeksini grafin birinci Zagreb indeksine bağlı olarak alttan ve üstten sınırlandırabiliriz.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} M_1(G) \leq SO(G) \leq M_1(G)$$

**İspat.** Bir  $G$  grafinin Sombor indeksini aşağıdaki gibi üstten sınırlandırdığımızda istenilen eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} SO(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d(u)^2 + d(v)^2} = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{(d(u) + d(v))^2 - 2d(u)d(v)} \\ &\leq \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{(d(u) + d(v))^2} = \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) = M_1(G) \end{aligned}$$

**Tanım 3.1.13.** (Gutman ve Trinajstić, 1972)  $G$  basit, bağlantılı bir graf olsun.  $d(i)$ ,  $i$  köşesinin derecesi olmak üzere,  $G$  grafinin 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} d^2(i)$$

dir.

**Teorem 3.1.13.** (Flippovski, 2021) Bağlantılı ve  $n$  köşeli bir  $G$  grafinin Sombor indeksi ile ikinci Zagreb indeksi arasında grafin köşe sayısına bağlı olan

$$SO(G) \geq \frac{\sqrt{2}}{n-1} M_2(G)$$

şeklinde eşitsizliği vardır. Ayrıca verilen eşitsizliğin geçerli olması için  $G$  grafi bir tam grafa izomorf olmalıdır.

**İspat.** Grafin mertebesi  $|V(G)| = n$  olmak üzere  $\forall u, v \in V(G)$  için

$$d(u) + d(v) \leq 2n - 2$$

eşitsizliği sağlanır. Kuadratik ve aritmetik ortalamadan

$$\sqrt{\frac{d(u)^2 + d(v)^2}{2}} \geq \frac{2}{\frac{1}{d(u)} + \frac{1}{d(v)}} = \frac{2d(u)d(v)}{d(u) + d(v)} \geq \frac{1}{n-1} d(u)d(v)$$

eşitsizliği mevcuttur. Ayrıca grafın Sombor indeksinin tanımından

$$SO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d(u)^2 + d(v)^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \sum_{uv \in E(G)} (d(u)d(v)) = \frac{\sqrt{2}}{n-1} M_2(G)$$

eşitsizliği elde edilir.

Dahası  $G$  grafi  $n$  köşeli bir tam graf olması halinde

$$\frac{\sqrt{2}}{n-1} M_2(K_n) = \frac{n(n-1)^2}{\sqrt{2}} = SO(K_n)$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.1.14.** (Das vd., 2021) Bir  $G$  grafının kenar sayısı  $m$  ve en küçük derecesi  $\delta$  olmak üzere grafın Sombor indeksi grafın birinci Zagreb indeksine de bağlı olarak aşağıdaki gibi üstten sınırlanmaktadır.

$$SO(G) \leq M_1(G) - (2 - \sqrt{2})\delta m$$

Ayrıca eşitlik grafın düzgün graf olması halinde sağlanır.

**İspat.** Grafın kenar kümesinden alınan herhangi iki köşe  $v_i v_j \in E(G)$  ( $d(v_i) \geq d(v_j)$ ) için;

$$\sqrt{d(v_i)^2 + d(v_j)^2} \leq d(v_i) + (\sqrt{2} - 1)d(v_j)$$

eşitsizliği kolayca görülür. Daha sonra Sombor indeks tanımı ile düşünüldüğünde;

$$\begin{aligned}
SO(G) &= \sum_{v_i v_j \in (G)} \sqrt{d(v_i)^2 + d(v_j)^2} \leq \sum_{\substack{v_i v_j \in E(G) \\ d(v_i) \geq d(v_j)}} d(v_i) + (\sqrt{2} - 1)d(v_j) \\
&= \sum_{v_i v_j \in (G)} d(v_i) + d(v_j) - \sum_{\substack{v_i v_j \in E(G) \\ d(v_i) \geq d(v_j)}} (2 - \sqrt{2})d(v_j) \\
&\leq M_1(G) - (2 - \sqrt{2})\delta m
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Ayrıca bir grafın Sombor indeksinin grafın ikinci Zagreb indeksi ile de grafın köşe sayısı ve en büyük ile en küçük derecelerine bağlı olan ilişkisi aşağıda ifade edilmiştir.

**Tanım 3.1.16.**  $G$  basit, bağlantılı bir graf olsun.  $d(i)$ ,  $i$  köşesinin derecesi olmak üzere,  $G$  grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} d(i)d(j)$$

dir.

