T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO 3 ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Uğur CESUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

EKİM-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Uğur CESUR tarafından hazırlanan "Pseudo 3-Çaprazlanmış Modüller " adlı tez çalışması 22/10/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Erdal ULUALAN	....
Danışman Doç. Dr. Sedat PAK	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet AVCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

UĞUR CESUR

22.10.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PSEUDO 3-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Uğur CESUR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr Sedat PAK

2018, 56 Sayfa

Jüri
Danışman: Doç.Dr Sedat PAK
Üye: Prof. Dr. Erdal ULUALAN
Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışmada Inasaridze tarafından tanımlanan pseudosimplisel grupların homotopi gruplarını göz önünde bulundurarak Pseudo 3- çaprazlanmış modül yapısı oluşturmaktır.3 çarpım modülünü, 1 çarpım modülü ve 2 çarpım modülü ile açıklamaya çalışıyoruz. Çarpım modüllerinin Moore kompeksine boyu 3 olan simplisel gruplar kategorisine eş değer olduğunu göstereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış, Grup , Homotopi, Kategori, Modül, Morfizim,Pseudosimplisel

ABSTRACT

MS THESIS

PSEUDO THREE CROSSED MODULES

UĞUR CESUR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE OF PHILOSOPHY IN MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Prof. Dr Sedat PAK

2018, 56 Pages

Jury
Advisor: Assc. Prof. Dr Sedat PAK
Member: Prof. Dr. Erdal ULUALAN
Member: Asst. Prof. Nihat AKGÜNEŞ

In this study, we will construct pseudo 3 crossed module structures considering homotopy groups of pseudosimplisel groups defined by Inasaridze.We are trying to explain with 3 multiplication modules, 1 multiplication module and 2 multiplication modules. We will show that the product modules are equivalent to the category of simplicial groups with Moore 3 complex.

Keywords: Category , Crossed, Group , Homotopi, Module, Morphism, Pseudosimplisel

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesinde yapılmıştır.

Bu çalışmada çalışma gerekli bilgi ve ilgiyi esirgemeyen danışmanım sayın Doç.Dr Sedat PAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Uğur CESUR
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller kavramı ilk olarak, J.H.L.Whitehead (Whitehead , 1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmalarda çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Daha sonra gruplar üzerinde tanımlana çaprazlanmış modül kavramı cebir yapısı üzerine aktarılmıştır. Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin genel teorisi üzerine, Porter ve Nizar'm (Porter,1986 ve Nizar, 1992) çalışmaları bulunmaktadır.

Conduché (Conduché, 1984) ise 3-tip homotopi modeli olarak 2-çaprazlanmış model kavramını tanımlamıştır. Loday (Loday,1982) ise $(n+1)$ – homotopi tipleri için Cat^n grupları olarak isimlendirdiği başka bir cebirsel modelin temelini vermiştir. Ellis – Steiner (Ellis – Steiner, 1987) çaprazlanmış $n-$küblerin Cat^n-gruplara denk olduğunu göstermişlerdir. Simplisel gruplar ile $n-$kübler arasında bir bağıntı Porter (Porter, 1993) tarafından verilmiştir. Conduché (Conduché, 2003) ise 2- çaprazlanmış modül ve 2- küpler arasındaki ilişkiyi vermiştir. Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel gruplar ile 2 – çaprazlanmış modüllerin denkliğinden hareket ederek. Inasarıdze (Inasarıdze, 1975) tarafından pseudosimplisel grupların homotopileri, abelyen olmayan derived funktorlar ve cebirsel K- teori üzerine yaptığı çalışmalarda pseudosimplisel grupları tanımlamış ve simplisel gruplar ile arasındaki ilişkiyi vermiştir. Akça ve Pak (Akça ve Pak, 2010) 2- çaprazlanmış modüller ile 2-pseudo çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Baues (Baues, 1991-1995) çalışmalarında 2-çaprazlanmış modül ile kuadratik modül kavramı arasındaki ilişkiyi ortaya koydu. Arvasi ve Ulualan bağlantılı 3- tip homotopiler için bu cebirsel modeller arasındaki ilişkileri gösterdi.

Bir simplisel grubun Moore kompleksinin ekstra yapısı üzerindeki en genel araştırma, Dold-Kan teoreminin değişmeli olmayan versiyonunu oluşturmak için, Carrasco-Cegarra (Carrasco-Cegarra, 1987) tarafından verildi. Bu çalışmaların çok daha geneli Bourn (Bourn, 2007) tarafından verildi. Carrasco-Cegarra, hiper çaprazlanmış kompleks kavramını vererek, böyle hiper çaprazlanmış kompleksler kategorisinin simplisel gruplar kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Eğer n boyuttaki hiperçaprazlanmış modüller truncated edilirse, Duskin (Duskin, 1975), Glenn (Glenn, 1982) tarafından grupların n boyutta hiper grupoidlere denk bir kategoriden n hiper kompleksleri ile sonuçlanan yüksek boyuttaki terimleri atılır ve n – tipleri için cebirsel modeller elde edilir.

$n = 1$ için 1-hiperçaprazlanmış kompleks, bir çaprazlanmış modül verirken 2-hiperçaprazlanmış kompleks kategorisinin bir alt kategorisi ile Conduché tarafından verilen, 2-çaprazlanmış modül kategorisine denktir.

Mutlu –Porter (Mutlu –Porter,1998) bir simplisel grubu içindeki pifer çiftleri yapısını gösterdiler. Homotopi tipleri için cebirsel modellerin incelenmesinde bu yapıyı kullandılar. Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu (Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu, 2009) yaptıkları çalışmalarında 4-tip homotopi için bir model olarak 3-çaprazlanmış model kavramını tanımlamışlardır. Bizde bu çalışmamızda Inassaridze tarafından tanımlana pseudosimplisel grup ve Akça ve Pak tarafından tanımlana pseudo 2- çaprazlanmış modülünü kullanarak pseudo 3 –çaprazlanmış kavramını tanımlayarak, Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu (Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu, 2009) tarafından tanımlana 3 – çaprazlanmış modül kavramı arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bu çalışmada öncelikle Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu yaptıkları çalışmadan çok faydalandık. Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu yaptıkları bu çalışmada, bir simplisel grubun Moore kompleksi içindeki pifer çiftlerinden ve Conduché (Conduché, 1984) çalışmalarından faydalanmışlardır. 3-hiperçaprazlanmış komplekslere denk olan Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan simplisel gruplar kategorisi ile 3-çaprazlanmış modüller kategorisinin denk olduğunu göstermişlerdir.. Böylece 4-tip homotopi (bağlantılı) tipleri için yeni bir cebirsel model elde etmişlerdir.

Sonuç olarak pseudo 3-çaprazlanmış modüller kategorisi ile 3-çaprazlanmış modüller kategorisinin denk olduğu görülmüştür.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Kategori Teoriye Giriş

Kategori teorisi, ilk olarak S.Mac Lane ve S.Eilenberg (S.Mac Lane and S.Eilenberg, 1988) tarafından oluşturulmuştur. Kategori teorisi için hazırlanmış en önemli kaynaklardan biride, Saunders Mac Lane tarafından yazılmış olan "Categories for the Working Mathematician" isimli kitaptır. Kategori teori genel olarak bir monoidin genelleştirilmiş bir çeşidi olarak göz önüne alınabilir.

2.1.1. Kategoriler

Tanım 2.1.1. Bir kategori aşağıdaki şartları sağlayan objelerin bir sınıfı olup, genelde C ile gösterilir. Kategorinin tanımı verilenler ve istenenler olmak üzere iki bölümden oluşur.
Bir kategoriyi oluşturabilmek için;

Verilenler:

1) Obje olarak isimlendirilen $X, Y, Z, \cdots$ elemanlara,

2) Morfizm olarak isimlendirilen objeler arasındaki dönüşümlere,

$$Mor_C(X,Y) = \{f \mid f: X \to Y\}$$

3) C nin herhangi X, Y, Z objeleri için $(f, g) \to gof$ ile tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan morfizmlerin birleşiminin kullanılmasında

$$Mor_C(X,X) \times Mor_C(Y,z) \to Mor_C(X,Z)$$

Dönüşümü vardır.

İstenenler:

a. $Mor_C(X,Y)$ nin elemanları için o bileşke işlemi altında özdeşlik dönüşü olan $id_x \in Mor_C(X,X)$ ve $id_y \in Mor_C(Y,Y)$ morfizmi var ve bu morfizm aynı zamanda $Mor_C(X,Y)$ ‘in elemanları için o elemanları için birmdir.

b. Birleşme özelliğine sahiptir. Yani:komütatif yani,

$$ho(gof) = (hog)0f$$

Not : Tanımdaki o sembolü fonksiyonun bileşke işlemi olarak kuıllanılsa da buradaki $Mor_C(X,Y)$ kümesi dönüşümlerin bir kümesi olması gerekmez.

Sonuç olarak bir kategoriyi tanımlayabilmek için,

1. Objeler sınıfı
2. Morfizimler kümesi
3. Morfizimlerin bileşke işlemi

belirtmemiz gerekir.

Örnek 2.1.1. Gruplar kategorisini $C = Grp$ ile gösterelim. Objelerimiz tüm gruplar, morfizimlerimiz ise bilinen grup homomorfizimleri ve o işlemi de dönüşümlerin bileşke işlemi alınarak Gruplar kategori oluşturulabilir.

Örnek 2.1.2. Topolojik uzaylar kategorisi, $C = Top$ ile gösterelim. Burada objeler olarak tüm topolojik uzaylar, morfizimler olarak sürekli fonksiyonlar ve morfizmlerin birleşimi ile olarak da adi anlamda sürekli fonksiyonların bileşkesi alınarak topolojik uzaylar kategorisi oluşturulabilir.

Örnek 2.1.3. Sol $R - mod$ kategorisini $C =_R Mod$ ile gösterelim. Objeler olarak sol R modüller, morfizimleri $R - modül$ homomorfizmaları ve bileşek işlemi olarak da adi anlamda sürekli fonksiyonların bileşkesi alınarak. Sol $R - modül$ kategorisi elde edilir. Burada R birimli bir halka ise R üzerinde bir M sol- modülü toplamsal bir değişmeli grup olmakla birlikte

$$R \times M \to M$$
$$(r, m) \to r \cdot m$$

İle tanımlı R nin M üzerindeki etkisi olmak üzere $\forall x, y \in M,\ \forall r, s \in R$ için

1. $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
2. $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
3. $(r \cdot s)x = r \cdot (sx)$
4. $1_R x = x$

Şartları sağlanır.

2.1.2. Funktorlar

İki kategori arasındaki dönüşümlerden bahsetmek gerektiğinde iki kategori arasındaki dönüşümlere Funktor adını verip aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Tanım 2.1.2.1 C ve D iki kategori olsun. $X, Y \in ObjC$ ile C kategorisinin herhangi bir $X\ ve\ Y$ objeleri gösterilmek üzere,

$$F : C \to D$$

Dönüşümü için,

1. $X \in ObjC$ ise $F(X) \in ObjD$
2. $Mor_C(X,Y) = \{f | f : X \to Y\}$ ise, $Mor_D(FX, FY) = \{Ff | f : FX \to FY\}$

Özelliklerini dikkate alarak;

i. $F(fog) = F(f)oF(g)$

ii. $id_X \in Mor(X,X)$ ise, $F(id_X) = id_{F(X)}$
Şartları sağlanıyorsa F morfizmine C kategorisinden D kategorisine bir funktor denir.

Örnek 2.1.2.1. C bir kategori olsun. $I_C : C \to C$ dönüşümü C kategorisinin objelerini ve morfizimlerini kendisine eşleyecek şekilde tanımlarsak, bu durumda,

$X, Y \in ObjC$ için $I_C(X) = X$ ve $f \in Mor_C$ olmak üzere $f: X \to Y$ $I_C(f) = f$ olarak alırsak

$$I_C(fog) = I_C(f)oI_C(g) \text{ ve } I_C(id_X) = id_X = id_{I_C(X)}$$

Olup I_C funktordur ve bu funktora özdeşlik funktoru denir.

Tanım 2.1.2.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $a, b \in X$ olsun. $\alpha(0) = a$ ve $\alpha(1) = b$ olacak şekilde sürekli bir $\alpha: [0,1] \to X$ fonksiyonuna X de a dan b ye bir eğri denir. $\alpha(0) = \alpha(1)$ ise bu durumda α eğrisine kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.2.3. Bir (X,τ) topolojik uzayında $\alpha, \beta: [0,1] \to X$ fonksiyonu a dan b ye iki eğri olsun. Eğer

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \alpha(s) \\ F(s,1) &= \beta(s) \\ F(0,t) &= a \\ F(1,t) &= b \end{aligned}$$

$0 \le s \le 1$ ve $0 \le t \le 1$ için, yukardaki şartları sağlayan sürekli bir,

$$F: [0,1] \times [0,1] \to X$$

Fonksiyonu varsa α ve β eğrileri uç noktalarına göre homotopik denir ve $\alpha \simeq \beta$ şeklinde gösterilir. Böyle bir F fonksiyonuna da bir homotopi denir.

Tanım 2.1.2.4. (X,τ) bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. (X,τ) uzayın da a dan a ya tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\pi_1(X,a)$ olmak üzere, $\pi_1(X,a)$ kümesi,

$$\begin{aligned} \pi_1(X,a) \times \pi_1(X,a) &\to \pi_1(X,a) \\ ([\alpha],[\beta]) &\mapsto [\alpha][\beta] = [\alpha\beta] \end{aligned}$$

İşlemine göre bir grup olup, bu gruba a noktasındaki temel grup denir.

Tanım 2.1.2.5. *R* bir halka olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $k, k_1, k_2 \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (k,m) & \to & rm \end{array}$$

Çarpımı ve

$$k(m_1 + m_2)=km_1+km_2$$
$$(k_1 + k_2)m=k_1m+k_2m$$
$$(k_1k_2)m= k_1(k_2m)$$

koşullarını sağlayan bir *M* toplamsal abelyan gruba sol **R modül** denir.

Örnek 2.1.2.2. *R* bir halka olmak üzere, herhangi bir *A* abelyan grubu $r \in R$, $a \in A$ için

$$\begin{array}{ccc} R \times A & \to & A \\ (r,a) & \to & mk=0 \end{array}$$

Şeklinde *R* modül yapısı oluşturur.

Tanım 2.1.2.6. *R* birimli bir halka, *M* bir *R* modülü şeklinde her $m \in M$ için;

$$1_R m=m$$

ise *M* ye **birimli *R* modül** denir.

