T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ALT GRUP KAVRAMINA İLİŞKİN KARŞILAŞILAN ZORLUKLARIN TESPİTİ

Yasemin Züleyha ORAK

ORCID: 0000-0001-6711-5425

Danışman

Prof. Dr. Süleyman SOLAK

ORCID: 0000-0003-4085-277X

Konya –2024

TEŞEKKÜR

Bu gelgitli uzun süreçte, akademik ve motivasyonel desteği için danışmanım Prof. Dr. Süleyman SOLAK'a teşekkürlerimi sunuyorum. Pür matematik çok severek çalıştığım bir alan ve eğitim ile ilgili bir çalışma yaparken Grup Teori gibi pür matematik içeren bir konu ile çalışmak benim için güzeldi.

Çalışma sürecinde yol gösterici olduğu ve bilimsel çerçevedeki açıklamaları için Prof. Dr. Erhan ERTEKİN'e, yapıcı geri dönütleri için Doç. Dr. İbrahim ÇETİN'e, savunma sürecindeki yorumları için Dr. Öğr. Üyesi Şaban Can ŞENAY'a, ayırdıkları zaman için Doç. Dr. Tuba HORZUM ve Arş. Gör. Berna YILDIZHAN'a ve bugüne kadar eğitimci kimlikleri ile örnek aldığım tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Bir diğer teşekkürüm; bu yaşıma kadar getiren, okumamı destekleyen annem Fatma ORAK ve babam Yakup ORAK içindir. Süreçte ve hayatım boyunca yanımda olan, hayatımı kolaylaştıran ablam Gül ORAK SATIOĞLU ve abim Furkan Beytullah ORAK'a teşekkürlerimi ayrı sunuyorum.

Son olarak her anlattığımda dinleyen, geri dönüt veren, motivasyonel desteğini hep hissettiren canım arkadaşım ve meslektaşım Betül KARAHAN'a teşekkür ederim.

Yasemin Züleyha ORAK

Temmuz 2024

İçindekiler

TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

Alt Grup Kavramına İlişkin Karşılaşılan Zorlukların Tespiti başlıklı tez çalışmamın toplam 66 sayfalık kısmına ilişkin, 29.07.2024 tarihinde tez danışmanım tarafından **Turnitin** adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **%**7 olarak belirlenmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

1. Tez çalışması orijinallik raporu sayfası hariç
2. Bilimsel etik beyannamesi sayfası hariç
3. Önsöz hariç
4. İçindekiler hariç
5. Simgeler ve kısaltmalar hariç
6. Kaynaklar hariç
7. Alıntılar dahil
8. 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Necmettin Erbakan Üniversitesi Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve tez çalışmamın, bu uygulama esaslarında belirtilen azami benzerlik oranının (%30) altında olduğunu ve intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

29.07.2024

Yasemin Züleyha ORAK

Prof. Dr. Süleyman SOLAK

BİLİMSEL ETİK BEYANNAMESİ

Bu tezin tamamının kendi çalışmam olduğunu, planlanmasından yazımına kadar tüm aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez hazırlama kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını ve bu kaynakların kaynaklar listesine eklendiğini beyan ederim.

29.07.2024

Yasemin Züleyha ORAK

SİMGELER VE KISALTMALAR

Ö: Öğretmen adayı

APOS: Action-Process-Object-Schema (Eylem-Süreç-Nesne-Şema)

RUMEC: Research in Undergraduate Mathematics Education Community (Lisans Düzeyinde Matematik Eğitimi Araştırma Topluluğu)

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÖZET

Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ALT GRUP KAVRAMINA İLİŞKİN KARŞILAŞILAN ZORLUKLARIN TESPİTİ

Yasemin Züleyha ORAK

Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin alt grup kavramına ilişkin karşılaştıkları zorlukları tespit etmektir. Karşılaşılan zorlukları tespit etme sürecinde öğrencilerin çözüm adımlarının incelenmesi oldukça önemlidir. Literatür incelenerek ve uzman görüşü alınarak öğrenci çözümlerini incelemek için alt grup kavramına ilişkin yazılı sorular hazırlanmıştır. Hazırlanan bu yazılı sorularda alt grup kavramını tanımlama, uygun alt grup örneği verme, alt grup belirten bir kümenin alt grup şartlarını sağladığını gösterme, kalan gruplarının alt gruplarını belirlemeye yönelik sorular bulunmaktadır. Bu sorularda, öğrencilerin yaptığı hatalar, sahip olduğu eksiklikler, sahip oldukları kavram yanılgılarından yola çıkarak yaşadıkları zorluklara yönelik veriler elde edilmiştir. Elde edilen veriler uygun değerlendirme kriterleri oluşturularak nitel analiz yöntemlerinden olan içerik analizi ile analiz edilmiştir. Ayrıca mevcut bir durumu ortaya koyma çabası olduğu için çalışma, durum çalışması deseni ile yürütülmüştür. Çalışmada 2023-2024 öğretim yılında eğitim fakültesinde eğitim görmekte olan 31 ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencisi yer almıştır. Bu öğrencilerin yazılı sorulara verdikleri yanıtlar incelendiğinde elde edilen sonuçlar üç ayrı başlıkta belirtilmiştir: 1) Öğrencilerin çoğunluğu kabul edilebilir tanım yapabilirken kabul edilemez ve eksik tanımlar da azımsanacak seviyede değildir. 2) Alt grup kontrolü yaparken şartların ya göz ardı edildiği ya eksik incelendiği ya da direkt kabul edildiği görülmüştür. 3) Kalan gruplarına yönelik ciddi kavram yanılgılarına sahip olunduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Alt grup, kalan grupları, kavram tanımlama

ABSTRACT

Necmettin Erbakan University, Graduate School of Educational Sciences

Department of Mathematics and Sciences Education

Mathematics Education Program

Master Thesis

DETERMINATION OF THE ENCOUNTERED DIFFICULTIES RELATED WITH THE CONCEPT OF SUBGROUP

Yasemin Züleyha ORAK

The aim of this study is to determine the difficulties encountered related with the concept of subgroup. In the process of determining the difficulties that students encounter, it is very important to examine the solution steps of the students. Written questions on the concept of subgroup were prepared to examine student solutions by reviewing the literature and taking expert opinion. In these written questions, there are questions about defining the concept of subgroup, giving an example of subgroup, making control subgroups conditations, and determining the subgroups of remainder groups. With these questions, data were obtained about the mistakes made by the students, the lack of knowledge they had, and the difficulties they had based on the misconceptions. The data obtained were analyzed by content analysis, one of the qualitative analysis methods, by creating appropriate evaluation criteria. In addition, because there was an effort to reveal an existing situation, the study was conducted with a case study design. In the study, there were 31 elementary mathematics teaching students who were studying at the faculty of education in the 2023-2024 academic year. When the answers given by these students to the written questions were analyzed, the results obtained were stated under three titles: 1) Although the majority of the students were able to make acceptable definitions, unacceptable and incomplete definitions were not at a low level. 2) It was seen that the conditions were either ignored, incompletely examined or directly accepted when making subgroup control. 3) It was seen that there were serious misconceptions about the remaining groups.

Keywords: Subgroup, remaning group, description concept

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Günümüzde eğitim anlayışları; toplumsal, ekonomik ve teknolojik gelişmelere paralel olarak köklü bir biçimde gelişmekte ve değişmektedir. Bu değişim ve gelişim sürecinde eğitimcilerin kendilerini yenileyebilmeleri, etkili bir şekilde öğretim için gelişmeleri takip etmeleri gerekmektedir (Tunç, 2011). Etkili bir öğretim için, farklı ve gelişen eğitim anlayışlarına uygun öğrenme ortamları tasarlamak ve daha da geliştirmek için öğretmenlerin, öğrencilerinin matematik öğrenmede yaşadıkları zorlukların farkında olmaları gerekmektedir (Yetkin, 2003). Matematik eğitimi sürecinde karşılaşılan zorlukları aşmak için öğrencilerin zorlanmasına sebep olan durumların tespit edilip giderilmesi için çalışmalar yapılmasına ihtiyaç vardır (Çalışkan & Türkmen, 2016). Yapılacak olan bu çalışmalarda, matematik eğitimindeki zorlanmaların belirlenmesi ve giderilmesi, bilimsel disiplinlerde yaşanan matematiksel kaynaklı zorlanmalar için de fayda sağlayacaktır (Kıray vd., 2015)

Matematiksel zorluk, öğrencilerin yaptıkları hatalar, bu hatalara neden olabilen kavram yanılgılarından oluşan genel bir kavramdır. Her hata bir kavram yanılgısı değildir ancak her kavram yanılgısı hatalara neden olacaktır (Bingölbali & Özmantar, 2015). Bu nedenle, hataların nedenleri iyi araştırılmalı, sahip olunan kavram yanılgıları tespit edilmeli ve giderilmelidir. Bu tespit etme ve gidermeler matematiğin birikimli yapısı için önemlidir. Öğrenme sürecinde her birey, yeni deneyimlerini daha önceki deneyimleri ile sentezleyerek öğrenmektedir. Öğrenme; daha fazla bilgi keşfetmek değil, farklı şema ve yapılarla eski ve yeni bilgileri ilişkilendirerek yorumlamaktır (Brooks & Brooks, 1993). Birey yeni bir durumla karşılaştığı zaman dengesizlik hali yaşar. Yeniden denge haline gelebilmek için durumu ya mevcut şemalara asimile eder (özümseme) ya da uyumsayarak yeni bir şema oluşturur (Piaget & Mallon, 1976). Bu eski ve yeni bilgi sentezlemesi, kavramların birbiri üzerine inşa edildiği matematik bilimi için önem arz etmektedir.

Cebir öğretimi, matematik eğitiminde geniş bir yere sahiptir. Ortaokulun ilk kademelerinin ardından ortaöğretimde, ortaöğretimin ardından bazı lisans programlarında öğretilmeye devam edilmektedir. Ülkemizde eğitim fakültelerinde verilen cebir eğitiminin (soyut cebir) büyük bir kısmı ise cebirsel yapılardan oluşmaktadır. Cebirsel yapılar, temel taşını oluşturan grup teorisi ve üzerine inşa edilen halka ve cisim teorisi vb. konularından oluşmaktadır. Grup teorisi içeriği, Türkiye'de Eğitim Fakültelerinde soyut cebir, soyut cebire giriş vb. isimlendirilmiş derslerde başlangıç düzeyinde gösterilmektedir. Yapılan lisans ders programı değişikliği sonrası grup teorisi içeriği; İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde Cebir, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde Cebire Giriş dersi adı altında verilmektedir (YÖK, 2018). Bu başlangıç seviyesindeki derslerde ikili işlemler, grup tanımı ve temel özellikler; alt gruplar, permütasyon grupları, devirli gruplar, kosetler ve Lagrange teoremi, izomorfizma teoremleri, bir grubun bir küme üzerine etkisi, halkalar vb. konu içerikleri gösterilmektedir.

Bu çalışmada temel grup teorisi kavramlarından biri olan alt grup kavramı üzerine odaklanılmıştır.

1.1. Temel Grup Teorisi

Bu bölümde, araştırmanın teorik kavramı olan alt grup kavramı ile ilişkili olan bazı temel grup teorisi kavramlarının tanımları ve bazı açıklamalar verilmiştir. Burada aktarılan bilgiler (Gallian, 2010; Nesin, 2013) kaynaklarından oluşturulmuştur.

1.1.1. Grup Kavramı

Bir grubun oluşabilmesi için boş farklı bir kümeye ve üzerinde tanımlanmış işleme ihtiyaç vardır.

G boştan farklı bir küme olmak üzere; $o: G \times G \to G$ biçimindeki fonksiyona G üzerinde bir ikili işlem denir. İşlem bir fonksiyondur ve işlemin sonucu yine G kümesinde olmalıdır yani işlem, üzerinde tanımlandığı kümeye göre kapalılık özelliğini sağlamalıdır ($\forall a, b \in G\ için\ aob \in G$).

G kümesinin grup belirtebilmesi için $G \neq \emptyset$ ve "o" nin G kümesi üzerinde tanımlanmış bir işlem belirtmesine ek olarak aşağıdaki aksiyomları sağlaması gerekmektedir.

i) (Birleşme özelliği) $\forall a, b, c \in G\ için\ (aob)oc = ao(boc)$,

ii) (Birim elemanının varlığı) $\forall x \in G$ için $xoe = eox = x$ eşitliğini sağlayan bir $e \in G$ birim elemanı,

iii) (Ters elemanın varlığı) $\forall x, y \in G$ için $xoy = yox = e$ olacak şekilde $y = x^{-1}$ varsa, Yukarıdaki aksiyomlara ek olarak G kümesi değişme özelliğini de sağlıyor ise yani;

$\forall a, b \in G \text{ için } aob = boa$ ise G'ye değişmeli grup denir. Dikkat etmek gerekir ki değişme özelliği bir kümenin grup belirtmesi için şart değildir ancak bir grubun özel olarak değişmeli grup belirtmesi için şarttır.

Grup kavramına tekrar bakacak olursak bir grup, yukarıdaki i,ii,iii özelliklerini sağlayan bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış bir ikili işlemden oluşur. Yani bir grup bir (G, o) ikilisidir. Ancak çoğu zaman işlem ya çok bariz ya da belirtilmesi önemli değildir. Bu nedenle özellikle aşina olunan $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sayı gruplarından söz edilirken işlemin toplama olduğu söylenmeden açıktır. Benzer şekilde, $\mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$ sayı grupları aksi söylenmediği sürece çarpma işlemi altında grup belirttiği anlaşılır. Biraz daha özele inecek olursak S_n grupları da bileşke işlemi altında bir grup belirtir. Ayrıca aksiyom kontrollerinde işlem her zaman yazılmaz. Örneğin; ters elemanın varlığı için " $\forall x, y \in G$ için $xoy = yox = e$ olacak şekilde $y = x^{-1}$ varsa" şeklindeki gösterimden ziyade "$\forall x, y \in G$ için $xy = yx = e$ olacak şekilde $y = x^{-1}$ varsa," şeklinde ifade edilir. Burada işlem her zaman çarpmadır gibi bir yanılgı oluşabilir ancak işlem toplama ya da herhangi başka bir işlem olsa bile genel gösterim bu şekildedir.

1.1.2. Alt grup kavramı

G bir grup olmak üzere, H grubun boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi, G'de tanımlanan işleme göre bir grup belirtiyorsa H, G'nin alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Bir G grubunun alt kümesi olan H'nin alt grup belirtip belirtmediğini incelerken H'nin G grubunun işlemine göre grup şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek pratikte pek kullanışlı değildir. Aşağıda verilen üç sonuç alt kümenin alt grup belirtip belirtmediğini tespit etmek için yeterli olacaktır.

Alt grup kontrolünde grup şartlarının tamamının kontrolü işlevsel değildir çünkü bazı şartlar otomatik olarak sağlanacaktır. H kümesinin her elemanı G grubunun bir elemanı olduğu için birleşme özelliği gruptan miras kalacaktır. Ayrıca e, G grubunun birim elemanı olmak üzere $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ varsa $aa^{-1} = e \in H$ olacağı için aşağıdaki iki şartın kontrol edilmesi yeterlidir:

Teorem 1.1.1.1. (İki Adımda Alt Grup Testi) G bir grup ve H, G'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart;

i) $\forall a, b \in H\ için\ ab \in H$,

ii) $\forall a \in H\ için\ a^{-1} \in H$,

olmasıdır.

İki adımda alt grup testine ek olarak alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını iki farklı yolla daha test edebiliriz.

Teorem 1.1.1.2. (Tek Adımda Alt Grup Testi) G bir grup ve H, G'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart; $\forall a, b \in H\ için\ ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

Son olarak, sonlu gruplarla çalışılırken alt grup tespitinde aşağıdaki testin kullanılması daha kolaylaştırıcıdır.

Teorem 1.1.1.3. (Sonlu Alt Grup Testi) H, G grubunun boştan farklı sonlu bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubunun işlemi altında kapalı ise H, G grubunun alt grubudur.

Bir alt kümenin alt grup belirttiğini göstermek için sağlanması gereken şartların kontrolü gerekmektedir ancak alt grup belirtmediğini göstermek için faydalanabileceğimiz bir teorem bulunmaktadır: Lagrange teoremi.

Teorem 1.1.1.4. (Lagrange Teoremi) Eğer G sonlu bir grup ve $H \leq G$ ise $|G|/|H|$'dir. Yani eğer G sonlu bir grup ve H, G'nin alt grubu ise H'nin mertebesi (eleman sayısı), G'nin mertebesi (eleman sayısını) tam böler.

Ancak, şu noktaya dikkat etmek gerekmektedir. Lagrange teoremi tek taraflı bir önermedir. Yani, Lagrange teoreminin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Örneğin; 12 elemanlı bir grubun 12, 6, 4, 3, 2, 1 elemanlı alt grubu olabilir ancak 6'nın 12'yi tam bölmesi kesinlikle 6 elemanlı bir alt grup vardır anlamına gelmemektedir. Ancak devirli alt gruplarda bu durum yani teoremin ters ifadesi her zaman doğrudur.

1.1.3. Kalan grupları

Teorem 1.1.1.5. $\forall n \geq 2$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ bir gruptur.

($n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\oplus$ işlemi toplamsal mod n işlemidir.)

$\mathbb{Z}_n$, kalan grupları olarak isimlendirilen bir gruptur. $n \geq 2$ olmak üzere bütün $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_n$'ler; üzerinde tanımlanan işleme göre grup belirtmektedir. Her bir kalan grubunun üzerinde tanımlanan işlem toplamsal mod işlemidir ancak her birinin modu farklıdır. Örneğin; $\mathbb{Z}_2$ grubu üzerinde toplamsal mod 2 işlemi tanımlı iken $\mathbb{Z}_7$ grubu üzerinde toplamsal mod 7 işlemi tanımlıdır. Bu doğrultuda, "Her bir kalan grubunun üzerinde tanımlanan işlem farklıdır." cümlesini kurmak yanlış olmayacaktır.

Teorem 1.1.1.6. H, G nin bir alt grubu ise H nin birim elemanı ile G nin birim elemanı aynıdır.

Bu teorem üst grup ve alt grubun farklı işlemler üzerinde tanımlı olan kümeler olamayacağından ortaya çıkmaktadır. Bir grubun bir alt kümesini belirlerken işlemin bir fonksiyon oluşunu kavrayabilmek oldukça önemlidir. "İşlemin fonksiyon oluşu" ile ifade edilen şey şudur: Her işlem bir fonksiyondur. Fonksiyon ise girdilere yani tanım kümesi elemanlarına istenilen durumu uygulayıp çıktı yani görüntü kümesi elde etmektir. Fonksiyon belirtmek için tanım kümesindeki her elemanın görüntü kümesinde bir karşılığı bulunmalıdır. Bu nedenle, grubun bir alt kümesini belirlerken eleman olarak seçtiklerimize işlem uygulandığında (yani fonksiyon) görüntü kümesinde karşılığı olması gerekmektedir. Ancak bu durumu bozan elemanlar varsa o alt kümeyi alt grup adayı olarak seçmenin anlamı yoktur.

1.2. Problem Durumu

Cebir, matematik eğitiminde ilk kademelerden itibaren geniş yer tutan bir alandır. 2017 Matematik Öğretim Programına göre 6. Sınıftan itibaren matematik eğitiminde yer almaktadır. Cebir, ana bir başlıktır. Bu ana başlığın okul cebri (school algebra)), soyut cebir, lineer cebir, cebirsel geometri, bilgisayar cebiri gibi alt başlıkları bulunmaktadır. Okul cebri; ortaokul ve lise dönemini kapsayan, değişkenlerin yalnızca sayılar olduğu dört işlem aritmetiğinin bir genellemesi olarak görülebilir. Soyut cebir ise; değişkenlerin sayılar, vektörler, matrisler, fonksiyonlar, dönüşümler ve permütasyonlar dahil olmak üzere çeşitli matematiksel nesneleri temsil edebildiği, ifadelerin ve denklemlerin belirli nesneler için anlamlı olan işlemlerle oluşturulduğu okul cebrinin bir genellemesidir (Findell, 2001). Soyut cebir, birçok farklı matematiksel sistemi aynı soyut yapının özel durumları olarak değerlendirmeye olanak sağlayan aksiyomatik teorilerden oluşur. Teoriler aksiyomatik olarak adlandırılır çünkü yapılar aksiyomlarla tanımlanır. Grup teorisi "aksiyomatik teorilerin en eskilerinden (ve aynı zamanda en basitlerinden) biridir" (Bourbaki, 1950). Ancak bu basitlik grup teorinin temelde bir noktada olduğuna dikkat çekmekte ve öğrencilerin zorluk yaşamadıkları anlamına gelmemektedir. Aksine literatürde pek çok çalışma öğrencilerin soyut cebirin yapısı gereği zorlandıklarını göstermektedir (Agustyaningrum vd., 2020; Weber, 2001; Yeriizon vd., 2019; Yetkin, 2003).

Matematiğe dair anlayışı geliştirmek önemli ve gerekli ancak zor bir hedeftir. Öğrencilerin yaşadığı zorlukların ve bu zorlukların neden kaynaklandığının farkında olmak, bunları azaltacak şekilde ilerlemek matematiğe dair anlayış geliştirmede önemli adımlardır (Yetkin, 2003).

Matematikte, problem çözme sürecinde yaşanılan zorlukların nedenleri bazen bize çözümler için yol çizerler. Bu nedenle de bir zorluğun neden ortaya çıktığını bulmak, bu zorlukları aşmak için atacağımız ilk adımımız olabilir. Bu doğrultuda araştırmanın temel problem konusu öğrencilerin soyut cebirde karşılaştıkları zorlukları belirlemektir. Ancak soyut cebirin sahip olduğu geniş içerik nedeniyle en temeldeki konu olan grup teori üzerinde durulmuş olup alt grup kavramı üzerine bir araştırma yürütülmüştür.

Araştırmanın amacı doğrultusunda problem cümlesi; "Öğrencilerin, alt grup kavramına ilişkin karşılaştıkları zorluklar nelerdir?" şeklinde oluşturulmuştur. Bu probleme uygun olarak aşağıdaki alt problemlere yanıt aranmıştır:

1. Öğrencilerin, alt grup kavramını tanımlarken yaşadığı zorluklar nelerdir?
2. Öğrencilerin, bir alt grup örneği verirken ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ederken yaşadığı zorluklar nelerdir?
3. Öğrencilerin, kalan gruplarının alt gruplarını incelerken yaşadığı zorluklar nelerdir?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, öğrencilerin alt grup kavramına ilişkin yaşadığı zorlukları tespit etmektir. Bu doğrultuda; öğrencilerin problem çözüm süreçlerinde yaptıkları hataların incelenmesi, kavram yanılgılarının tespit edilmesi, tanım yapma becerilerinin incelenmesi, sahip olunan bilginin kullanılıp kullanılamadığının incelenmesi, örnek verme becerilerinin incelenmesi, zorlandıkları noktaların tespit edilmesi ve olası nedenlerin sunulması hedeflenmiştir.

