T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

DİK ÜÇGENLER İLE PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİ İÇİNDEKİ PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE ÖĞRETİMİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Havva Gül KARATAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

Konya – 2016

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	**Havva Gül KARATAŞ**
	Numarası	**108302051009**
	Ana Bilim / Bilim Dalı	**İlköğretim/Matematik Eğitimi**
	Programı	**Tezli Yüksek Lisans**
	Tezin Adı	**Dik Üçgenler İle Pythagorean Üçgenleri İçindeki Pythagorean Üçgenlerinin Bazı Özellikleri ve Öğretimi Üzerine Bir Araştırma**

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Öğrencinin imzası
(İmza)

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi
A1-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Telefon: (0 332) 324 7660 Faks : 0 332 324 5510
Elektronik Ağ: www.konya.edu.tr E-Posta: ebil@konya.edu.tr

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

KONYA

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ KONYA EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	**Havva Gül KARATAŞ**
	Numarası	**108302051009**
	Ana Bilim / Bilim Dalı	**İlköğretim/Matematik Eğitimi**
	Programı	**Tezli Yüksek Lisans**
	Tez Danışmanı	**Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR**
	Tezin Adı	**Dik Üçgenler İle Pythagorean Üçgenleri İçindeki Pythagorean Üçgenlerinin Bazı Özellikleri ve Öğretimi Üzerine Bir Araştırma**

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan Dik Üçgenler İle Pythagorean Üçgenleri İçindeki Pythagorean Üçgenlerinin Bazı Özellikleri ve Öğretimi Üzerine Bir Araştırma başlıklı bu çalışma 06 / 05 / 2016 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR	Danışman	
Doç. Dr. Erhan ERTEKİN	Üye	E. Ertekin
Yard. Doç. Dr. Şaban Can ŞENAY	Üye	

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi
A1-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Telefon: (0 332) 324 7660 Faks : 0 332 324 5510
Elektronik Ağ: www.konya.edu.tr E-Posta: ebil@konya.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak, bir dik üçgenin çevrel çemberinin çapının o dik üçgenin hipotenüsü olduğu ve bu çevrel çemberin merkezinin hipotenüsün orta noktası olduğu gerçekleri göz önüne alınmıştır. Dahası, bu merkezi üçgenin dik köşesiyle birleştiren doğru parçası üçgenimizi eş olmayan iki ikizkenar üçgene ayırır. Buradan hareketle eş olmayan ikizkenar üçgenlerin çevrel çemberlerinin merkezleri ile esas üçgenimizin çevrel çemberinin merkezinin birleştirilmesiyle elde edilen yeni üçgenin özellikleri esas üçgene bağlı olarak incelenmiştir. Ayrıca üçgenlerin çevrel çemberlerin yarıçaplarının uzunlukları ve oluşan yamuğun kenar uzunlukları da esas üçgene bağlı olarak araştırılmıştır. İkinci olarak; bir dik üçgeninin hipotenüsü üzerinde bir nokta alındığında bu noktadan dik kenarlara ve dik köşeye çizilen doğru parçaları aracılığı ile esas üçgen içerisinde elde edilen yeni dik üçgenlerin Pythagorean olup olmadığı araştırılmıştır. Ayrıca esas üçgenin primitif olmayan bir Pythagorean üçgeni olması durumunda elde dilen üçgenlerin her zaman Pythagorean üçgeni olamayacağına ilişkin örnekler verilmiştir. Ek olarak her duruma ilişkin örnekler de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üçgenin Çevrel Çemberi, Üçgenin Çevrel Çemberinin Merkezi, Dik Üçgen, Pythagorean Teoremi, Pythagorean Üçgenleri.

ABSTRACT

In this study, firstly the facts that the diameter of a right triangle's circumcircle corresponds to its hypotenuse and the center of this circle is at the same time the midpoint of the hypotenuse is regarded. Moreover, a line segment which combines this center with the vertex with the right corner separates the triangle into a pair of non-congruent isosceles triangles. The properties of the new triangle which is constructed by combining the centers of circumcircles of two non-congruent isosceles triangles and the center of circumcircle of the main triangle is investigated based on the main triangle. Also, the lengths of radii of circumcircles and lengths of sides of emergent trapezoid are studied based on the main triangle. Secondly, right triangles emerged in the main triangle due to line segments which are constructed by combining an arbitrary point chosen on the hypotenuse with right sides and the vertex with the right corner are analyzed to be Pythagorean or not. Furthermore, it is exemplified that not all of these triangles would be Pythagorean if the main triangle is chosen inprimitive. Additionally, examples are given for each situation.