Tanım 2.1.2.7. *M* birimli sol (sağ) R modül bir R bazına sahipse *M* ye serbest sol (sağ) R modül denir.

Tanım 2.1.2.8. *M* ve *N* iki *R* modül olmak üzere;

$$f:M\to N$$

fonksiyonu her $a,b \in M$ ve $r \in R$ için

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(ra)=rf(a)$$

koşulları sağlanıyorsa

$$f: M\to N$$

ifadesine bir *R* modül homomorfizmi denir.

Tanım 2.1.2.9. Alt Modül: *M*, *R* modül olsun. *M'*, M nin alt grubu olmak üzere $m' \in M'$ ve her $r \in R$ için r $m' \in M'$ ise *M'* ye *M* nin bir alt modülü denir.

Tanım 2.1.2.10. R , birimli bir halka, M ve N de birer $R-modül$ ve $f: M \to N$ fonksiyon tanımlansın.

Her $x, y \in M$ ve $a \in R$ için

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(ax) = af(x)$$

Olacak şekildeki f fonksiyonuna bir $R - modül\ morfizmi$ denir.

Teorem 2.1.2.1. f , g fonksiyonları $f: M \to N$ ve $g: N \to K$ birer R modül morfizmi ise $gf: M \to K$ bileşkesi de bir R modül morfizmidir.

Tanım 2.1.2.11. X boştan farklı bir küme, X de $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ şeklindeki sonlu dizilerin kümesi $F(X)$ olsun.

$$f: X \to F(X)$$

$$x \longmapsto (x)$$

Şeklinde tanımlı f fonksiyonu olsun.

$$(x_1, x_2, \cdots x_n), (y_1, y_2, \cdots y_m) \in F(X) ,$$

$$(x_1, x_2, \cdots x_n)(y_1, y_2, \cdots y_m) = (x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_m)$$

İşlemine göre $F(X)$, bir yarı grup olup, bu yarı gruba X üzerindeki free yarı grup denir.

Tanım 2.1.2.12. Bu X ve $\bar{X}$ herhangi iki küme, f birebir ve örten bir fonksiyonu;

$$f: X \to \bar{X}$$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

Şeklinde tanımlansın. $M = X \cup \bar{X}$ olmak üzere tanımlanan M kümesinin elemanları genelde harflerdir. M nin elemanlarının yan yana getirilmesi ile oluşturulan kümelerin kümesini G ile gösterelim. Yani;

$$G = \{g : g = m_1 m_2 \cdots m_n , 1 \leq i \leq n, m_i \in M\}$$

Olsun. G üzerinde $x\bar{x}$ ve $\bar{x}x$ biçimindeki ifadeler eklenerek veya atılarak birinden diğeri elde edilen kelimeleri denk olarak kabul eden bağıntı bir denklik bağıntısı olup. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ olsun. $u, v \in G$ olmak üzere $[u][v] \in F(X)$ ise $u = m_1 m_2 \cdots m_n$ ve $v = l_1 l_2 \cdots l_k$

$$[u][v] = [m_1 m_2 \cdots m_n l_1 l_2 \cdots l_k]$$

$F(X)$ üzerinde bir grup işlemi tanımlayalım. Bu işlem iyi tanımlı olup $F(X)$ bir grup olup, bu şekilde elde edilen $F(X)$ grubuna X üzerindeki free grup denir.

Örnek 2.1.2.3. $X = \{a\}$ tek nokta kümesi olsun. X üzerindeki free grup $F(X) = \{a^n, \bar{a}^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ olur . Bu ise $(\mathbb{Z}, +)$ ya izomorftur.

Tanım 2.1.2.13.

G bir grup ve *S* herhangi bir küme olmak üzere, her $x \in S$, $g_1 g_2 \in G$ için

$$G \times S \to S$$
$$(g, x) \longmapsto g_x$$

fonksiyonu

$$e_x = x \quad \text{ve} \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

verilen eşitlik doğrulanıyorsa bu fonksiyona *G* grubunun *S* kümesi üzerindeki sol etkisi ismi verilir. Sağ etki ise x_g olarak gösterilir.

2.2. $\Delta[n]$ Kategorisi

$\Delta[n]$ kategorisi, objeleri $n \geq -1$ özelliğindeki bir tamsayı olmak üzere, sıralı bir küme $[n] = \{0 < 1 < 2 < ... < n\}$ olsun. Burada $[-1]$ elemanı ise boş küme olarak alınır. Her bir sıralı kümeyi de küçük kategori olarak düşünebiliriz. $\Delta[n]$, Morfizmleri küçük kategoriler arasındaki operatör olarak adlandıracağımız bir kategori tanımlayacağız ve bu kategoriyi de $\Delta[n]$ ile göstereceğiz.

İlk olarak iki özel operatörü aşağıdaki gibi tanımlayalım;

i) $\delta_i^n : [n-1] \to [n]$ operatörü $0 \leq i \leq n \neq 0$ için

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & x < i \text{ iken} \\ x+1 & x \geq i \text{ iken} \end{cases}$$

ii) $\sigma_j^n : [n+1] \to [n]$ operatörü $0 \leq j \leq n$ için

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x & x \leq j \text{ iken} \\ x-1 & x > j \text{ iken} \end{cases}$$

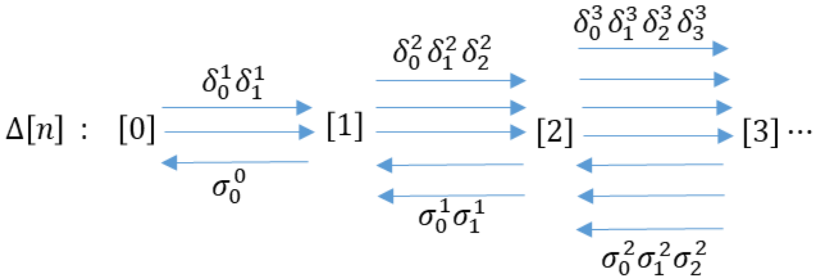
Her bir $f : [n] \to [m]$ operatörü δ_i ve σ_i lerin çeşitli bileşkelerinden oluşur.

Herhangi iki $[n]$ ve $[m]$ sıralı kümeleri için; $f : [n] \to [m]$ operatörünü göz önüne alalım. $[m]$de açıkta kalan öğeler $i_1, i_2, ..., i_n$ olsun. Bunların büyükten küçüğe sıralanışı $i_n \geq i_{n-1} \geq ... \geq i_1$ olsun. Yine f operatörü altında $j_i \in [n]$ olmak üzere $f(j) = f(j+1)$ özelliğine sahip öğeler $j_1, j_2, ..., j_n$ olsun. Bunların küçükten büyüğe sıralanışı $j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_n$ olmak üzere;

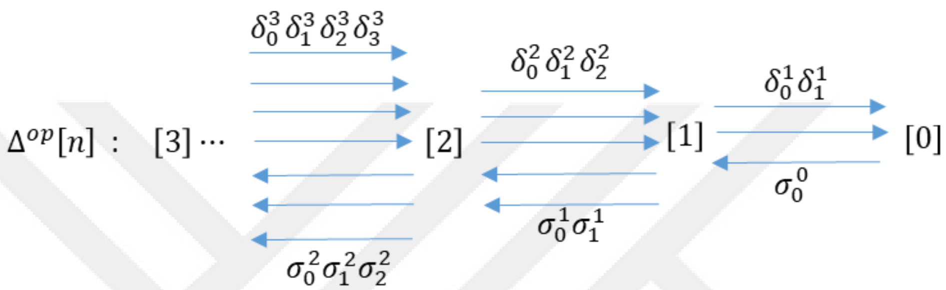
$$f = \delta_{i_n} \circ \delta_{i_{n-1}} \circ ... \circ \delta_{i_1} \circ \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ ... \circ \sigma_{j_n}$$

şeklinde adi anlamda bileşke olarak tanımlanabilir.

$\Delta[n]$ kategorisini:



şeklinde tanımlanırken, $\Delta^{op}[n]$ kategorisi tanımlamak için ise objeler aynı kalmak şartıyla morfizmlerin yönünü ters çevirerek elde ederiz. Yani



olur. Bu δ_i ve σ_j operatörleri simplisel özellikleri sağlar.

Tanım 2.2.1. C bir kategori olsun. C nin objelerini aynen almak suretiyle, morfizmlerinin yönünü ters çevirerek yeni bir kategori elde ederiz. bu kategoriye C nin oppozit veya dual kategorisi denir ve C^{op} ile gösterilir.

Simplisel özellikler

1. $\delta_i^{n+1}\circ\delta_j^n=\delta_{j+1}^{n+1}\circ\delta_i^n \qquad i\le j$
2. $\sigma_j^n\circ\sigma_i^{n+1}=\sigma_j^n\circ\sigma_{j+1}^{n+1} \qquad i\le j$
3. $\sigma_j^n\circ\delta_i^{n+1}=\delta_i^n\circ\sigma_{j-1}^{n-1} \qquad i<j$
4. $\sigma_j^n\circ\delta_i^{n+1}=id \qquad i=j$ veya $i=j+1$
5. $\sigma_j^n\circ\delta_i^{n+1}=\delta_{i-1}^n\circ\sigma_j^{n-1} \qquad i>j+1$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Pseudosimplisel Gruplar

Bir pseudosimplisel G grubu $\partial_i^n: G_n \to G_{n-1}$, $0 \leq i \leq n,\ n \neq 0$ yüz homomorfizmleri ve $s_i^n: G_n \to G_{n+1},\ 0 \leq i \leq n$ pseudo dejenere operatörleri ile birlikte $\{G_n\}$'den oluşup, aşağıdaki özellikler sağlar:

$$\partial_i^{n-1}\partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1}\partial_i^n, \qquad i < j$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = s_{j-1}^{n-1}\partial_i^n, \qquad i < j$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = 1 = \partial_{i+1}^{n+1}s_j^n$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = s_j^{n-1}\partial_{i-1}^n, \qquad i > j+1$$

Burada G_n grupları değişmeli olmak zorunda değildir. Yukardaki şartlara ilave olarak,

$$s_i^{n+1}s_j^n = s_{j+1}^{n+1}s_i^n \quad i \leq j \text{ için.}$$

Şartınıda verirsek Simplisel grupları elde ederiz. Sonuç olarak, her simplisel grup bir pseudosimplisel grup demektir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Herhangi $\boldsymbol{G}$ pseudosimplisel grubu, $NG_n = G_n \cap Çek\partial_0^n \cap \ldots Çek\partial_{n-1}^n$, $n \geq 0$ alalım ve d_n de ∂_n^n den NG_n'e $(n > 0)$ kısıtlanmışı olsun. Daha sonra imd_n, G_{n-1}in normal altgrubu ve $n > 0$ için $imd_{n+1}Çek \subset d_n$ dir. Bu $\mathbf{NG} = \{NG_n, d_n\}$ Moore kompleksini belirler. Açıkça $\mathbf{NG}$, yüz homomorfizmlere bağlı, pseudo dejenerelerden bağımsızdır.

$\mathbf{G}$ pseudosimplisel grubunun $(n \geq 0)$ $\pi_n(\mathbf{G})$ $n-$boyutlu homotopi grubu $\mathbf{NG}$ Moore kompleksinin $n-$boyutlu homoloji grubu olarak adlandırılır.

$f: \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ bir dönüşümü doğal biçimde $\pi_n(\mathbf{f}): \pi_n(\mathbf{G}) \to \pi_n(\mathbf{G}')$ homomorfizmlerini bilinen dönüşümlerdir. $\mathbf{f}$ ve $\boldsymbol{g}$, $\mathbf{G}$'den $\mathbf{G}'$'ne iki dönüşüm olsunlar. Inassaridze (Inassaridze, 1975)'dan dolayı aşağıdaki tanımı verebiliriz. $h_i^n: G_n \to G'_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$ homomorfizmleri varsa, öyle ki

$$\partial_0^{n+1}h_0^n = f_n \qquad \partial_{n+1}^{n+1}h_n^n = g_n,$$

$$\partial_i^{n+1}h_j^n = h_{j-1}^{n-1}\partial_i^n \qquad i < j \text{ için,}$$

$$\partial_{j+1}^{n+1}h_{j+1}^n = \partial_{j+1}^{n+1}h_j^n,$$

$$\partial_i^{n+1}h_j^n = h_j^{n-1}\partial_{i-1}^n \qquad i > j+1 \text{ için}$$

şartlar altında $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{g}$'ye pseudohomotopiktir.

$\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$ homotopik ise ;

$$s_i^{n+1}h_j^n = h_{j+1}^{n+1}s_i^n \ \text{ için } i < j,$$

$$s_i^{n+1}h_j^n = h_j^{n+1}s_{i-1}^n \text{ için } i > j \quad \text{dir.}$$

Teorem 3.1.1. $n \geq 1$ için $\pi_n(\mathbf{G})$ homotopi grupları değişmelidir. Eğer $f: \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ dönüşümü, bir dönüşüme pseudohomotopik ise, bu durumda

$$\pi_n(\mathbf{f}) = \pi_n(\mathbf{g}) \quad n \geq 0 \text{ dir.}$$

Pseudosimplisel grupların $f: \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ dönüşümü

$$f_{n+1} s_i^n = s_i^n f_n \,, \quad 0 \leq i \leq n \,, \ n \geq 0$$

şartını sağlarsa simplisel olarak adlandırılır (Inassaridze (Inassaridze, 1975).

3.2. Moore Kompleksi

$\boldsymbol{G}$ bir pseudosimplisel grup,

$$(\boldsymbol{NG_n}) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{Kerd_i^n}$$

Olmak üzere,

$$(NG, \partial) \ : \ \cdots \longrightarrow NG_1 \xrightarrow{d_2} NG_1 \xrightarrow{d_1} NG_0$$

Zincir kompleksine $\boldsymbol{G}$ grubunun Moore kompleksi denir ve $(\boldsymbol{NG}, \boldsymbol{\partial})$ ile gösterilir.