1.4. Araştırmanın Önemi

Genel olarak soyut cebir, özel olarak da grup teorisi içeriği öğrenciler için ciddi bir zorluk teşkil etmektedir. Yaşanılan bu zorluklar, çoğu öğrencinin bu dersi (soyut cebir) aldıktan sonra soyut matematiğe karşı olumlu tutumunun azalmasına neden olmaktadır. (Dubinsky vd., 1994). Öğrenci başarısızlıkları, umutsuzluklar ve yaşanılan zorluklar ileri matematiğe karşı olumsuz tutum geliştiren gençlerin artmasına neden olursa bu durum ileri matematik öğretiminin geleceğini de tehlikeye atacaktır.

Soyut cebir; grup teorisi, halka teorisi, modül teorisi, cisim teorisi gibi cebirsel yapılar üzerinde çalışır. Cebirsel yapılar, matematiğin genel yapısında olduğu gibi birbiri üzerine inşa edilen kavramlardan oluşmaktadır. Bu durum; halka, cisim gibi cebirsel yapıların temelini oluşturan grup yapısının önemini göstermektedir. Grup teorisinde yaşanan sorunlar, grup kavramı üzerine inşa edilen "halka" ve "cisim" yapılarının kavranması sırasında da sorunlara yol açmaktadır (Arıkan vd., 2015). Bu nedenle, grup teorisinin öğrenimi ve öğretimi soyut cebir için temelde bir noktada yer almaktadır.

Ülkemizde matematik eğitimine ilişkin tüm eğitim kademelerinde çalışmalar yürütüldüğü bilinmektedir. Ancak grup teorisi ile ilgili yapılmış eğitim çalışmaların sayısı oldukça azdır (Arıkan vd., 2015; Gök, 2016; Konyalıoğlu, 2005; Okur, 2006; Tatar, 2006). Üniversite düzeyindeki özellikle soyut cebir dersine yönelik çalışmaların azlığı öğrencilerin bu derste neden bu kadar zorlandıklarına yönelik yeterli bir açıklama getirememektedir. Ayrıca ülkemizde grup teorisi ile ilgili eğitim çalışmalarının azlığının yanı sıra öğrencilerin yaşadıkları zorluklara dair kapsamlı yapılmış bir araştırma olmadığı görülmektedir. Bu çalışma, öğrencilerin yaşadıkları zorlukları belirlemek adına önemli olacaktır.

1.5. Sayıltılar

Yapılan bu çalışmada aşağıda belirtilen durumlar varsayılmıştır:

1. Araştırmaya katılan öğrencilerin verilen problemleri yanıtlarken çabaladıkları, problemlere üstünkörü yaklaşmadıkları varsayılmıştır.

2. Hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme formuna cevap verirken öğrencilerin düşüncelerini açıkça yansıttıkları varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

Yapılan bu çalışma;

1. Bir devlet üniversitesinde Eğitim Fakültesi'nde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören öğrencilerle sınırlandırılmıştır.

2. Grup teorisinin geniş kapsamı nedeni ile yalnızca alt grup kavramına ilişkin zorlukların tespiti ile sınırlandırılmıştır.

1.7. Tanımlar

Hata: Matematiksel ifade ve fikirlerin yanlış kullanılması ve sonuçlandırılmasıdır (Erbaş vd., 2009).

Kavram yanılgısı: Sistemli bir şekilde hata üreten kavrayışa sahip olmaktır. (Akt., Zembat, 2015)

Matematiksel zorluk: Matematiksel zorluk, öğrencilerin yaptıkları hatalar, bu hatalara neden olabilen kavram yanılgılarından oluşan genel bir kavramdır. Her hata bir kavram yanılgısı değildir ancak her kavram yanılgısı hatalara neden olacaktır (Bingölbali & Özmantar, 2015).

BÖLÜM 2

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Ulusal Literatürde Temel Grup Teorisi ile İlgili Yapılan Eğitim Çalışmaları

Ulusal literatürde, temel grup teorisi ile ilgili yapılan çalışmalar daha çok programlama dili ile öğretim gibi yeni öğretim yollarının etkililiğinin incelenmesi üzerinedir.

Konyalıoğlu (2005) çalışmasında, ISETL programlama dilinin kullanıldığı öğretim ile; geleneksel ders öğretiminin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin, öğrenci başarılarında ve matematiğe karşı tutum geliştirmede etkililiği karşılaştırılmıştır. ISETL programa dili kullanılarak gerçekleştirilen öğretimin uygulandığı deney grubu ile, geleneksel ders öğretiminin yapıldığı kontrol grubundan elde edilen veriler analiz edilerek bir sonuca varılmıştır. Sonuçlar; ISETL programlama dilinin kullanıldığı öğretimin, geleneksel öğretime göre daha etkili olduğunu göstermiştir. Ayrıca, ISETL programlama dilinin kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin matematiğe karşı tutumunun daha yüksek olduğu görülmüştür.

Okur (2006) çalışmasında, izomorfizm kavramının öğretiminde ISETL ve GAP programlama dilinin kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim ile geleneksel öğretim yönteminin öğrenci başarısına etkililiğini karşılaştırmıştır. ISETL programlama dili kullanılarak gerçekleştirilen öğretimin uygulandığı deney-1 grubu, GAP programlama dili kullanılarak gerçekleştirilen öğretimin uygulandığı deney-2 grubu ve geleneksel öğretimin uygulandığı kontrol grubu kendi aralarında ikişerli olarak karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, ISETL ve GAP kullanılarak gerçekleştirilen öğretimlerin arasında anlamlı bir fark bulunmadığını gösterirken hem ISETL hem de GAP ile öğretimin geleneksel öğretime göre başarı açısından daha etkili olduğu görülmüştür.

Tatar (2006) çalışmasında, lise öğrencilerinin ikili işlem ve özelliklerine ilişkin öğrenme zorluklarını tespit etmiş ve 4MAT öğretim yönteminin ikili işlem öğretimindeki etkililiğini incelemiştir. İkili işlem konusunu öğrenmede zorluklara ilişkin elde edilen veriler analiz edilmiştir. Ayrıca 4MAT ile öğretimin uygulandığı deney grubu ile geleneksel öğretimin uygulandığı kontrol grubundan elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. Sonuçlar; öğrencilerin çoğunun ikili işlemin özelliklerini öğrenmede zorluk yaşadığını ve 4MAT öğretim yönteminin geleneksel öğretime göre daha etkili olduğunu göstermektedir.

Arıkan vd. (2015) çalışmasında, matematik bölümü öğrencilerinin grup ve alt grup kavramlarına ilişkin yapılan hataları analiz etmişlerdir. Öğretim üyeleri tarafından hazırlanan altı soruluk yazılı bir sınavdan elde edilen veriler Doğru/Yanlış kategorilerinde kodlandıktan sonra Yanlış kategorisinde olan kısımlar incelenmiştir. Sonuçlar; işlemin iyi tanımlanmış olması gerekliliğinin göz ardı edildiğini, soyut düşünmek yerine kopya çekildiğini, tanımların içselleştirilmeden ezberlendiğini, grup şartlarının doğru sıralandığını ancak yanlış incelendiğini, kapalılığın incelenmeden varsayıldığını vb. göstermektedir.

Gök (2016) çalışmasında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının grup konusu ile ilgili bilgileri, alan bilgisi ve öğrenci bilgisi açısından incelemiştir. 3 öğretmen adayının katılımı ile gerçekleştirilen bu çalışmada sonuç olarak, öğretmen adaylarının grup konusu ile ilgili yeterli alan bilgisine sahip olmadıkları ve bilgilerin farklı bağlamlarda ilişkilendirilerek kullanılamadığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının, öğrencilerin hatalarını düzeltebilecek uygun stratejiyi alan bilgisindeki eksiklikler nedeniyle uygulayamadıkları görülmüş ve öğretmen adaylarının güçlü alan bilgisine sahip olması durumunda hatalara karşı uygun strateji ile müdahale edebilecekleri öngörülmüştür.

2.2. Uluslararası Literatürde Temel Grup Teorisi ile İlgili Yapılan Eğitim Çalışmaları

Ülkemize benzer şekilde, uluslararası alanda temel grup teorisi ile ilgili yürütülen çalışmalar daha çok pür matematik üzerinedir. Eğitim çalışmaları ise 25-30 sene önce 20. yy.'ın sonları, 21. yy.'ın başlarında başlamıştır. Dubinsky (1991), ileri seviye matematik kavramlarının öğrenimi üzerine odaklanmış ve üniversite düzeyindeki matematiksel kavramların, zihinde nasıl inşa edildiğini tarif eden APOS teorisini yayınlamıştır. Dubinsky'nin çalışmaları ile eş zamanlı olarak Lisans Düzeyinde Matematik Eğitimi Araştırma Topluluğu (RUMEC) üyeleri tarafından üniversite öğrencilerinin matematiksel bilgilerinin doğasını ve gelişimini incelemek amacıyla çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmalarda lisans düzeyindeki matematik eğitimine odaklanıldığı için grup teorisi üzerine de araştırmalar yapılmıştır.

Dubinsky vd. (1994), Asiala vd. (1997), Brown vd. (1997), Asiala vd. (1998) çalışmalarında, öğrencilerin çeşitli ortamlarda grup teorisine ilişkin kavramları nasıl öğrendikleri, öğrenme sürecinde ne tür zorluklar yaşadıkları gözlem yoluyla incelenmiştir. Bu araştırmalar genellikle pedagojik öneriler sunmakla birlikte, ana odak noktaları öğrencilerin kavramları öğrenirken oluşturdukları veya oluşturmaları gereken bilişsel yapılandırmalardır.

(Dubinsky vd., 1994) çalışması nitel bir çalışma olup gözlem yoluyla veri toplamayı içermektedir. Temel grup kavramlarına odaklanılan bu çalışmada, yapılan gözlemlerle öğrencilerin öğrenme sürecinden elde edilen veriler APOS teorideki bilişsel yapı aşamalarına göre yorumlanmıştır. Çalışmanın ulaşılmaya çalışılan hedefleri birbiri ile bağlantılı iki soruya yanıt aramaktır: a) Bir birey temel grup teorisinde belirli konuları nasıl öğrenebilir? b) Bunun genel olarak matematiği ve soyutlamayı anlamakla ne gibi bir ilişkisi vardır?

Grup ve alt grup kavramının oluşma ve gelişme süreçleri ile ilgili gözlemlerden elde edilen yorumlar, olası aşamalar şu şekilde sunulmaktadır:

- **Grubun küme, alt grubun yalnızca bir alt küme olarak algılanması:** Bazı öğrencilerin yeni bir kavramı (grup), tanıdık bir kavramla (küme) ilişkilendirerek inşa etme çabalarından kaynaklanan bir kavram yanılgısıdır. Grubun sadece bir küme, benzer şekilde alt grubun sadece bir alt küme olarak algılanması bir kavram yanılgısıdır. Bu, kavramın yeniden yapılandırılmadan önce durumun var olan mevcut şemalara asimile edilerek yeniden dengelenmesine bir örnektir. Öğrenciler bu aşamayı hiç yaşamayabilirler, yaşadıktan sonra hızlı bir şekilde durumu fark edip aşabilirler.

- **Grubun ve alt grubun, bir küme ve üzerinde tanımlanan işlem ile birlikte algılanması:** Öğrenciler, zihinlerindeki mevcut küme kavramının grup kavramını anlamada yetersiz kaldığı durumlarla karşılaştıkça, grup ve alt grupların belirlenmesine işlem kavramını dahil etmeye başlayabilirler. Bir küme üzerindeki işlem, bir fonksiyon olduğundan öğrencinin fonksiyon şeması burada devreye girebilir. Öğrenciler işlem kavramının rolünü anladıkları zaman, yani işlemin fonksiyon işlevini kavradıkları zaman grubu sınırlama eylemini zihinde gerçekleştirebilir. Eğer öğrenciler işlemin bu fonksiyonel rolünü kavrayabilirse alt grup için daha büyük olan grubun işleminin göz önüne alınacağını da kavrayabilirler.

- **Grup ve alt grubun koordine edilmesi:** Bireyin alt grup kavramını geliştirmesi, grup kavramını geliştirmesiyle eşgüdümlü (koordineli) olabilir. Bazı öğrenciler, bir alt kümenin alt grup belirtmesi için alt kümenin tüm grup aksiyomlarını sağlaması gerektiğini kavrayabilir. Ancak gruptan kapalılığın miras kalması gibi yanlış düşünceler de kendisini gösterebilmektedir.

- **Grubun nesne olarak algılanması:** Birey eylemlerin uygulanabileceği nesnelere sahip olmak için süreçleri kapsülleyebilir (*encapsulation*) ve grubu nesne olarak algılayabilir. Ancak kapsülleme her zaman o kadar kolay olmayabilir hatta her zaman mümkün olmayabilir, yani hiç o düzeyde bir öğrenme gerçekleşmeyebilir. Bu aşamada grubun sahip olduğu özellikler yardımıyla bazı farkındalıklar, pratiklikler kazanılabilir. Örneğin Lagrange teoremini bir alt grup kontrolünde, bir alt kümenin alt grup belirtmiyor oluşunu göstermek için kullanmak görünür hale gelir. Ayrıca bu aşamada, öğrenci birleşme özelliğinin miras kaldığını fark edebilir ve kapalılığa ek olarak birim elemanın alt kümede yer aldığını ve her elemanın tersinin kümede yer alıp almadığının kontrol edileceğini kavrayabilir.

Brown vd. (1997) çalışmasında; ikili işlem, grup ve alt grup kavramlarının epistomolojisinin ön teorik analizini sunmaktadır. Bu sunulan ön analizin amacı genetik bir çözümleme (*genetic decomposition*) önermektir. Genetik çözümleme, bir öğrencinin bir kavrama dair anlayışını geliştirmek için oluşturması gerektiği belirli zihinsel yapıların ne olabileceğidir.

Çalışmada ikili işlem, grup, alt grup kavramlarına dair sunulan zihinsel yapılar aşağıda verilmiştir:

- **İkili işlem:** İşlem bir fonksiyondur. Bu nedenle, oluşan zihinsel yapılar fonksiyon öğrenimine yönelik sunulan zihinsel yapılarla bir paralellik göstermektedir. Eylem düzeyinde anlayış gösteren bir öğrenci ikili işlemi yalnızca modüler aritmetik gibi açık bir formül verildiğinde uygulayabilir. Genel bir ikili işleme dair anlayışı, eylem düzeyinden süreç düzeyine geçişini sağlamak için öğrenci fonksiyon şemasını yeniden oluşturmalıdır. Bu sayede kişi, küme üzerine fonksiyonu yansıtabilir. Ayrıca bu kavrayış hem küme kavramının hem de fonksiyon kavramının nesne düzeyinde anlaşılmasını gerektirir.
- **Grup:** Grup kavramı üç şemanın oluşumu ile anlaşılabilir: Küme, ikili işlem ve aksiyomatik sistem. Küme ve ikili işlem şemaları, nesneler oluşturmak üzere temalaştırılır ve aksiyom şeması aracılığıyla koordine edilir. Aksiyom şeması, bir küme üzerindeki ikili bir işlemin bir özelliği (kapalılık, birim eleman, ters eleman) sağladığı veya sağlamadığı genel fikrini içerir ki bu da esasen söz konusu özellikleri kontrol etme sürecidir.

Grup kavramının inşası; küme, ikili işlem ve aksiyomatik sistem şemalarının koordine edilmesi ile oluşturulabilir denilmişti. Bu koordinasyonun inşasında bazı yanılgılar oluşabilir. Çalışmadaki verilere göre bu şemaları koordine etmenin ilk aşamalarında, bir grup kapalı olduğu için onun alt kümelerinin de kapalı olduğu yanılgısı, yani kapalılığın alt kümeye miras kaldığı gibi yanlış genellemeler mevcuttur.

- **Alt grup:** Alt grup kavramı üç şemanın koordinesi ile anlaşılabilir: Grup, alt küme ve fonksiyon. Bu yapının kritik bir bileşeni ikili işlem fonksiyonunun alt kümeyle sınırlandırılması hakkında düşünebilme yeteneğidir. Fonksiyon, yani ikili işlem ve alt küme şemaları birbirleri ile koordine edilerek fonksiyonun alt küme ile sınırlandırılması süreci elde edilir. Daha sonra grup şemasındaki aksiyom şeması uygulanarak alt grup kavramı elde edilir.

Tüm bunlara ek olarak bu çalışmada *temalaştırma* (bir yansıtıcı soyutlama türü) üzerine durulmuştur. Örneğin alt grup şemasına sahip olan ancak temalaştırmamış öğrencilerin, yaptıkları hatalar sonrası geri dönüt aldıkları zaman ve düşünmelerine yönelik sorular sorulduğu zaman hatalarını fark ettikleri ve düzeltme yaptıkları görülmektedir. Bu da alt grup şemalarının temalaştırmadığının bir göstergesi olarak yorumlanmaktadır.

Literatürde öğrencilerin grup teorisindeki bir kavramı öğrenirken ya da problem sürecinde yaşadığı zorlanmaları içeren çalışmalar da mevcuttur. Aşağıda alt grup kavramı ile ilişkili olan kavramlar üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Hazzan (1999), grup, alt grup, kosetler, Lagrance teoremi ve bölüm grupları üzerine odaklandığı çalışmasında, çalışma sırasında geliştirilen ve öğrencilerin soyut cebir kavramlarına ilişkin anlayışlarını açıklamayı amaçlayan *soyutlamayı indirgeme* temasını açıklamaktadır. Hazzan, öğrencilerin bir başa çıkma mekanizması (coping mechanism) olarak soyutlama düzeylerini sıklıkla azalttığını belirtmiş ve bunu kısaca soyutlamayı indirgemek olarak tanımlamıştır. Soyutlama karmaşık bir kavram olduğu için çalışmasında soyutlamanın tüm yorumlarını gözden geçirmeyi değil üç yoruma dayalı olarak incelemeyi amaçlamıştır.

1. **Düşünülen nesne ile düşünen kişi arasındaki ilişkinin niteliği olarak soyutlama düzeyi**

   Kişinin nesne ile olan ilişkisi nesneyi soyut ya da somut olarak algılamasını sağlamaktadır. Bir kişi bir nesneye ne kadar yakınsa yani ne kadar çok bağ kurmuş ise o kadar az soyut (daha somut) algılar. Farklı bir ifade ile her kavram ve her kişi arasında, önceki deneyimsel bağlantılarını yansıtan farklı bir soyutlama düzeyi gözlemlenebilir. Kişinin nesne ile olan ilişkisi, nesneyi nasıl algıladığını belirler. Hazzan, bu çalışmasında öğrencilerin zihinsel süreçlerinde yabancı bir fikri tanıdık hale getirme, başka bir ifade ile kendisi için soyut olanı somut hale getirme eğilimlerinin bu bakış açısına dayandırılabileceğini belirtiyor. Örneğin, öğrenciler farklı grup örneklerinde (örneğin $\mathbb{Z}_3$) küçüklükten beri aşina oldukları tanıdık nesneler olan sayı sistemleri ve işlemlerine güvenme eğilimindedirler. Bunun sebebi de daha önce belirtildiği gibi zihinsel olarak tanıdık bir varlığa bağlı kalma ihtiyacının bir sonucu olabilir.

2. Süreç-nesne ikililiğinin yansıması olarak soyutlama düzeyi

Nesne düzeyindeki bir kavrayış, süreç düzeyine göre daha yüksek bir kavrayıştır. Ancak nesne düzeyi daha ileri bir düzey anlayış gerektirdiği için öğrenciler bu tarz kavrayışlarda zorlanmaktadır. Öğrencilerin sınırlayıcı olmayan, belirsiz prosedürlerden, herhangi bir derecede özgürlük içeren prosedürlerden korktukları düşünülmektedir. Bu yüzden de öğrenciler potansiyel olarak anlayabilecekleri teoremleri, fikirleri, işlemleri bile kullanmak yerine bazen anlamasalar bile kalıplaşmış prosedürleri (*canonical procedure*) kullanmayı tercih etmektedirler.

3. Düşünce kavramının karmaşıklık derecesi olarak soyutlama düzeyi

Soyutlamaya yönelik bu yorum nesnelerin karmaşıklık derecesine odaklanmaktadır. Örneğin bir grup kümesi, o kümedeki belirli bir gruptan daha bileşik bir nesnedir. Bu bileşiklik otomatik olarak daha zorluk yaşanacağı anlamına gelmemektedir ancak bir şey ne kadar bileşikse o kadar soyuttur. Dolayısıyla öğrencilerin daha bileşik/karmaşık olan nesneler yerine daha az bileşik olan nesnelerle çalışıyor olması da bir başa çıkma mekanizması olarak zihinlerindeki karmaşayı çözmek adına kullanışlı bir araçtır.

Soyutlamanın tüm bu yorumlarına dayanarak soyutlamanın indirgenmesinin bir başa çıkma mekanizması olarak kullanımı öğrencilerin kavramlara dair yeterli anlayışı geliştirememelerine sebep olacak ve eksik öğrenmelere yol açacaktır.

Öğrenciler kanonik yani adım adım ne yapılacağı belli olan prosedürlere güvenme eğilimi göstermektedir (Leron vd., 1995). Hazzan (1999), çalışmasında öğrencilerin kanonik prosedürlere güveniyor olmasını bir başa çıkma mekanizması (*coping mechanism*) olarak değerlendirmişti. Örneğin $\mathbb{Z}_7/\{0\}$ grubunun alt grubu olan $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ grubunun çarpımsal mod 7 işlemine göre kosetlerinin hesaplamasının istenildiği soruda bir öğrenci kosetlere dair "Kosetler, bir grubu ayrık kümelere ayırır ve kümelerin eleman sayıları eşittir." bilgisine sahip olmasına rağmen her daim alışık olduğu, kosetleri tek tek hesaplama eğilimi göstermiştir. Sahip olduğu koset bilgisini kullanmamış olması gereksiz hesaplamalar yapmasına neden olmuştur.

Kalıplaşmış prosedürlere ek bir örnek olarak, bir grup öğrenciden 4. mertebeden bir grup için işlem tablosu oluşturulması istenildiğinde öğrencilerin direkt olarak "sudoku yöntemi" adı verilen prosedürü uyguladıklarının görülmesi verilebilir (Weber & Larsen, 2008). Kalıplaşmış bir prosedürün varlığı öğrencilerin matematiksel kavramların özelliklerini analiz etmeden çözmelerine ve adım adım belli olan algoritmayı otomatik olarak takip etmelerine sebep olmaktadır.

Grup teorisi “taklitçi davranış kalıplarını” öğrenmenin ötesine geçilmesi gereken bir konudur. Böyle bir konu içeriğinde, öğrenciler soyut kavramları kavramalı, önemli matematiksel ilkelerle çalışmalı ve ispat yapmayı öğrenmelidir (Dubinsky vd., 1994). Öğrencilerin daha önce aldığı derslerde soyut cebir dersindeki gibi bir matematiksel tarza/ yaklaşıma ihtiyaçları yoktu. Bu gerekli olan yeni yaklaşım da zihinsel olarak başa çıkmak için öğrencilerin zihinsel stratejiler geliştirmelerine sebep olabilmektedir.