Key Words: Circumcircle of a Triangle, Center of Circumcircle Circle of a Triangle, Right Triangle, Pythagorean Theorem, Pythagorean Triangles.

ÖNSÖZ

Matematiğin gelişmesindeki büyüleyici yönlerden birisi de geometri ile sayılar teorisi arasındaki karşılıklı etkileşimdir. Üçgenlerin geometride önemli bir yer teşkil ettiği bilinir. Bu üçgenlerden; dik üçgenlerin ve Pythagorean üçgenlerinin iç teğet ve dış teğet çemberleri üzerinde yapılan çalışmalar, sayılar teorisi ile geometri arasında güzel bir ilişki ortaya çıkarmıştır.

Tarih boyunca üçgenler ile onların özel hali olan dik üçgenler ve dik üçgenlerin özel durumu olan Pythagorean üçgenleri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Pythagorean, Heron, Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath başta olmak üzere birçok ünlü matematikçi sayılar teorisinin cazibesine kapılmışlar ve Diophantine denklemlerinin çözümlerine bağlı olarak, bu özel üçgenlerin üretilmesi üzerine birçok araştırma yapmışlardır. Günümüzde ise Beauregard, Suryanarayan, Sastry, Fassler ve Zelator gibi birçok matematikçinin Diophantine denklemlerinin özel durumu olan Pythagorean denklemleri, çözümleri ve bu çözümlerin geometri ile ilişkileri üzerine çalışmaları halen devam etmektedir.

Bu çalışma; dik üçgenler ve onların da özel durumu olan Pythagorean üçgenleri üzerine inşaa edilmeye çalışılmıştır.

Bu çalışmada; herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları, çevrel çemberi ve alanı arasındaki ilişki ile Pythagorean üçgeninden elde edilen dik üçgenlerin Pythagorean üçgeni olma şartları araştırılmıştır. Çalışmamızda Zelator' un; "A Little Noticed Right Triangle" ve "Pythagorean Triangles With in Pythagorean Triangles" başlıklı makaleleri esas alınmıştır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde; çalışmaya ilişkin kaynak araştırması ile birlikte diğer bölümler için gerekli tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölüm; Zelator(2008b)' un "A Little Noticed Right Triangle" başlıklı çalışmasından faydalanılarak oluşturulmuştur. Bilindiği üzere; bir dik üçgenin çevrel çemberinin merkezi dik köşe ile birleştirilirse bu dik üçgen eş olmayan iki ikizkenar üçgene ayrılır. Dik üçgenin çevrel çemberinin merkezi ile eş olmayan ikizkenar üçgenlerin çevrel çemberlerin merkezlerinin birleştirilmesiyle yeni bir dik üçgen elde edilir. Burada eş olmayan ikizkenar dik üçgenlerin çevrel çemberlerinin merkezleri ile esas üçgenimizin çevrel çemberinin merkezinin birleştirilmesiyle elde edilen yeni üçgenin özellikleri esas üçgene bağlı olarak incelenmiştir. Ayrıca üçgenlerin çevrel çemberlerin yarıçaplarının uzunlukları ve oluşan yamuğun kenar uzunlukları da esas üçgene bağlı olarak araştırılmıştır. Ek olarak bu yeni üçgenin Pythagorean üçgeni olabilme şartları araştırılmış ve her duruma ilişkin örnekler verilmiştir.

Son olarak üçüncü bölümde ise Zelator (2010)' un "Pythagorean Triangles With in Pythagorean Triangles" başlıklı çalışmasından faydalanılmıştır. Burada; bir dik üçgeninin hipotenüsü üzerinde bir nokta alındığında bu noktadan dik kenarlara ve dik köşeye farklı biçimlerde çizilen doğru parçaları aracılığı ile esas üçgen içerisinde elde edilen yeni dik üçgenlerin Pythagorean olup olmadığı araştırılmıştır. Ayrıca esas üçgenin primitif olmayan bir Pythagorean üçgeni olması durumunda elde dilen üçgenlerin her zaman Pythagorean üçgeni olamayacağı gösterilmiştir. Ek olarak her duruma ilişkin örnekler de verilmiştir.