**Teorem 3.1.17.** (Das vd., 2021)  $G$  grafı  $n$  köşeli,  $\Delta$  en büyük dereceli ve  $\delta$  en küçük dereceli olmak üzere

$$SO(G) \geq \frac{2M_2(G) + n\Delta\delta^2}{\sqrt{2}(\Delta + \delta)}$$

sağlanır. Ayrıca eşitlik yalnızca  $G$  grafının düzgün graf olması halinde geçerli olur.

Yukarıda bahsedilen, ifade edilen teorem ve sonuçların sınırlarındaki eşitlikleri sağlama durumu grafların daima düzgün graf olmaları halinde gerçekleşmektedir.

#### 4. CEBİRSEL BİR GRAFIN TENSÖR ÇARPIMINDA TOPOLOJİK İNDEKSLER

Cebirsel yapı ve graf teorisi arasındaki ilişki oldukça derindir. Bu iki alan birbirini karşılıklı olarak zenginleştirmektedir. Cebirsel yapı, özellikle grup teorisi, halka teorisi ve graf teorisinin birçok önemli konseptinin ve teoreminin geliştirilmesinde kullanılır. Cebirsel yapılar, grafların daha derinlemesine ve sistematik olarak analiz edilmesini sağlar, graf teorisi ise cebirsel yapıların uygulanabilirliğini ve anlamını genişletir. Bu sinerji, hem teorik matematikte hem de uygulamalı bilimlerde önemli keşiflere yol açmıştır.

Graf Teorisi ve Cebirsel yapıların incelenmesi araştırmacıların büyük ilgisini çekmektedir. İlk kez 1998 yılında Beck graflar ile halka teorisini birleştirmiştir. Bu çalışmada Beck, değişmeli halkaların graflarının tasarımıyla ilgilenmiştir (Beck,1988).

**Tanım 4.1.1.** Değişmeli bir  $R$  halkasında, sıfırdan farklı her  $x$  için  $x.y = 0$  olmak şartı ile  $y \in R - \{0\}$  elemanı mevcut ise  $x$  elemanına sıfır bölen denir.  $R$ , sıfır elemanını “bulandıran komütatif bir halka ve  $\Gamma(R)$ ,  $R$  halkasının sıfır bölenlerinin bulunduğu küme olsun. Sıfır-bölen graf  $\Gamma(R)$ , köşe kümesi  $x.y = 0$  koşulunu sağlayan

$$x, y \in \Gamma(R)^* = \Gamma(R) \setminus \{0\}$$

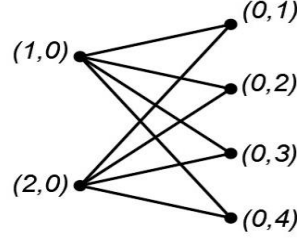
elemanlarından oluşan graflara **sıfır-bölen graf** denir.(Beck,1998)

**Tanım 4.1.2.** Başka bir cebirsel yapı olan  $Z_p \times Z_q$  halkasının sıfır bölen grafi  $\Gamma(Z_p \times Z_q)$  daha önce tanımlanmıştı (Akgüneş ve Togan, 2012).  $p, q$  birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere  $Z_p \times Z_q$  halkasının sıfır bölenleri kümesi aynı zamanda  $\Gamma(Z_p \times Z_q)$  sıfır bölen grafinin köşe kümesi olur.  $\Gamma(Z_p \times Z_q)$  sıfır bölen grafinin kenar kümesi ise köşe kümesindeki elemanlarının çarpımlarının  $(0,0)$ 'a eşit olan sırasız ikililerden oluşur.

Diğer bir ifade ile köşe kümeleri;

$$V(\Gamma(Z_p \times Z_q)) = \{(0,1), (0,2), \dots, (0, q-1), (1,0), (2,0), \dots, (p-1,0)\}$$

şeklinde olmak üzere  $\Gamma(Z_p \times Z_q)$  sıfır bölen grafi  $K_{p-1, q-1}$  iki parçalı tam grafına izomorf olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 4.1.  $K_{2,4}$  İki Parçalı Tam Graf Örneği

**Teorem 4.1.**  $[\Gamma(Z_p \times Z_q)] \otimes [\Gamma(Z_r \times Z_s)]$  tensör çarpımının Sombor indeksini gösterir.