Günümüze biraz daha yakın olan Arıkan vd. (2015) çalışmasında grup ve alt grup kavramına ilişkin hazırlanan sorularda yapılan hatalar analiz edilmiştir. Sorulara verilen cevaplar “Doğru” ve “Yanlış” olarak kodlanmış ve “Yanlış” olarak kodlanan cevaplardaki hatalar analiz edilmiştir. Verilen bir küme ve işlemin grup belirtip belirtmediğine ilişkin yöneltilen sorularda öğrencilerin, grup aksiyomlarını sıraladıklarını ancak yeterince analiz edemediklerini ve öğrencilerin aksiyomları sıralıyor ancak analiz edemiyor oluşlarının ezberci sistemin bir sonucu olarak görülebileceğini ifade etmişlerdir. Bir diğer hata olarak, öğrencilerin sağlanması gereken bir özellik olan kapalılık aksiyomunu ya doğrudan kabul ettikleri ya da hiç incelemeden diğer aksiyomlara geçtikleri görülmüştür. Buna sebep olarak, işlemin zaten kapalılık özelliğini sağlaması gereken bir fonksiyon olunduğunun bilinmesi ya da daha yüzeysel bir neden olarak sadece gözlerinden kaçırdıkları belirtilmiştir. Ayrıca birleşme aksiyomunun kontrolünde yapılan bazı hatalar birleşme özelliğine dair tam olarak neyi kontrol edeceklerini bilmediklerini göstermiştir. Literatürdeki başka çalışmalar da birleşme ve değişme özelliğine dair aşırı genellemeler ve yanılgıların mevcut olduğunu rapor etmiştir (Gök, 2016; Melhuish & Fagan, 2018; Veith vd., 2022b). Bu örneklere ek olarak, değişme özelliği zorunlu bir grup aksiyomu olmamasına rağmen grup aksiyomları arasında incelenebilmekte ve “Değişme özelliğinin sağlanması otomatik olarak birleşme özelliğini de sağlar.” Yanlış kavrayışı da mevcuttur (Gök, 2016). Bu yanılgının da aşina olunan çarpma ve toplama işleminin değişme ve birleşme özelliklerinin her ikisini de sağlamasından kaynaklı olduğu düşünülebilir. Ancak sayı grupları, öğrencilerin soyut cebir derslerinde karşılaştıkları örneklerden yalnızca birkaçıdır. Sayı gruplarının her biri, değişebilirlik gibi birçok ek matematiksel özelliğe sahip olduğu için hiçbiri genel bir grubun tipik bir örneği değildir (Hazzan, 1999).

Grup aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığının kontrolünde karşılaşılan bir diğer zorluk kaynağı da birim eleman ve ters elemanlar ile ilgilidir. Birim eleman ve ters eleman bir kümenin grup belirtebilmesi için incelenmesi gereken aksiyomlardandır. Birim eleman kümenin üzerinde tanımlanan işleme göre değişiklikler gösterebilmektedir ancak Veith vd. (2022a)'in çalışmasında öğrencilerin farklı tanımlanan ikili işlemlerle uğraşırken bile 0 ve 1'in apaçık birim eleman adayları olduğuna dair aşırı bir genelleştirmeye sahip oldukları görülmektedir.

BÖLÜM 3

3. YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın modelinin ne olduğundan, araştırmanın nasıl yürütüldüğünden, araştırmada kullanılan yöntemin ne olduğundan, katılımcıların kimler olduğundan, hangi veri toplama araçlarının kullanıldığından, verilerin nasıl toplandığından ve nasıl analiz edildiğinden bahsedilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırmanın amacı öğrencilerin alt grup kavramına ilişkin karşılaştıkları zorlukları belirlemek olduğu için problem sürecindeki çözüm adımlarının incelenmesi önemlidir. Çözüm süreçlerinde yaşanılan zorluklara neden olan etkenlerin belirlenmesine dair öğrencilerin düşüncelerini daha geniş yelpazede görebilmek için de ek olarak görüşmelerin yapılması gerekmektedir. Bu nedenle çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca mevcut bir durumu ortaya koyma çabası olduğu için çalışma durum çalışması deseni ile yürütülmüştür. Durum çalışması; tek bir durum ya da olayın derinlemesine olarak incelendiği, verilerin sistematik bir şekilde toplandığı ve gerçek ortamda neler olduğuna bakıldığı bir yöntemdir (Creswell & Poth, 1998). Bu doğrultuda belirli bir konuya ilişkin öğrenci zorluklarını belirlemek adına uygun bir modeldir.

3.2. Katılımcılar

Bu araştırmaya bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi'nde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde öğrenim gören ve Cebir dersini alma sürecinde olan 38 öğrenci katılmıştır. Bu öğrencilerden 37 kişi V. dönem, 1 kişi VII. dönem öğrencisidir. 2018 YÖK İlköğretim Matematik Öğretmenliği Ders Programı ve İçeriğine göre alt grup kavramı ilk olarak V. yarıyılda yer almaktadır (YÖK, 2018). Katılımcılardan bir kişi hariç kimse alt grup kavramını içeren cebir dersi içeriği daha önce almamıştır.

Verilerin incelenmesi sonucu yazının okunmaması ve özensiz cevaplar gibi nedenlerden dolayı 7 öğrencinin verdiği cevaplar veri dışı bırakılmıştır. Araştırma boyunca, daha işlevsel olmak ve katılımcı gizliliğini korumak için geriye kalan 31 öğrenci Ö1, Ö2, …, Ö31 şeklinde numaralandırılmıştır. Numaralandırma rastgele yapılmıştır, herhangi bir hiyerarşik sıra içermemektedir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada, amaca uygun veri toplamak için ilk olarak literatürde temel grup teorisine ilişkin yapılan eğitim çalışmaları incelenmiş ve öğrencilerin yaşadıkları matematiksel zorlukların tespit edilebileceği sorular belirlenmiştir. Belirlenen bu sorular üç uzmana danışılmıştır. Alınan geri dönütler sonrasında alt grup kavramına ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmek için yazılı sorular (Bkz. Ek-1) son halini almıştır. Yazılı sorular toplamda dokuz sorudan oluşmaktadır. Bu dokuz soru üç alt probleme veri toplamaya hizmet etmektedir:

1) Alt grup kavramını tanımlamaya ilişkin karşılaşılan zorlukların tespiti için: Soru 1
2) Alt grup örneği verme ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığının kontrolüne ilişkin karşılaşılan zorlukların tespiti: Soru 2, Soru 3, Soru 4, Soru 5
3) Kalan gruplarının alt gruplarını incelemeye ilişkin karşılaşılan zorlukların tespiti için: Soru 6, Soru 7, Soru 8, Soru 9

Her bir sorunun amacı aşağıda Tablo 3.1.'de belirtilmiştir.

Tablo 3. 1. Alt grup kavramına ilişkin yazılı sorularının amaçları

Soru	Amaç
Soru 1	Bu soruda amaç, alt grup kavramını tanımlamaya ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir.
Soru 2	Bu soruda amaç, alt grup örneği vermeye ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir.
Soru 3	Bu soruda amaç, öğrencilerin bir grubun bir alt kümesinin alt grup belirtip belirtmediğini nasıl tespit ettiklerine ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmaktır.
Soru 4	Bu soruda amaç, alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmeye ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir.
Soru 5	Bu soruda amaç, özel olarak alt grup şartlarından kapalılık özelliğini kontrol etmeye ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir.
Soru 6	Bu soruda amaç, öğrencilerin bir grup ve onun alt grubunun mertebeleri arasındaki ilişkiye ilişkin bilgilerini ölçerek daha kısa bir ifade ile Lagrange teoremine ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmaktır.
Soru 7	Bu soruda amaç, kalan gruplarının alt gruplarını incelemeye ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir. Ayrıca özel olarak olarak Lagrange teoreminin tersinin her zaman doğru kabul edilmesi yanılgısına sahip olunup olunmadığının tespiti amaçlanmıştır.
Soru 8	Bu soruda amaç, kalan gruplarının alt gruplarını incelemeye ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir. Ayrıca özel olarak kalan gruplarının farklı işlemlerde (modlarda) tanımlı olmasının göz önünde bulundurulup bulundurulmadığının ve Lagrange teoreminin tersinin her zaman doğru kabul edilmesi yanılgısına sahip olunup olunmadığının tespiti amaçlanmıştır.
Soru 9	Bu soruda amaç, öğrencilerin bir grubun ve onun alt grubunun farklı işlemler üzerinde tanımlı olup olamayacağına ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmak ya da sahip olunan bilgi ile çelişen durumların varlığını tespit etmektir.

Yazılı sorulara ek olarak, bu sorulara verilen yanıtlara ilişkin daha açık veriler elde edebilmek için yarı yapılandırılmış görüşme formu (Bkz. Ek-2) hazırlanmıştır. Her bir sorunun amacı aşağıda Tablo 3.2.'de belirtilmiştir.

Tablo 3. 2. Yarı yapılandırılmış görüşme formundaki soruların amaçları

Soru	Amaç
Soru 1	Burada amaç, öğrencinin gerektiği durumda farklı yollarla daha pratik bir şekilde alt grup kontrolü yapıp yapamadığını/bilip bilmediğini tespit etmektir.
Soru 2	Gruptan otomatik olarak alt kümeye miras kalan özelliklerin bilinip bilinmediğinin sorulmasındaki amaç, öğrencinin fonksiyonun (ikili işlemin) alt kümeye sınırlandırılması fikrini benimseyip benimsemediğini ya da sık karşılaşılan kapalılığın alt kümeye miras kaldığı ve kontrol edilmesine gerek görülmediği yanılgısının öğrencilerde var olup olmadığını tespit etmektir.
Soru 3	Burada amaç, sonlu gruplarda grup ve alt grup mertebeleri arasındaki ilişkiyi ifade eden Lagrange teoremine dair bilgi ölçümü yapmaktır.
Soru 4	Burada birkaç amaç vardır. Amaçlardan birisi öğrencinin tanımı verilmiş olsa dahi $\mathbb{Z}_3$ grubunu herhangi üç elemanlı bir grup olarak görüp görmediğini kontrol etmektir. Bir diğer amaç da işlemleri farklı olan grupların birbirlerinin alt grup olup olmayacağı durumu hakkında nasıl hareket ettiklerini incelemektir

3.4. Verilerin Toplanması

Araştırmanın verileri, katılımcıların lisans V. dönemindeki Cebir dersinin vize haftasından bir hafta önce toplanmıştır. Veri toplama sürecinin devamında yarı yapılandırılmış görüşme formu için hazırlanan sorulardaki amaçlara hizmet edebilecek ve olası zorlukların tespit edilebileceği öngörülen beş kişi seçilerek yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Bu görüşmeler lisans VI. dönemin başında Cebir ders içeriğinin tamamen alınmasından sonra uygulanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme için seçilen ve gönüllü olan beş öğrenciden birisi görüşme öncesi gönüllülükten vazgeçtiği için sürece dört öğrenci ile devam edilmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Nitel araştırmalarda toplanılan veriyi analiz etmek üzere kullanılan yöntemlerden birisi içerik analizidir. İçerik analizi toplanan verilerin bir araya getirilmesini ve düzenlenmesini içerir. İçerik analizinde araştırmacı topladığı verileri açıklayabilecekleri kavramlara ve ilişkilere ulaşmayı hedefler (Gürbüz & Şahin, 2018). Bu nedenle toplanan verilerden yola çıkarak bir sonuca, bir açıklamaya ulaşmak adına veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir.

Araştırmaya katılan 38 öğrencinin yazılı sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde yazının okunmaması ve özensiz cevaplar gibi nedenlerden dolayı yedi öğrencinin verdiği cevaplar veri dışı bırakılmıştır. Kalan otuz bir öğrencinin yanıtları veri olarak ele alınmıştır.

3.5.1. Alt grup kavramını tanımlama düzeyine ilişkin verilerin çözümlenmesi

Alt grup kavramını tanımlama düzeyine ilişkin veri elde etmek amacıyla alt grup yazılı sorularında 1 numaralı soru yer almaktadır.

Soru 1: Alt grup kavramını tanımlayınız.

Araştırmanın birinci sorusunda öğrencilerin alt grup kavramını tanımlama düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.3.'teki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 3. Kavram tanımlama düzeyi değerlendirme kriterleri

Seviye	Kriter
Seviye 2: Kabul edilebilir tanım	G bir grup $\emptyset \neq H \subseteq G$ H, grup özelliklerini sağlıyorsa
	G bir grup $\emptyset \neq H \subseteq G$ H, kapalılık ve ters eleman özelliklerini sağlıyorsa
	Herhangi bir grubun grup olan alt kümesi
Seviye 1: Eksik tanım	Alt küme olma ve boş kümeden farklı olma şartını belirtmeme
	Grup özelliklerinden kontrol edilmesi gerekenlerin kontrol edileceğini ifade etmeme
Seviye 0: Kabul edilemez tanım	Eksik tanım ve kabul edilebilir tanım olmayanlardır.

*Seviye 2-1-0 biçiminde sıralanma sebebi Seviye 0'ın kriterlerinin Seviye 1 ve Seviye 2'ye göre belirlenmesidir.

Araştırmanın birinci sorusunda üç seviye belirlenmiştir. Seviye 2 kabul edilebilir tanımdır. Alt grup tanımı yaparken bir üst grup ve bu üst grubun boştan farklı bir alt küme şartına ek olarak alt kümenin grup özelliklerini sağlama ya da yalnızca kapalılık ve ters eleman özelliklerini sağlama şartları belirtilen tanımlar kabul edilebilir tanımlardır. Ayrıca tamamen sözel olarak ifade edilen "Herhangi bir grubun grup olan alt kümesi" gibi tanımlar da kabul edilebilir tanımlar olarak nitelendirilmiştir.

Seviye 1 eksik tanımdır. Alt grup tanımı yaparken üst grubun alt kümesi olma şartının belirtilmediği, alt kümenin boştan farklı olma şartının belirtilmediği ya da grup özelliklerinden kontrol edilmesi gerekenlerin (kapalılık ve ters eleman özelliği) kontrol edileceği şartının belirtilmediği tanımlar eksik tanım olarak nitelendirilmiştir.

Seviye 0 kabul edilemez tanımdır. Alt grup tanımında eksik tanım ya da kabul edilebilir tanım olarak nitelendirilmeyen tanımlar kabul edilemez tanım olarak nitelendirilmiştir.

3.5.2. Alt grup örneği verme ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin verilerin çözümlenmesi

Alt grup örneği verme ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin veri elde etmek amacıyla alt grup yazılı sorularında 2, 3, 4 ve 5 numaralı sorular yer almaktadır.

Soru 2: Bir grup ve onun bir alt grup örneğini veriniz.

Araştırmanın ikinci sorusunda öğrencilerin alt grup örneği verme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.4.'teki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 4 Örnek verme düzeyi değerlendirme kriterleri

Kategori	Seviye	Kriter
Kalan grupları $\mathbb{Z}_n$	**Seviye 0**	Uygun olmayan örnek
	Seviye 1	Eksik örnek
	Seviye 2	Uygun örnek
Sayı grupları $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$	**Seviye 0**	Uygun olmayan örnek
	Seviye 1	Eksik örnek
	Seviye 2	Uygun örnek
Karmaşık sayı grupları $\mathbb{C}/\{0\}$	**Seviye 0**	Uygun olmayan örnek
	Seviye 1	Eksik örnek
	Seviye 2	Uygun örnek

Verilen öğrenci cevaplarına göre örnekler üç kategoriye ayrılmıştır: 1) Kalan grupları $\mathbb{Z}_n$, 2) Sayı grupları $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$, 3) Karmaşık sayı grupları $\mathbb{C}/\{0\}$. Karmaşık sayı grupları da bir sayı grubudur ancak $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$ sayı grupları daha aşina olunan gruplar olduğun için $\mathbb{C}/\{0\}$ sayı grubu ayrı kategoride ele alınmıştır. Uygun olmayan örnekler Seviye 0, eksik örnekler Seviye 1, uygun örnekler de Seviye 2 olarak derecelendirilmiştir.

Soru 3: $\boldsymbol{G}$ bir grup ve $\boldsymbol{H}$ onun herhangi bir alt kümesi olsun. $\boldsymbol{H}$ alt kümesinin, alt grup belirtmesi için sağlaması gereken şartlar nelerdir? Başka bir ifade ile $\boldsymbol{H}$ alt kümesinin alt grup belirtip belirtmediğini nasıl kontrol edersiniz? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Araştırmanın üçüncü sorusunda alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda, öğrencilerin bir grubun bir alt kümesinin alt grup belirtip belirtmediğini nasıl tespit ettiklerine ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmak amaçlanmıştır. Bu nedenle değerlendirme kriterleri belirlenmesine gerek yoktur.

Soru 4: İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.

Araştırmanın dördüncü sorusu ikinci sorusu ile ilişkilidir. Bu soruda öğrencilerin alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.5.'teki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 5. Alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını inceleme düzeyi değerlendirme kriterleri

Kategori	+	-
Alt küme	$H \subseteq G$ belirtilmiştir.	$H \subseteq G$ belirtilmemiştir.
Boştan farklılık	$H \neq \emptyset$ belirtilmiştir.	$H \neq \emptyset$ belirtilmemiştir.
Kapalılık özelliği	$\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ kontrolü hatasız yapılmıştır.	$\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ kontrolünde eksikler, hatalar yapılmıştır.
Birleşme özelliği	$\forall a, b, c \in H$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ kontrolü yapılmıştır.	
Birim eleman	$\forall a \in H$ için $a * e = e * a = a$ ve $e \in H$ kontrolü hatasız yapılmıştır.	
Ters eleman	$\forall a \in H$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in H$ kontrolü hatasız yapılmıştır.	$\forall a \in H$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in H$ kontrolünde eksikler ve hatalar yapılmıştır.

*Birleşme ve birim eleman özelliğinin kontrolü alt grup için şart değildir.

Soru 5: $(\mathbb{R}, +)$, grubunu göz önüne alalım. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olsun. Toplama işlemine göre $A \leq \mathbb{R}$ midir? Yani A kümesi $\mathbb{R}$ grubunun alt grubu mudur? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Araştırmanın beşinci sorusunda öğrencilerin alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda özel olarak alt grup şartlarından kapalılık özelliğinin kontrolün ilişkin veriler elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.6.'daki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 6. Kapalılık özelliğinin kontrol edilme düzeyi değerlendirme kriterleri

Yanıt		**Kategori**	**Kriter**
Doğru yanıt	$\boldsymbol{A \nleq R}$	Yanlış ispat	-
		Eksik ispat	-
		Doğru ispat	Aksine ispat yöntemi ile kapalılık özelliğinin sağlanmadığını göstermek
Yanlış yanıt	$\boldsymbol{A \leq R}$	Yanlış ispat	Alt kümedeki bütün elemanları incelememek ya da yanlış incelemek
		Eksik ispat	Alt grup testlerinden herhangi birisini uygulamadan doğrudan alt grup olarak kabul etmek (tik atmak)

Araştırmanın beşinci sorusunda doğru yanıt $A \nleq \mathbb{R}$'dir. Verilen doğru yanıta rağmen yanlış ya da eksik ispatlar yapılabilir. Bu nedenle doğru ispata ek olarak yanlış ispat ve eksik ispat kategorisi de oluşturulmuştur. Ancak verilen yanlış yanıt için doğru ispat yapmak mümkün değildir. Bu nedenle doğru ispat kategorisi eklenmemiştir.

3.5.4. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin verilerin çözümlenmesi

Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde etmek amacıyla alt grup yazılı sorularında 6, 7, 8 ve 9 numaralı sorular yer almaktadır.

Soru 6: Bir grup ile bu grubun alt grubunun mertebeleri (eleman sayıları) arasında nasıl bir ilişki vardır? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Araştırmanın altıncı sorusunda kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda, öğrencilerin bir grup ve onun alt grubunun mertebeleri arasındaki ilişkiye ilişkin bilgilerini ölçerek daha kısa bir ifade ile Lagrange teoremine ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmak amaçlanmıştır. Bu nedenle değerlendirme kriterleri belirlenmesine gerek yoktur.

Soru 7: $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$ grubunu göz önüne alarak aşağıdaki soruların her birine varsa uygun örnekler veriniz. Yoksa yoktur diye belirtiniz. Yanıtlarınızı lütfen açıklayınız.

a) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 2 elemanlı bir alt grubu:
b) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 5 elemanlı bir alt grubu:
c) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 12 elemanlı bir alt grubu:

Araştırmanın yedinci sorusunda öğrencilerin kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda özel olarak Lagrange teoreminin tersinin her zaman doğru kabul edilmesi yanılgısına sahip olunup olunmadığına ilişkin veri elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.7.'deki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 7. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyi değerlendirme kriterleri (1)

Soru	**Seviye**	**Kriter**
7a	**Seviye 0**	Uygun örnek yoktur cevabı ve boş bırakma
	Seviye 1	Uygun olmayan örnek bulma
	Seviye 2	Uygun örnek
7b	**Seviye 0**	Uygun örnek bulma
	Seviye 1	Boş bırakma
	Seviye 2	Uygun örnek yoktur cevabı
7c	**Seviye 0**	Uygun örnek bulma
	Seviye 1	Boş bırakma
	Seviye 2	Uygun örnek yoktur cevabı

7a: 7. Soru a seçeneği, 7b: 7. Soru b seçeneği, 7c: 7. Soru c seçeneği

Araştırmanın yedinci sorusunun a seçeneğinde istenilen şarta uygun örnek vardır ancak b ve c seçeneklerinde uygun örnek yoktur. Bu nedenle uygun örnek kriteri 7a'da Seviye 2 belirtirken 7b ve 7c'de Seviye 0 belirtmektedir. Benzer şekilde uygun örnek yoktur kriteri 7b ve 7c'de Seviye 2 belirtirken 7a'da Seviye 0 belirtmektedir. Boş bırakma kriteri 7b ve 7c'de Seviye 1 belirtirken 7a'da Seviye 0 belirtmektedir. Var olan bir şeyi boş bırakmak var olmayan bir şeyi boş bırakmaktan seviye olarak daha düşük değerlendirilmiştir.

Soru 8: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 3 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_3$; $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 5 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_5$; $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$'yı göz önüne alalım.

a) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.
b) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Araştırmanın sekizinci sorusunda öğrencilerin kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda özel olarak kalan gruplarının farklı işlemlerde (modlarda) tanımlı olmasının göz önünde bulundurulup bulundurulmadığını ve Lagrange teoreminin tersinin her zaman doğru kabul edilmesi yanılgısına sahip olunup olunmadığına ilişkin veri elde edilmiştir ve verileri analiz etmek için Tablo 3.8.'deki değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur.

Tablo 3. 8. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyi değerlendirme kriterleri (2)

Soru	Yanıt		Seviye	Açıklama
8a	Yanlış yanıt	$\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 0**	Alt grup belirttiğinin ifade edilmesi.
	Doğru yanıt	$\mathbb{Z}_3 \nleq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 2**	Alt grup belirtmediğinin ifade edilmesi.
8b	Yanlış yanıt	$\mathbb{Z}_5 \leq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 0**	Alt grup belirttiğinin ifade edilmesi.
	Doğru yanıt	$\mathbb{Z}_5 \nleq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 2**	Alt grup belirtmediğinin ifade edilmesi.

8a: 8. Soru a seçeneği, 8b: 8. Soru b seçeneği

Araştırma boyunca en düşük seviye Seviye 0 en yüksek seviye Seviye 2 olarak belirlenmiştir. Araştırmanın sekizinci sorusunda da bütünlüğü bozmamak için yanlış yanıt için Seviye 0, doğru yanıt için Seviye 2 belirlenmiştir.