"Dik Üçgenler ile Pythagorean Üçgenleri İçindeki Pythagorean Üçgenlerinin Bazı Özellikleri ve Öğretimi Üzerine Bir Araştırma" isimli tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e teşekkür ederim. Ayrıca bana her zaman destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

HAVVA GÜL KARATAŞ

NİSAN – 2016

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Matematiğin gelişmesindeki büyüleyici yönlerden birisi de geometri ile sayılar teorisi arasındaki karşılıklı etkileşimdir. Üçgenler, düzlem geometrinin en önemli yapı taşlarındandır. Çünkü diğer çokgenlerin incelenmesi üçgenlere bağlı olduğundan üçgenler, tarihte en fazla incelenen ve araştırılan geometri kavramlarındandır. Üçgenlerin özel durumu olan dik üçgenler ile bunun uygulaması olan trigonometri ve trigonometride birim çember matematiğin en önemli kullanım araçlarındandır. Ayrıca tamsayı kenarlı ve alanlı üçgenler olan Heron üçgenleri ile onların özel durumu olan tamsayı kenarlı ve alanlı dik üçgenler, yani Pythagorean üçgenleri üzerine tarih boyunca birçok araştırma yapılmıştır ve halen de yapılmaya devam etmektedir. Bu alandaki çalışmalar sayılar ile geometri ve geometri ile cebir arasında ilişkiler kurulmasına ve ortaya çıkarılmasına sebep olmuştur. Matematik tarihine özel olarak Geometri ile Cebir ve Sayılar Teorisinin tarihine bakıldığında; ilk dönemlerde Pythagorean, Heron, Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath ve son dönemlerde ise Beauregard, Suryanarayan, Sastry, Fassler ve Zelator başta olmak üzere birçok bilim insanından ve çalışmalarından bahsedilebilir. Bu insanlar; öncelikle sayılar teorisinin cazibesine kapılmışlar ve Diophantine denklemlerinin çözümlerine bağlı olarak, bu özel üçgenlerin üretilmesi üzerine birçok araştırma yapmışlardır. Halen bu yöndeki çalışmalar; Diophantine denklemleri ile bu denklemlerin özel durumu olan Pythagorean denklemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin geometri ile ilişkisi üzerine yoğunlaşarak devam etmektedir. Araştırmalar konuya yaklaşım tarzına göre çeşitlilik arz etmektedir. Bu araştırmaların konumuzla ilgili olanlarından bazılarını tezimizde vermeye ve irdelemeye çalışacağız.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; kaynak araştırması ile ikinci ve üçüncü bölümde kullanacağımız kavramlarla ilgili tanım ve teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiş, ancak teoremlerin genel olarak ispatlarına girilmemiştir.

İkinci bölümde; bir dik üçgenin çevrel çemberinin çapının o dik üçgenin hipotenüsü olduğu, bu çevrel çemberin merkezinin hipotenüsün orta noktası olduğu ve bu merkezi, üçgenin dik köşesiyle birleştiren doğru parçasının üçgenimizi iki ikizkenar dik üçgenlere ayırdığı gerçekleri göz önüne alınmıştır. Buradan hareketle ikizkenar dik üçgenlerin çevrel çemberlerinin merkezleri ile esas üçgenimizin çevrel çemberinin merkezinin birleştirilmesiyle elde edilen yeni üçgenin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu yeni üçgenin Pythagorean üçgeni olabilme şartları araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ise; bir dik üçgeninin hipotenüsü üzerinde bir nokta alındığında bu noktadan üçgenin dik kenarlarına ve dik köşesine çizilen doğru parçaları ile üçgenin içinde elde edilen dik üçgenlerin Pythagorean olup olmadığı araştırılmıştır. Başka bir ifadeyle esas Pythagorean üçgenimizin hipotenüsü üzerinde aldığımız herhangi bir noktaya bağlı olarak oluşan üçgenler için üç farklı durum incelenmiştir. Ayrıca primitif olmayan bir Pythagorean üçgeninin hipotenüsü üzerinde alınan bir noktadan hareketle oluşturulan üçgenlerin hepsinin de Pythagorean Üçgeni olamayacağı gösterilerek örneklendirilmiştir.