Burada $\partial_n : NG_n \to NG_{n-1}$, d_n^n ile tanımlı dönüşümdür. $NG_0 = G_0$, , $NG_1 = Kerd_0^1$, $NG_2 = Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2$, $NG_3 = Kerd_0^3 \cap Kerd_1^3 \cap Kerd_0^3 \cdots$ dir.
G pseudosimplisel grubunun n. Homotopi modülü $\pi_n(G)$, G nin Moore kompleksinin n. Homolojisi ile verilir. Yani;

$$\pi_n(G) \cong H_n(NG, \partial) = \frac{\bigcap_{i=0}^{n} Kerd_i^n}{d_{n+1}^{n+1}\left(\bigcap_{i=0}^{n} Kerd_i^{n+1}\right)}$$
$$= \frac{NG_n \cap Kerd_n^n}{d_{n+1}^{n+1}(NG_{n+1})}$$

Şeklindedir. Buna göre G pseudosimplisel grubunun 0. Homotopi modülü.

$$\pi_0(G) = \frac{NG_0}{d_1(NG_1)} = \frac{G_1}{d_1(NG_1)}$$

1 . homotopi modülü;

$$\pi_1(G) = \frac{NG_1 \cap Kerd_1^1}{d_2(NG_2)} = \frac{NG_1 \cap Kerd_1^1}{Kerd_0^1 \cdot Kerd_1^1} = \frac{Kerd_0^1 \cap Kerd_1^1}{Kerd_0^1 \cdot Kerd_1^1}$$

olur.

Bir G pseudosimplisel grubunda k dan büyük n ler için G_n grupları sıfır grubu ise bu pseudosimplisel gruba $k-truncated$ pseudosimplisel grup denir. Bir $k-truncated$ pseudosimplisel grup $tr_k G$ ile gösterilir.

$$tr_k : PseudosimpGrp \rightarrow Tr_k PseudosimpGrp$$

Şeklinde bir truncation funktoru vardır. Bu funktorun bir sağ adjoint funktoru

$$Cosk_k : Tr_k PseudosimpGrp \rightarrow PseudosimpGrp$$

$k-coskeleletonu$ ve bir sol adjoint funktoru;

$$sk_k : Tr_k PseudosimpGrp \rightarrow PseudosimpGrp$$

$k-skeletonu$ vardır.

Kabul edelim ki $tr_k(G) = \{G_0, G_1, \cdots, G_k\}$ bir $k-truncated$ simplisel grubu olsun.

$$\begin{tikzcd} X_{k+1} \arrow[r, shift left=3, "\delta_{k+1}"] \arrow[r, shift right=3, "\delta_0"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & G_k \arrow[r, shift left=3, "d_k"] \arrow[r, shift right=3, "d_0"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & G_{k-1} \cdots \end{tikzcd}$$

δ_i -$k+2$ tane homomorfizm ailesini göz önüne alalım. S başka bir grup ve

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, shift left=3, "x_{k+1}"] \arrow[r, shift right=3, "x_0"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & G_k \end{tikzcd}$$

başka bir homomorfizmler ailesi olsun

$$\begin{tikzcd} X_{k+1} \arrow[r, shift left=2, "\delta_{k+1}"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "\delta_0"'] & G_k \\ & S \arrow[u, shift right=2, "x_{k+1}"] \arrow[u, shift left=2, "\cdots"'] \arrow[ul, bend left, "x"] \end{tikzcd}$$

$\delta_i x = x_i$ olacak şekilde bir tek $x: S \to X_{k+1}$ homomorfizmi varsa $(\delta_0, \cdots, \delta_{k+1})$ homomorfizm ailesine X_{k+1} ile birlikte $(d_0, d_1, \cdots, d_k)$ yüz oparatörlerinin simplisel çekirdeği adı verilir. Şimdi $(\alpha_{k+1,j}, \cdots, \alpha_{0,j})$ homomorfizmleri ile birlikte bir $k - truncated$ simplisel grubunun X_{k+1} simplisel çekirdeğini gözönüne alalım. Eğer $\alpha_{k+1,j}, \cdots, \alpha_{0,j}$, $k+2$ tane grup homomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} s_{j-1} d_i & ; \quad i < j \\ id & ; \quad i = j \ \ veya \ \ i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & ; \quad i > j+1 \end{cases}$$

Bu durumda $d_0, \cdots, d_k$ ve $s_0, \cdots, s_{k-1}$ oparatörleri ile $\alpha_{i,j}$ oparatörleri pseudosimplisel özdeşlikleri sağlar. $s_j: G_k \to X_{k+1}$ ile $\delta_i s_j = \alpha_{ij}$ tanımlı tek bir homomorfizm vardır. Böylece

$$\{G_0, G_1, \cdots, G_k, X_{k+1}\}$$

$\alpha_{i,j}$ homomorfizmleri ile birlikte bir $k+1 - turuncated$ pseudosimplisel grup elde edilir. İşleme devam edilerek:

$$Cosk_k(tr_k(G)) = \{G_0, G_1, \cdots, G_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots\}$$

Şeklinde bir pseudo simplisel grup elde edilir. Bu simplisel gruba, $k - truncated$ pseudosimplisel grubun $coskeletonu$ adı verilir.

Teorem 3.2.1. G bir pseudosimplisel grup olsun $Cosk_k(tr_k(G))$ $k - coskeletonun$ Moore kompleksinin boyutu $k+1$ dir. Yani,

$$N\left(Cosk_k(tr_k(G))\right)_i = 0 \qquad i > k+1$$

içindir. $i < k+1$ ise;

$$N\left(Cosk_k(tr_k(G))\right)_i = (NG)_i$$

$$N\left(Cosk_k(tr_k(G))\right)_{k+1} = Ker(\partial_k: NG_k \to NG_{k-1})$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.1.1. $tr_2(G) = \{G_0, G_1, G_2\}$ şeklindeki bir $2 - truncated$ pseudosimplisel grubunu gösterelim.

$$Cosk_2\big(tr_2(G)\big) = G'$$

dersek, bu durumda $k = 2$ olup;

$$
\begin{aligned}
&NG_0' = NG_0,\\
&NG_1' = NG_1,\\
&NG_2' = NG_2,\\
&NG_3' = Ker(\partial_3 : NG_3 \to NG_2),\\
&NG_4' = 0,\\
&NG_5' = 0,
\end{aligned}
$$

Tanım 3.2.1.1.

$[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$ sıralı kümesi ve

$$\delta_i^n : [n-1] \to [n], \quad 0 \le i \le n$$

olmak üzere

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < i \\ x+1 & ; \quad x \ge i \end{cases}$$

birebir dönüşümlerini ve,

$$\alpha_i^n : [n+1] \to [n], \quad 0 \le j \le n$$

$$\alpha_i^n(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \le j \\ x-1 & ; \quad x > j \end{cases}$$

örten dönüşümlerini göz önüne alalım. $0 \le r \le n$ olmak üzere; $S(n, n-r)$ kümesi $[n]$ den $[n-r]$ ye tanımlı f operatörlerinin bir kümesi olsun. Bu durumda f, α_j lerin bir bileşkesi olarak yazılabilir. Bu bileşke $j < i$ için

$$\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j$$

kuralına bağlı olup, bu kural pseudosimplisel özdeşliklerden elde edilir. $f \in S(n, n-r)$ operatörü;

$$f = \alpha_{i_1} o \alpha_{i_2} o \cdots o \alpha_{i_r}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n-1$ indisleri $[n]$ nin elemanları olup;

$$\{i_1, \cdots, i_r\} = \{i : f(i) = f(i+1)\}$$

formundadır. Böylece $S(n, n-r)$ nin bir öğesi,

$$\{i_1, \cdots, i_r\} \ ; \ 0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n-1$$

ile belirlenir.

$S(n,n)$ nin tek öğesi özdeşlik dönüşümüdür ve $(\quad)$ ile veya $\emptyset_n$ ile gösterilir.
$S(n,0)$ ın tek öğesi $(n-1, n-2, \cdots, 0)$ dır.
$n \ge 0$ için

$$S(n) = \bigcup_{0 \le r \le n} S(n, n-r)$$

olsun.
$\alpha = \{i_r, \cdots, i_1\}$ ve $\beta = \{j_s, \cdots, j_1\}$, $S(n)$ de iki öğe olsun. $\alpha < \beta$ olması için,
$i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_k = j_k$, fakat $i_{k+1} = j_{k+1}$ olmalı veya $r < s$ için
$i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_r = j_r$ olmalıdır.

Bu sıralama , $S(n)$ bir sıralı küme yapar.

$n = 2$ için $S(2) = S(2,2) \cup S(2,1) \cup S(2,0)$ dir.
$S(2,2)$ nin tek öğesi $f: [2] \to [2]$ identity dönüşümü olup, $\emptyset_2$ ile gösterilir.
$S(2,1)$ nin bir öğesi $f: [2] \to [1]$ olsun. Bu durum da

$[2]$ de $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n-1 = 1$ olacak şekilde $i_1 = 0$ ve $i_2 = 1$ elemanları vardır.
$[1]$ de 0 ve 1 elemanları ayrı ayrı tekrar edebilir. Yani 0 ve 1 ikisi de aynı anda tekrar etmez, dolayısıyla $f = \sigma_0': [2] \to [1]$ veya $f = \sigma_1': [2] \to [1]$ olabilir. Yukarıdaki verilere göre;

f_1 için $f_1(0) = 0, f_1(1) = f_2(1) = 1$ ise ; $f_1 = \sigma_1'$ dir.
f_2 için $f_2(0) = 0, f_2(1) = 0,\ f_2(2) = 1$ ise ; $f_2 = \sigma_0'$ dir.

dolayısıyla $f = \sigma_1$ veya $f = \sigma_0$ olduğundan $S(2,1)$ in elemanları 0 ve 1 dır.
$S(2,0)$ ın tek öğesi $(1,0)$ dır. Gerçekten de;

$$f(1) = 0, f(2) = 0, f(0) = 0$$

olup;

$$[2] \xrightarrow{\sigma_1^1} [1] \xrightarrow{\sigma_0^0} [0]$$

Bu durumda; $f = \sigma_0^0 o \sigma_1^1$ dir. Çünkü

$$\sigma_0^0 o \sigma_1^1(1) = \sigma_0^0(0) = 0$$
$$\sigma_0^0 o \sigma_1^1(0) = \sigma_0^0(0) = 0$$
$$\sigma_0^0 o \sigma_1^1(2) = \sigma_0^1(1) = 0$$

olur. Bu durumda $\boldsymbol{f = \sigma_0^0 o \sigma_1^1}$ olduğundan$(\mathbf{1,0}) \in \boldsymbol{S}(\mathbf{2,0})$ dır. O halde;

$$S(2) = S(2,2) \cup S(2,1) \cup S(2,0)$$

$$= \{\emptyset_2, (1), (0), (1,0)\}$$

dır. Buradaki sıralamaya bakalım, $\emptyset_2$ hepsinden küçüktür. $1 > 0$ olduğunda $(1) < (0)$ dır. (0) ve $(1,0)$ için, $i_1 = j_1$ olup, $r < s$ için $(0) < (1,0)$ olur. Yani;

$$S(2) = \{\emptyset_2 < (1) < (0) < (1,0)\}$$

olur. Aynı şekilde devam edersek;

$S(3) = \{\emptyset_3 < (2) < (1) < (2,1) < (0) < (2,0) < (1,0) < (2,1,0)\}$

$$S(4) = \{\emptyset_4 < (3) < (2) < (3,2) < (1) < (3,1) < (2,1) < (3,2,1) < (0) < (3,0)$$
$$< (2,0) < (3,2,0) < (1,0) < (3,1,0) < (2,1,0) < (3,2,1,0)\}$$

3.3. Pseudosimplisel Gruplar

Tanım 3.3.1. G bir pseudosimplisel grup ve $n \geq 2$ için, $G_1, G_2, \cdots, G_n$, G nin alt grupları olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa G ye $G_1, G_2, \cdots, G_n$ lerin $n-$ yarıdirekt çarpımı denir.

- **i)** Her $1 \leq s \leq n$ için $G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_n$, G nin bir alt grubudur.
- **ii)** $G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_n = G$,
- **iii)** $1 \leq s < t \leq n$ için $(G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_s) \cap G_t = 1$ dir

Bunu $G = G_1 \rtimes G_2 \rtimes \cdots \rtimes G_n$ şeklinde gösteririz. Bu durumda $g \in G$ elemanı $g_i \in G_i$ olmak üzere

$$g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n$$

şeklinde tek bir açılıma sahiptir.

Teorem 3.3.1. G bir pseudosimplisel grup olsun. Bu durumda G_n grubu

$$G_n \cong Kerd_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(G_{n-1})$$

şeklinde yazılır.

İspat. Yani $x \in G_n$ ve $y \in Kerd_n^n$ ise; $x = y \cdot s_{n-1}^{n-1}(z)$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

$$\theta: G_n \to Kerd_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(G_{n-1})$$
$$g \mapsto (g^{-1}s_{n-1}d_n g, s_{n-1}d_n g)$$

Bir izomorfizimdir. Ayrıca

$$Kerd_n^n \cap_{s_{n-1}}^{n-1} (G_{n-1}) = 1$$

Bu tanımlamaya göre;

$$G_1 \cong NE_1 \rtimes s_0NE_0$$
$$G_2 \cong (NE_2 \rtimes s_1NE_1) \rtimes (s_0NE_1 \rtimes s_1s_0NE_0)$$

dir.

Tanım 3.3.2. G bir pseudosimplisel grup ve herhangi $n \geq 0$;

$$G_n \cong (\cdots (NG_n \rtimes s_{n-1}NG_{n-1}) \rtimes \cdots \rtimes s_{n-2} \cdots s_0NG_1) \rtimes (\cdots (s_{n-2}NG_{n-1} \rtimes s_{n-1}s_{n-2}NG_{n-2}) \rtimes \cdots \rtimes s_{n-1}s_{n-2} \cdots s_0\, NG_0)$$

Teorem 3.3.2. *G*, pseudosimplisel bir grup olsun. G_n yarı direkt ayrışımı;

$$G_n \cong Kerd_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(G_{n-1})$$

Bu multi yarı direkt çarpımın terimlerin sırası ve basamağı, sırayla üretilir.

$$G_1 \cong NG_1 \rtimes s_0NG_0$$

$$G_2 \cong (NG_2 \rtimes s_1NG_1) \rtimes (s_0NG_1 \rtimes s_1s_0NG_0)$$

$$G_3 \cong (NG_3 \rtimes s_2NG_2) \rtimes (s_1NG_2 \rtimes s_2s_1NG_1) \rtimes ((s_0NG_2 \rtimes s_2s_0NG_1) \rtimes (s_1s_0NG_1 \rtimes s_2s_1s_0NG_0)).$$

$$G_4 \cong (((NG_4 \rtimes s_3NG_3) \rtimes (s_2NG_3 \rtimes s_3s_2NG_2)) \rtimes ((s_1NG_3 \rtimes s_3s_1NG_2) \rtimes (s_2s_1NG_2 \rtimes s_3s_2s_1NG_1))) \rtimes s_0(G_3 in\ bir\ ayrışımı).$$

$\alpha = (i_l, \cdots i_1) \in S(n)$ karşılık gelen terim,

$$s_\alpha(NG_{n-\#\alpha}) = s_{i_l \cdots i_1}(NG_{n-\#\alpha}) = s_{i_l \cdots i_1}(NG_{n-\#\alpha})$$

Burada $\#\alpha = l$ dir.