Soru 9: Bir $\boldsymbol{G}$ grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Araştırmanın dokuzuncu sorusunda kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde edilmiştir. Bu soruda, öğrencilerin bir grubun ve onun alt grubunun farklı işlemler üzerinde tanımlı olup olamayacağına ilişkin bilgilerini ölçerek bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmaları veri dışı bırakmak ya da sahip olunan bilgi ile çelişen durumların varlığını tespit etmek amaçlanmıştır. Bu nedenle değerlendirme kriterleri belirlenmesine gerek yoktur.

BÖLÜM 4

4. BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde, verilerin analizinden elde edilen alt grup kavramına ilişkin bulgular yer almaktadır. Bu bulgular alt problemlere uygun olarak göre üç ayrı kategoride verilmiştir: 1) Alt grup kavramını tanımlama düzeyine ilişkin bulgular, 2) Alt grup örneği verme ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin bulgular, 3) Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin bulgular.

4.1. Alt grup kavramını tanımla düzeyine ilişkin bulgular

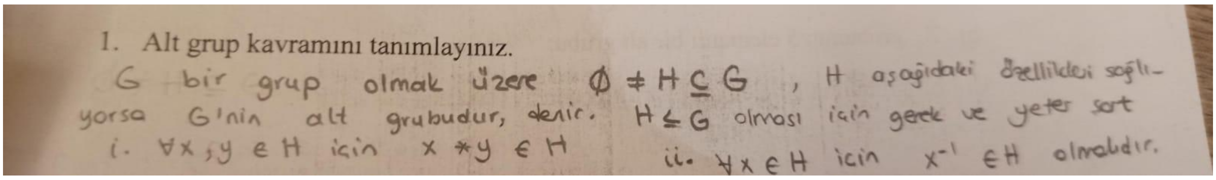
Tablo 4.1.'de alt grup kavramını tanımlamaya ilişkin elde edilen bulgular verilmiştir.

Tablo 4. 1. Alt grup kavramını tanımlamaya düzeyine ilişkin bulgular

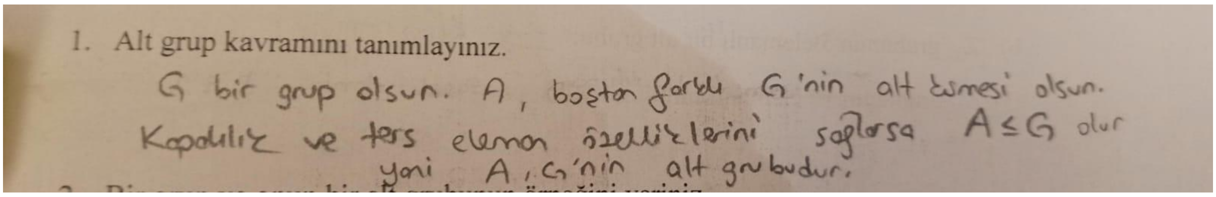
Seviye	Katılımcı	*f*	%
Seviye 2: Kabul edilebilir tanım	Ö1, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö12, Ö17, Ö18, Ö19, Ö20, Ö22, Ö24, Ö25, Ö28, Ö30, Ö31	17	54,83
Seviye 1: Eksik tanım	Ö5, Ö9, Ö11, Ö14, Ö15, Ö21, Ö26, Ö27, Ö29	9	29,03
Seviye 0: Kabul edilemez tanım	Ö2, Ö10, Ö13, Ö16, Ö23	5	16,12
	Toplam	**31**	**100**

Araştırmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun (%54,83) kabul edilebilir tanım düzeyinde (Seviye 2) tanım yaptıkları görülmektedir.

Kabul edilebilir tanım düzeyindeki bazı öğrenci tanımları aşağıdaki gibidir. Burada bütün öğrenci tanımlarına yer verilmemiştir. Benzer kategorilere göre tanımlar kategorize edilmiş ve her kategoriden, bir örnek tanıma yer verilmiştir.

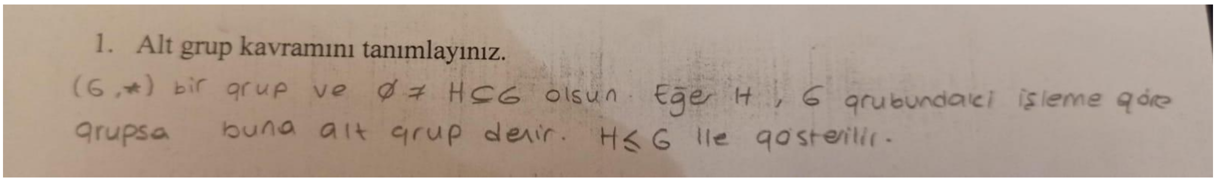


Şekil 4. 1. Ö1'in alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

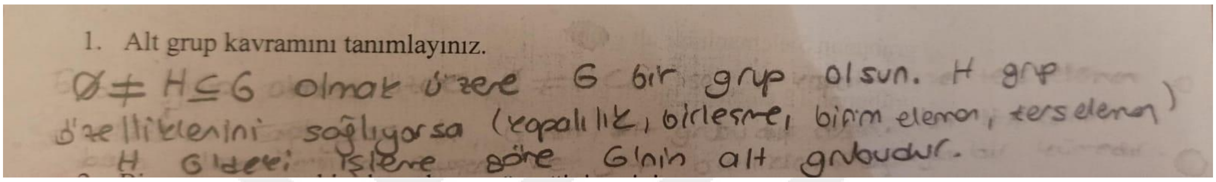
G bir grup olsun. A, boştan farklı G'nin alt kümesi olsun. Kapalılık ve ters eleman özelliklerini sağlarsa $A \leq G$ olur yani A, G'nin alt grubudur.

Şekil 4. 2. Ö7'nin alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

$(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre grupsa buna alt grup denir. $H \leq G$ ile gösterilir.

Şekil 4. 3. Ö31'in alt grup tanımı

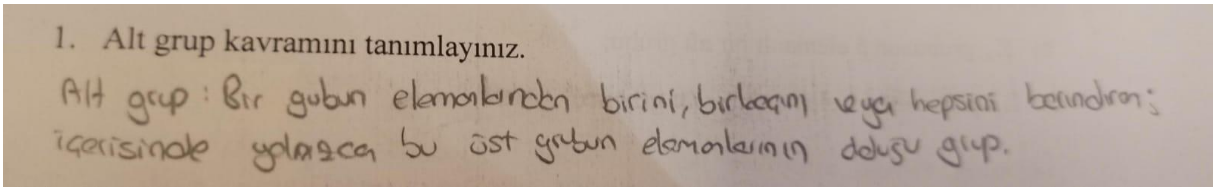

1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

$\emptyset \neq H \subseteq G$ olmak üzere G bir grup olsun. H grup özelliklerini sağlıyorsa (kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman) H G'deki işleme göre G'nin alt grubudur.

Şekil 4. 4. Ö25'in alt grup tanımı

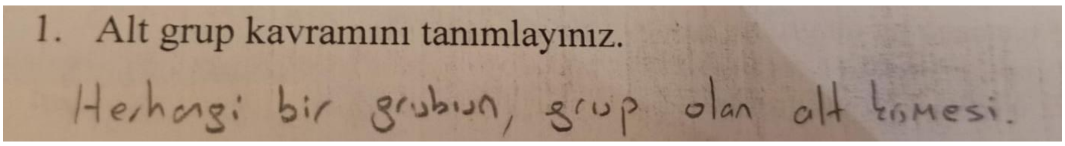
Tablo 4.1.'e ek olarak öğrencilerin yaptıkları tanımlar incelendiğinde kabul edilebilir tanım düzeyinde olan tanımların çoğunda (%87,1) en az bir matematiksel sembol kullanıldığı görülmektedir. Bunun yanı sıra tamamen sözel bir ifade ile tanımlama yapan öğrenciler de (%12,9) mevcuttur.

Kabul edilebilir tanım düzeyinde olan ve tamamen sözel bir ifade ile tanımlama yapan öğrenci tanımları aşağıdaki gibidir:


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

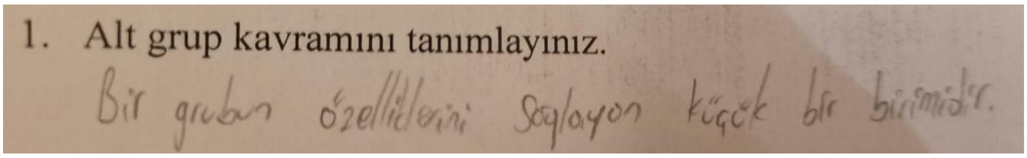
Alt grup: Bir grubun elemanlarından birini, birkaçını veya hepsini barındıran; içerisinde yalnızca bu üst grubun elemanlarının dolduğu grup.

Şekil 4. 5. Ö18'in alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

Herhangi bir grubun, grup olan alt kümesi.

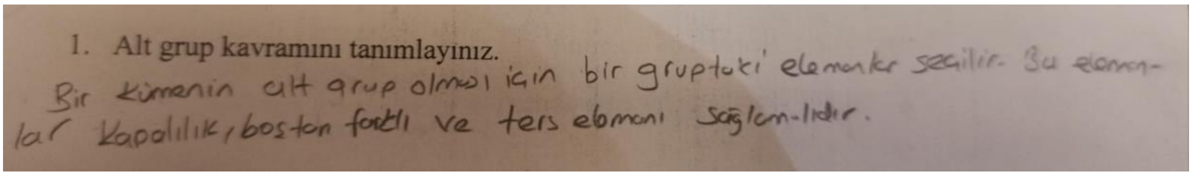
Şekil 4. 6. Ö12'nin alt grup tanımı



1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

Bir grubun özelliklerini sağlayan küçük bir birimidir.

Şekil 4. 7. Ö17'nin alt grup tanımı



1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

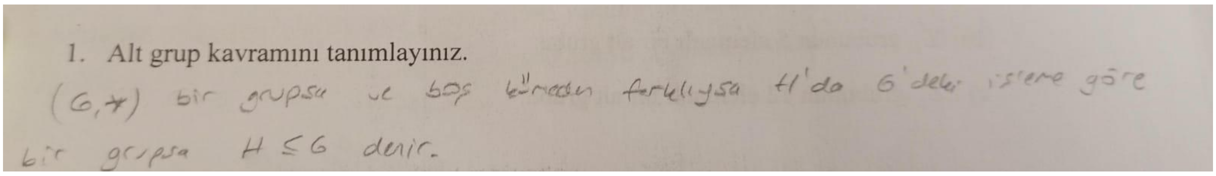
Bir kümenin alt grup olması için bir gruptaki elemanlar seçilir. Bu elemanlar kapalılık, boştan farklı ve ters elemanı sağlamalıdır.

Şekil 4. 8. Ö19'un alt grup tanımı

Kabul edilebilir tanım düzeyinde tanımlama yapan öğrencilerden, alt grup belirtmek için G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ şartına ek olarak büyük bir çoğunluk kapalılık ve ters eleman özelliğini sağlama şartını eklerken grup şartlarının tamamının sağlanması gerektiğini belirten öğrenci sayısı (f=2) azınlıktadır.

Kabul edilebilir tanım düzeyinde tanım yapan öğrencilerden ziyade eksik tanım ve kabul edilemez tanım düzeyinde tanım yapan öğrencilerin cevapları araştırmanın amacı için odak noktasıdır. Eksik tanım ve kabul edilemez tanımlardan, alt grup kavramını tanımlamaya ilişkin karşılaşılan zorluklara yönelik daha fazla veri elde edilebilir.

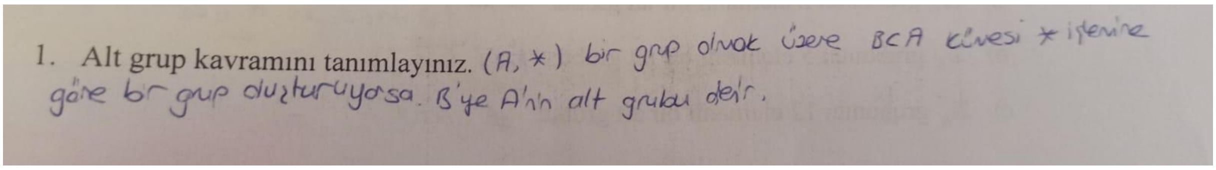
Araştırmaya katılan öğrencilerin %29,03'ünün eksik tanım düzeyinde (Seviye 1) tanım yaptıkları görülmektedir. Eksik tanım düzeyindeki bazı öğrenci tanımları aşağıdaki gibidir. Burada bütün öğrenci tanımlarına yer verilmemiştir. Benzer kategorilere göre tanımlar kategorize edilmiş ve her kategoriden, bir örnek tanıma yer verilmiştir.



1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

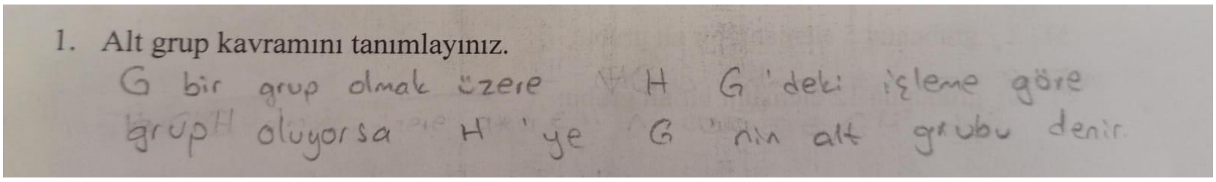
(G,*) bir grupsa ve boş kümeden farklıysa H'da G'deki işleme göre bir grupsa $H \leq G$ denir.

Şekil 4. 9. Ö15'in alt grup tanımı

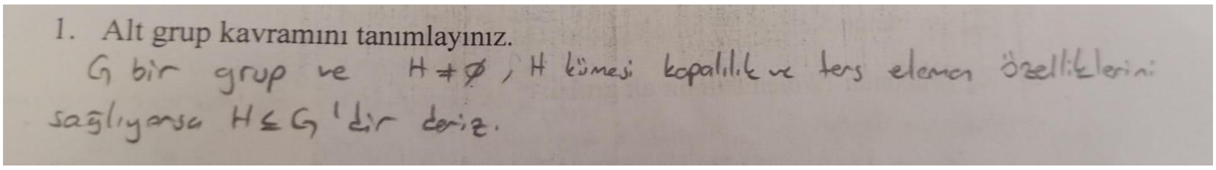


1. Alt grup kavramını tanımlayınız. (A, *) bir grup olmak üzere $B \subset A$ kümesi * işlemine göre bir grup oluşturuyorsa B'ye A'nın alt grubu denir.

Şekil 4. 10. Ö9'un alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.
G bir grup olmak üzere H G'deki işleme göre
grup oluyorsa H'ye G'nin alt grubu denir.

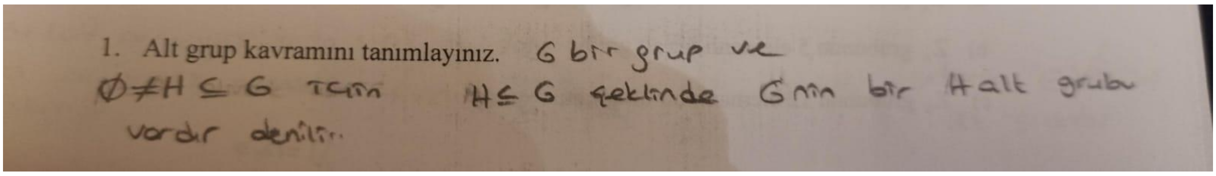
Şekil 4. 11. Ö27'nin alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.
G bir grup ve $H \neq \emptyset$, H kümesi kapalılık ve ters eleman özelliklerini
sağlıyorsa $H \leq G$'dir denir.

Şekil 4. 12. Ö19'un alt grup tanımı

Eksik tanım düzeyinde tanım yapan öğrencilerin, $H \neq \emptyset, H \subseteq G$ yani en temel şartlar olan bir üst grup ve bu grubun boştan farklı bir alt kümesi olma şartlarını tanımlama yaparken ifade etmedikleri görülmektedir (Örneğin; Ö29, Ö27, Ö15, Ö9). Öğrencilerin burada alt grup tanımı yaparken yoğunlaştığı ana tema kapalılık ve ters eleman özelliğinin sağlanmasıdır.

Eksik tanım düzeyinde tanımlama yapan öğrencilerde dikkat çeken bir nokta bulunmaktadır. Tanımlama yaparken (f=2) grup aksiyomlarının sağlanması ya da kapalılık ve ters eleman özelliklerinin sağlanması şartlarını belirtmeden doğrudan "$H \leq G$ şeklinde" ifadesini kullandığı görülmektedir (Bknz: Şekil 4.1.13.). Bu da matematiksel bir sembol olan alt grup sembolünün kullanımında bazı yanılgıların olduğunu göstermektedir.

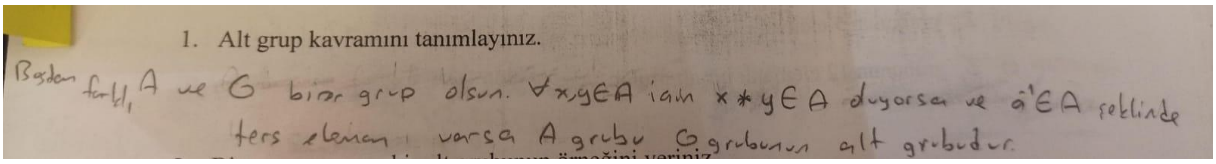

1. Alt grup kavramını tanımlayınız. G bir grup ve
$\emptyset \neq H \subseteq G$ için $H \leq G$ şeklinde G'nin bir H alt grubu
vardır denilir.

Şekil 4. 13. Ö11'in alt grup tanımı

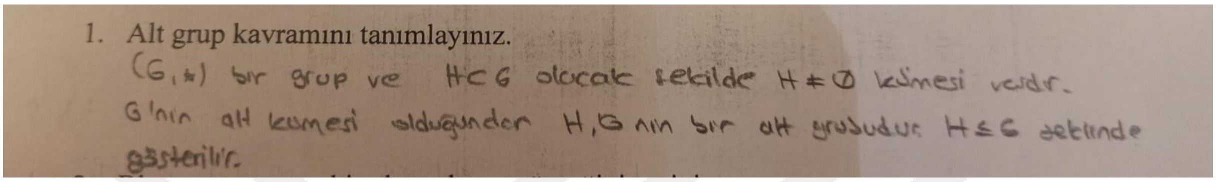
Araştırmada öğrencilerin yazdıkları tanımlardan alt grup tanımı kabul edilemeyecek tanımlar (Seviye 0) mevcuttur (%16,12). Öğrencilerin alt grup kavramını tanımlarken yaşadıkları zorlukları tespit edebilmek adına önemli bir kaynaktır.

Kabul edilemez tanım düzeyinde olan tanımlarda üç farklı nokta görülmektedir: 1) Alt grup adayını en baştan grup olarak kabul etmek (Ö2, Ö23), 2) Alt küme ve alt grup kavramını eş değer tutmak (Ö13, Ö16), 3) Alt grup üst grup karmaşası (Ö10).

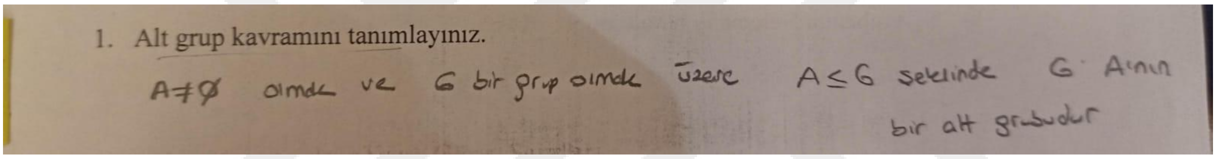
Kabul edilemez tanım düzeyindeki bazı öğrenci tanımları aşağıdaki gibidir. Burada bütün öğrenci tanımlarına yer verilmemiştir. Benzer kategorilere göre tanımlar kategorize edilmiş ve her kategoriden, bir örnek tanıma yer verilmiştir.


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.
Baştan farklı, A ve G birer grup olsun. ∀x,y∈A için x*y∈A duyorsa ve a'∈A şeklinde ters elemanı varsa A grubu G grubunun alt grubudur.

Şekil 4. 14. Ö23'ün alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.
(G,*) bir grup ve H⊂G olacak şekilde H≠∅ kümesi verilir. G'nin alt kümesi olduğundan H, G nin bir alt grubudur H≤G şeklinde gösterilir.

Şekil 4. 15. Ö13'ün alt grup tanımı


1. Alt grup kavramını tanımlayınız.
A≠∅ olmak ve G bir grup olmak üzere A≤G şeklinde G' A'nın bir alt grubudur

Şekil 4. 16. Ö10'un alt grup tanımı

4.2. Alt grup örneği verme ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etme düzeyine ilişkin bulgular

Tablo 4.2.'de alt grup örneği vermeye ilişkin elde edilen bulgular verilmiştir.

Tablo 4. 2. Alt grup örneği vermeye ilişkin bulgular

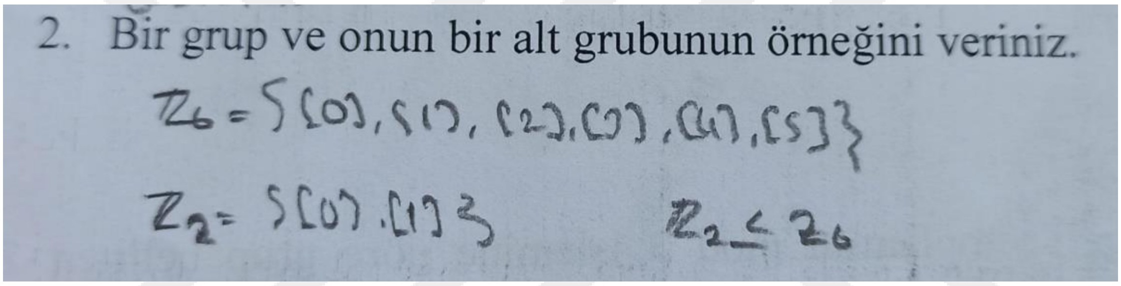
	Katılımcılar				
Seviye	**Kalan Grupları** $\mathbb{Z}_n$	**Sayı grupları** $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$	**Karmaşık sayılar grubu** $\mathbb{C}/\{\mathbf{0}\}$	***f***	**%**
Seviye 0	Ö3, Ö13, Ö14, Ö16, Ö17, Ö26, Ö27	Ö18, Ö19, Ö9	Ö1, Ö21, Ö22	13	41,93
Seviye 1	Ö8, Ö10, Ö11, Ö15, Ö23	-	-	5	16,12
Seviye 2	-	Ö2, Ö5, Ö6, Ö12, Ö20, Ö28, Ö29, Ö30, Ö31	Ö4, Ö7, Ö24, Ö25	13	41,93
f	12	12	7	**31**	
%	38,70	38,70	22,58		**100**

Araştırmaya katılan öğrencilerin verdiği alt grup örnekleri iki açıdan incelenmiştir:

1) Seviyelere göre, 2) Ortak temaya göre. İncelenen bu alt grup örneklerinden uygun olmayan örnekler ve eksik örnekler zorlanmaların tespit edilmesi açısından önemli bir kaynaktır.