Şimdi de çalışmamızla ilgili olarak bazı kaynakların özetlerini verelim.

1.1 Kaynak Araştırması

Kenar uzunluklarının yanı sıra alanı da rasyonel sayılar olan üçgenler yüzyıllar önce ilk olarak Heron of Alexandria tarafından çalışıldığından bu tip üçgenlere *Heron üçgenleri* denilmektedir. Heron üçgeninin kenarları, rasyonel kenar uzunluklarının ortak paydası ile çarpılmasıyla, tamsayı kenarlı ve tam sayı alanlı bir üçgene dönüşeceğinden dolayı günümüzde artık *Heron üçgeni* denilince; kenar uzunlukları ve alanı tam sayı olan üçgen anlaşılmaktadır (Dickson, 1992).

Heron, Mısır'ın İskenderiye (Alexandria) şehrinde doğan ünlü Yunan Matematikçisidir. Bazı kaynaklara göre M.S. 50 yıllarında İskenderiye de doğduğu, bazılarına göre de M.Ö. 150 senelerinde Mısır a bağlı Ptolemaic de doğduğu belirtilmektedir. Heron' un; pek çok kaynak tarafından da temel kabul edilen kitapları mevcuttur. Bunlardan konumuzla ilgili olanını şöyle özetleyebiliriz (Dickson, 1992 ve Sierpinski 1988).

Heron, Metrica I-II-III adlı kitapları ile de geometriye çok önemli katkılar da bulunmuştur. Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve yarı çevresi de $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ olarak verildiğinde alanı;

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülünden hesaplanabilir. Bu ifadeye *Heron formülü* denir. Kenar uzunlukları ve alanı tam sayı olan üçgenlere de *Heron üçgenleri* denildiğinden dolayı; "Kenar uzunluğu ve alanı tam sayılar olan üçgenlerin bulunması, üretilmesi, sayılması" gibi birçok problemi ortaya çıkarır (Dickson, 1992).

Tarih boyunca insanoğlu merak duyduğu konular üzerinde değişik irdelemeler yaparak olaylara farklı açıklamalar getirme yoluna gitmiştir. Bu da bilimleri zenginleştirmiştir. Örneğin; dik kenarlarının uzunlukları x ve y tam sayıları, hipotenüsünün uzunluğu da z tam sayısı olan bir Pythagorean üçgeni; $x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısını sağlar. Bu denklemin genellemesinden Diophantus, Arithmetica' sında bahsetmiştir. Bundan yıllar sonra 1637 de Arithmetica'nın yeni çıkan Fransızca çevirisini okumakta olan Pierre De Fermat; Pisagor üçgenlerinin anlatıldığı sayfanın kenarına; "$n > 2$ tamsayısı için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin $x.y.z \neq 0$ şartı altında bir tam sayı çözümünün olmadığını ve bu önermenin harikulade bir kanıtını bulduğunu ancak sayfa kenarında yeterince yer olmamasından dolayı bunu yazamayacağını" belirtir. Fermat'ın ölümünden sonra bu kitap, Fermat'ın kitaplığında bulunmuş, fakat önermenin ispatı bulunamamıştır (Dickson, 1992 ve Sierpinski 1988).

Bu önermenin ispatı, dünyaca ünlü birçok Matematikçiyi uzun yıllar uğraştırmıştır. Nihayet bu konjektürün ispatı; İngiliz matematikçi Wiles tarafından 1995 yılında eliptik eğrilere bağlı olarak verilmiştir (Wiles, 1995).

Fermatın son teoremine benzer olarak Heron üçgenleri ve bunun özel bir hali olan Pythagorean üçgenleri ile de birçok matematikçi ilgilenmiş ve ilgilenmektedirler. Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath gibi ünlü matematikçiler diophantine denklemlerinin çözümlerine bağlı olarak bu üçgenlerin üretilmesi üzerine birçok araştırma yapmışlardır (Dickson, 1992).