Böylece herhangi bir $x \in G_n$, $y \in NG_n$ ve $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ olmak üzere

$$x = y \prod_{\alpha \in S(n)} s_\alpha(x_\alpha)$$

formunda yazılır.

3.4. Hyper Çarpaz Kompleks Çiftleri

Teorem 3.4.1. Dold-Kan Teoremi: Simplisel abelyen gruplar ile pozitif abelyen zincir kompleksleridenktir.

Carrasco ve Cegarra,(Carrasco ve Cegarra, 1991) Dold-Kan teoreminin abelyen olmayan versiyonunu vermişlerdir. Bu kısımda Conduché (Conduché, 1984), Mutlu ve Porter (Mutlu ve Porter, 1998) çalışmalarından faydalanılmıştır.

Elemanları $S(n)$ de olan $\alpha \cap \beta = \emptyset$ olan (α, β) çiftlerinin kümesi $P(n)$ olsun $\alpha = (i_r, \cdots, i_1)$ ve $\beta = (j_s, \cdots, j_1)$ alalım. $\#\alpha$, (α) nın öğe sayısı, $\#\beta$, (β) nın öğe sayısını göstermek üzere;

$$F_{\alpha,\beta} = NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \to NG_n$$

dönüşümü, aşağıdaki değişmeli diyagramdan elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\alpha} \arrow[r, "F_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "s_\alpha \times S_\beta"'] & NG_n \arrow[d, "p"] \\
G_n \times G_n \arrow[r, "\mu"'] & G_n
\end{tikzcd}$$

Yani $F_{\alpha,\beta} = p\mu s_\alpha \times s_\beta$ dır. Burada:

$$s_\alpha = s_{i_r}, \cdots s_{i_1} : NG_{n-\#\alpha} \to G_n$$

$$s_\beta = s_{j_s}, \cdots s_{j_1} : NG_{n-\#\beta} \to G_n$$

şeklindedir.

$$\mu : G_n \times G_n \to G_n$$
$$x \times y \mapsto x \cdot y$$
$$p : G_n \to NG_n$$

$p = p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_0$ dır ve $p_j(x) = x s_j d_j(x)^{-1}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ şeklinde tanımlıdırlar.

$x_\alpha \in G_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in G_{n-\#\beta}$ olmak üzere; NG_n içinde

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) = p\mu(s_\alpha \times s_\beta)(x_\alpha, y_\beta)$$
$$= p[s_\alpha x_\alpha, s_\beta y_\beta]$$

dır.

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

nın elemanları tarafından üretilen G_n nin N_n normal alt grubunu tanımlayabiliriz. Bu alt grubu $n=3$ ve $n=4$ için aşağıdaki gibi gösteriyoruz:

$n=3$ için mümkün Peifer çiftleri aşağıdaki gibidir:

$$F_{(1,0)(2)}, F_{(2,0)(1)}, F_{(0)(2,1)}, F_{(0)(2)}, F_{(1)(2)}, F_{(0)(1)}$$

Her $x_1 \in NG_1$, $y_2 \in NG_2$ için, N_3 karşılık gelen üreteçleri:

$F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) = [s_1 s_o x_1, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_o x_1]$

$F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) = [s_2 s_o x_1, s_1 y_2][s_1 y_2, s_2 s_1 x_1][s_2 s_1 x_1, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_0 x_1]$

ve her $x_2 \in NG_2$, $y_1 \in NG_1$

$F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) = [s_o x_2, s_2 s_1 y_1][s_2 s_1 y_1, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 y_2]$

ve her $x_2, y_2 \in NG_2$ için

$F_{(0)(1)}(x_2, y_2) = [s_o x_2, s_1 y_2][s_1 y_2, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 y_2]$

$F_{(0)(2)}(x_2, y_2) = [s_o x_2, s_2 y_2]$

$F_{(1)(2)}(x_2, y_2) = [s_1 x_2, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 x_2]$

N_4 için, eşlemeler aşağıdaki gibidir:

$F_{(0)(3,2,1)}$	$F_{(3,20)(1)}$	$F_{(3,1,0)(2)}$	$F_{(2,10)(3)}$	$F_{(3,0)(2,1)}$
$F_{(2,0)(3,1)}$	$F_{(1,0)(3,2)}$	$F_{(1)(3,2)}$	$F_{(0)(3,2)}$	$F_{(0)(3,1)}$
$F_{(0)(2,1)}$	$F_{(3,1)(2)}$	$F_{(2,1)(3)}$	$F_{(3,0)(2)}$	$F_{(3,0)(1)}$
$F_{(2,0)(3)}$	$F_{(2,0)(1)}$	$F_{(1,0)(3)}$	$F_{(1,0)(2)}$	$F_{(2)(3)}$
$F_{(1)(3)}$	$F_{(0)(3)}$	$F_{(1)(2)}$	$F_{(0)(2)}$	$F_{(0)(1)}$

N_4 normal alt grubunun üreteçleri,
her $x_1, y_1 \in NG_1$, $x_2, y_2 \in NG_2$ ve $x_3, y_3 \in NG_3$ kolaylıkla yazılabilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Pseudosimplisel Gruplar için Çaprazlanmış Modüller

Teorem 4.1.1. Çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin boyu 1 olan Pseudosimplisel gruplar kategorisine denktir (Arvasi and Porter , 1997)(Duskin, 1975).

İspat. G bir grup olsun, G Moore kompleksinin boyu 1 olan bir pseudosimplisel grup olsun. $P = NG_0 = G_0$, $M = NG_1 = çek(d_0 : G_1 \to G_0)$ ve $\partial = d_1$ (M'ye kısıtlanmış) olarak yerleştirelim. Böylece $p \in P$ nin $m \in M$ üzerine etkisi

$$ {}^{p}m = s_0(p) m s_0(p)^{-1}, $$

ve

$$ \partial({}^{p}m) = d_1(s_0(p) m s_0(p)^{-1}) $$

eşitlikleri ile verilir.

$$ \ldots \longrightarrow 1 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} P \longrightarrow 1 $$

Böylece Moore kompleksinin boyu 1 olduğu için $\partial_2 NG_2 = 1$ eşitliğini elde ederiz. Böylece her $m, m' \in M, p \in P$ için

(i) $$ \begin{aligned} \partial_1({}^{p}m) &= d_1({}^{p}m) \\ &= d_1(s_0(p) m s_0(p)^{-1}) \\ &= d_1 s_0(p) d_1(m) d_1 s_0(p)^{-1} \\ &= p \partial_1(m) p^{-1} \end{aligned} $$

(ii) $$ \begin{aligned} {}^{(\partial_1 m)}m' &= s_0 \partial_1(m) m' s_0 \partial_1(m)^{-1} \\ &= s_0 d_1(m) m' s_0 d_1(m)^{-1} \\ &= s_0 d_1(m) m' s_0 d_1(m)^{-1} [(m(m')^{-1} m^{-1})(m m' m^{-1})] \\ &= d_2 s_0(m) d_2 s_1(m') d_2 s_0(m)^{-1} d_2 s_1(m) \end{aligned} $$

$d_2 s_1(m')^{-1} d_2 s_1(m^{-1})(m m' m^{-1})$

$$ \begin{aligned} &= d_2\left(s_0(m) s_1(m') s_0(m)^{-1} s_1(m) s_1(m')^{-1} s_1(m)^{-1} (m m' m^{-1})\right) \\ &= m m' m^{-1} \end{aligned} $$

$m, m' \in M$ için, çünkü $s_0(m) s_1(m') s_0(m)^{-1} s_1(m) s_1(m')^{-1} s_1(m)^{-1} (m m' m^{-1})$, $\partial_2 NG_2$ nin elemanıdır ve birimdir. Böylece $\partial : M \longrightarrow P$ bir çaprazlanmış modül olur.

$\partial : M \to P$ çaprazlanmış bir modül olsun. P'nin M üzerine etkisi ile $M \rtimes P = \{(m,p) | m \in M, p \in P\}$ yarı direkt çarpımını kullanarak $m, m' \in M$ ve $p, p' \in P$ için

$$(m,p)\cdot(m',p') = \left(m\ {}^{p}m', pp'\right)$$

çarpımını oluşturalım.

Buradaki homomorfizmler

$$\begin{array}{ll} d_0 : M \rtimes P \to P & (m,p) \longmapsto p, \\ d_1 : M \rtimes P \to P & (m,p) \longmapsto (\partial m)p, \\ s_0 : P \to M \rtimes P & p \longmapsto (1,p), \end{array}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Diyelim ki $G_0 = P, G_1 = M \rtimes P$ olsun. 1-truncated G^1 ile gösterdiğimiz 1-coiskelet olan $\{G_0, G_1\}$ pseudosimplisel grubu elde ederiz. $M \rtimes P$ grubu, P'nin M üzerine etkisi ve d_1 homomorfizmi vasıtasıyla elde edilir. Böylece $M \rtimes (M \rtimes P)$ yarı direkt çarpımı ile aşağıdaki

$$\begin{array}{ll} d_0 : M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P & (m, m', p) \longmapsto (m', p), \\ d_1 : M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P & (m, m', p) \longmapsto (mm', p), \\ d_2 : M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P & (m, m', p) \longmapsto (m, (\partial m'), p), \\ s_0 : M \rtimes P \to M \rtimes (M \rtimes P) & (m,p) \longmapsto (1, m, p), \\ s_1 : M \rtimes P \to M \rtimes (M \rtimes P) & (m,p) \longmapsto (m, 1, p), \end{array}$$

homomorfizmlerini oluşturabiliriz.

Çaprazlanmış modülün (i) ve (ii) koşulları, bunların homomorfizm olmasını sağlar. Kabul edelim ki $G_2 = M \rtimes (M \rtimes P)$ olsun. Daha sonra G^2'ye göre verdiğimiz 2 coiskeleti olan 2-truncated $\{G_0, G_1, G_2\}$ pseudosimplisel grubunu elde ederiz. Boyu 0 olduğunda $G^2 \to G^1$ tek bir simplisel dönüşüm vardır ve 1 ise birimdir. $\overline{G}^2$, G^2'nin G^1'deki görüntüsüdür. G^2 Moore kompleksinin boyunun 2 olduğu aşikardır.

4.2. Pseudo 2-Çaprazlanmış Modülleri

Conduche (Conduché, 1984), 3. tipler için bir model olarak 2-çaprazlanmış modüllerden bahsetmiştir. Aşağıdaki tanım ise (Akça and Pak, 2010) den alınmıştır.

Tanım 4.1.1.1. Grupların aşağıdaki gibi bir kompleksini göz önüne alalım:

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

pseudo 2-çaprazlanmış modülü P'nin grup kompleksi ve P-gruplarının ∂_2, ∂_1 morfizmlerinden oluşur. Burada P grubu kendisine, M ve L'ye etki eder; öyle ki

$$L \xrightarrow{\partial_2} M$$

bir çaprazlanmış modüldür.

Böylece M , L üzerinde etki eder ve her $l \in L, m \in M$ ve $p \in P$ için

$$^{^{p}m}\left({}^{p}l\right) = {}^{p}\left({}^{m}l\right)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\{\ ,\ \} : M \times M \to L$$

"Peiffer lifting" dönüşümleri olarak adlandırılır ve her $l, l' \in L, m, m', m'' \in M$ ve $p \in P$ için,

P-2CM1) $\quad \partial_2\{m, m'\} = \left({}^{\partial_1 m}m'\right) m m'^{-1} m^{-1}$

P-2CM2) $\quad \{\partial_2 l, \partial_2 l'\} = [l', l]$

P-2CM3) (i) $\{mm', m''\} = {}^{\partial_1 m}\{m', m''\}\{m, m'm''m'^{-1}\}$

(ii) $\{m, m'm''\} = \{m, m'\}^{mm'm^{-1}}\{m, m''\}$

P-2CM4) (a) $\{\partial_2 l, m\} = {}^{m}l(l)^{-1}$,

(b) $\{m, \partial_2 l\} = \left({}^{\partial_1 m}l\right)\left({}^{m}(l)^{-1}\right)$

P-2CM5) $\quad \{m, \partial_2 l\}\{\partial_2 l, m\} = \left({}^{\partial_1 m}l\right)(l)^{-1}$

özellikleri sağlanır.

$\{L, M, P, \partial_2, \partial_1\}$ pseudo 2-çaprazlanmış modülünün, grup morfizmleri ile gruplar için pseudo 2-çaprazlanmış modül yapısını gösterebiliriz. 2-çaprazlanmış modül tanımını elde etmek için yukarıdaki koşullara

2CM6) $\quad {}^{p}\{m, m'\} = \{{}^{p}m, {}^{p}m'\}$

şartını da eklemeliyiz.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash, "\partial_2"] \arrow[d, dash, "f_2"'] & M \arrow[r, dash, "\partial_1"] \arrow[d, dash, "f_1"] & P \arrow[d, dash, "f_0"] \\
L' \arrow[r, dash, "\partial_2"] & M' \arrow[r, dash, "\partial_1"] & P'
\end{tikzcd}$$

Gruplar ve homomorfizmler yukarıdaki diyagram ile resmedilebilir, öyle ki

$f_0\partial_1 = \partial_1' f_1, f_1\partial_2 = \partial_2' f_2$ öyle ki

$$f_1({}^{p}m) = {}^{(f_0(p))}f_1(m), f_2({}^{p}l) = {}^{(f_0(p))}f_2(l)\text{'dır}$$

ve her $l \in L, m \in M, p \in P$ için,

$$\{\ ,\ \} = f_1 \times f_1 = f_2\{\ ,\ \},$$

Böylece, Pseudo 2-çaprazlanmış modülleri kategorisini $\mathfrak{p}\mathfrak{X}_2\mathfrak{Mod}$ şeklinde gösterebiliriz. f_1 ve f_2 morfizmleri eğer $f_0 = P$'nin birimi ile $P = P'$ ise eşittir.

Moore kompleks boyu 2 olan simplisel gruplar kategorisi 2-çaprazlanmış modüllere kategorisine denktir. Bu denklik, Conduche tarafından (Conduché, 1984)'da ispatlanmıştır. Şimdi aşağıdaki teoremde bu eşitliğin Pseudo versiyonu verilmiştir..