$[(p_1, 0), (r_1, 0)]$  köşeleri ile komşuluk oluşturan  $[(0, q_2), (0, s_2)]$  köşelerinin karelerinin toplamının karekökü için;

- i)  $[(p_1, 0), (r_1, 0)]$  nin dereceleri  $(p - 1)(r - 1)$  tane köşeden her biri için  $(q - 1)(s - 1)$  dir.
- ii)  $[(0, q_2), (0, s_2)]$  nin dereceleri  $(q - 1)(s - 1)$  tane köşeden her biri için  $(p - 1)(r - 1)$  dir.

Bu derecelerin karelerinin toplamlarının karekökü ;

$$\sqrt{[(q - 1)(s - 1)]^2 + [(p - 1)(r - 1)]^2} (q - 1)(s - 1)(p - 1)(r - 1)$$

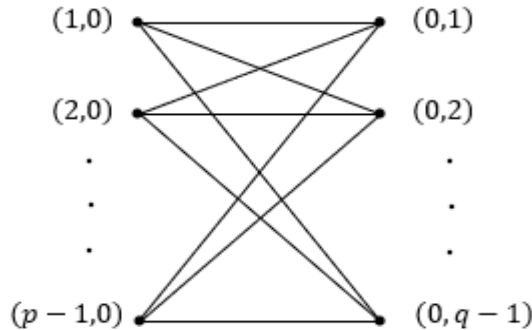
**İspat 4.1.**  $[\Gamma(Z_p \times Z_q)] \otimes [\Gamma(Z_r \times Z_s)]$  tensörünü tanımlayalım.

$p, q, r, s$  asal sayılar ve  $\Gamma(Z_p \times Z_q), \Gamma(Z_r \times Z_s)$ , özel halkaların sıfır bölen grafları olsun

$\Gamma(Z_p \times Z_q)$  sıfır bölen grafinin köşe kümesi;

$$V(\Gamma(Z_p \times Z_q)) = \{(i, 0), (0, j) : i \in \{1, 2, \dots, p - 1\}, j \in \{1, 2, \dots, q - 1\}\}$$

şeklindedir.

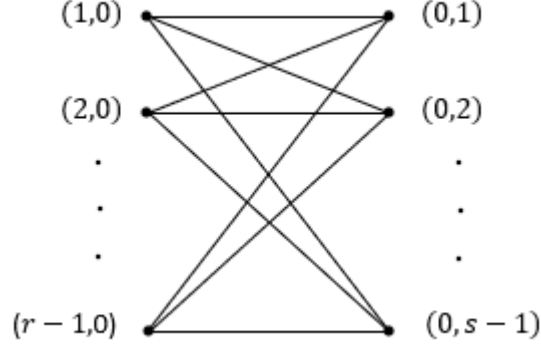


Şekil 4.2.  $Z_p \times Z_q$  Sıfır Bölen Grafi

$\Gamma(Z_r \times Z_s)$  sıfır bölen grafının köşe kümesi;

$$V(\Gamma(Z_r \times Z_s)) = \{(k, 0), (0, m) : k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, m \in \{1, 2, \dots, s-1\}\}$$

dir.



Şekil 4.3.  $Z_r \times Z_s$  Sıfır Bölen Grafı

Buna göre bu iki grafın tensör çarpım grafı  $G = [\Gamma(Z_p \times Z_q)] \otimes [\Gamma(Z_r \times Z_s)]$  olsun.

Buna göre

$$V(G) = \{[(i, 0), (k, 0)], [(0, j), (0, m)], [(i, 0), (0, m)], [(0, j), (k, 0)] : i \in \{1, 2, \dots, p-1\}, j \in \{1, 2, \dots, q-1\}, k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, m \in \{1, 2, \dots, s-1\}\}$$

şeklindedir.

Bu köşeler arasında ikiye ayırabileceğimiz komşuluk vardır:

1.komşuluk: her  $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}, j \in \{1, 2, \dots, q-1\}, k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, m \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  için  $[(i, 0), (k, 0)] \sim [(0, j), (0, m)]$

ve

2.komşuluk: her  $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}, j \in \{1, 2, \dots, q-1\}, k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, m \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  için  $[(i, 0), (0, m)] \sim [(0, j), (k, 0)]$

dir. Köşelerin dereceleri ise

$$d([(i, 0), (k, 0)]) = (q-1)(s-1)$$

$$d([(0, j), (0, m)]) = (p-1)(r-1)$$

$$d([(i, 0), (0, m)]) = (q-1)(r-1)$$

$$d([(0, j), (k, 0)]) = (q-1)(s-1)$$

şeklindedir.