Yukarıda alıntılar yaptığımız Dickson (1992)' ın "History of Theory of Numbers" adlı bu eseri üç cilt olup, 2. cildi "Diophantine Analysis" adını taşımakta olduğundan çalışmamızın başucu başvuru kitaplarındandır. Bu eserin ilk baskısı 1919 yılında yapılmış olup elimizdeki nüshası 1992 tarihlidir. Bu eserde Sayılar Teorisiyle alakalı geçmişten basım yılına kadar olan gelişmelere ve geniş bilgilere yer verilmiştir. Örneğin Pythagorean üçgenlerine, Pythagorean Üçgenlerinin elemanlarına ve rasyonel dik üçgenlere değinilmiştir. Ayrıca rasyonel açıortay, kenarortay, yükseklik ve kenar uzunluğuna sahip dik üçgenlerden bahsedilmiştir. Bunların yanı sıra Diophantine denklemlerine ilişkin birçok çalışmanın özeti ve ortaya atılmış problemler de yer alır. Konumuzla ilgili de birçok araştırmacının çalışmaları özetlenmiştir.

Sierpinski(1962)' nin çalışması; tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pythagorean üçgenleri üzerine yazılmış ilk müstakil eser olma özelliğine sahiptir. Bu eserde Pythagorean Üçgenlerinin üretilmesi için parametrik formüllerin çıkarılması başta olma üzere, alan, kenar, çevre v.b. özellikleri ayrıntılı olarak incelemiştir. Örneğin; eşit alanlı, eşit çevreli farklı Pythagorean üçgenlerinin bulunması gibi birçok husus bu eserde verilmiştir.

Mordell (1969)' in bu eseri; adından da anlaşılacağı üzere Diophantine denklemleri üzerine yazılmış en kapsamlı ve temel eserlerden biridir. Daha önce çalışılmış olan başlıca Diophantine denklemlerine ilişkin çalışmalar özetlenerek kaynaklarıyla beraber kitap formatında verilmiştir.

Sierpinski (1988)' nin eseri; Sayılar Teorisinde elemanter seviyede başvuru kitaplarından birisidir. Eserin ikinci bölümünde; diophantine denklemleri ve özellikle de Pythagorean üçgenleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca bir rasyonel sayının n. kuvvetinin bir pozitif tamsayıya eşit olması için gereken şartlardan bahsedilmiştir. 11. Bölümde ise kare toplamları ile temsiller konusu ayrıntılı olarak verilmiştir.

Buchholz (1989) tez çalışmasında; kenar uzunlukları tamsayı olarak alınan üçgenlerin yardımcı elemanları olan yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunluklarının tamsayı ve rasyonel sayı olması durumlarını incelemiştir.

Şenay (2007) eserinde; Sayılar Teorisinde lisans seviyesinde evrensel olarak verilen konular ayrıntılı olarak işlenmiştir. Ayrıca lisansüstü seviyede kabul edilebilecek cebirsel sayılar üzerinde de durulmuştur. Ek olarak sürekli kesirler, Diophantine denklemleri ve dik üçgenlerin sayılar teorisi ile ilişkilerine de yer verilmiştir.

Zelator (2005) çalışmasında; üçgenlerin iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğu ile çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun rasyonel veya tamsayı kenar uzunluklu olması durumlarını incelemiştir. Ayrıca bu çalışmada; Pythagorean teoremi ile ilgili bilgilere de yer verilmiştir.

Zelator (2008a)' un Pythagorean üçgenlerinin bazı özellikleriyle ilgili sonuçların yer aldığı bu çalışmasında; üçgenlerin iç teğet çemberinin ve dış teğet çemberlerinin çaplarıyla alakalı bilgiler bulunmaktadır. Bu çalışmanın dördüncü kısmında tamamen Pythagorean üçgenlerine odaklanılmıştır. Bu çalışmanın beşinci kısmında Sayılar teorisinde çok iyi bilinen sonuçlara değinilmiştir. Pythagorean üçgenleriyle ilgili bu sonuçlar genelleştirilmiş ve diğer üçgenlere uygulanmıştır.