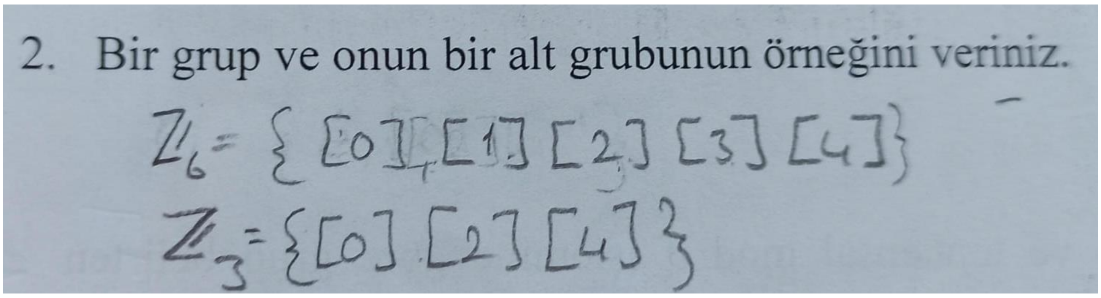
Alt grup örneklerini seviyelerine göre incelediğimizde öğrenci örneklerinin %41,93'lük kısmını uygun olmayan örnekler (Seviye 0) oluşturmaktadır. Uygun olmayan örneklerin büyük bir kısmı (f=7) kalan grupları iken uygun olmayan sayı grupları ve karmaşık sayı grupları örnekleri eşit sayıdadır (f=3).

Aşağıda öğrencilerin verdiği bazı uygun olmayan alt grup örnekleri verilmiştir. Burada bütün alt grup örneklerine yer verilmemiştir. Benzer kategorilere göre alt grup örnekleri kategorize edilmiş ve her kategoriden, bir alt grup örneği verilmiştir.



Şekil 4. 17. Ö13'ün verdiği alt grup örneği

Ö13'ün vermiş olduğu alt grup örneği incelendiğinde farklı işlemler üzerinde tanımlanan grupların birbirinin alt kümesi dahi olamayacağı göz önüne alınmamıştır.



Şekil 4. 18. Ö27'nin verdiği alt grup örneği

Benzer şekilde Ö27'nin vermiş olduğu örnek incelenirse, farklı işlemler üzerinde tanımlanan grupların birbirinin alt kümesi dahi olamayacağı noktasına değinmemiştir. Ayrıca $\mathbb{Z}_3$ grubunun elemanlarının Ö27 tarafından farklı tanımlanmasından dolayı yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir:

Araştırmacı: *$\mathbb{Z}_3$ dediğim küme tanımlanmış bir küme midir yoksa herhangi 3 elemanlı bir küme midir?*

Ö27: *Herhangi 3 elemanı olan bir kümedir.*

Ö27'nin bu cevabına karşılık $\mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_3$'ün işlemleri sorulmuştur. $\mathbb{Z}_6$ için "6 ile bölümünden kalan" ifadesi kullanılırken $\mathbb{Z}_3$ için "3 ile bölümünden kalan" ifadesi kullanılmıştır. Buradan sonra görüşme şu şekilde ilerlemiştir:

Araştırmacı: *$\mathbb{Z}_3$'ün hala herhangi 3 elemanlı bir küme olduğunu düşünüyor musun?*

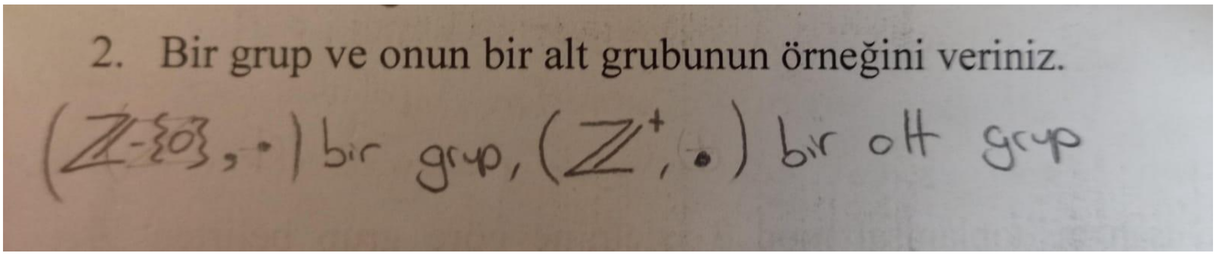
Ö27: *Hayır hocam, belli bir şeye göre yazdığımı düşünüyorum.*

Araştırmacı: *Peki $\mathbb{Z}_6$'da olan [0] ile $\mathbb{Z}_3$'de olan [0] aynı şeyi mi temsil etmektedir yoksa farklı mı?*

Ö27: *Aynı şeyleri temsil ettiğini düşünüyorum.*

Bu çelişkili yanıtlar kalan gruplarına ilişkin yanılgılara sahip olunduğunu göstermektedir.

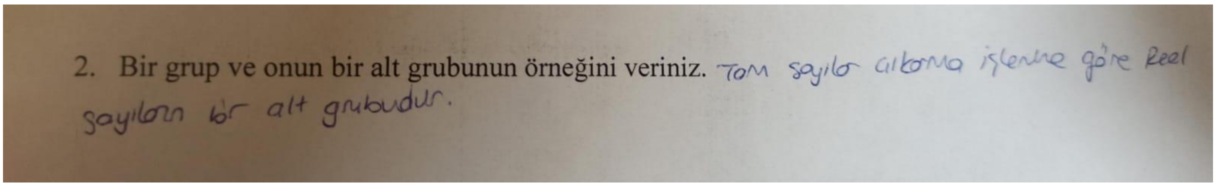
Uygun olmayan alt grup örneklerinde, sayı gruplarına uygun olmayan örnek veren öğrenciler (f=3) mevcuttur:


2. Bir grup ve onun bir alt grubunun örneğini veriniz.

$(\mathbb{Z}-\{0\}, \cdot)$ bir grup, $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ bir alt grup

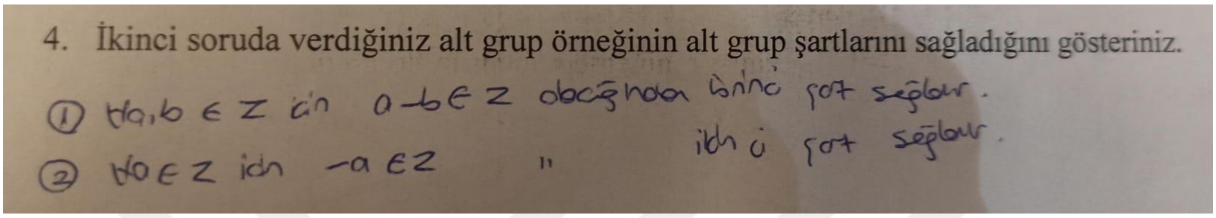
Şekil 4. 19. Ö18'in verdiği alt grup örneği

Ö18'in verdiği örnekte üst grup olarak belirlenen $(\mathbb{Z}-\{0\},.)$ grup dahi belirtmemektedir. $(\mathbb{Z}-\{0\},.)$ kümesinin grup dahi belirtmiyor oluşu en temel şartlar olan "G bir grup olmak üzere", "$\emptyset \neq H \subseteq G$" şartların göz ardı edilmesinden kaynaklanmaktadır.


2. Bir grup ve onun bir alt grubunun örneğini veriniz. Tam sayılar çıkarma işlemine göre Reel sayıların bir alt grubudur.

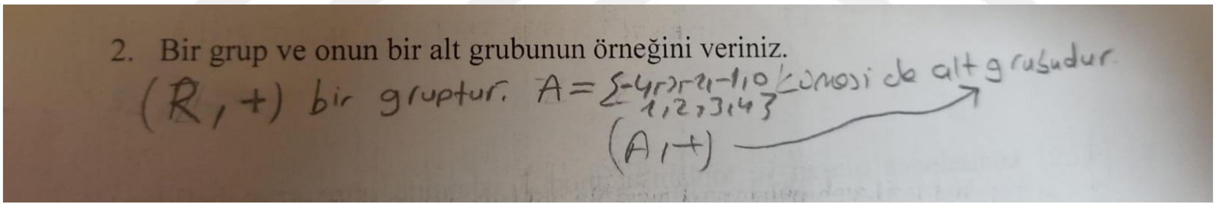
Şekil 4. 20. Ö9'un verdiği alt grup örneği

Ö9'un verdiği örnekte de üst grup olarak belirlenen $(\mathbb{R}, -)$ grup dahi belirtmemektedir. Ö9 kendisinin verdiği bu örneğin alt grup şartlarını sağladığını şu şekilde göstermiştir:


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
① $\forall a,b \in Z$ için $a-b \in Z$ olduğundan birinci şart sağlanır.
② $\forall a \in Z$ için $-a \in Z$ " ikinci şart sağlanır.

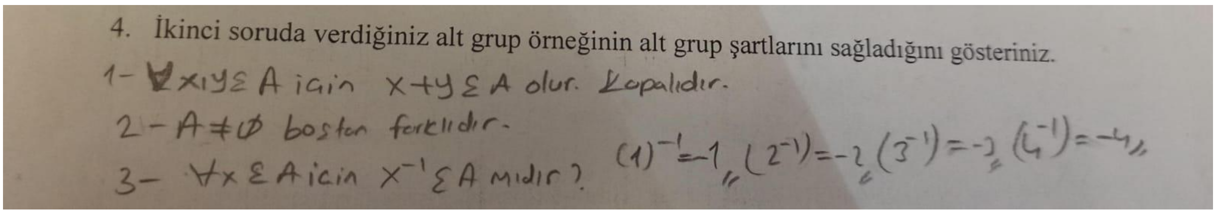
Şekil 4. 21. Ö9'un kendisinin verdiği uygun olmayan alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını göstermesi

Verilen bu cevap incelendiğinde, alt grup belirtmek için öncelikle bir üst grup olması gerektiği ve bu üst grubun alt kümesi olma şartı olan en temel şartın göz ardı edildiği, doğrudan "kapalılık ve ters eleman özelliğinin" üzerine odaklanıldığı görülmektedir.


2. Bir grup ve onun bir alt grubunun örneğini veriniz.
$(R,+)$ bir gruptur. $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ kümesi de altgrubudur. $(A,+)$

Şekil 4. 22. Ö19'un verdiği alt grup örneği

Ö19 verdiği örnekte, kendi tanımladığı *A* kümesinin ℝ'nin alt grubu olduğunu ifade etmektedir. Ö19 kendisinin verdiği bu örneğin alt grup şartlarını sağladığını şu şekilde göstermiştir:

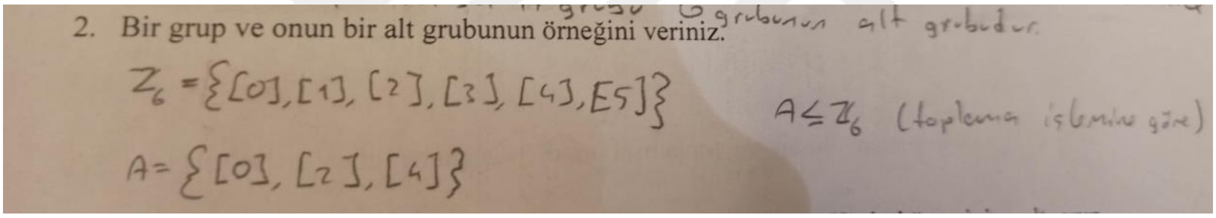

4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
1- $\forall x,y \in A$ için $x+y \in A$ olur. Kapalıdır.
2- $A \neq \emptyset$ boştan farklıdır.
3- $\forall x \in A$ için $x^{-1} \in A$ mıdır? $(1)^{-1}=-1$, $(2^{-1})=-2$, $(3^{-1})=-3$, $(4^{-1})=-4$,

Şekil 4. 23. Ö19'un kendisinin verdiği uygun olmayan alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını göstermesi

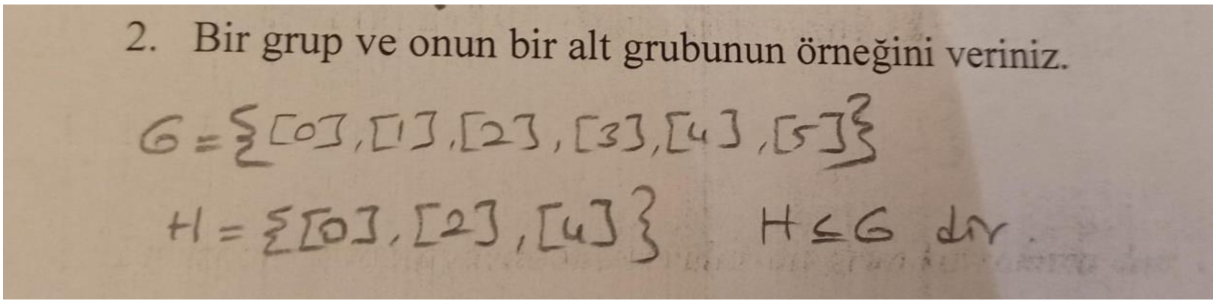
$\forall x, y \in A$ için $x + y \in A$ ifadesi ile kümenin kapalılık şartını sağladığı gösterilmiştir. Bu tarz genel açıklamalar sonsuz elemanlı olan $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ gibi gruplar için geçerlidir çünkü bu geçerlilik aşikardır. Ancak tanımlanan bu sonlu A kümesinin bütün elemanlarının incelenmesi gerekmektedir.

Uygun olmayan alt grup örneklerinde karmaşık sayı gruplarına örnek veren öğrenciler (f=3) mevcuttur. Alt grup belirtmede şart olan "Kümedeki her elemanın tersi kümede olmalıdır." şartını ihlal eden "0"ın küme dışı bırakılmadığı görülmektedir.

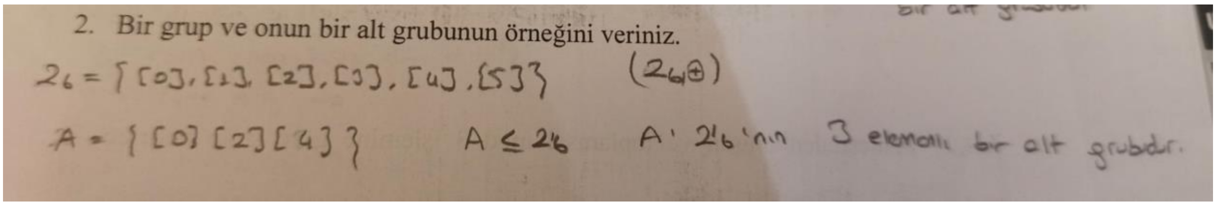
Uygun olmayan örneklere ek olarak eksik örnekler de öğrencilerin hangi noktalarda zorlandıklarını tespit edebilmek adına bizlere ışık tutabilmektedir. Eksik örnek düzeyinde örnek veren öğrencilerin (%16,12) örneklerinin tamamını, kalan grupları oluşturmaktadır. Aşağıda bazı öğrenci örnekleri verilmiş ve hangi kısımlarda eksik kalındığına yönelik açıklamalar yapılmıştır. Burada bütün eksik alt grup örneklerine yer verilmemiştir. Benzer kategorilere göre alt grup örnekleri kategorize edilmiş ve her kategoriden, bir alt grup örneği verilmiştir.



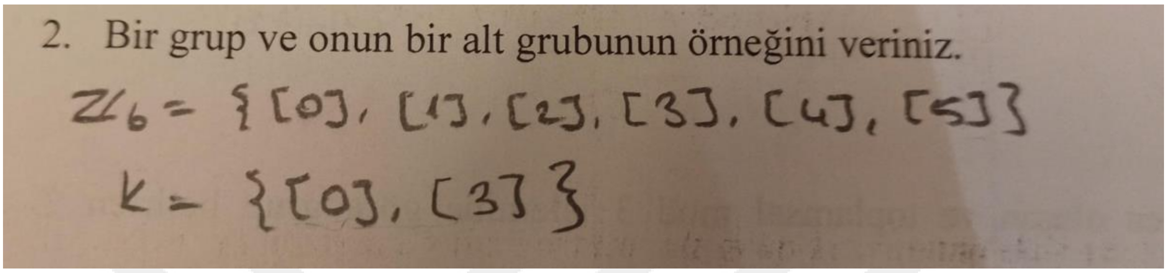
Şekil 4. 24. Ö23'ün verdiği alt grup örneği



Şekil 4. 25. Ö8'in verdiği alt grup örneği



Şekil 4. 26. Ö10'un verdiği alt grup örneği



Şekil 4. 27. Ö11'in verdiği alt grup örneği

Verilen örnekler incelendiğinde, alt grup olarak belirtilen kümeler, bilinen herhangi bir küme olmadığı için $[0], [1]$ gibi kalan sınıflarının hangi işleme göre değerlendirildiğinin belirtilmemesi eksikliktir.

Uygun örnek verme düzeyinde (Seviye 2) alt grup örneği veren öğrencilerin yüzdesi, uygun olmayan düzeyde (Seviye 0) örnek veren öğrencilerin yüzdesi ile aynıdır (%41,93). Burada en çok dikkat çeken nokta kalan gruplarının alt gruplarına yönelik hiç uygun örnek olmamasıdır. Uygun örnek veren öğrenciler, alt grup örneği verirken karşılaşılan zorlukları tespit etmek için veri kaynağı değillerdir. Bu nedenle uygun örnek veren öğrencilerin alt grup şartlarının kontrol süreci incelenmiştir ve elde edilen bulgular Tablo 4.3.'te verilmiştir.

Tablo 4. 3. Uygun verilmiş alt grup örneklerinin alt grup şartlarını sağladığını gösterme düzeyine ilişkin bulgular

Kategori	Katılımcı	Alt küme	Boştan farklılık	Kapalılık özelliği	Birleşme özelliği	Birim eleman	Ters eleman
Uygun verilmiş örnekler	Ö2	-	-	+	+	+	+
	Ö4	+	+	-			-
	Ö5	-	-	+			+
	Ö6*	+	+	+			+
	Ö7	-	+	-			-
	Ö12	-	-	+			+
	Ö20	-	-	+	+		+
	Ö24	-	+	-			+
	Ö25*	+	+	+			+
	Ö28*	+	+	+			+
	Ö29	-	+	-			-
	Ö30	-	+		Tek adımda kontrol +		

*: Alt grup testini uygularken herhangi bir hata yapmayanlar

Öğrencilerin alt grup şartlarını kontrol ederken bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlanmayı veri dışı bırakmak için öğrencilerin alt grup şartlarını nasıl kontrol ettiklerine ilişkin bilgi ölçümü yapılmıştır. Elde edilen bulgular aşağıda Tablo 4.4.'te ortak temalara göre verilmiştir. Tablodaki testlere ilişkin teorik açıklama Bölüm 1.1.2.'de yer almaktadır.

Tablo 4. 4. Alt grup şartlarının nasıl kontrol edildiğine ilişkin bilgi ölçümü

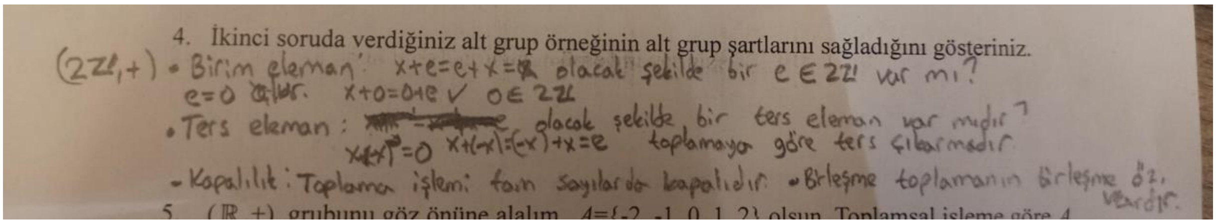
Test	Katılımcı	*f*	%
İki adımda alt grup testi	Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö16, Ö19, Ö20, Ö21, Ö22, Ö23, Ö24, Ö25, Ö27, Ö28, Ö29, Ö30, Ö31	27	87,09
Tek adımda alt grup testi	Ö26	1	3,22
Grup aksiyomlarının hepsinin kontrolü	Ö2	1	3,22
Uygun olmayan kontrol*	Ö17, Ö18	2	6,45
	Toplam	**31**	**100**

*Ters eleman yerine birim eleman kontrolü, birleşme özelliği kontrolü yerine değişme özelliği kontrolü

Tablo 4.3. incelendiğinde uygun örnek veren 12 öğrenciden 3 kişinin (%25) tamamen hatasız alt grup kontrolü yaptığı, geriye kalan 9 kişinin kontrolünde (%75) eksikler veya hatalar olduğu görülmektedir.

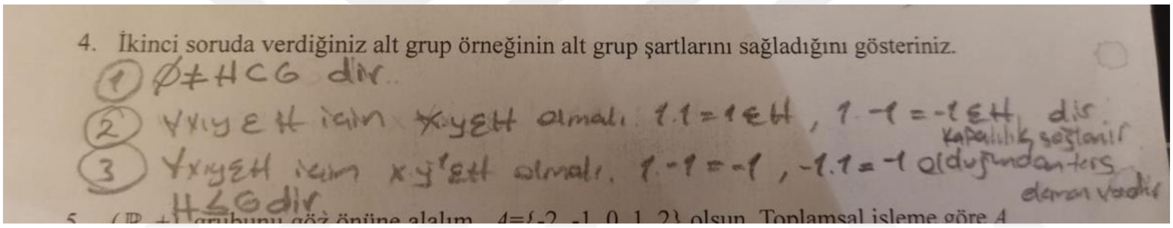
Tablo 4.4. incelendiğinde de öğrencilerin %6,45'inin alt grup şartlarının kontrolüne ilişkin doğru bilgiye sahip olmadığı ancak bu öğrencilerden hiçbirinin Tablo 4.3.'te incelenen öğrencilerden olmadığı görülmektedir. Bu da Tablo 4.3.’te alt grup şartlarının kontrol sürecindeki hataların nedeninin bilgi eksikliği olmadığını göstermektedir.

Uygun örnek vermeye karşın uygun alt grup kontrolü yapamayan bazı öğrenci yanıtları:



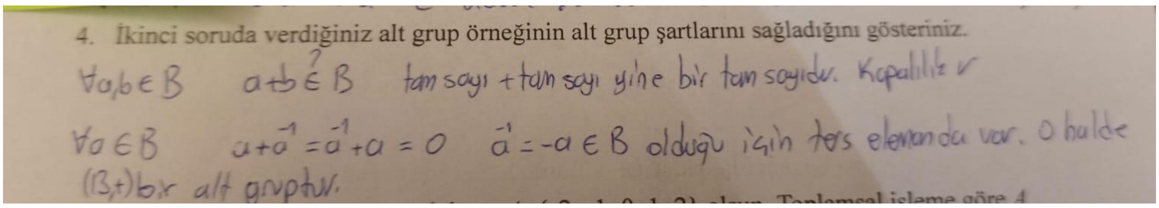
Şekil 4. 28. Ö2’nin uyguladığı alt grup testi

Ö2, alt grup testi uygularken bütün grup elemanlarını incelemeyi tercih etmiştir ancak $\emptyset \neq 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ şartını açıkça belirtmemiştir. Cebir dersi için aşina olunan bir grup ve alt grup örneği olduğu için belirtilmemiş olması görmezden gelinebilir.