Dolayısıyla Sombor indeksi komşu köşeler arasında tanımlı ve köşe derecelerine bağlı olduğundan;

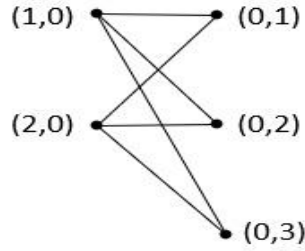
$$i \in \{1, 2, \dots, p-1\}, j \in \{1, 2, \dots, q-1\}, k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, m \in \{1, 2, \dots, s-1\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} SO(G) &= \sum_{[(i,0),(k,0)] \sim [(o,j),(o,m)]} \sqrt{[(q-1)(s-1)]^2 + [(p-1)(r-1)]^2} + \\ &\quad \sum_{[(i,0),(k,0)] \sim [(o,j),(o,m)]} \sqrt{[(q-1)(r-1)]^2 + [(p-1)(s-1)]^2} \\ &= (p-1)(r-1)(q-1)(s-1) \left[ \sqrt{[(q-1)(s-1)]^2 + [(p-1)(r-1)]^2} + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{[(q-1)(s-1)]^2 + [(p-1)(r-1)]^2} \right] \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 4.2.**  $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3) \otimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5)$  tensör çarpımını bulalım.



Şekil 4.4.  $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$  Sıfır Bölen Grafi

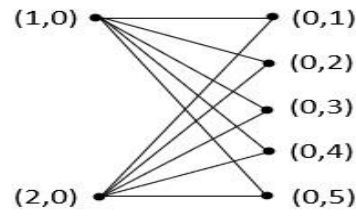
$(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3)$  kenarları :  $(1,0)=A$

$(2,0)=B$

$(0,1)=C$

$(0,2)=D$

$(0,3)=E$

Şekil 4.5.  $Z_3 \times Z_5$  Sıfır Bölen Grafi

$(Z_3 \times Z_5)$  kenarları :  $(1,0)=0$

$(2,0)=1$

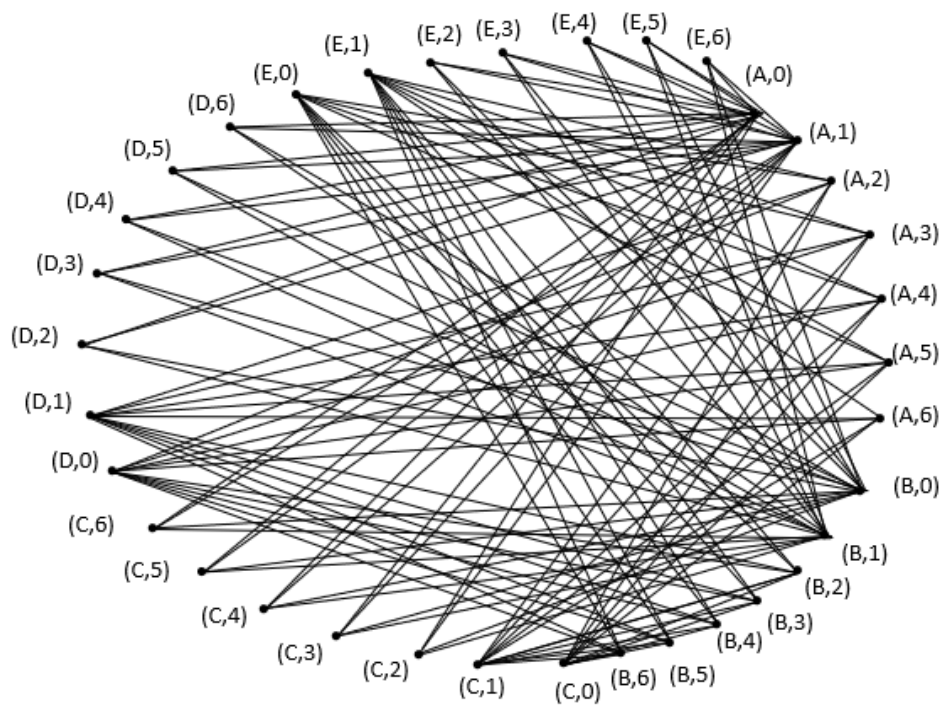
$(0,1)=2$

$(0,2)=3$

$(0,3)=4$

$(0,4)=5$

$(0,5)=6$

Şekil 4.6.  $(Z_2 \times Z_3) \otimes (Z_3 \times Z_5)$  Graflarının Tensör Çarpımı