Zelator (2008b) çalışmasında; bir dik üçgenin çevrel çemberinin çapının o dik üçgenin hipotenüsü olduğu, bu çevrel çemberin merkezinin hipotenüsün orta noktası olduğu ve bu merkezi, üçgenin dik köşesiyle birleştiren doğru parçasının üçgenimizi iki ikizkenar dik üçgene ayırdığı gerçekleri göz önüne alınmıştır. Buradan hareketle ikizkenar dik üçgenlerin çevrel çemberlerinin merkezleri ile esas üçgenimizin çevrel çemberinin merkezinin birleştirilmesiyle elde edilen yeni üçgenin özellikleri incelenmiştir. Üçgenlerin alanları, çevrel çemberin merkezi formülü cinsinden bulunmuştur. Ayrıca makalede biraz sayılar teorisine yer verilerek üçgenlerin kenar uzunluklarının tamsayı olup olmadıkları incelenmiştir.

Zelator (2008c)'un makalesinde; öncelikle Pythagorean teoreminin genelleştirilmiş formülü ve bu formül ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. Üçgenlerin özellikle Pythagorean üçgenlerinin; yardımcı elemanlarının yani açıortay, kenarortay, yükseklik uzunluklarından hangisinin tamsayı, hangisinin rasyonel sayı olduğu sorularına cevap aranmıştır. Bu soruların cevabını ararken kullanılan yardımcı elemanların gösterimlerine geniş yer ayrılmıştır.

Zelator (2010) çalışmasında; bir dik üçgen veya bir Pythagorean üçgeni alınması durumunda, bu Pythagorean üçgeninden elde edilebilecek daha küçük boyutlu Pythagorean üçgenlerinin oluşturulabilme şartları araştırılmıştır. Bunu yaparken; bir Pythagorean üçgeni içerisine, en az bir taneolmak üzere iç-içe Pythagorean üçgenlerinin geometrik ve aritmetik olarak çizilebilmesi şartları bulunmaya çalışılmıştır. Ayrıca Pythagorean üçgeni bulunamaması durumunda; rasyonel kenarlı dik üçgenlerin bulunması durumları da incelenmiştir.

1.2 Ön Bilgiler

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. A, B ve C doğrusal olmayan herhangi üç düzlemsel nokta olmak üzere $[AB], [BC], [CA]$ doğru parçalarının birleşim kümesine *üçgen* veya ABC *üçgeni* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.2. Bir açısının ölçüsü 90 derece olan üçgene *dik üçgen* denir. Dik üçgenin dik açısını oluşturan kenarlara dik kenarlar, dik açının karşısındaki kenara *dik üçgenin hipotenüsü* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.3. Bir üçgenin bir köşesini karşısındaki kenarın orta noktasıyla birleştiren doğru parçasına o kenara ait *kenarortay* denir. Bir üçgenin kenarortaylarının kesim noktasına o üçgenin *ağırlık merkezi* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.4. Bir üçgenin herhangi bir açısını iki eşit parçaya bölen ışının, köşe ile karşı kenar arasında kalan parçasına üçgenin o köşesine ait *iç açıortayı* veya *açıortayı* denir. Dış açının açıortayına da *dış açıortay* denir. Üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin *iç teğet çemberinin merkezi* denir. Benzer şekilde dış açıortayların kesiştiği noktaya da *dış teğet çemberinin merkezi* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.5. Üçgenin bir köşesinden karşı kenar doğrusuna indirilen dikmenin karşı kenarı kestiği nokta ile köşeyi birleştiren doğru parçasına üçgenin o kenarına ait *yüksekliği* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.6. Bir üçgenin bir kenarının orta noktasından çizilen dikmeye üçgenin *kenar orta dikmesi* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.7. Bir üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir. Bu kesim noktasına üçgenin *çevrel çemberinin merkezi* denir (Şahin ve Ark.1997).

Bir üçgenin çevrel çemberinin merkezinin yeri, üçgenin türüne göre değişir. Çevrel çemberin merkezi:

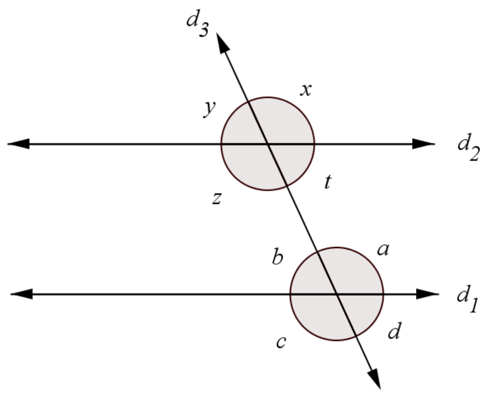
1) Üçgen dar açılı (tüm açıları doksan dereceden küçük) ise, üçgenin içindedir.
2) Üçgen geniş açılı ise, üçgenin dışındadır.
3) Üçgen dik açılı ise, hipotenüsün orta noktasındadır.