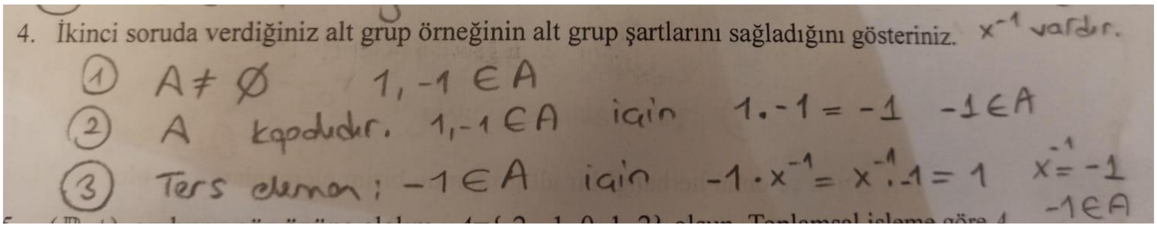
Şekil 4. 29. Ö4’ün uyguladığı alt grup testi

Ö4, iki adımda alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir ancak kapalılık ve ters eleman özelliğinin incelemesinde hatalar ve eksikler mevcuttur. Kapalılık özelliğini incelerken $-1.-1 = 1 \in H$ incelemesi yapmamıştır. Sonlu elemanlı bir kümede, kapalılık incelerken kümedeki bütün elemanların incelenmesi gerekmektedir. Ayrıca ters eleman kontrolü için “$\forall x, y \in H$ için $x.y^{-1} \in H$ olmalı” ifadesi ters eleman kontrolü için uygun bir matematiksel ifade değildir. Uygun olmayan matematiksel bir ifade ile amaca uygun inceleme yapılamaz.



Şekil 4. 30. Ö5’in uyguladığı alt grup testi

Ö5, bir grup ve alt grup örneği verilmesi istenilen soruda $\mathbb{R}$ kümesini A kümesi olarak; $\mathbb{Z}$ kümesini de B kümesi olarak tanımlamıştır ve kontrol sürecinde iki adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir. Alt grup kontrol sürecinde $\emptyset \neq (B = \mathbb{Z}, +) \leq (A = \mathbb{R}, +)$ şartını açıkça belirtmemiştir ancak cebir dersi için aşina olunan bir grup ve alt grup örneği olduğu için belirtilmemiş olması görmezden gelinebilir.


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz. x^{-1} vardır.

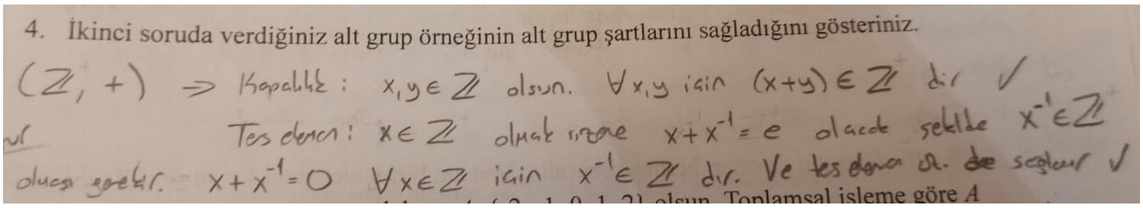
① $A \neq \emptyset$ $1,-1 \in A$

② A kapalıdır. $1,-1 \in A$ için $1.-1 = -1$ $-1 \in A$

③ Ters eleman: $-1 \in A$ için $-1 \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot -1 = 1$ $x^{-1} = -1$ $-1 \in A$

Şekil 4. 31. Ö7'nin uyguladığı alt grup testi

Ö7, iki adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir. $G = \{1, i, -1, -i\} \subseteq H = \{1, -1\}$ ifadesi açıkça belirtilmemiştir ancak alt küme belirttiği aşikar olduğu için görmezden gelinebilir. Bunun yanı sıra kapalılık ve ters eleman özelliklerinin kontrollerinde hatalar ve eksikler mevcuttur. Sonlu kümelerde kapalılık incelerken kümenin bütün elemanları incelenmelidir. Her elemanın kendi dahil olmak üzere diğer tüm elemanlarla işleme alınmış halinin kümede olup olmadığı incelenmelidir. Ö7, elemanları kendi ile işleme koymamıştır bu da eksik bir kapalılık incelemesidir. Aynı şekilde ters eleman incelemesi yaparken kümedeki bütün elemanların tersi kümede olmalıdır. Tek bir eleman incelemesi eksik bir incelemedir.

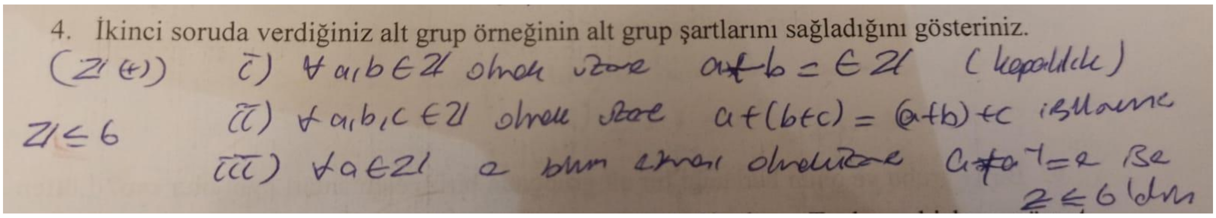

4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.

$(\mathbb{Z}, +)$ ⇒ Kapalılık: $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. $\forall x, y$ için $(x+y) \in \mathbb{Z}$ dir ✓

✓ Ters eleman: $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x + x^{-1} = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ olması gerekir. $x + x^{-1} = 0$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ dir. Ve ters eleman ö. de sağlanır ✓

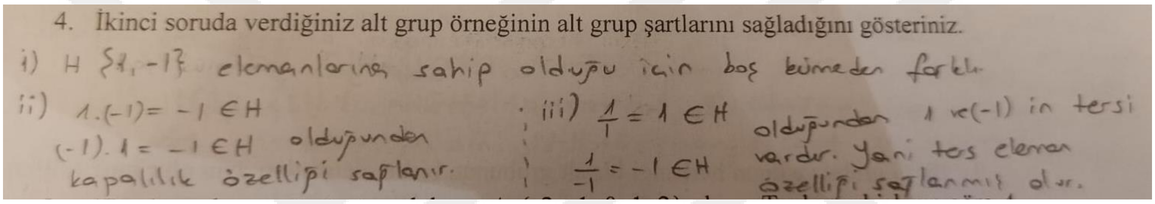
Şekil 4. 32. Ö12'nin uyguladığı alt grup testi

Ö12, kendisinin verdiği $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +)$ örneği için, iki adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir. Kapalılık ve ters eleman özelliği incelemesi yaparken sonsuz bir kümede bütün elemanları tek tek incelemek mümkün olmayacağı için genel bir ifade ile şartların sağlandığını uygun olarak göstermiştir. Bunun yanı sıra $\emptyset \neq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ifadesi açıkça belirtilmemiştir ancak aşina olunan bir grup örneği olduğu için görmezden gelinebilir.


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
(Z (+)) i) ∀a,b∈Z olmak üzere a+b = ∈ Z (kapalılık)
Z≤G ii) ∀a,b,c∈Z olmak üzere a+(b+c) = (a+b)+c işlemi
iii) ∀a∈Z a birim eleman olmalıdır a+a⁻¹=e ise Z≤G'dir

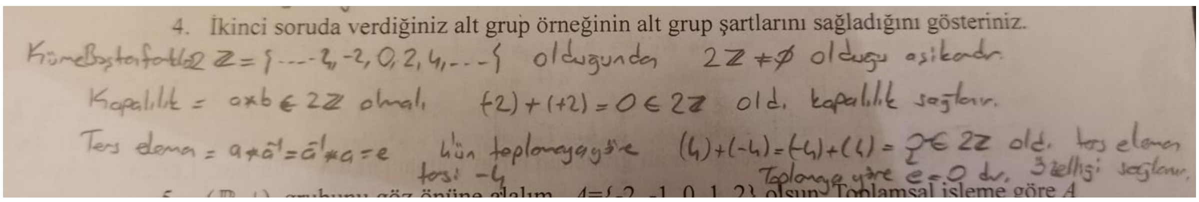
Şekil 4. 33. Ö20'nin uyguladığı alt grup testi

Ö20, iki adımda alt grup testi uygulamayı tercih ettiğini belirtmiştir ancak ek olarak birleşme özelliği incelemesi de yapmıştır. Herhangi bir yanlışlık yoktur lakin birleşme özelliğinin incelenmesi şart değildir. Kapalılık ve ters eleman özelliği incelemesinde herhangi bir hata yoktur. Tıpkı diğer bazı örneklerde olduğu gibi $\emptyset \neq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ifadesi açıkça belirtilmemiştir ancak aşina olunan bir grup örneği olduğu için görmezden gelinebilir.


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
i) H {1,-1} elemanlarına sahip olduğu için boş kümeden farklı
ii) 1.(-1) = -1 ∈ H
(-1).1 = -1 ∈ H olduğundan kapalılık özelliği sağlanır.
iii) 1/1 = 1 ∈ H
1/-1 = -1 ∈ H olduğundan 1 ve (-1) in tersi vardır. Yani ters eleman özelliği sağlanmış olur.

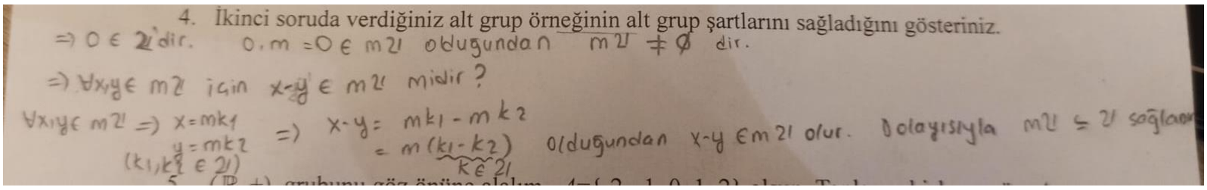
Şekil 4. 34. Ö24'ün uyguladığı alt grup testi

Ö24, iki adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir. $G = \{1, i, -1, -i\} \subseteq H = \{1, -1\}$ ifadesi açıkça belirtilmemiştir ancak alt küme belirttiği aşikar olduğu için görmezden gelinebilir. Sonlu kümelerde kapalılık özelliğini incelerken kümenin bütün elemanları incelenmelidir. Her elemanın, kendi dahil olmak üzere diğer tüm elemanlarla işleme alınmış halinin kümede olup olmadığı incelenmelidir. Ö24, elemanları kendi ile işleme koymamıştır bu da eksik bir kapalılık incelemesidir.


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
Kümeboştanfarklı 2Z = {...-4,-2,0,2,4,...} olduğundan 2Z ≠ ∅ olduğu aşikardır.
Kapalılık = a*b ∈ 2Z olmalı (-2)+(+2) = 0 ∈ 2Z old. kapalılık sağlanır.
Ters eleman = a*a⁻¹ = a⁻¹*a = e 4'ün toplamaya göre tersi -4 (4)+(-4) = (-4)+(4) = 0 ∈ 2Z old. ters eleman özelliği sağlanır. Toplamaya göre e=0 dır.

Şekil 4. 35. Ö29'un uyguladığı alt grup testi

Ö29, iki adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir.$\emptyset \neq 2\mathbb{Z}$ ifadesini açıkça belirtmiştir $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ şartını belirtmemesi aşikarlıktan dolayı görmezden gelinebilir. Sonsuz elemanlı kümelerde kapalılık ve ters eleman incelemesi yaparken bütün elemanların tek tek incelenmesi mümkün değildir. Uygun tek bir örnek vermek kapalılık ve ters eleman şartlarının sağlandığını göstermez. Sonsuz elemanlı kümelerde genelleştirilmiş ispatlar yapılmalıdır. Bu nedenle bu inceleme hatalı ve eksik bir incelemedir.


4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.
⇒ 0 ∈ ℤ'dir. 0.m = 0 ∈ mℤ olduğundan mℤ ≠ ∅ dir.
⇒ ∀x,y ∈ mℤ için x-y ∈ mℤ midir?
∀x,y ∈ mℤ ⇒ x = mk1, y = mk2 (k1,k2 ∈ ℤ) ⇒ x-y = mk1 - mk2 = m(k1-k2) olduğundan x-y ∈ mℤ olur. Dolayısıyla mℤ ≤ ℤ sağlanır

Şekil 4. 36. Ö30'un uyguladığı alt grup testi

Ö30, tek adımlı alt grup testini uygulamayı tercih etmiştir. $\emptyset \neq m\mathbb{Z}$ ifadesini açıkça belirtmiştir. $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ şartını belirtmemiş olması aşikarlıktan dolayı görmezden gelinebilir.

Uygun olan, olmayan ya da eksik örnek düzeyinde örnek veren öğrencilerin tamamı kendi verdiği örneklerin alt grup belirttiğini göstermişlerdir. Yukarıda Tablo 4.4.'te uygun olan örnek vermiş öğrencilerin sadece %25'inin uygun ve tam ispat yapabildiğini belirtilmişti. Uygun olmayan örnek veren öğrencilere bakacak olursak tamamının alt grup testi uygulayarak alt grup belirttiğini gösterebiliyor olmaları %100'ünün de hata yaptığını göstermektedir.

Alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını inceleme düzeyine ilişkin veri elde etmek için özel olarak kapalılık özelliğinin kontrolüne ilişkin veri toplanmıştır. Veriler Tablo 3.6.' ya (Kapalılık özelliğinin kontrol edilme düzeyi değerlendirme kriterleri) göre analiz edilmiştir.

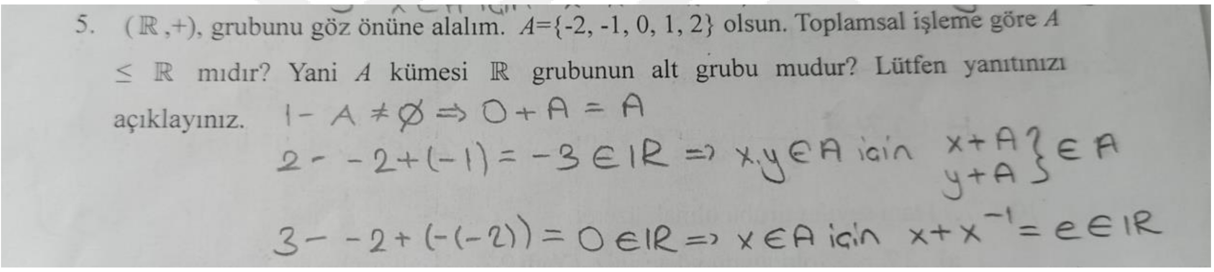
Elde edilen bulgular Tablo 4.5.'te verilmiştir.

Tablo 4. 5. Kapalılık özelliğinin kontrolüne ilişkin elde edilen bulgular

Yanıt		Kategori	Katılımcı	*f*	%
Doğru yanıt	$A \nleq R$	Yanlış kontrol	-	0	0
		Eksik kontrol	-	0	0
		Doğru kontrol	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö16, Ö18, Ö19, Ö20, Ö24, Ö25, Ö27, Ö28, Ö30, Ö31	24	77,41
Yanlış yanıt	$A \leq R$	Yanlış kontrol	Ö17, Ö21, Ö22, Ö26, Ö29	5	16,12
		Doğrudan kabul	Ö23, Ö9	2	6,45
			Toplam	**31**	**100**

Kapalılık özelliğinin kontrolüne ilişkin, tanımlanan $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin ℝ’nin alt grubu olmasına engel teşkil eden kapalılığın sağlanmıyor oluşu öğrencilerin büyük bir çoğunluğu tarafından (%77,41) aksine ispat yöntemi ile gösterilmiştir. Öğrencilerin zorlandığı noktaları anlayabilmek için yanlış yanıt veren öğrencilerin cevaplarının incelenmesi gerekmektedir. $A \leq$ R yanıtını veren ve kapalılık kontrolünde yanlış kontrol yapan öğrencilerin (%16,12) yaptıkları hata kümedeki bütün elemanları incelememekten kaynaklanmaktadır. Kapalılığın sağlanmadığını gösteren aksine bir örnek kesinlikle alt grup sağlanmadığını belirtir ancak kapalılığın sağlandığını gösteren tek bir örnek bize kesinlik belirtmez. Bu nedenle kapalılık kontrolünde sonlu elemanlı kümelerde aksine bir örnek çıkmadığı sürece kümedeki bütün elemanların işleme alınıp kontrol edilmesi gerekmektedir.

Kapalılık kontrol ederken bazı öğrencilerin (%6,45) herhangi bir inceleme yaptıklarına dair bir ibare bulunmamaktadır. Kapalılığın sağlandığı doğrudan ifade edilmiştir. Bazı öğrenci örnekleri aşağıdaki gibidir:

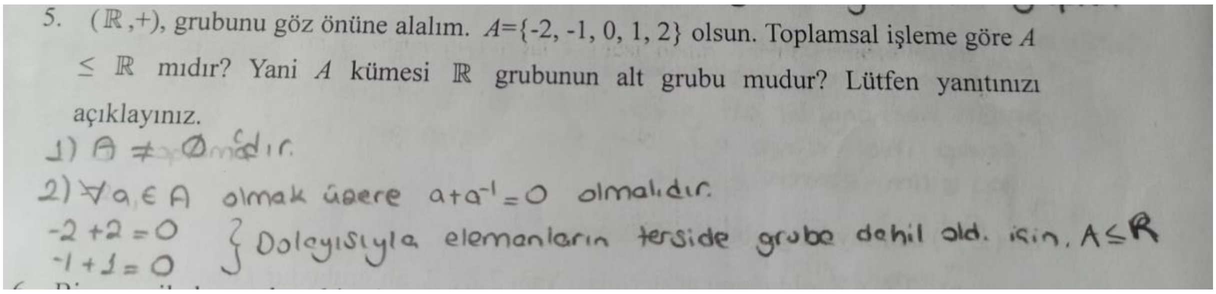

5. (ℝ,+), grubunu göz önüne alalım. A={-2, -1, 0, 1, 2} olsun. Toplamsal işleme göre $A \leq$ ℝ mıdır? Yani A kümesi ℝ grubunun alt grubu mudur? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

1- $A \neq \emptyset \Rightarrow 0 + A = A$

2- $-2+(-1) = -3 \in IR \Rightarrow x,y \in A$ için $\left.\begin{matrix} x+A \\ y+A \end{matrix}\right\} \in A$

3- $-2+(-(-2)) = 0 \in IR \Rightarrow x \in A$ için $x + x^{-1} = e \in IR$

Şekil 4. 37. Ö22’nin uyguladığı kapalılık kontrolü

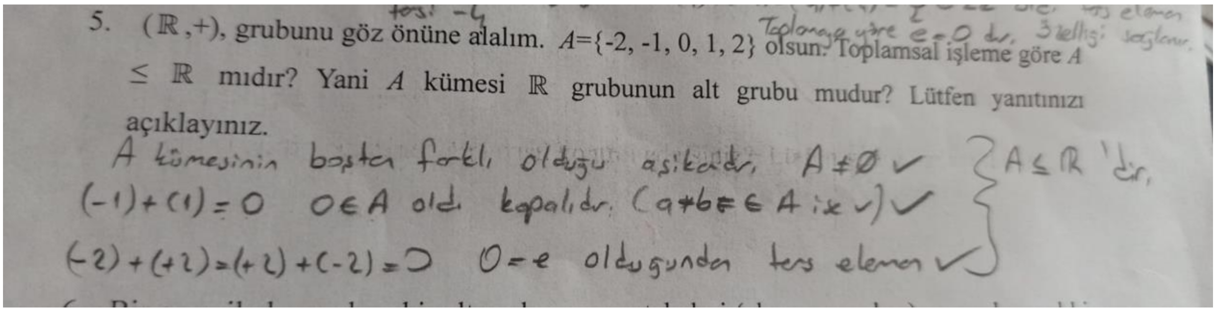

5. (ℝ,+), grubunu göz önüne alalım. A={-2, -1, 0, 1, 2} olsun. Toplamsal işleme göre $A \leq$ ℝ mıdır? Yani A kümesi ℝ grubunun alt grubu mudur? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

1) $A \neq \emptyset$ dır.

2) $\forall a \in A$ olmak üzere $a+a^{-1}=0$ olmalıdır.

$-2+2=0$
$-1+1=0$ } Dolayısıyla elemanların terside grubo dahil old. için, $A \leq R$

Şekil 4. 38. Ö26’nın uyguladığı kapalılık kontrolü



Şekil 4. 39. Ö29'un uyguladığı kapalılık kontrolü

Ö22, kapalılık özelliğini kontrol ederken alt grup adayı olan *A* kümesinde yer alan bütün elemanları işleme tabi tutmamıştır. Benzer şekilde Ö26 ve Ö29'un da kümedeki yalnızca bazı elemanları işleme tabi tuttukları görülmektedir.

4.4. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin bulgular

Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde etme sürecinde ilk olarak Lagrange teoremine ilişkin sahip olunan bilgi ölçümü yapılmıştır. Bir grubun mertebesi ile alt grubunun mertebesi arasındaki ilişkiye ilişkin elde edilen bulgular Tablo 4.6.'da verilmiştir.

Tablo 4. 6. Bir grubun mertebesi ile alt grubunun mertebesi arasındaki ilişkiye ilişkin bulgular

Ortak tema	Katılımcılar	f	%
Grubun mertebesi ≥ Alt grubun mertebesi	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12, Ö15, Ö16, Ö17, Ö18, Ö21, Ö22, Ö23, Ö24, Ö25, Ö27, Ö30	20	64,51
Grubun mertebesi > Alt grubun mertebesi	Ö8	1	3,22
Grubun mertebesi = n **Alt grubun mertebesi= n!**	Ö10	1	3,22
Diğer	Ö11, Ö14, Ö31, Ö13, Ö19, Ö20, Ö26, Ö28, Ö29	9	29,03
	Toplam	**31**	**100**

Tablo 4.6. incelendiğinde Lagrange teoremine ilişkin bulgu elde edilemediği görülmektedir. Yalnızca alt grubun mertebesinin, üst grubun mertebesinden büyük olamayacağı kavrayışının öğrencilerin %64,51'inde mevcut olduğu görülmüştür.

Lagrange teoremine ilişkin sahip olunan bilgi ölçümü yapılamadığı için yazılı sorulardaki 7. sorunun a ve b seçeneklerinde amaca uygun veri analizi yapılamamıştır. 7. Sorunun c seçeneğine ilişkin elde edilen bulgular ise Tablo 4.7.'de verilmiştir. Veriler, Tablo 3.7.'ye göre (Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyi değerlendirme kriterleri (1)) analiz edilmiştir.