Teorem 4.1. den  $G=(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3) \otimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5)$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(G) &= (2-1)(3-1)(3-1)(5-1) \left[ \sqrt{[(3-1)(5-1)]^2 + [(2-1)(3-1)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(3-1)(3-1)]^2 + [(2-1)(5-1)]^2} \right] = 16[2\sqrt{17} + 8\sqrt{2}] \end{aligned}$$

bulunur.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, graf teorisi bağlamında Sombor indeksinin tanımı, özellikleri ve uygulamaları ele alınmıştır. Bu tez çalışmasının temel amacı, graf çarpımları ve topolojik indekslerin ilişkisini derinlemesine incelemek olmuştur. Özellikle Sombor indeksinin, grafların temel yapısal özellikleri üzerindeki etkileri araştırılmış ve çeşitli graf türleri üzerinde uygulamalı örnekler sunulmuştur. Elde edilen bulgular, Sombor indeksinin graf teorisinin önemli bir parçası haline geldiğini ve bu indekslerin birçok farklı graf yapısında belirli sınırlar içinde değer aldığını göstermektedir. Bu sonuçlar, graf teorisi ve topolojik indekslerin diğer matematiksel alanlar ve uygulamalarla olan ilişkisini daha iyi anlamamıza yardımcı olmaktadır. Tez kapsamında sunulan örnekler ve teorik sonuçlar, gelecekte bu alanda yapılacak çalışmalara katkı sağlayacak niteliktedir. Ayrıca, elde edilen bulgular, hem teorik hem de uygulamalı matematik çalışmaları için faydalı olabilecek yeni araştırma alanlarının kapısını aralamaktadır.

### 5.2 Öneriler

Gelecek çalışmalar, Sombor indeksinin daha karmaşık graf yapıları üzerindeki etkilerini araştırabilir. Farklı topolojik indekslerin, diğer graf teorisi unsurlarıyla nasıl bir etkileşim içinde olduğunu inceleyen çalışmalar yapılabilir. Bu tezde ele alınan teorik sonuçların, uygulamalı matematik, fizik, kimya ve biyoloji gibi alanlarda nasıl kullanılabileceği üzerine daha fazla araştırma yapılması önerilir.

## . KAYNAKLAR

- Aguilar-Sánchez, Rocío, et al. "Normalized Sombor indices as complexity measures of random networks." *Entropy* 23.8 (2021): 976.
- Aguilar-Sanchez, R., Mendez-Bermudez, J.A., Rodriguez, J.M. and Sigarreta, J.M., 2021, Normalized Sombor indices as complexity measures of random networks, *Entropy*, 23(8), 976.
- Akgüneş, N., Das, K.C. and Çevik, A.S., 2014, Topological indices on a graph of monogenic semigroups. *Topics in Chemical Graph Theory*, 16, 3-20.
- Akgüneş, N. and Çağan, B., 2018, On the dot product of graphs over monogenic semigroups, *Applied Mathematics and Computation*, 322, 1-5.
- Akgüneş, N. and Togan, M., 2012, Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 22(2), 309-315.
- Akgüneş, N. and Nacaroğlu, Y., 2018, On the sigma index of monogenic semigroup graphs.
- Akgüneş, N. and Nacaroğlu, Y., 2019, On the sigma index of corona products of monogenic semigroup graphs, *Journal of Universal Mathematics*, 2(1), 68-74.
- Akgüneş, N, Nacaroğlu, Y. and Pak, S., 2021, Line graphs of monogenic semigroup graphs, *Journal of Mathematics*, 1-4.
- Aydın, B., Akgüneş, N. and Cangül, İ.N., 2020, On the Wiener index of the dot product graph over monogenic semigroups, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(5), 1231-1240.
- Aykaç, S., Akgüneş, N. and Çevik, A.S., 2019, Analysis of Zagreb indices over zero-divisor graphs of commutative rings. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(06), 2040003.
- Basavanagoud, B. and Patil, S., 2016, A note on hyper-Zagreb index of graph operations, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 7(1), 89-92.
- Beck, I., 1988, Coloring of commutative ring, *Journal Algebra*, 116, 208-226.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S., 2008, Graph Theory, vol. 244 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, Germany.
- Borovicanin, B., Das, K.C., Furtula, B. and Gutman, I., 2017, Bounds for Zagreb Indices, *MATCH Commun. Math. Comput.Chem.*, 78, 17-100.