Teorem 4.2.1. Pseudo 2-çaprazlanmış modül kategorisi, Moore kompleksinin boyu 2 olan pseudosimplisel gruplar kategorisine denktir.

İspat. G Moore kompleks boyu 2 olan Pseudosimplisel grup olsun. Bir pseudo 2-çaprazlanmış modül yapısını oluşturalım.

$$P = G_0, M = \text{çek}(\partial_0 : G_1 \longrightarrow G_0),$$

ve

$$L = \text{çek}(\partial_0 : G_2 \longrightarrow G_1) \cap \text{çek}(\partial_1 : G_2 \longrightarrow G_1).$$

Böylece $p \in P$'nin, $m \in M$ üzerinde etkisi

$${}^{p}m = s_0(p)ms_0(p)^{-1},$$

$l \in L$ üzerindeki etkisi

$$^{\partial_1(m)}l = s_0(m) l s_0(m)^{-1}$$

ve $m \in M$'nin $l \in L$ üzerindeki etkisi

$$m \in M \; ^{m}l = s_1(m) l s_1(m)^{-1}$$

dır. $m, m' \in M$ için,

$$\{m, m'\} = s_0(m)s_1(m')s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}$$

verelim.

Diyelim ki $\partial_1 = d_1$(M'ye kısıtlanmışı) ve $\partial_2 = d_2$(L'ye kısıtlanmışı) olsun.

P-2CM1)
$$\begin{aligned}
\partial_2\{m, m'\} &= \partial_2(s_0(m)s_1(m')s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}) \\
&= \partial_2 s_0(m)\partial_2 s_1(m')\partial_2 s_0(m)^{-1}\partial_2 s_1(m)\partial_2 s_1(m')^{-1}\partial_2 s_1(m)^{-1} \\
&= \partial_2 s_0(m)m'\partial_2 s_0(m)^{-1}m(m')^{-1}(m)^{-1} \\
&= s_0 d_1(m)m' s_0 d_1(m)^{-1}m(m')^{-1}(m)^{-1} \\
&= mm'^{-1}m^{-1}.
\end{aligned}$$

P-2CM2)
$$\begin{aligned}
\{\partial_2 l, \partial_2 l'\} &= \{d_2 l, d_2 l'\} \\
&= s_0 d_2(l)s_1 d_2(l')s_0 d_2(l)^{-1}s_1 d_2(l)s_1 d_2(l')^{-1}s_1 d_2(l)^{-1} \\
&= d_3 s_0(l)d_3 s_1(l')d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)d_3 s_1(l')^{-1}d_3 s_1(l)^{-1} \\
&= d_3 s_0(l)d_3 s_1(l')d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)d_3 s_1(l')^{-1}d_3 s_1(l)^{-1} \\
&\qquad [l, l'][l', l] \\
&= d_3 s_0(l)d_3 s_1(l')d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)d_3 s_1(l')^{-1}d_3 s_1(l)^{-1} \\
&\qquad (ll'(l)^{-1}(l)^{-1})[l', l] \\
&= d_3 s_0(l)d_3 s_1(l')d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)d_3 s_1(l')^{-1}d_3 s_1(l)^{-1} \\
&\qquad d_3 s_2(l)d_3 s_2(l')d_3 s_2'(l)^{-1}d_3 s_2(l)^{-1}[l', l] \\
&= d_3(s_0(l)s_1(l')s_0(l)^{-1}s_1(l)s_1(l')^{-1}s_1(l)^{-1} \\
&\qquad s_2(l)s_2(l')s_2(l)^{-1}s_2(l)^{-1})[l', l] \\
&= [l', l],
\end{aligned}$$

$s_0(l)s_1(l')s_0(l)^{-1}s_1(l)s_1(l')^{-1}s_1(l)^{-1}s_2(l)s_2(l')s_2(l)^{-1}s_2(l)^{-1} \in \partial_3 NG_3$

P-2CM3) (i)

$$\{mm',m''\} = s_0(mm')s_1(m'')s_0(mm')^{-1}s_1(mm')s_1(m'')^{-1}s_1(mm')^{-1}$$

$$= s_0(m)s_0(m')s_1(m'')s_0(m')^{-1}s_0(m)^{-1}s_1(m)$$

$$s_1(m')s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}$$

$$= s_0(m)s_0(m')s_1(m'')s_0(m')^{-1}(s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}$$

$$s_0(m)^{-1})(s_0(m)s_1(m')s_1(m'')s_1(m)^{-1})$$

$$s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}$$

$$= s_0(m)s_0(m')s_1(m'')s_0(m')^{-1}(s_1(m)s_1(m'')^{-1}$$

$$s_1(m')^{-1}s_0(m)^{-1})(s_0(m)s_1(m')s_1(m'')s_1(m)^{-1}$$

$$s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$= {}^{\partial_1 m}\{m',m''\}(s_0(m)s_1(m'm''(m')^{-1})s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'm''(m')^{-1})^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$= {}^{\partial_1 m}\{m',m''\}\{m,m'm''(m')^{-1}\}.$$

(ii) $\{mm',m''\} = s_0(m)s_1(m'm'')s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m'm'')^{-1}s_1(m)^{-1}$

$$= s_0(m)s_1(m')s_1(m'')s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}$$

$$= s_0(m)s_1(m')(s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$\big(s_1(m)s_1(m')s_1(m)^{-1}s_0(m)\big)s_1(m'')s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1}$$

$$= (s_0(m)s_1(m')s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$(s_1(m)s_1(m')s_1(m)^{-1}s_0(m)s_1(m'')s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$= \{m,m'\}(s_1(m)s_1(m')s_1(m)^{-1}s_0(m)s_1(m'')s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'')^{-1}\big(s_1(m)^{-1}s_1(m)\big)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$= \{m,m'\}(s_1(m)s_1(m')s_1(m)^{-1}s_0(m)s_1(m'')s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m)^{-1}s_1(m)s_1(m')^{-1}s_1(m)^{-1})$$

$$= \{m,m'\}(s_1(mm'(m)^{-1})s_0(m)s_1(m'')s_0(m)^{-1}$$

$$s_1(m)s_1(m'')^{-1}s_1(m)^{-1}s_1(mm'(m)^{-1})^{-1})$$

$$= \{m,m'\}{}^{mm'm^{-1}}\{m,m''\}.$$

P-2CM4) (a) $\{\partial_2 l, m\} = s_0(\partial_2(l))s_1(m)s_0(\partial_2(l)^{-1})s_1(\partial_2(l))s_1(m)^{-1}s_1(\partial_2(l)^{-1})$

$= s_0 d_2(l)s_1(m)s_0 d_2(l)^{-1}s_1 d_2(l)s_1(m)^{-1}s_1 d_2(l)^{-1}$

$= d_3 s_0(l)s_1(m)d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)s_1(m)^{-1}d_3 s_1(l)^{-1}$

$(ls_0(m)l^{-1}s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}l^{-1})$

$= (d_3 s_0(l)d_3 s_2 s_1(m)d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)d_3 s_2 s_1(m)^{-1}d_3 s_1(l)^{-1}$

$d_3 s_2(l)d_3 s_2 s_0(m)d_3 s_2(l^{-1})d_3 s_2 s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}l^{-1})$

$= d_3(s_0(l)s_2 s_1(m)s_0(l)^{-1}s_1(l)s_2 s_1(m)^{-1}s_1(l)^{-1}s_2(l)$

$s_2 s_0(m)s_2(l^{-1})s_2 s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}l^{-1})^m l(l)^{-1}$

$s_0(l)s_2 s_1(m)s_0(l)^{-1}s_1(l)s_2 s_1(m)^{-1}s_1(l)^{-1}s_2(l)s_2 s_0(m)s_2(l^{-1})s_2 s_0(m)^{-1} \in \partial_3 NG_3$

(b) $\{m, \partial_2 l\} = s_0(m)s_1\partial_2(l)s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1\partial_2(l)^{-1}s_1(m)^{-1}$

$= s_0(m)s_1 d_2(l)s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1 d_2(l)^{-1}s_1(m)^{-1}$

$= (s_0(m)ls_0(m)^{-1})(s_1(m)(l)^{-1}s_1(m)^{-1})$

$= \left({}^{\partial_1 m} l\right)({}^{m}(l)^{-1}).$

P-2CM5) $\{m, \partial_2 l\}\{\partial_2 l, m\} = (s_0(m)s_1 d_2(l)s_0(m)^{-1}s_1(m)s_1 d_2(l)^{-1}s_1(m)^{-1})$

$\left(s_0 d_2(l)s_1(m)s_0 d_2(l)^{-1}s_1 d_2(l)s_1(m)^{-1}s_1 d_2(l)\right)$

$= (s_0(m)d_3 s_1(l)s_0(m)^{-1}s_1(m)d_3 s_1(l)^{-1}s_1(m)^{-1})$

$\left(d_3 s_0(l)s_1(m)d_3 s_0(l)^{-1}d_3 s_1(l)s_1(m)^{-1}d_3 s_1(l)\right)$

$(ls_0(m)(l)^{-1}s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}(l)^{-1})$

$= (d_3 s_2 s_0(m)d_3 s_1(l)d_3 s_2 s_0(m)^{-1}d_3 s_2 s_1(m)$

$d_3 s_1(l)^{-1}d_3 s_2 s_1(m)^{-1})(d_3 s_0(l)d_3 s_2 s_1(m)d_3 s_0(l)^{-1}$

$d_3 s_1(l)d_3 s_2 s_1(m)^{-1}d_3 s_1(l))(d_3 s_2(l)d_3 s_2 s_0(m)$

$d_3 s_2(l)^{-1}d_3 s_2 s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}(l)^{-1})$

$= d_3(s_2 s_0(m)s_1(l)s_2 s_0(m)^{-1}s_2 s_1(m)s_1(l)^{-1}s_2 s_1(m)^{-1}$

$s_0(l)s_2 s_1(m)s_0(l)^{-1}s_1(l)s_2 s_1(m)^{-1}s_1(l)s_2(l)$

$s_2 s_0(m)s_2(l)^{-1}s_2 s_0(m)^{-1})(s_0(m)ls_0(m)^{-1}(l)^{-1})$

$= \left({}^{\partial_1 m} l\right)(l)^{-1},$

$s_2 s_0(m)s_1(l)s_2 s_0(m)^{-1}s_2 s_1(m)s_1(l)^{-1}s_2 s_1(m)^{-1}s_0(l)s_2 s_1(m)s_0(l)^{-1}$

$s_1(l)s_2 s_1(m)^{-1}s_1(l)s_2(l)s_2 s_0(m)s_2(l)^{-1}s_2 s_0(m)^{-1} \in \partial_3 NG_3$

Şimdi tersini gösterelim. $L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$ Pseudo 2-çaprazlanmış modül olsun. $G_0 = P$ olmak üzere, P'nin M üzerine etkisini kullanarak yarı direkt çarpımı $G_1 : M \rtimes P$ yi oluşturabiliriz. Aşağıdaki homomorfizmleri tanımlayabiliriz:

$$d_0 : M \rtimes P \longrightarrow P, \qquad (m,p) \longmapsto p,$$
$$d_1 : M \rtimes P \longrightarrow P, \qquad (m,p) \longmapsto (\partial m)p,$$
$$s_0 : P \longrightarrow M \rtimes P, \qquad p \longmapsto (1,p).$$

$m \in M$'nin $l \in L$ üzerine etkisini

$$m.l = \{m, \partial_2 l\}^{\partial_1 m} l$$

ile verebiliriz. Bu etkiyi kullanarak da $L \rtimes M$ yarı direkt çarpımı oluşturabiliriz.

$$(m,p) \cdot (l,m') = \left({}^{m}l\,{}^{p}l, {}^{m}m'\,{}^{p}m\right)$$

ile verilen $(m,p) \in M \rtimes P$ nin $(l,m') \in L \rtimes M$ üzerine etkisi vardır.

Bu etkiyi kullanarak $G_2 = (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$ yarı direkt çarpımı oluşturabiliriz.

$$d_0 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (M \rtimes P), \qquad (l,m,m',p) \longmapsto (m',p),$$
$$d_1 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (M \rtimes P), \qquad (l,m,m',p) \longmapsto ({}^{m}m',p),$$
$$d_2 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (M \rtimes P), \qquad (l,m,m',p) \longmapsto \left(m, {}^{\partial_1 m'}p\right),$$
$$s_0 : (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P), \qquad (m,p) \longmapsto (1,1,m',p),$$
$$s_1 : (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P), \qquad (m,p) \longmapsto (1,m',1,p).$$

homomorfizmleri vardır.

$(l,m) \in L \rtimes M$'nin $l' \in L$ üzerine etkisi

$${}^{(l,m)}l' = (ll'l)^{m}l'$$

ile gösterilir ve $L \rtimes (L \rtimes M)$ yarı direkt çarpımı oluşturabiliriz. $(m,p) \in M \rtimes P$'nin $(l,l',m') \in L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine etkisi

$$m.l = \{m, \partial l\}^{m} l$$

ile gösterilir.

Aynı zamanda $(l',m) \in L \rtimes M$'nin $(l,l',m') \in L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine etkisi de

$$(m,p) \cdot (l,m') = \left({}^{m}l\,{}^{p}l, {}^{m}m'\,{}^{p}m\right)$$

ile verilir.

$(L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$ nın $L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine etkisi ile

$$G_3 = \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$$

yarı direkt çarpımı oluşturabiliriz.

$$d_0 : \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)\big)$$
$$(l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l', m', m'', p),$$
$$d_1 : \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)\big)$$
$$(l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l'l'', mm', m'', p),$$
$$d_2 : \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)\big)$$
$$(l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (ll', m, m'm'', p),$$
$$d_3 : \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)\big)$$
$$(l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l, m, (\partial_2 l'')m', (\partial m')p),$$
$$s_1 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$$
$$(l, m, m', p) \longmapsto (1,1,1,1, m', m, p),$$
$$s_2 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$$
$$(l, m, m', p) \longmapsto (1,1, m', 1,1, m, p),$$
$$s_3 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow \big(L \rtimes (L \rtimes M)\big) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$$
$$(l, m, m', p) \longmapsto (1,1, m', 1, m, 1, p),$$

homomorfizmleri vardır.