Tablo 4. 7. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin bulgular (1)

Soru	Seviye	Katılımcılar	*f*	%
7c	**Seviye 0**	Ö27	1	3,22
	Seviye 1	Ö8, Ö20, Ö21, Ö28,	4	12,90
	Seviye 2	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö16, Ö17, Ö18, Ö19, Ö22, Ö23, Ö24, Ö25, Ö26, Ö29, Ö30, Ö31	26	83,87
		Toplam	**31**	**100**

7c: 7. Soru c seçeneği

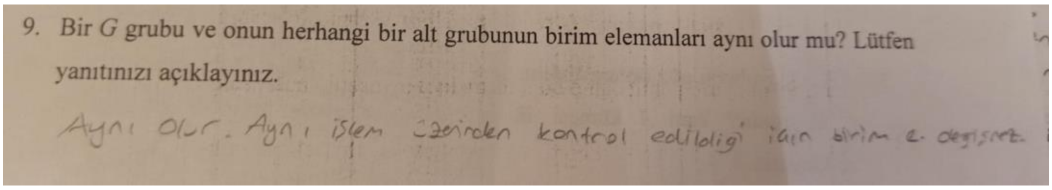
Tablo 4.6. ve 4.7. birlikte incelendiğinde, Ö27'nin sahip olduğu doğru bilgiye rağmen, üst grubun eleman sayısından fazla eleman sayısına sahip alt grup yazabildiği görülmektedir. Ö8 ve Ö21'in sahip olduğu doğru bilgiye rağmen soruyu yanıtlamadıkları görülmektedir. Bu da sahip olunan bilginin kullanılmadığını göstermektedir.

Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin veri elde etme sürecinde bir diğer bilgi ölçümü bir grup ve alt grubunun birim elemanlarına ilişkindir. Burada amaç bir grup ve alt grubunun üzerinde tanımlanan işlemin farklı olamayacağı kavrayışının var olup olmadığını tespit etmektir. Bir grup ve alt grubunun birim elemanlarına ilişkin elde edilen bulgular Tablo 4.8.'de verilmiştir.

Tablo 4. 8. Bir grup ve alt grubunun birim elemanlarına ilişkin bulgular

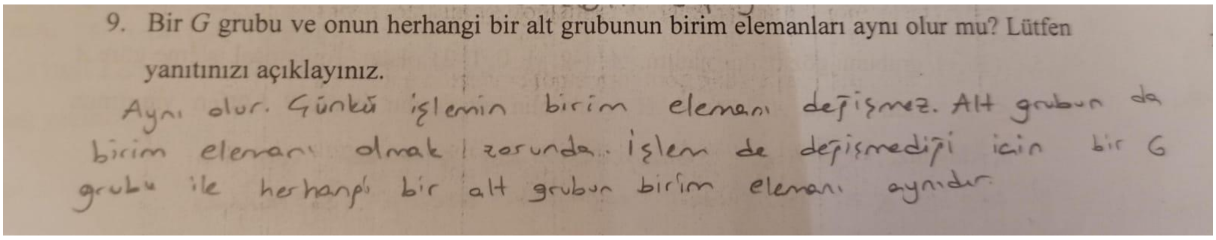
Ortak tema	Katılımcılar	f	%
Birim elemanlar aynı olamaz.	Ö21	1	3,22
Birim elemanlar aynı olabilir.	Ö3, Ö6, Ö9, Ö13, Ö14, Ö17, Ö18, Ö26, Ö29	9	29,03
Birim elemanlar aynıdır.	Ö1, Ö2, Ö4, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö15, Ö16, Ö19, Ö20, Ö22, Ö23, Ö24, Ö25, Ö27, Ö28, Ö30, Ö31	21	67,74
	Toplam	**31**	**100**

Tablo 4.8. incelendiğinde büyük bir çoğunluğun (%67,74) bir grup ve alt grubunun birim elemanlarının aynı olduğunu belirttiği görülmektedir. Bazı öğrencilerin cevapları aşağıda verilmiştir:

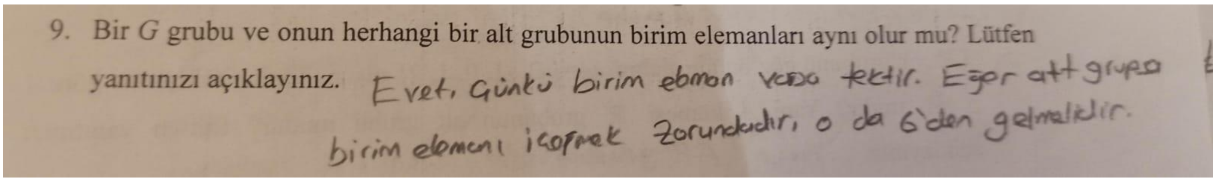

9. Bir *G* grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Aynı olur. Aynı işlem üzerinden kontrol edildiği için birim e. değişmez.

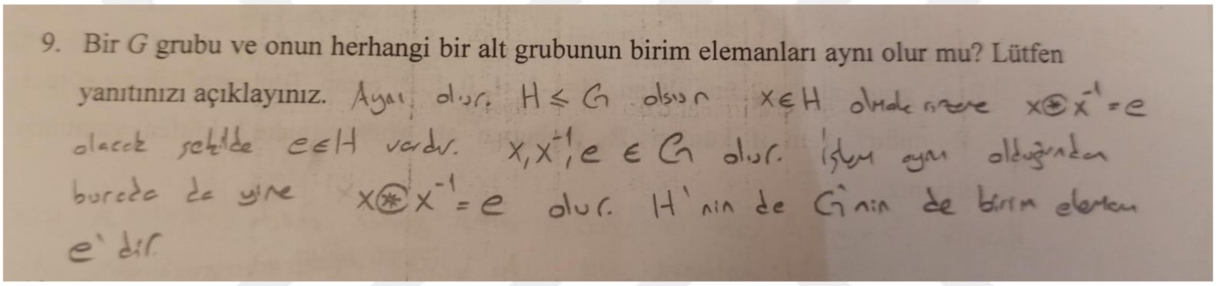
Şekil 4. 40. Alt ve üst grubun birim elemanı (Ö15)


9. Bir *G* grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.
Aynı olur. Çünkü işlemin birim elemanı değişmez. Alt grubun da birim elemanı olmak zorunda. İşlem de değişmediği için bir G grubu ile herhangi bir alt grubun birim elemanı aynıdır.

Şekil 4. 41. Alt ve üst grubun birim elemanı (Ö24)


9. Bir *G* grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız. Evet, çünkü birim eleman vardır tektir. Eğer alt grupa birim elemanı içermek zorundadır, o da G'den gelmelidir.

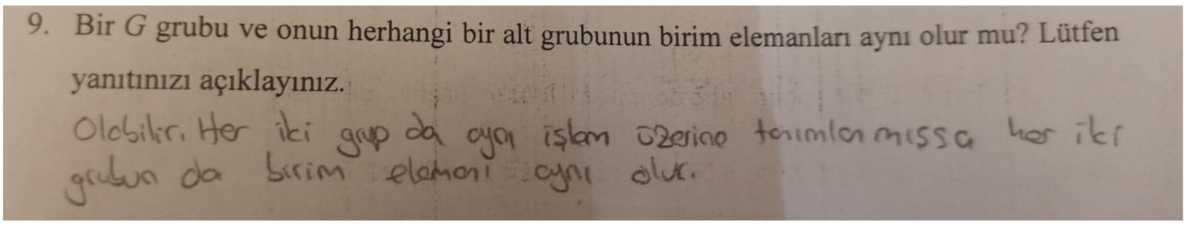
Şekil 4. 42. Alt ve üst grubun birim elemanı (Ö19)


9. Bir *G* grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız. Aynı olur. $H \leq G$ olsun $x \in H$ olmak üzere $x \circledast x^{-1} = e$ olacak şekilde $e \in H$ vardır. $x, x^{-1}, e \in G$ olur. İşlem aynı olduğundan burada da yine $x \circledast x^{-1} = e$ olur. H'nin de G'nin de birim elemanı e'dir.

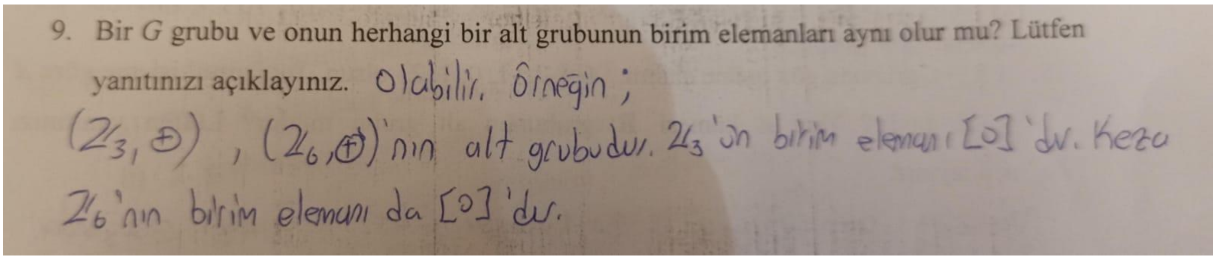
Şekil 4. 43. Alt ve üst grubun birim elemanı (Ö12)

Bir grup ve alt grubunun birim elemanlarının aynı olduğunu belirten öğrencilerin "aynı işlem üzerinde tanımlanma", "işlem değişmezliği", "alt grupta birim eleman bulunmak zorundadır, o birim eleman da üst gruptan gelmek zorundadır" gibi cevaplar olduğu dikkat çekmektedir.

Bir grup ve alt grubunun birim elemanları aynı olabilir (%29,03) cevabını veren öğrencilerin cevapları incelendiği zaman "tanımlanan işleme göre değişir", "alt grup ve üst grup farklı işlemlerle tanımlanmışsa" gibi ifadeler yer aldığı görülmektedir. Bir grup ve alt grubunun farklı işlemler üzerinde tanımlanabileceği düşüncesi bir yanılgıdır. Bu yanılgıya sahip olan bazı öğrencilerin cevapları aşağıda verilmiştir:

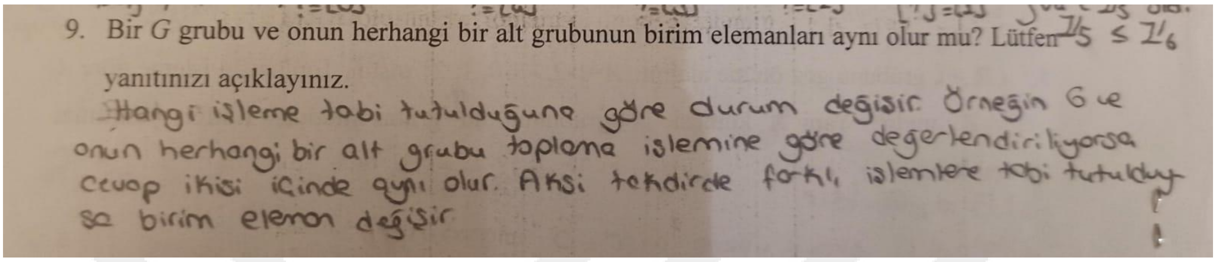

9. Bir *G* grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.
Olabilir. Her iki grup da aynı işlem üzerine tanımlanmışsa her iki grubun da birim elemanı aynı olur.

Şekil 4. 44. Bir grup ve alt grubunun birim elemanları (Ö18'in cevabı)


9. Bir G grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız. Olabilir. Örneğin;

$(\mathbb{Z}_3, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$'nın alt grubudur. $\mathbb{Z}_3$'ün birim elemanı $[0]$'dır. Keza $\mathbb{Z}_6$'nın birim elemanı da $[0]$'dır.

Şekil 4. 45. Bir grup ve alt grubunun birim elemanları (Ö5'in cevabı)


9. Bir G grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen $\mathbb{Z}_5 \leq \mathbb{Z}_6$ yanıtınızı açıklayınız.

Hangi işleme tabi tutulduğuna göre durum değişir. Örneğin G ve onun herhangi bir alt grubu toplama işlemine göre değerlendiriliyorsa cevap ikisi içinde aynı olur. Aksi takdirde farklı işlemlere tabi tutulduysa birim eleman değişir

Şekil 4. 46. Bir grup ve alt grubunun birim elemanları (Ö26'nın cevabı)

Ö5'in verdiği cevap incelendiğinde, kalan gruplarında $[0] \in \mathbb{Z}_3$ ile $[0] \in \mathbb{Z}_6$'daki $[0]$ kalan kümesinin aynı olduğu ifadesi dikkat çekmektedir.

Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin elde edilen bir diğer bulgu Tablo 4.9.'da verilmiştir. Veriler, Tablo 3.8.'e göre (Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyi değerlendirme kriterleri (2)) analiz edilmiştir. Araştırmaya katılan 31 öğrenciden 4'ü bu soruyu yanıtsız bıraktığı için 27 kişi ile değerlendirme yapılmıştır.

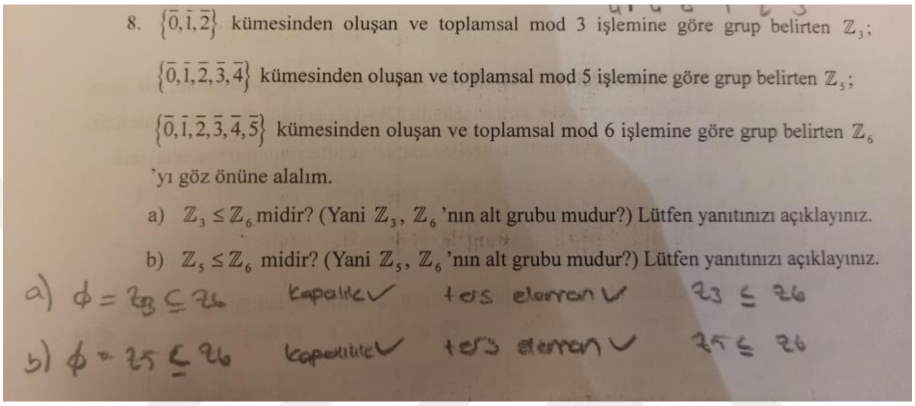
Tablo 4. 9. Kalan gruplarının alt gruplarını inceleme düzeyine ilişkin bulgular (2)

Soru	Yanıt		Seviye	Katılımcılar	*f*	%
8a	**Yanlış yanıt**	$\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 0**	Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö18, Ö19, Ö23, Ö24, Ö26, Ö28, Ö30, Ö31	15	55,55
	Doğru yanıt	$\mathbb{Z}_3 \nleq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 2**	Ö1, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö17, Ö25, Ö27, Ö29	12	44,44
				Toplam	**27**	**100**
8b	**Yanlış yanıt**	$\mathbb{Z}_5 \leq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 0**	Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö17, Ö18, Ö19, Ö23, Ö24, Ö26, Ö28, Ö30, Ö31	16	59,25
	Doğru yanıt	$\mathbb{Z}_5 \nleq \mathbb{Z}_6$	**Seviye 2**	Ö1, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, Ö25, Ö27, Ö29	11	40,74
				Toplam	**27**	**100**

8a: 8. Soru a seçeneği, 8b: 8. Soru b seçeneği

Tablo 4.9. incelendiğinde %44,44 oranı ile doğru olan $\mathbb{Z}_3 \nleq \mathbb{Z}_6$ cevabı ve %40,74 oranı ile doğru olan $\mathbb{Z}_5 \nleq \mathbb{Z}_6$ cevapları verilmiştir. Ancak öğrencilerin yaptıkları açıklamalar incelendiğinde hiçbir öğrenci alt grup belirtmeme nedenini farklı tanımlı olan işlemlerden dolayı alt küme dahi belirtmiyor olarak ifade etmemiştir. Öğrencilerin ya mod 3 ya mod 6 ya da mod 5'e göre işlem yaptıkları ya da doğrudan alt grup şartlarının sağlandığını ifade ettikleri görülmektedir.

Aşağıda bazı öğrenci örnekleri verilmiştir:



8. $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 3 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_3$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 5 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_5$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$ 'yı göz önüne alalım.

a) $\mathbb{Z}_3 \le \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

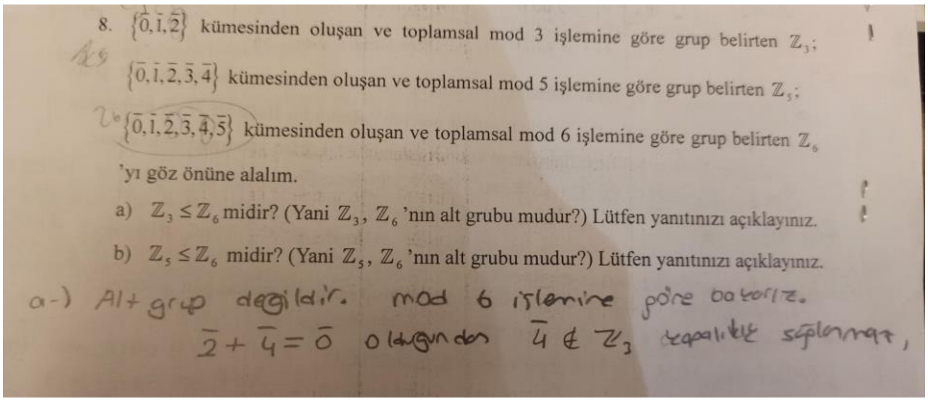
b) $\mathbb{Z}_5 \le \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

a) $\phi \neq Z_3 \subseteq Z_6$ kapalılık✓ ters eleman✓ $Z_3 \leq Z_6$

b) $\phi \neq Z_5 \subseteq Z_6$ kapalılık✓ ters eleman✓ $Z_5 \leq Z_6$

Şekil 4. 47. Ö28'in kalan gruplarında alt grup belirlemeye ilişkin cevabı

Ö28'in yanıtına bakıldığında $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{Z}_6$ olduğunu ve alt grup şartlarının sağlandığını doğrudan ifade ettiği görülmektedir.



8. $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 3 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_3$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 5 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_5$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$ 'yı göz önüne alalım.

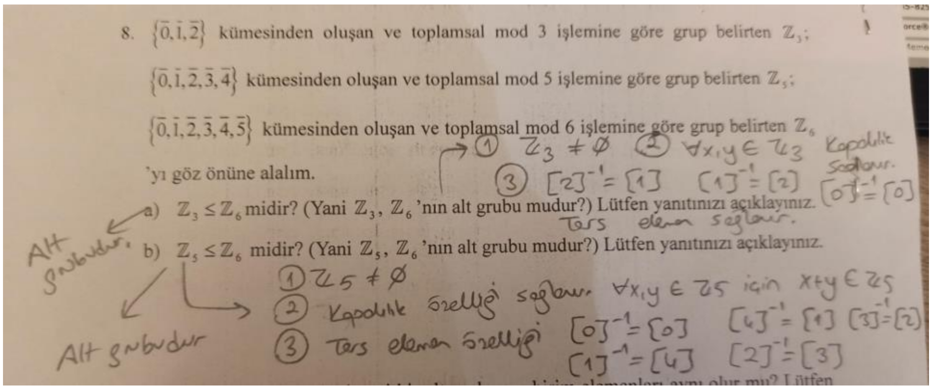
a) $\mathbb{Z}_3 \le \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

b) $\mathbb{Z}_5 \le \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

a-) Alt grup değildir. mod 6 işlemine göre bakarız.
$\bar{2}+\bar{4}=\bar{0}$ olduğundan $\bar{4} \notin Z_3$ kapalılık sağlanmaz,

Şekil 4. 48. Ö25'in kalan gruplarında alt grup belirlemeye ilişkin cevabı

Ö25'in yanıtına bakıldığında mod 6 işlemine göre inceleme yaptığı görülmektedir. Alt grup adaylığında en temel şart olan, bir grubun boştan farklı bir alt küme olması şartına bakılmamıştır.



8. $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 3 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_3$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 5 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_5$;

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$

'yı göz önüne alalım.

① $Z_3 \neq \emptyset$ ② $\forall x,y \in Z_3$ Kapalılık sağlanır.

③ $[2]^{-1}=[1]$ $[1]^{-1}=[2]$ $[0]^{-1}=[0]$ Ters eleman sağlanır.

a) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Alt grubudur.

b) $\mathbb{Z}_5 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

① $Z_5 \neq \emptyset$

② Kapalılık özelliği sağlanır. $\forall x,y \in Z_5$ için $x+y \in Z_5$

③ Ters eleman özelliği $[0]^{-1}=[0]$ $[4]^{-1}=[1]$ $[3]^{-1}=[2]$ $[1]^{-1}=[4]$ $[2]^{-1}=[3]$

Alt grubudur

Şekil 4. 49. Ö7'nin kalan gruplarında alt grup belirlemeye ilişkin cevabı

Ö7'nin yanıtına bakıldığında mod 3 ve mod 5 işlemine göre inceleme yaptığı görülmektedir. Ayrıca alt grup adaylığında en temel şart olan, bir grubun boştan farklı bir alt küme olması şartında yalnızca boştan farklı küme olma özelliğine değinilip alt küme olma şartına bakılmamıştır.

BÖLÜM 5

5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Alt Grup Kavramına İlişkin Karşılaşılan Zorluklar ile İlgili Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışmanın amacı, alt grup kavramına ilişkin karşılaşılan zorlukları tespit etmektir. Bu doğrultuda toplanan verilerin analizinden elde edilen bulgular ile literatürdeki çalışmaların çıktıları sentezlenerek, sonuçlar üç başlık altında toplanmıştır: 1) Alt grup kavramını tanımlarken karşılaşılan zorluklar, 2) Bir alt grubu örneği verirken ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ederken karşılaşılan zorluklar, 3) Kalan gruplarının alt gruplarını incelerken karşılaşılan zorluklar.

5.1.1. Alt Grup Kavramını Tanımlarken Karşılaşılan Zorluklar ile İlgili Tartışma ve Sonuçlar

İlk incelenen kısım, alt grup kavramını tanımlarken karşılaşılan zorluklardır. Tanım yapabilme düzeyine ilişkin bulgular incelendiğinde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun kabul edilebilir tanım düzeyinde tanımlama yaptıkları görülmektedir. Kabul edilebilir tanımlardan ziyade eksik tanım ve kabul edilemez tanım düzeyinde tanım yapan öğrencilerin tanımları, tanımlama sürecinde yaşanılan zorlukları tespit etmek için bir kaynaktır. Eksik tanım yapan öğrencilerin, alt grup belirtmede en temel şartlar olan “boştan farklı küme olma” ve “bir grubun bir alt kümesi olma” şartlarını göz ardı ettikleri doğrudan “kapalılık” ve “ters eleman” özelliklerine odaklanıldığı görülmektedir. Kabul edilemez tanım yapan öğrencilerin tanımları incelendiğinde ise üç ana nokta dikkat çekmektedir: 1) Alt grup adayını en baştan grup olarak kabul etmek, 2) Alt küme ve alt grup kavramını eş değer tutmak, 3) Alt grup üst grup karmaşası.

Bu çalışmada “alt küme ve alt grup kavramını eş değer tutmak” olarak ifade ettiğimiz durum, literatürdeki bazı çalışmalarda bir kavram yanılgısı olarak ele alınmıştır. Grubun sadece bir küme, benzer şekilde alt grubun sadece bir alt küme olarak algılanması bir kavram yanılgısıdır. Bu yanılgı; öğrencilerin yeni bir kavramı (grup), tanıdık bir kavramla (küme) ilişkilendirerek inşa etme çabalarından kaynaklanmaktadır. Bir grubun önemli özelliklerini göz ardı etmek gibi, yeni durumları mevcut şemaya asimile ederek zorluklarla başa çıkma yöntemi yaygındır (Dubinsky vd., 1994). Bu çalışmada “alt grup üst grup karmaşası” olarak ifade ettiğimiz durumun kaynağını Dubinsky, (1994) aynı çalışmasında öğrencilerin işlemin fonksiyonel rolünü kavrayamamaya bağlamaktadır. Eğer öğrenci işlemin fonksiyonel rolünü kavrayabilirse alt grup için daha büyük olan grubun işleminin göz önüne alınacağını kavrayabilir.