- Buyantogtokh, L., Horoldagva, B. and Das, K.C., 2020, On reduced second Zagreb index, *Journal of Combinatorial Optimization*, 39:776-791.
- Cruz, R., Gutman, I. and Rada, J., 2021, Sombor Index of Chemical Graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 399, 126018.
- Cruz, R. and Rada, J., 2019, The Path and The Star as Extremal Values of Vertex-Degree-Based Topological Indices Among Trees, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 82(3), 715-732.
- Das K.C., Akgüneş, N. and Çevik, A.S, 2013, Some properties on the lexicographic product of graphs obtained by monogenic semigroups.
- Das, K.C., Çevik, A.S., Cangül, İ.N. and Shang, Y., 2021, On Sombor index, *Symmetry*, 13(1), 140.
- Das, K.C., Yurttas, A., Togan, M., Çevik, A.S. and Cangül, İ.N., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *Journal of Inequalities and Applications*, 1-14.
- De, N., Nayeem, S.M.A. and Pal, A., 2016, The F-coindex of some graph operations, *SpringerPlus*, 5(1), 221.
- Devillers, J. and Balaban, A.T., 1999, Topological indices and related descriptors in QSAR and QSPR, *Gordon and Breach, Amsterdam, Netherlands*.
- Doslic, T., 2008, Vertex-weighted Wiener polynomials for composite graphs, *Ars Math. Contemp.*, 1: 66-80.
- Euler, L., 1953, Leonhard Euler and the Königsberg bridges, *Scientific American*, 189(1), 66-72.
- Frucht, R. and Harary, F., 1970, On the corona of two graphs, *Aequationes Mathematicae*, 4(3), 322-325.
- Flipovski, S., 2021, Relations between Sombor index and some topological index and some degree-based topological indices, *Iranian J. Math. Chem.*, 12(1) March(2021) 19-26.
- Gross, J. L. and Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall, CRC Press*.
- Gutman, I., 2021, Geometric Approach to Degree-Based Topological Indices: Sombor Indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 86(1), 11-16.
- Gutman, I. and Trinajstić, N., 1972, Graph theory and molecular orbitals, Total  $\varphi$ -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.*, 17:535.
- Harary F., 1994, Graph Theory, *Addison-Wesley, US*, 22.
- Horoldagva, B. and Xu, C., 2023, On Sombor index of graphs, *arXiv preprint arXiv:2305.05554*.

- Klavzar, S., 2000, *Product Graphs: Structure and Recognition*, John Wiley & Sons, New York.
- Kulli, V.R., 2021,  $\delta$ -Sombor index and its exponential for certain nanotubes, *Ann. Pure Appl. Math.*, 23, 37-42.
- Loksha, V., Jain, S., Çevik, A.S. and Cangül, İ.N., 2020, New results on the F-index of graphs based on corona-type products of graphs, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 23(2), 141-147.
- Mendez-Bermudez, J.A., Aguilar-Sanchez, R., Molina, E.D. and Rodriguez, J.M., 2021, Mean Sombor index, *arXiv preprint arXiv:2110.02721*.
- Milovanovic, I., Milovanovic, E. and Matic, M., 2021, On some mathematical properties of Sombor indices, *Bull. Int. Math. Virtual Inst*, 11(2), 341-353.
- Mukwembi, S., 2012, A Note on Diameter and the Degree Sequence of a Graph, *Applied Mathematics Letters*, 25, 175-178.
- Nikolic, S. and Trinajstić, N., 1995, The Wiener index: Development and applications, *Croatica Chemica Acta*, 68(1), 105-129.
- Nikolic, S., Kovacevic, G., Milicevic, A. and Trinajstić, N., 2003, The Zagreb indices 30 years after, *Croat. Chem. Acta*, 76: 113-124.
- Oğuz Ünal, S., 2021, An application of Sombor index over a special class of semigroup graph, *Journal of Mathematics*, 1-6.
- Ostrand, P. A., 1973, Graphs with Specified Radius and Diameter, *Discrete Mathematics*, 4, 71-75.
- Rada, J., Rodriguez, J.M. and Sigarreta J.M., 2021, General properties on Sombor indices, *Discrete Applied Mathematics*, 299, 87-97.
- Randić, Milan. "Novel molecular descriptor for structure—property studies." *Chemical Physics Letters* 211.4-5 (1993): 478-483.
- Wiener, H., 1947, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, *Journal American Chemical Society*, 69, 1, 17-20.