(1)-(5) aksiyomları, bunların homomorfizm olmasını sağlar. Diyelim ki G_2 2-truncatedının 2-coiskeleti $\{G_0, G_1, G_2\}$ pseudosimplisel grupları olsun. Diyelim ki, G_3 3-truncatedının 3-coiskeleti $\{G_0, G_1, G_2, G_3\}$ Pseudosimplisel grupları olsun. $G^3 \longrightarrow G^2$ tek bir simplisel dönüşüm vardır ve 0,1 ve 2 boyutlarında birimdir. Diyelim ki, $\bar{G}^3$, G^3'ün G^2'deki görüntüsünü verir. G^3 Moore kompleksinin boyutunun 3 olduğu açıktır; $\bar{G}^3$ Moore kompleksi boyu 2 olan Pseudosimplisel grup olduğunu daha önce göstermiştik.

Yukarıdaki ifadelerden gerekli denklik elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & tr_2 PseudoSimpGrp \arrow[dl, shift left, "\cos k_2"] \arrow[dr, shift left] & \\
PseudosimpGrp_{\leq 2} \arrow[ur, shift left, "tr_2"] \arrow[rr, shift left] & & \chi_2 Mod \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}$$

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

5.1.1. Pseudo 3- Çaprazlanmış Modüller

Conduché (Conduché, 1984) bir simplisel grubun yarı direkt ayrışımını kullanarak bazı denklikler vermişti. Mutlu ve Porter (Mutlu ve Porter, 1998) bunların tam olarak $n = 3$ için ∂_3 altında $F_{\alpha,\beta}$ Peiffer çiflerinin görüntüleri olduğunu tanımlamıştır. Arvasi, Kuzpınarı ve Uslu (Arvasi, Kuzpınarı ve Uslu, 2010) yarı direkt ayrışım yerine $F_{\alpha,\beta}$ kullanarak, $n = 4$ için benzer denklikleri tanımlamışlar ve 3- çaprazlanmış modül aksiyomlarını elde etmişlerdir. Bizde bu çalışmamızda bunları kullanarak pseudo 3-çaprazlanmış modülleri elde ettik.

G, Moore kompleksinin boyu 3 ve $NG_0 = N, NG_1 = M, NG_2 = L, NG_3 = K$ olan bir pseudosimplisel grup olsun. Böylece grup komplekslerini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

N nin K, L, M üzerine M nin K, L üzerine ve L nin de K üzerine etkilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
{}^{n}m &= s_0 n(m) s_0 n^{-1} \\
{}^{n}l &= s_1 s_0 n(l) s_1 s_0 n^{-1} \\
{}^{n}k &= s_2 s_1 s_0 n(k) s_2 s_1 s_0 n^{-1} \\
{}^{m}l &= s_1 m(l) s_1 m^{-1} \\
{}^{m}k &= s_2 s_1 m(k) s_2 s_1 m^{-1} \\
l \cdot k &= s_2 l(k) s_2 l^{-1}.
\end{aligned}$$

etkileri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
[s_1 s_0 m s_2 s_1 \partial_1 m, k] &= 1 \\
[s_1 l s_2 s_1 \partial_2 l, k] &= 1 \\
[k', k^{-1} s_2 \partial_3, k] &= 1,
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
{}^{\partial_1 m}k &= s_1 s_0 m(k) s_1 s_0 m^{-1} \\
{}^{\partial_2 l}k &= s_1 l(k) s_1 l^{-1} \\
\partial_3 k \cdot k &= k(k') k^{-1},
\end{aligned}$$

ve elde ettiğimiz simplisel özdeşlikler kullanılarak

$$\partial_3(l\cdot k)=\partial_3(s_2l(k)s_2l^{-1})=\partial_3s_2l(\partial_3k)s_2l^{-1}=l(\partial_3k)l^{-1}.$$

elde edilir. Böylece $\partial_3 : K \to L$ bir çapraz modüldür.

Tanım 5.1.1.

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

yukarıda tanımlanan bir grup kompleksi olsun. Peiffer liftingi aşağıdaki gibi tanımlıyalım:

$m, m' \in M,\ \ l, l' \in L$ için

$\{\ ,\ \} : M\times M \to L$

$\{m,m'\} = [s_1m, s_1m'][s_1m', s_0m]$

$\{\ ,\ \}_{(1)(0)} : L\times L \to K$

$\{l,l'\}_{(1)(0)} = [s_2l', s_2l][s_1l, s_1l'][s_1l', s_0l]$

$\{\ ,\ \}_{(2)(1)} : L\times L \to K$

$\{l,l'\}_{(2)(1)} = [s_2l, s_2l'][s_2l', s_1l]$

$\{\ ,\ \}_{(0)(2)} : L\times L \to K$

$\{l,l'\}_{(0)(2)} = [s_2l', s_0l]$

$\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} : M\times L \to K$

$\{m,l'\}_{(1,0)(2)} = [s_2s_0m, s_2l'][s_2l', s_1s_0m]$

$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} : M\times L \to K$

$\{m,l'\}_{(2,0)(1)} = [s_2s_0m, s_2l'][s_2l', s_2s_1m][s_2s_1m, s_1l'][s_1l', s_2s_0m]$

$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} : L\times M \to K$

$\{l',m\}_{(0)(2,1)} = [s_2s_1m, s_2l'][s_1l', s_2s_1m][s_2s_1m, s_0l']$

dir.

Böylece, $m, m', m'' \in M,\ l, l', l'' \in L,\ k, k', k'' \in K$ için;

$\{m, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{m, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} \ {}^{m}(y_3)^{\partial_1 m} {y_3}^{-1}$
$\{\partial_3 y_3, m\}_{(0)(2,1)}$	=	${}^{m}(y_3){y_3}^{-1}$
$\{m, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{m, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} \ \{\partial_3 k, m\}_{(0)(2,1)}$ $k^{\partial_1 m} k^{-1}$
$\{l', \partial_2 l\}_{(0)(2,1)}$	=	$\{l, l'\}^{-1}_{(2)(1)} \ \{l', l\}_{(1)(0)}$
$\{\partial_2 l, l'\}_{(2,0)(1)}$	=	$\{l, l'\}^{-1}_{(0)(2)}$ ${}^{[l',l]}(\{l, l'\}_{(2)(1)}) \ \{l, l'\}_{(1)(0)}$
$\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)}$	=	$(\{l, l'\}_{(0)(2)})^{-1}$
$\{l, l', l''\}_{(2)(1)}$	=	$\{l, l'\}_{(2)(1)} \ {}^{\partial l}l'.\{l, l''\}_{(2)(1)}$
$\{ll', l''\}_{(2)(1)}$	=	$l.\{l', l''\}_{(2)(1)}\{l, {}^{\partial l'}l''\}_{(2)(1)}$
$\partial_3(\{l, l'\}_{(1)(0)})$	=	$[l, l']\{\partial_2 l, \partial_2 l'$
$\partial_3(\{l, l'\}_{(2)(1)})$	=	$ll'l^{-1}({}^{\partial_2 l}l')^{-1}$
$\partial_3(\{l, l'\}_{(0)(2)})$	=	$\partial_3(\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)})^{-1}$
$\partial_3(\{l, m\}_{(0)(2,1)})$	=	${}^{m}ll^{-1}\{\partial_2 l, m\}$
$\partial_3(\{m, l\}_{(2,0)(1)})$	=	$\partial_3\{m, l\}_{(1,0)(2)} \ {}^{\partial_1 m}l^{m}(l^{-1})\{m, \partial_2 l\}$
$\{\partial_3 k, l\}_{(2)(1)}\{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)}$	=	$k({}^{\partial_2 l}(k^{-1}))$
$\{\partial_3 k, l\}_{(1)(0)}\{l, \partial_3 k\}_{(1)(0)}$	=	1
$\{\partial_3 k, \partial_3 k'\}_{(2)(1)}$	=	$[k, k']$
$\{\partial_3 k, \partial_3 k'\}_{(1)(0)}$	=	$[k', k]$
$\{\partial_3 k, l'\}_{(0)(2)}$	=	1
$\{\partial_2 l, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{l, \partial_3 k\}^{-1}_{(0)(2)}$
$\{\partial_2 l, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)}$	=	$\{l, \partial_3 k\}_{(0)(2)}k({}^{\partial_2 l}(k^{-1}))$
$\{\partial_3 k, \partial_2 l\}_{(0)(2,1)}$	=	${}^{\partial_2 l}kk^{-1}$

$^{n}\{m,m'\} = \{\,^{n}m,\ ^{n}m'\}$
$^{n}\{l,l'\}_{(1)(0)} = \{\,^{n}l,\ ^{n}l'\}_{(1)(0)}$
$^{n}\{l,l'\}_{(2)(1)} = \{\,^{n}l,\ ^{n}l'\}_{(2)(1)}$
$^{n}\{l,l'\}_{(0)(2)} = \{\,^{n}l,\ ^{n}l'\}_{(0)(2)}$
$^{n}\{m,l'\}_{(1,0)(2)} = \{\,^{n}m,\ ^{n}l'\}_{(1,0)(2)}$
$^{n}\{m,l'\}_{(2,0)(1)} = \{\,^{n}m,\ ^{n}l'\}_{(2,0)(1)}$
$^{n}\{l',m\}_{(0)(2,1)} = \{\,^{n}l',\ ^{n}m\}_{(0)(2,1)}$

$^{n}\{m',m''\} = {}^{m}\{m',{}^{m}m''\}$
$^{n}\{l,l'\}_{(1)(0)} = \{^{m}l,{}^{m}l'\}_{(1)(0)}$
$^{n}\{l,l'\}_{(2)(1)} = \{^{m}l,{}^{m}l'\}_{(2)(1)}$
$^{n}\{l,l'\}_{(0)(2)} = \{^{m}l,{}^{m}l'\}_{(0)(2)}$
$^{n}\{m,l'\}_{(1,0)(2)} = \{^{m}m,{}^{m}l'\}_{(1,0)(2)}$
$^{n}\{m,l'\}_{(2,0)(1)} = \{^{m}m,{}^{m}l'\}_{(2,0)(1)}$
$^{n}\{l',m\}_{(0)(2,1)} = \{^{m}l',{}^{m}m\}_{(0)(2,1)}$

dir. Bu sonuçlardan tüm liftinglerin N, M denk olduğu söylenebilir.

Tanım 5.1.2. Bir pseudo 3 çaprazlanmış modül;

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

grup kompleksleri ve N nin K, L ve M üzerindeki etkisi, M nin K ve L üzerindeki etkisi ve L nin K üzerindeki etkisi ile birlikte, N, M-gruplarının ∂_3, ∂_2, ∂_1 morfizimlerinden ve M, N eşdeğer liftingleri 3- boyuttan Piffer liftingler olarak adlandırılır.

$$
\begin{array}{lcll}
\{\ ,\ \}_{(1)(0)} & : & L \times L & \to K \\
\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} & : & M \times L & \to K \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)} & : & L \times M & \to K \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2)} & : & L \times L & \to K \\
\{\ ,\ \}_{(2)(1)} & : & L \times L & \to K \\
\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} & : & M \times L & \to K \\
\{\ ,\ \} & : & M \times M & \to L
\end{array}
$$

Böylece aşağıdaki aksiyomlar elde edilir.

P-3CM1) $K \overset{\partial_3}{\rightarrow} L \overset{\partial_2}{\rightarrow} M \quad \{\ \ ,\ \ \}_{(2)(1)}$ Peiffer liftingler ile birlikte 2 çaprazlanmış modüldür.

P-3CM2) $\{m, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = \{m, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} \ {}^{m}(k)^{\partial_1 m}(k^{-1})$

P-3CM3) $\{\partial_3 k, m\}_{(0)(2,1)} = {}^{m}(k)k^{-1}$

P-3CM4) $\{m, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = \{m, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} \{\partial\_3\ k, m\}_{(0)(2,1)} \ (k)^{\partial_1 m}(k^{-1})$

P-3CM5) $\{l', \partial_3 l\}_{(0)(2,1)} = \{l, l'\}^{-1}_{(2)(1)} \{l', l\}_{(1)(0)}$

P-3CM6) $\{\partial_2 l, l'\}_{(2,0)(1)} = \{l, l'\}^{-1}_{(0)(2)} {}^{[l', l]}(\{l', l\}_{(2)(1)})\{l, l'\}_{(1)(0)}$

P-3CM7) $\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)} = (\{l, l'\}_{(0)(2)})^{-1}$

P-3CM8) $\partial_3(\{l, l'\}_{(1),(0)}) = [l, l']\{\partial_2 l, \partial_2 l'\}$

P-3CM9) $\partial_3(\{l, l'\}_{(0),(2)}) = \partial_3(\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)})^{-1}$

P-3CM10) $\partial_3(\{l, m\}_{(0),(2,1)}) = mll^{-1}\{\partial_2 l, m\}$

P-3CM11) $\partial_3(\{m, l\}_{(2,0),(1)}) = \partial_3\ \{m, l\}_{(1,0)(2)} {}^{\partial_1 m}l^{m}l^{-1}\{m, \partial_2 l\}$

P-3CM12a) $\{\partial_3 k, l\}_{(1)(0)} = ({}^{l}k)k^{-1}$

P-3CM12b) $\{l, \partial_3 k\}_{(1)(0)} = k({}^{l}k)^{-1}$

P-3CM13) $\{\partial_3 k, \partial_3 k'\}_{(1)(0)} = [k', k]$

P-3CM14) $\{\partial_3 k, l'\}_{(0)(2)} = 1$

P-3CM15) $\{\partial_3 l, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = \{l, \partial_3\}_{(0)(2)}{}^{-1}$

P-3CM16) $\{\partial_2 l, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} = \{l, \partial_3\}_{(0)(2)} \ k({}^{\partial_2 l}(k^{-1}))$

P-3CM17) $\{\partial_3 k, \partial_2 l\}_{(0)(2,1)} = {}^{\partial_2 l}kk^{-1}$

P-3CM18) $\partial_2\{m, m'\} = mm'm^{-1}({}^{\partial_1 m}m')^{-1}$

Bir pseudo 3-çapraz modülü $(K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ ile gösterilir. Guruplar için Pseudo 3-çaprazlanmış modül morfizimleri aşağıdaki diyagramla gösterilebilir

$$\begin{tikzcd}
L_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"'] & L_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & L_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & L_0 \arrow[d, "f_0"'] \\
L'_3 \arrow[r] & L'_2 \arrow[r] & L'_1 \arrow[r] & L'_0
\end{tikzcd}$$

Burada, her $k \in K,\ l \in L,\ m \in M,\ n \in N$ için

$$f_1({}^{n}m) = {}^{(f_0(n))}f_1(m), f_2({}^{n}l) = {}^{(f_0(n))}f_2(l), f_3({}^{n}k) = {}^{(f_0(n))}f_3(k)$$

$\{\,,\,\}_{(0)(2)}, \{\,,\,\}_{(2)(1)}, \{\,,\,\}_{(1)(0)}$ için

$$\{,\}\ f_2 \times f_2 = f_3\{\,,\,\}$$

$\{\,,\}_{(1,0)(2)}, \{\,,\}_{(2,0)(1)}$ için

$$\{,\}\ f_1 \times f_2 = f_3\{\,,\,\}$$

$\{\,,\}_{(0)(2,1)}$ için

$$\{,\}\ f_2 \times f_1 = f_3\{\,,\,\}$$

$\{,\}$ için

$$\{,\}\ f_1 \times f_1 = f_2\{\,,\,\}$$

Böylece pseudo 3-çapraz modüllerin kategorisini, **pX$_3$Mod** ile ifade ederiz.