Alt grup kavramını tanımlarken kabul edilemez tanım yapan öğrencilerin yanlış bilgiye, eksik tanım yapan öğrencilerin eksik bilgiye, kabul edilebilir tanım yapan öğrencilerin doğru bir bilgiye sahip oldukları görülmektedir. Bu; doğru, yanlış veyahut eksik de olsa öğrencilerin alt grup tanımına ilişkin bilgiye, bir kulak aşinalığına sahip olduğunu göstermektedir. Peki bu doğru, yanlış, eksik bilgi ayrımı neden kaynaklanmaktadır? Grup teorisindeki bütün kavramlar yüksek soyut algılama düzeyi gerektirmektedir. Araştırmaya katılan katılımcıların gelişimsel olarak bu soyutluk düzeyini algılayabilecek kapasitede oluşu her ne kadar Piaget'e göre (1976) değerlendirildiğinde kabul edilse de beynin bir başa çıkma mekanizması olarak soyutlama düzeyini indirgemesi de bir gerçektir (Hazzan, 1999).

5.1.2. Bir Alt Grubu Örneği Verirken ve Alt Grup Şartlarının Sağlanıp Sağlanmadığını Kontrol Ederken Karşılaşılan Zorluklar ile İlgili Tartışma ve Sonuçlar

İkinci incelenen kısım, bir alt grubu örneği verirken ve alt grup şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ederken karşılaşılan zorluklardır. Örnek verme düzeyine ilişkin bulgular incelendiğinde, kalan gruplarına ilişkin verilen örneklerin hiçbirinin uygun örnek olmaması dikkat çekmektedir. Burada en önemli nokta, farklı işlemler üzerinde tanımlı olan $\mathbb{Z}_n$ gruplarının birbirlerinin alt kümesi dahi olamayacağının kavranılamamasıdır. Kalan gruplarının farklı işlemler (farklı modlar) üzerinde tanımlı olmasına rağmen birbirlerinin alt grubu olarak nitelendirilmesi literatürde şu şekilde yorumlanmaktadır: İşlemin fonksiyonel rolünü kavrayamamış olmak, işlemin grubu sınırlama eyleminin zihinde gerçekleştirilememesine sebep olmaktadır (Dubinsky vd., 1994). Zihinde gerçekleşemeyen, işlemin grubu sınırlama eylemi alt grup kontrolü yapılırken en temel şart olan bir grubun boştan farklı alt kümesi olma şartının göz ardı edilmesine, kapalılık ve ters eleman incelenmesinde zaman kaybına sebep olmaktadır.

Grup; sağlaması gereken aksiyomlar dışında, bir küme ve üzerinde tanımlanan işlem ile oluşan bir yapıdır. Öyle gruplar vardır ki, üzerinde tanımlanan işlemin ne olduğu açıktır bu nedenle işlem belirtilmese de anlaşılır. Örneğin, $\mathbb{R}$ grubunun işleminin toplama olduğu bilinir ve açıkça $(\mathbb{R}, +)$ ikilisi belirtilmese de anlaşılır. Benzer şekilde; $\mathbb{Z}$ grubunun işleminin toplama, $\mathbb{R}^*$ yani $\mathbb{R}/\{0\}$ grubunun işleminin çarpma olduğu belirtilmese de anlaşılır. Açıkça görünen bir diğer durum ise sayı kümelerinin birbirlerinin alt kümeleri oluşudur. Açıkça belirtilmese de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ bilinen ve aşina olunan bir durumdur. Öğrencilerin verdiği sayı grubu örnekleri incelendiğinde uygun örnek vermesine karşın alt grup kontrol sürecinde eksik ve hatalı incelemeler yapıldığı görülmektedir. Yukarıda belirtildiği gibi bazı aşikar olunan grup örneklerinde boştan farklı alt küme belirtme şartının belirtilmemesi göz ardı edilebilir ancak kapalılık ve ters eleman kontrolündeki hatalar zorlanmaları tespit etmek için önemli bir kaynaktır. Öğrencilerin, alt grup şartlarını kontrol sürecinde yaptığı hatalar şu şekildedir:

- Sonlu gruplarda kapalılık incelemesi yapılırken, tüm elemanların incelenmemesi,
- Uygun tek bir örneğin kapalılık şartını sağlamak için yeterli olacağının belirtilmesi,
- Sonlu gruplarda ters eleman incelemesi yapılırken, tüm elemanların incelenmemesidir.

Sonlu gruplarda alt grup kontrolünde, kapalılık ve ters eleman özelliği incelenirken bütün elemanların işleme alınması gerekmektedir. Tek bir elemanın kontrol edilmesi, aksine bir örnek elde etmedikçe ispat için yeterli değildir. Benzer bulgular, Balacheff (1988) ve Harel ve Sowder (2007) çalışmaları tarafından da desteklenmektedir: İspat sürecinde üniversite öğrencileri için bile; bir veya birkaç örnekten elde edilen kanıtlar, daha formal olan tümdengelimsel akıl yürütmeden daha baskındır.

Ayrıca, öğrencilerin sahip olduğu bilgiye rağmen bu bilgiyi kullanamadıkları görülmektedir. Öğrencilerin alt grup şartlarını sıraladıkları ancak yeterince analiz edemedikleri dikkat çekmektedir. Benzer bulgular literatürde de karşımıza çıkmaktadır (Arıkan vd., 2015; Lewis, 2013). Öğrencilerin sahip oldukları bilgileri kullanamıyor oluşunun öğrenmekten ziyade ezberlemek ile ilişkili olduğu düşünülmektedir. Benzer şekilde tanım aşamasında, alt grup belirtmek için temel şartlara ek olarak “grup aksiyomlarının kontrolü” ifadesini yazan öğrencilerin bu dört aksiyomdan yalnızca kapalılık ve ters elemanı incelemiş olmasından dolayı yöneltilen “Neden diğer iki aksiyomu da kontrol etmedin?” sorusuna “Hatırlamıyorum.”, “Nedenini öğretmenimiz açıklamıştı.”, “Öyle kalmış aklımda.” gibi yapılan açıklamalar öğrenmeden ziyade hatırlama ile ilgili olan sorunlardır.

Bir diğer dikkat çeken nokta, grup dahi belirtmeyen bir kümeden alt küme seçerek alt grup olduğunun belirtilmesidir. Literatürde bu durumu Brown vd. (1997) koordine etme sorunu olarak nitelendirmektedir. Alt grup kavramı üç şemanın koordinesi ile anlaşılabilir: Grup, alt küme ve fonksiyon (ikili işlem). Bu yapının kritik bir bileşeni fonksiyonun (ikili işlem) alt kümeyle sınırlandırılması hakkında düşünebilme yeteneğidir. Matematiğin birikimli yapısı kavramların kavramlar üzerine inşasının bir sonucudur. Öğrenme sürecinde önceki öğrenmelere ilişkin yaşanan aksaklıklar, kendisi üzerine inşa edilen kavramları da etkilemektedir.

5.1.3. Kalan Gruplarının Alt Gruplarını İncelerken Karşılaşılan Zorluklar ile İlgili Tartışma ve Sonuçlar

Üçüncü ve son incelenen kısım kalan gruplarının alt gruplarını incelerken karşılaşılan zorluklardır. Kalan gruplarına ilişkin elde edilen bulgular incelendiğinde öğrencilerin bazı kavram yanılgılarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Her bir kalan grubunun üzerinde tanımlanan işlem toplamsal mod işlemidir ancak her birinin modu farklıdır. Örneğin; $\mathbb{Z}_2$ grubu üzerinde toplamsal mod 2 işlemi tanımlı iken $\mathbb{Z}_7$ grubu üzerinde toplamsal mod 7 işlemi tanımlıdır. Bu doğrulta "Her bir kalan grubunun üzerinde tanımlanan işlem farklıdır." cümlesini kurmak yanlış olmayacaktır. Ayrıca $[0], [1], [2]$ şeklinde sembolize edilen kalan kümeleri, gösterimleri aynı olsa dahi her bir mod için farklı küme belirtmektedir. Örneğin; mod 2 için sıfır kalan kümesi $[0] = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ iken mod 7 için sıfır kalan kümesi $[0] = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$'dir. Yaptığımız bu araştırmada öğrenciler, kalan gruplarının alt gruplarını incelerken $[0], [1], [2]$ gibi kalan sınıflarının bütün $\mathbb{Z}_n$'lerde aynı kümeyi ifade ettiği yanılgısına sahip oldukları ve sahip olunan bu yanılgının alt grup inceleme sürecinde zorlanmalara neden olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, öğrencilerin farklı işlemler (farklı modlar) üzerinde tanımlı olan kalan gruplarının birbirlerinin alt kümesi dahi olamayacağı kavrayışına sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Brown vd. (1997) ve Dubinsky vd., (1994), bir grubun bir alt kümesini belirlerken işlemin bir fonksiyon oluşunu kavrayabilmenin farklı işlemlerle tanımlanan grupların birbirlerinin alt kümesi olamayacağının kavranılmasında önemli bir noktaya sahip olduğuna dikkat çekmiştir. İşlemin fonksiyonel rolünün kavranılmamasından kaynaklı bir diğer zorlanma, öğrencilerin bir alt grup kontrol sürecinde göz önüne alınacak işlemin hangisi olduğu konusunda tereddütte kalmalarıdır. Örneğin, $\mathbb{Z}_3$'ün $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubu olduğunu belirten bazı öğrenciler mod 3 işlemine göre inceleme yapmıştır, mod 6 işlemine göre inceleme yapan öğrencilerin de neden mod 6 işlemini dikkate aldıklarına dair yeterli anlayışa sahip olmadıkları görülmüştür.

$\mathbb{Z}_n$ grupları, tanımlanmış bir gruptur. Kümedeki elemanlar ve üzerinde tanımlı olan işlem bellidir. Ancak yaptığımız araştırmadan elde edilen bulgular incelendiğinde, bazı öğrencilerin $\mathbb{Z}_n$'i herhangi n elemanlı bir küme olarak nitelendirme yanılgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bulgular, literatürdeki Dubinsky vd. (1994)'nin bulguları ile paralellik göstermektedir. Bu bulgulara ek olarak, $\mathbb{Z}_n$ üzerinde bilinen çarpma işlemine göre inceleme yapıldığının tespit edildiği araştırmalar da vardır (Hazzan, 1999).

Araştırmadan elde edilen bulgular incelendiğinde öğrencilerin en çok hata yaptığı ve en çok yanılgıya sahip oldukları kısım "kalan grupları" olmuştur. Kalan gruplarına dair öğrencilerin sahip olduğu yanılgılar şu şekilde tespit edilmiştir:

- Farklı işlemler üzerinde tanımlı olan $\mathbb{Z}_n$ gruplarının birbirlerinin alt grubu olabileceği yanılgısı,
- $[0], [1], [2]$ gibi kalan sınıflarının bütün $\mathbb{Z}_n$'lerde aynı kümeyi ifade ettiği yanılgısı,
- $\mathbb{Z}_3$'ün 3 elemanlı herhangi bir küme olduğu yanılgısı,
- Alt grup adayının işlemine göre inceleme yapma yanılgısı.

Öğrencilerin sahip olduğu bu yanılgılar kalan gruplarına ilişkin zorluklar yaşamalarına neden olmaktadır.

Literatürde kalan gruplarına yönelik alt grup belirlemede yaşanan zorlukların Lagrange teoreminin tersinin de kesinlikle sağlanması yanılgısından kaynaklanan kısımları belirtilmektedir (Hazzan & Leron, 1996). Bu yanılgıya sahip olan öğrencilerin başka hiçbir inceleme yapmadan doğrudan üst grup ve alt grup adayının mertebeleri arasındaki ilişkiye bakarak karar verdiği tespit edilmiştir. Bu yanılgı; alt grup belirtmek için alt grup adayının üst grubun bir alt kümesi olması en temel şart iken farklı işlemler üzerinde tanımlı olan $\mathbb{Z}_n$ gruplarının birbirlerinin alt kümesi dahi olamayacağının göz ardı edilmesine sebebiyet vermektedir. Ancak bu çalışmada Lagrange teoremine yönelik böyle bir yanılgı tespit edilmemiştir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun alt grup ve üst gruptaki birim elemanlarının aynı olduğu, otomatik olarak da aynı işlemler üzerinde tanımlı olduğu bilgisi bulunmaktadır. Sahip olunan doğru bilgilere rağmen hiçbir öğrenciden doğru bir açıklama alınamamıştır. Buna neden olan iki etmen şu şekilde ifade edilebilir:

- Alt grup kontrolü yapılırken en temel şartlar olan bir grubun boştan farklı alt kümesi olma şartının göz ardı edilip doğrudan kapalılık ve ters eleman özelliklerinin kontrolüne odaklanılması,
- İşlemin fonksiyonel rolünü kavrayamamak

5.2. Öneriler

Araştırmacılara; kalan gruplarına yönelik yaşanılan zorlukların daha geniş bir çerçevede incelenmesini, alt grup kavramına yönelik yaşanan zorlukları APOS teori çerçevesinde ve soyutlama düzeylerine göre incelenmesini, alt grup kavramına yönelik yaşanan zorluklar üzerine kavram imajı ile inceleme yapmalarını önerebilirim.

KAYNAKLAR

Agustyaningrum, N., Sari, R. N., Abadi, A. M., & Mahmudi, A. (2020). Dominant factors that cause students' difficulties in learning abstract algebra: A case study at a university in Indonesia. *International Journal of Instruction*, *14*(1), 847-866. https://doi.org/10.29333/IJI.2021.14151A

Arıkan, E. E., Özkan, A., & Özkan, E. M. (2015). An examination in Turkey: Error analysis of Mathematics students on group theory. *Educational Research and Reviews*, *10*(16), 2352-2361. https://doi.org/10.5897/err2015.2329

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S., & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behaviour*, *16*(3), 241-309.

Asiala, M., Kleiman, J., Brown, A., & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(1), 13-43. https://doi.org/10.1023/A:1009738109343/METRICS

Bingölbali, E., & Özmantar, M. F. (2015). *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* (C. 5). www.pegem.net

Brooks, J. G., & Brooks, M. G. (1993). *In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms*. http://www.ascd.org

Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E. D., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behaviour*, *16*(3), 187-239.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (1998). *Qualitative Inquiry and Reseach Design*. SAGE PUBLICATIONS.

Çalışkan, E. F., & Türkmen, M. R. (2016). Sınıf Öğretmenlerinin Matematik Öğretiminde Yaşadığı Güçlükler. *Türkiye Sosyal Araştırmalar Dergisi*, *Special İssue*.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Içinde D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (ss. 95-126). Springer Netherlands.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267-305. https://doi.org/10.1007/BF01273732

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B., & Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, *34*, 152.

Findell, B. R. (2001). *Learning and Understanding in Abstract Algebra* [Doktora Tezi]. New Hampshire Üniversitesi.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7. bs). www.cengage.com/international.

Gök, M. (2016). Pedagojik alan bilgisi bileşenlerinin incelenmesi: Alan bilgisi ve öğrenci bilgisi. *Route Educational and Social Science Journal*, *3*(2), 217-236.

Gürbüz, S., & Şahin, F. (2018). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri* (C. 5). Turcademy. https://a5c9067fb5de95ba1294b544b3b0d04c29bc1f2f.vetisonline.com/tr/kitap/sosyal-bilimlerde-arastirma-yontemleri-9789750251276

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concept. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 71-90.

Hazzan, O., & Leron, U. (1996). Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange's Theorem. *Source: For the Learning of Mathematics*, *16*(1), 23-26.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı (2018).

Kıray, S. A., Gök, B., & Bozkır, A. S. (2015). Identifying the Factors Affecting Science and Mathematics Achievement Using Data Mining Methods. *Journal of Education in Science, Environment and Health*, *1*(1). www.jeseh.net

Konyalıoğlu, S. (2005). *Bazı sonlu doğrulmuş grupların öğretimine geometrik ve bilgisayar destekli yaklaşım* [Doktora tezi]. Fen Bilimleri Enstitüsü.

Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1995). Learning group ısomorphism: A crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 153-174. https://www.jstor.org/stable/3482901?seq=1&cid=pdf-

Lewis, J. (2013). *An Analysis of Students' Difficulties in Learning Group Theory* [Yüksek lisans tezi]. Concordia University.

Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). *Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level* (ss. 19-45). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_2

Nesin, A. (2013). *Temel Grup Teorisi*.

Okur, M. (2006). *Cebir paket programları vasıtasıyla izomorfizm kavramının öğretimi* [Doktora Tezi]. Fen Bilimleri Enstitüsü.

Piaget, J., & Mallon, E. J. (1976). Cognitive Development and Processes: Review of the Philosophy of Jean Piaget. Içinde *Source: The American Biology Teacher* (C. 38, Sayı 1). University of California Press on behalf of the National Association of Biology Teachers.

Tatar, E. (2006). *İkili işlem kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi ve 4MAT yönteminin başarıya etkisi* [Doktora Tezi]. Fen Bilimleri Enstitüsü.

Tunç, B. (2011). Eğitimin Tarihsel Gelişimi ve 21. Yüzyılda Eğitim Biliminde Yönelimler. Içinde *Eğitim Bilimine Giriş* (ss. 173-196). Pegem Akademi.

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022a). Assessing learners' conceptual understanding of ıntroductory group theory Using the CI2GT: Development and Analysis of a Concept Inventory. *Education Sciences*, *12*(6). https://doi.org/10.3390/educsci12060376

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022b). Exploring learning difficulties in abstract algebra: The case of group theory. *Education Sciences*, *12*(8). https://doi.org/10.3390/educsci12080516

Weber, K. (2001). Student difficulty constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory. Içinde *Making the connection: Research to practice in undergraduate mathematics education* (ss. 139-151). Mathematical Association of America.

Yerizon, Arnawa, I. M., Yanita, Ginting, B., & Nita, S. (2019). Students’ errors in learning elementary group theory: A case study of mathematics students at Andalas University. *Universal Journal of Educational Research*, *7*(12), 2693-2698. https://doi.org/10.13189/UJER.2019.071216

Yetkin, E. (2003). Student difficulties in learning elementary mathematics. *ERIC Digest*. www.eric.ed.gov

Zembat, İ. Ö. (2015). Kavram Yanılgısı Nedir? Içinde M. F. Özmantar, E. Bingölbali, & H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Onerileri* (ss. 1-9).

EKLER

Ek-1

Alt Grup Kavramına Dair Yazılı Soruları

Adınız:

Birazdan cevaplayacağınız sorular alt grup kavramına dair yaşanan öğrenci zorluklarını inceleyebilmek amacıyla hazırlanmıştır. Vereceğiniz yanıtlar araştırmamıza katkı sağlayacak olup, yeterli verimi alabilmek adına elinizden geleni ortaya koymanızı rica ediyoruz. Teşekkür ederiz.

1. Alt grup kavramını tanımlayınız.

2. Bir grup ve onun bir alt grubunun örneğini veriniz.

3. G bir grup ve H onun herhangi bir alt kümesi olsun. H alt kümesinin, alt grup belirtmesi için sağlaması gereken şartlar nelerdir? Başka bir ifade ile H alt kümesinin alt grup belirtip belirtmediğini nasıl kontrol edersiniz? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

4. İkinci soruda verdiğiniz alt grup örneğinin alt grup şartlarını sağladığını gösteriniz.

5. $(\mathbb{R}, +)$, grubunu göz önüne alalım. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olsun.
   Toplama işlemine göre $A \leq \mathbb{R}$ mıdır? Yani A kümesi $\mathbb{R}$ grubunun alt grubu mudur? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

6. Bir grup ile bu grubun bir alt grubunun mertebeleri (eleman sayıları) arasında nasıl bir ilişki vardır? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

7. $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$ grubunu göz önüne alarak aşağıdaki soruların her birine varsa uygun örnekler veriniz. Yoksa yoktur diye belirtiniz. Yanıtlarınızı lütfen açıklayınız.

   a) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 2 elemanlı bir alt grubu:
   b) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 5 elemanlı bir alt grubu:
   c) $\mathbb{Z}_6$ grubunun 12 elemanlı bir alt grubu:

8. $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 3 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_3$; $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 5 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_5$; $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ kümesinden oluşan ve toplamsal mod 6 işlemine göre grup belirten $\mathbb{Z}_6$'yı göz önüne alalım.

   a) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.
   b) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ midir? (Yani $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubu mudur?) Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

9. Bir G grubu ve onun herhangi bir alt grubunun birim elemanları aynı olur mu? Lütfen yanıtınızı açıklayınız.

Ek-2

Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

Soru 1

3. soru için öğrenci tek bir alt grup kontrol etme yöntemi söylemiş ise;

- Farklı bir yolla alt grup olup olmadığı kontrol edilebilir mi?
  Şekil 1. Cevap evet ise; Nasıl?

Soru 2

4. ve 5. soru için;

Eğer öğrenci grup aksiyomlarının hepsini kontrol ederse;

- Neden bütün aksiyomları kontrol ettiniz?
- Otomatik olarak sağlanan/gruptan miras kalan aksiyomlar var mıdır?
  Şekil 2. Cevap evet ise; Hangileridir, neden?

Eğer öğrenci yalnızca kapalılık ve ters eleman kontrolü yaparsa;

- Alt grup tanımı sorusunda eğer "Bir grubun alt kümesinin grup aksiyomlarını sağlaması" şeklinde bir cevap verdi ise grup aksiyomları sorulur ya da duruma göre hatırlatılır. Birim eleman ve birleşme özelliğinin neden kontrol edilmediği sorulur.

Eğer öğrenci kapalılık kontrol etmezse;

- Bir G grubunun hangi özellikleri (kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman) bir alt kümesinde de sağlanır?

Soru 3

7. soru için;

Eğer öğrenci 5 elemanlı alt grup için örnek verebilmişse;

- Örnek verdiğin alt grupta birim eleman hangisidir; …. elemanının tersi hangisidir, grupta mıdır? gibi grup olmaya engel teşkil eden nokta hangisi ise o sorulur.

Eğer öğrenci 12 elemanlı alt grup için "vardır" yanıtını vermişse, açıklaması "6, 12'yi böler" gibi bir ifade ise;

- Alt grubun eleman sayısı grubun eleman sayısından fazla olabilir mi?
  Olamaz yanıtını verirse;
- Peki neden böyle bir çelişki oluştu?

Soru 4

8. soru için;

Eğer öğrenci "$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt grubudur." Yanıtını vermişse;

- $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$'nın alt kümesi midir?
- $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ kümesindeki sayılar bildiğimiz sayma sayıları mıdır?

Soru 5

9. soru için;

Öğrenci doğru cevap veremez ise veya doğru cevap verip nedenini açıklayamaz ise, herhangi bir işleme göre birim elemanın tanımı sorulur.