P-3CM1)

$$\begin{aligned} \overline{\partial_3}(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}) &= [x_2, y_2][y_2, s_1\partial_2 x_2] \\ &= x_2 y_2 x_2{}^{-1} y_2{}^{-1} y_2 s_1 \partial_2 x_2 y_2{}^{-1} s_1 \partial_2 x_2{}^{-1} \\ &= x_2 y_2 x_2{}^{-1} ({}^{\partial_2 x_2} y_2)^{-1} \end{aligned}$$

$$d_4\left(F_{(1)(3,2)}(x_3, y_2)\right) = [s_1 d_3 x_3, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 d_3 x_3][x_3, s_2 y_2]$$

$$\begin{aligned} \{\overline{\partial_3} x_3, y_2\}_{(2)(1)} &= [s_1 \overline{\partial_3} x_3, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 \overline{\partial_3} x_3] \\ &= [x_3, s_2 y_2] \quad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= x_3 ({}^{y_2} x_3)^{-1} \end{aligned}$$

$$d_4\left(F_{(3,1)(2)}(x_2, y_3)\right) = [s_1 x_2, s_2 d_3 y_3][s_2 d_3 y_3, s_2 x_2][s_2 x_2, y_3][y_3, s_1 x_2]$$

$$\begin{aligned} \{x_2, \overline{\partial_3} y_3\}_{(2)(1)} &= [s_2 x_2, s_2 \overline{\partial_3} y_3][s_2 \overline{\partial_3} y_3, s_1 x_2] \\ &\equiv [s_2 x_2, y_3][y_3, s_1 x_2] \quad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= {}^{x_2} y_3 s_1 x_2 y_3{}^{-1} s_1 x_2{}^{-1} \\ &\equiv {}^{x_2} y_3 ({}^{\partial_2 x_2} y_3)^{-1} mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \end{aligned}$$

$\{x_2y_2, z_2\}_{(2)(1)} \quad = \quad [s_1(x_2y_2), s_2z_2][s_2z_2, s_2(x_2y_2)]$

$= \quad s_1(x_2y_2)s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1} \quad s_2(x_2y_2)s_2z_2{}^{-1}s_2(x_2y_2)^{-1}$

$\equiv \quad s_2(x_2y_2)s_2(z_2)^{-1}s_2(x_2y_2)^{-1}s_1(x_2y_2)$

$s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1}\; mod\; \partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$=\{x_2y_2z_2y_2{}^{-1}\}_{(2)(1)}{}^{\partial_1 x_2}\{y_2, z_2\}_{(2)(1)}$

$\{x_2, y_2z_2\}_{(2)(1)} = [s_1(x_2), s_2(y_2z_2)][s_2(y_2z_2), s_2(x_2)]$

$\equiv [s_2(x_2), s_2(y_2z_2)][s_2(y_2z_2), s_1(x_2)]$

$(s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1})s_1(x_2)s_2(y_2)s_1(x_2)^{-1}\; mod\; \partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$= (x_2y_2x_2{}^{-1}).\{x_2, z_2\}_{(2)(1)}\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}$

P-3CM2)

$d_4\left(F_{(3,2,0)(1)}(x_1, y_3)\right)$

$= [s_2s_0x_1, s_1d_3y_3][s_1d_3y_3, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_2d_3y_3][s_2d_3y_3,][s_2s_0x_1, y_3][y_3, s_2s_1x_1]$

$d_4\left(F_{(3,1,0)(2)}(x_1, y_3)\right) = [s_1s_0x_1, s_2d_3y_3][s_2d_3y_3, s_2s_0x_1][s_2s_0x_1, y_3][y_3, s_1s_0x_1]$

$d_4\left(F_{(2,1,0)(3)}(x_1, y_3)\right) = [s_2s_1s_0d_1x_1, y_3][y_3, s_1s_0x_1]$

$\{x_1, \overline{\partial_3}y_3\}_{(1,0)(2)} = \{x_1, \overline{\partial_3}y_3\}_{(2,0)(1)}\{\overline{\partial_3}y_3, x_1\}_{(0)(2,1)}({}^{\partial_1 x_1}y_3)^{-1}$

P-3CM5)

$d_4(F_{(3,0)(2,1)}) = [s_0x_2, s_2s_1\partial_2y_2][s_2s_1\partial_2y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2s_1\partial_2y_2]$
$[s_1y_2, s_2x_2][s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2]$
$\{x_2, \partial_2y_2\}_{(0)(2,1)} = [s_0x_2, s_2s_1\partial_2y_2][s_2s_1\partial_2y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2s_1\partial_2y_2]$
$[s_1y_2, s_2x_2][s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2]\; mod\; \partial_4(NG_4 \cap D_4)$
$(\{y_2, x_2\}_{(1)(2)})^{-1}\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}$

P-3CM6)

$d_4\left(F_{(2,0)(3,1)}(x_2, y_2)\right) = [s_2s_0d_2x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_2s_1d_2x_2]$
$\left[s_2s_1d_2x_2, s_2y_2\right][s_2y_2, s_2s_0d_2x_2]$
$[\; s_0x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_1x_2]$
$[s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2]$

$\{\partial_2x_2, y_2\}_{(2,0)(1)} = [s_2s_0\partial_2x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_2s_1\partial_2x_2][s_2s_1\partial_2x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0\partial_2x_2]$

$\equiv [s_0x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_1x_2]$

$= \{x_2, y_2\}_{(0)(2)}{}^{-1}\,{}^{[y_2, x_2]}(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)})\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}$

P-3CM7)

$$d_4\left(F_{(1,0)(3,2)}(x_2,y_2)\right) = [s_1s_0\overline{\partial_2}x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0\overline{\partial_2}x_2][s_0x_2, s_2y_2]$$

P-3CM8)

$$\overline{\partial_3}(\{x_2,y_2\}_{(1)(0)}) = [x_2,y_2]\{\partial_2x_2, \partial_2y_2\}$$

P-3CM9)

$$\overline{\partial_3}(\{x_2,y_2\}_{(0)(2)}) = \overline{\partial_3}(\{\partial_2x_2,y_2\}_{(1)(0)})^{-1}$$

P-3CM10)

$$\overline{\partial_3}(\{x_2,y_1\}_{(0)(2,1)}) = {}^{y_1}x_2{x_2}^{-1}x_2\{\partial_2x_2,y_1\}$$

P-3CM11)

$$\overline{\partial_3}(\{x_1,y_2\}_{(1,0)(2)}) = [s_0x_1,y_2][y_2,\overline{\partial_3}s_1s_0x_1]$$

P-3CM12)

$$d_4\left(F_{(0)(3,1)}(x_3,y_2)\right) = [s_0d_3x_3, s_1y_2][s_1y_2, s_2d_3x_3][s_2d_3x_3, s_2y_2][s_2y_2, x_3]$$

P-3CM14)

$$d_4\left(F_{(0)(3,2)}(x_3,y_2)\right) = [s_0d_3x_3, s_2y_2]$$

$$\{\overline{\partial_3}x_3,y_2\}_{(0)(2)} = [s_0\overline{\partial_3}x_3, s_2y_2]$$

$$\equiv 1 \mod \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

P-3CM15)

$$d_4\left(F_{(3,0)(2)}(x_2,y_3)\right) = [s_0x_2, s_2d_3y_3]\ [y_3, s_0x_2]$$

Ve

$$d_4\left(F_{(1,0)(2)}(x_2,y_3)\right) = [s_1s_0\partial_2x_2, s_2\partial_3y_3]\ [s_2\partial_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2][s_0x_2, y_3]$$

P-3CM16)

$$d_4\left(F_{(2,0)(1)}(x_2,y_3)\right)$$
$$= [s_2s_0\partial_2x_2, s_1\partial_3y_3]\ [s_1\partial_3y_3, s_2s_1\partial_2x_2][s_2s_1\partial_2x_2, s_2\partial_3y_3][s_2\partial_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2][s_0x_2, y_3][y_3, s_1x_1]$$

P-3CM17)

$$d_4\left(F_{(0)(2,1)}(x_3,y_2)\right) = [s_0d_3x_3, s_2s_1d_2y_2]\ [s_2s_1d_2y_2, s_1d_3x_3]$$
$$[s_2d_3x_3, s_2s_1d_2y_2][s_1y_2, x_3]$$

$$d_4\left(F_{(0)(2,1)}(x_2,y_3)\right) = [s_2s_1d_2x_2, y_3]\ [y_3, s_1x_2]$$

$$\boldsymbol{\{\overline{\partial_3}x_3, \partial_2y_2\}_{(0)(2,1)} = [s_0\overline{\partial_3}x_3, s_2s_1\partial_2y_2][s_2s_1\partial_2y_2, s_1\overline{\partial_3}x_3]}$$

P-3CM18)

$$\partial_2\{x_1,y_1\} = [x_1,y_1][y_1, \partial_2s_0x_1] = x_1y_1\ x_1{}^{-1}(\partial_1x_{1_{y_1}})^{-1}$$

5.2 Öneriler

5.2.1. Pseudosimplisel gruplar

Pseudosimplisel gruplar ile, pseudo 3-çapraz modül arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 5.2.1.1. G, Moore kompleks **NG** olan pseudosimplisel grup olsun,

$$NG_3\ /\partial_4(NG_4 \cap D_4) \overset{\partial_3}{\rightarrow} NG_2 \overset{\partial_2}{\rightarrow} NG_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} NG_0$$

grup kompleksi, aşağıda tanımlandığı gibi Peiffer liftingleri ile birlikte bir pseudo 3 çaprazlanmış modülünün grup kompleksidir.

$$\begin{array}{rcl}
\{\ ,\ \} : NG_1 \times NG_1 & \longrightarrow & NG_2 \\
\{x_1, y_1\} & \longmapsto & [s_0x_1, s_1y_1][s_1y_1, s_1x_1], \\
\{\ ,\ \}_{(1)(0)} : NG_2 \times NG_2 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \longmapsto & \overline{([s_0x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2y_2])}, \\
\{\ ,\ \}_{(2)(1)} : NG_2 \times NG_2 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \longmapsto & \overline{([s_1x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2x_2])}, \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2)} : NG_2 \times NG_2 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \longmapsto & \overline{([s_0x_2, s_2y_2])}, \\
\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} : NG_1 \times NG_2 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_1, y_2\} & \longmapsto & \overline{([s_1s_0x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1])}, \\
\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} : NG_1 \times NG_2 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D)4) \\
\{x_1, y_2\} & \longmapsto & \overline{([s_2s_0x_1, s_1y_2][s_1y_2, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1])} \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)} : NG_2 \times NG_1 & \longrightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{y_2, x_1\} & \longmapsto & \overline{([s_0y_2, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_1y_2])[s_2y_2, s_2s_1x_1]}|.
\end{array}$$

Teorem 5.2.1.2. Pseudo 3-çapraz modül kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan pseudosimplisel gruplar kategorisine denktir.

İspat. G Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan pseudosimplisel grup olsun. Grup kompleksi,

$$NG_3\,/\partial_4(NG_4\cap D_4)\xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

pseudo 3 çaprazlanmış modüldür. Moore kompleksi uzunluğu 3 olduğundan,

$NG_4\cap D_4=1$, bu nedenle $\partial_4(NG_4\cap D_4)=1$ olur. Böylece,

$$NG_3\,/\,\partial_4(NG_4\cap D_4)$$

yerine NG_3 'ü alabiliriz $NG_4\cap D_4$. Morre kompleksinin uzunluğu 3 olan pseudo simlisel gruplar kategorisinden, pseudo 3 çaprazlanmış modüller kategorisine ,

$$\daleth_3\text{: p}\mathbf{SimpGrp}_{\leq 3}\longrightarrow \text{p}\mathbf{X}_3\mathbf{Mod}$$

funktoru elde ederiz. Terine

$$K\xrightarrow{\partial_3} L\xrightarrow{\partial_2} M\xrightarrow{\partial_1} N$$

pseudo 3 çaprazlanmış modül olsun. $H_0=N$ olsun. M nin N üzerine etkisi ile $H_1=M\rtimes N$ yarı-direkt çarpımı elde edilir $(m,n)\in M\rtimes N$ için dejenere ve yüz dönüşümleri;

$$\begin{aligned}
d_0:\;& M\times N \longrightarrow N\\
& (m,n) \longrightarrow n\\
d_1:\;& M\times N \longrightarrow N\\
& (m,n) \longrightarrow (\partial_1(m))n\\
s_0:\;& N \longrightarrow M\times N\\
& n \longrightarrow (1,n)
\end{aligned}$$

Şimdi, M ve N nin L üzerindeki etkisi ile, $H_2=(L\rtimes M)\times(M\rtimes N)$ yarı-direkt çarpımını elde ederiz.

$l \in L$, m, m$' \in M$, n $\in N$ için dejenere ve yüz dönüşümleri;

$$\begin{aligned} d_0 :&= (L \times M) \times (M \times N) \rightarrow (M \times N) \\ &(l, m, m', n) \quad \rightarrow (m', n) \\ d_1 :&= (L \times M) \times (M \times N) \rightarrow (M \times N) \\ &(l, m, m', n) \quad \rightarrow (mm', n) \\ d_2 :&= (L \times M) \times (M \times N) \rightarrow (M \times N) \\ &(l, m, m', n) \quad \rightarrow \left(\partial_2(l)m \quad, \partial_1(m')n\right) \\ s_0 :&= (M \times N) \rightarrow (L \times M) \times (M \times N) \\ &(m', n) \quad \rightarrow (1,1, m', n) \\ s_1 :&= (M \times N) \rightarrow (L \times M) \times (M \times N) \\ &(m', n) \quad \rightarrow (1, m', 1, n) \end{aligned}$$

Böylece $\{\,,\}_{(2)(1)}$ bir pseudo 2 çaprazlanmış modüldür. $l \in L, k \in K$ için K nın L üzerine etkisi

$$\{,\}_{(2)(1)} \quad {}^{l}k = \{\partial_3 k, l\}_{(2)(1)} k^{-1}$$

dir.

$K \rtimes L$ yarı direkt çarpımını elde etmek için.$(l, m) \in L \rtimes M$ nin $(k, l) \in K \rtimes L$ etkisini aşağıdaki gibi gösterebiliriz;

$$\begin{aligned} {}^{(1,m)}(k, l') &= {}^{m}({}^{1}k), {}^{m}({}^{1}l') \\ &= {}^{m}(k), {}^{m}(l') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(l,1)}(k, l') &= {}^{1}({}^{l}k),\ {}^{1}({}^{l}l') \\ &= {}^{l}(k),\ {}^{l}(l') \\ &= {}^{\partial_2 l}k\{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)}, ll'l^{-1} \end{aligned}$$

Böylece;

$$H_3 := (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N)$$

Yarı direkt çarpımını elde ederiz

$$d_0 := (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N) \to (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(k, l, l', m, m', n) \quad \to (l', m, m', n)$$

$$d_1 := (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N) \to (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(k, l, l', m, m', n) \quad \to (l, m, m', n)$$
$$d_2 := (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N) \to (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(k, l, l', m, m', n) \quad \to (ll', m, m', n)$$
$$d_3 := (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N) \to (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(k, l, l', m, m', n) \quad \to (\partial_3 kl, \partial_2 l' m, m', n)$$

$$s_0 := (L \times M) \times (M \times N) \to (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(l, m, m', n) \quad \to (1, l, 1, m, m', n)$$

$$s_1 := (L \times M) \times (M \times N) \to (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(l, m, m', n) \quad \to (1, 1, l, m, m', n)$$

$$s_2 := (L \times M) \times (M \times N) \to (K \times L) \times (L \times M) \times (M \times N)$$
$$(l, m, m', n) \quad \to (1, l, 1, m' n)$$

Böylece $\mathbf{H} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}\ 3 - \mathit{turnucated}$ pseudosimplisel grup elde ederiz.

5.2.2. Pseudo Çapraz 3-Kareler

Tanım 5.2.2.1.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "v"] \\ N \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

$P\ nin\ \ L, M\ \ ve\ N$ üzerindeki etkisiyle birlikte grup morfizimlerinin diyagramı komutatiftir ve $h: M \times N \to L$ fonksiyonu, $x, x' \in M, y, y' \in N,\ z \in L$ ve $t \in P$ için,

1. $f\ ve\ u$ dönüşümleri P eşdeğerdir ve $g, v, vof\ \ ve\ gou$ çaprazlanmış modüldür.
2. $foh(x,y)\ = x^{g(y)}x^{-1},\ uoh(x,y)\ =^{v(x)} yy^{-1}$
3. $h(f(z),y)\ = z^{g(y)}z^{-1},\ h\big(x,u(z)\big) =^{v(x)} zz^{-1}$
4. $h(xx',y)\ =^{v(x)} h(x',y)h(x,y),\ h(x,yy')\ = h(x,y)^{g(y)}h(x,y')$
5. $h(^{t}x,^{t}y)\ =^{t} h(x,y)$

$f: L \to M$ ve $u: L \to N$ çaprazlanmış modüllerdir. Bir pseudo çaprazlanmış kare pseudo çaprazlanmış modüller kategorisindeki bir pseudo çaprazlanmış modül gibi görünür. Aynı zamanda çapraz modüllerde pseudo simplisel gruplar ile ilişkilidir.

Çapraz kare uzunluğu bir olan çaprazlanmış modüllerin bir kompleksi olarak düşünülebilr. Conduché(Conduché, 2003) çapraz karelerle, 2 –çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi göstermiştir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "v"] \\ N \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

Bir pseudo çapraz kare olsun. $z \in L$ için $\partial_2(z) = \big(f(z)^{-1}, u(z)\big)$ ve $x \in M, y \in N$ için $\partial_1(x,y) = g(x)g(y)$ ve Peifer liftingleri

$$\{(x,y)(x',y')\} = h(x, yy'y^{-1})$$

verilen çaprazlanmış modüllerin bir kompleksi yatay morfizimler olarak görülebilir, bu karenin maping cone ları bir pseudo 2 – çaprazlanmış modüldür

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \rtimes N \xrightarrow{\partial_1} P$$

Daha sonra, yatay morfizmaları çaprazlanmış modüllerin bir kompleksi olarak görmek suretiyle, bu karenin haritalama konisi, 2-çaprazlanmış modüldür.

Çaprazlanmış kareler, G. Ellis (Elis, 1984 -1987) tarafından genelleştirilmiş ve T. Porter (Porte,1993) simplisel gruplarla *Çapraz n-* kublerin ilişkisini vermiştir.

$$K \xrightarrow{\partial_3} \mathrm{L} \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

pseudo 3 çapraz modül olsun ve **G** pseudosimplisel grupun yerini tutusun, G nin pseudo çapraz 3 –küplerle ilişkilidir

$$\begin{tikzcd}
& \ker d_0^2 \cap \ker d_1^2 \arrow[rr, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_P"] & & \ker d_1^2 \arrow[dd, "\delta_2"] \\
NG_3 \arrow[ur, "\lambda_N"] \arrow[rr, "\lambda_M"] \arrow[dd, "\lambda_L"] & & \ker d_1^2 \cap \ker d_2^2 \arrow[ur, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_Q"] & \\
& \ker d_0^2 \arrow[rr, "\delta_1"] & & G_2 \\
\ker d_0^2 \cap \ker d_2^2 \arrow[ur, "\nu_P"] \arrow[rr, "\nu_Q"] & & \ker d_2^2, \arrow[ur, "\delta_3"] &
\end{tikzcd}$$

h -dönüşümleri

$h_1 : \mathrm{ker}d^2{}_1 \times \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow [s_1x_2s_0x_2^{-1}, s_2y_2^{-1}s_1y_2^{-1}]$,

$h_2 : \mathrm{ker}d^2{}_0 \times \mathrm{ker}d^2{}_1 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow [s_1x_2, s_2y_2s_1y_2^{-1}s_0y_2]$,

$h_3 : \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_1 \times \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow [s_2x_2, s_2y_2s_1y_2^{-1}]$,

$h_7 : \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \times \mathrm{ker}d^2{}_1 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow h_2(ix,y) = h_2(x,y)$,

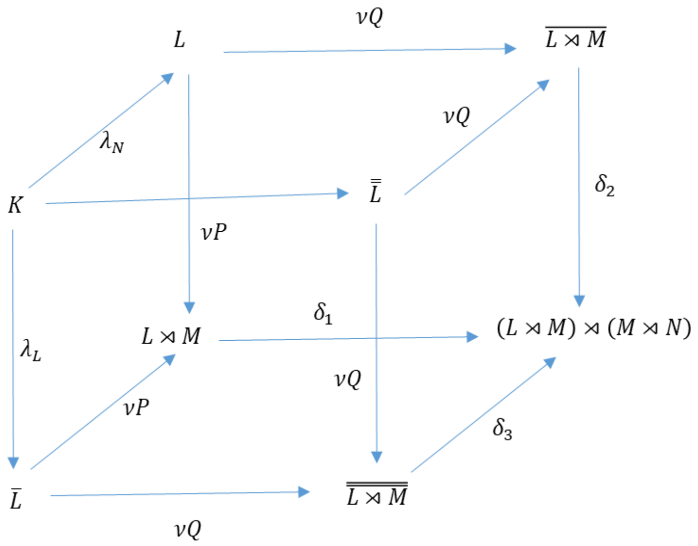
$h_8 : \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_1 \times \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow h_3(x,iy) = h_3(x,y)$,

$h_9 : \mathrm{ker}d^2{}_0 \cap \mathrm{ker}d^2{}_1 \times \mathrm{ker}d^2{}_1 \cap \mathrm{ker}d^2{}_2 \longrightarrow NG_3$

$(x,y) \longrightarrow h_3(x,iy) = h_3(x,y)$,

ve diğer komutatörleridir



$$L \rtimes M \cong \{(l, m, 1,1) : l \in L, m \in M\}$$
$$\overline{L \rtimes M} = \{(l, m, m', 1) : l \in L, m, m' \in M, mm' = 1\}$$

$$\overline{\overline{L \rtimes M}} = \{(l, m, m', n) : l \in L, m \in M, \partial_2(l) = 1, \partial_1(m')n = 1\}$$
$$L \cong \{(l, 1,1,1) : l \in L\}$$
$$\bar{L} = \{(l, m, 1,1) : \partial_2 lm = 1, l \in L \ m \in M\}$$
$$= \{(l, \partial_2(l^{-1}), 1,1) : l \in L\}$$
$$\bar{\bar{L}} = \{(l, m, m', n) : mm' = 1, \partial_2 lm = 1, \partial_1(m')n = 1, l \in L, m \in M, n \in N\}$$

Böylece ;

$$K \to \left(L \ltimes \bar{\bar{L}}\right) \ltimes \bar{L} \to \left(\overline{L \ltimes M}\right) \left(\overline{\overline{L \ltimes M}}\right) \to (L \ltimes M) \ltimes (M \ltimes N)$$
çapraz pseudo 3 –küplerin, maping cone larını elde edriz.

Örnek 5.2.2.1.

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

Pseudo 3-çaprazlanmış modül olsun eğer $M = \{1\}$, $i = 1,2,3$, için diyağramı komütatif olup,

$$C_i = \left[\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ \downarrow{\scriptstyle \partial'_3} & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ L & \xrightarrow[Id]{} & L \end{array}\right]$$

h_i dönüşümleri ile bir pseudo çaprazlanmış karedir.

$$h_1 = \{,\}_{(2)(1)} : L \times L \to K,$$

$$h_2 = \{,\}_{(0)(2)} : L \times L \to K,$$

$$h_3 = \{,\}_{(0)(1)} : L \times L \to K,$$

$$(x,y) \to \{y,x\}^{-1}{}_{(1)(0)} \quad ,$$

burada L'nin kendi üzerine etkisi eşlenik etkidir. $M = \{1\}$, her $l \in L$ için $\partial_2(l) = 1_M$ dir. Böylece pseudo 3 çapraz modül aksiyomlarını elde edbiliriz. her $l', l'', l'' \in L$, $k'k'' \in K$ için

$$\begin{aligned} \{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)} &= (l \cdot k)k^{-1} \\ \{ll', l''\}_{(2)(1)} &= l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \{l', l''\}_{(2)(1)} \\ \{l, l'l''\}_{(2)(1)} &= \{l, l'\}_{(2)(1)} l' \{l, l''\}_{(2)(1)} \\ \partial_3 \{l, l'\}_{(2)(1)} &= l(l'l^{-1}) \\ \left(\{l', l\}_{(1)(0)}\right)^{-1} &= \{l, l'\}_{(2)(1)} \\ \{l, l'\}_{(0)(2)} &= 1 \end{aligned}$$

KAYNAKLAR

[1] Akça İ.and S. Pak Pseudo simplicial groups and crossed modules, Turk J Math, Volume 34, 475 -487 (2010).

[2] Arvası,Z.Simplicial Algebra ,Wales Üniversitesi 1994

[3] Baues H.J., Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes, Walter de Gruyter, (1991).

[4] Baues H.J., Homotopy types, Handbook of Algebraic Topology, Edited by I. M. James, 1-72, (1995).

[5] Bourn D., Moore normalization and Dold-Kan theorem for semiabelian categories, Proceedings of the conference Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Contemporary Mathematics vol.431, July 2007.

[6] Carrasco P. and A.M. Cegarra, Group-theoretic algebraic models for homotopy types, Journal of Pure and Applied Algebra, 75, 195-235,(1991).

[7] Carrasco P., Complejos hipercruzados, cohomologia y extensiones, Ph.D. Thesis, Universidad de Granada, (1987).

[8] Conduch´e D. Modules crois´es g´en´eralis´es de longueur 2, Journal of Pure and Applied Algebra, 34, 155-178, (1984)

[9] Conduch´e D, Simplicial crossed modules and mapping cones, Georgian Mathematical Journal, 10,623-636, (2003).

[10] Duskin J, Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology, Memoir A.M.S., Vol. 3 163, (1975).

[11] Ellis G.J. and R.Steiner, Higher dimensional crossed modules and the homotopy groups of (n+1)-ads, Journal of Pure and Applied Algebra, 46, 117-136, (1987).

[12] Glenn P, Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories, Journal of Pure and Applied Algebra, 25, 33-107, (1982).

[13] Inasaridze, H. N.: Homotopy of pseudosimplicial groupsand nonabelian derived functors and algebraic K-theory, Math. Sbornik, TOM, 98, (140), No: 3, 303-323 (1975).

[14] Lane Mac,S.Categories fort he Working Mathematician .Springer –Verlag-Berlin-Heidelberg-New York.(1998)

[15] Loday J.-L., Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 24, 179-202, (1982).

[16] May J.P.,Simplisel objects in algebraic topology ,Math,Studies ,Van Nostrand, 1967

[17] Mutlu A. and T. Porter, Applications of Peiffer pairing in the Moore complex of a simplicial group, Theory and Applications of Categories, Volume 4, No. 7, 148-173 (1998).

[18] Shammu N.M..Algebraic and Categorical Structure of Category of crossed modules of algebras ,Ph.D.Thesis,U.C.N.W(1992)

[19] Porter T., n-Types of simplicial groups and crossed n-cubes, Topology, 32, 5-24, (1993).

[20] Porter T.Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles,J.Algebra 99(1986),458-465

[21] Yenilmez,K.1996 Simplisel Kategoriler,Yüksek Lisans Tezi,OsmanGazi Üniversitesi Eskişehir

[23] J.H.C.Whitehead.Combinatoria Homotopy II,Bull.American Math.Society.55(1949),453-456

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Uğur CESUR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya,1984
Telefon : 05549333736
Faks :
e-mail : ugurcesur22@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise :	**Konya Lisesi,Meram,Konya**	**2001**
Üniversite :	**Selçuk Üniversitesi,Selçuklu,Konya**	**2005**
Yüksek Lisans :	**Necmettin Erbakan Üniversitesi,Meram,Konya**	
Doktora :		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2005-2006	**Ölmez Dershanesi**	**Öğretmen**
2006-2008	**Sınav Dershanesi**	**Öğretmen**
2008-2009	**Ekol Dershanesi**	**Öğretmen**
2010-2015	**Etüt Merkezi**	**Öğretmen**
2015-2018	**MEB**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI : Matematik
YABANCI DİLLER: İngilizce