Tanım 1.8. Herhangi iki kenarı eş olan üçgene *ikizkenar üçgen* denir. İkizkenar üçgende eş olan kenarlara üçgenin *eş(yan) kenarları*, diğer kenara *taban kenar* denir. Taban kenarın karşısındaki köşeye *üçgenin tepesi* denir. Eş kenarların karşısındaki açılara üçgenin *taban açıları*, taban kenarın karşısındaki açıya da *tepe açısı* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.9. Karşılıklı iki kenarı paralel olan dörtgene *yamuk* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.10. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine *çember* denir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.11. Düzlemde uç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine *açı* denir (Şahin ve Ark.1997).



Şekil 1.1. *İki Doğruyu Üçüncü Bir Doğrunun Kesmesiyle Oluşan Açılar*

Tanım 1.12. Paralel iki doğruyu kesen bir doğrunun farklı taraflarında kalan, köşeleri farklı iç açı çiftlerine *iç ters açılar* denir. Şekil 1.1 de t ile b açıları ve benzer şekilde a ile z açıları iç ters açılardır (Şahin ve Ark.1997).

Aksiyom 1.1. Paralel iki doğruyu kesen üçüncü bir doğru ile oluşan yöndeş açılar eştir. Şekil 1.1 de $\hat{y} \equiv \hat{b}$ ve $\hat{x} \equiv \hat{a}$ dır (Şahin ve Ark.1997).

Teorem 1.1. Paralel iki doğruyu kesen üçüncü bir doğru ile oluşan iç ters açılar eştir. Şekil 1.1 de $\hat{t} \equiv \hat{b}$ ve $\hat{z} \equiv \hat{a}$ dir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.13. Şekil 1.1 de d_3 doğrusunun farklı taraflarında kalan, köşeleri farklı dış açı çiftlerine *dış ters açılar* denir. Şekil 1.1 deki y ile d ve x ile c açıları da dış ters açılardır (Şahin ve Ark.1997).

Teorem 1.2. Paralel iki doğruyu üçüncü bir doğru keserse oluşan dış ters açılar birbirine eştir. Şekil 1.1 de $\hat{y} \equiv \hat{d}$ ve $\hat{x} \equiv \hat{c}$ dir (Şahin ve Ark.1997).

Tanım 1.14. Şekil 1.1 de d_3 doğrusunun aynı taraflarında kalan köşeleri farklı biri iç diğeri de dış açı olan açı çiftlerine *yöndeş açılar* denir. Şekil 1.1 deki x ile a açıları ve benzer şekilde y ile b açıları yöndeş açılardır (Şahin ve Ark.1997).

Teorem 1.3. Bir dik üçgende, dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Buna *Pythagorean Teoremi* denir (Sierpinski, 1988).

Tanım 1.15. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini gerçekleyen pozitif $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ çözüm üçlüsüne *Pythagorean üçlüsü* denir. Ayrıca $(x, y, z) = 1$ olan $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ üçlüsüne de *primitif (ilkel) Pythagorean üçlüsü* denir (Şenay, 2007).

Teorem 1.4. Eğer (x, y, z), z hipotenüs uzunluklu bir Pythagorean üçlüsü ise her bir (x, y, z) Pythagorean üçlüsü (x ile y nin yer değiştirmesi genelliği bozmaz);

$$x = \delta(m^2 - n^2), y = \delta(2mn), \quad z = \delta(m^2 + n^2) \qquad (1.1)$$

biçiminde verilir. Burada δ, m, n pozitif tamsayı ve $m > n \geq 1$, $(m,\ n) = 1$ (yani m ile n sayıları aralarında asal) ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ dir (Yani m ile n sayılarından biri tek iken diğeri çift olmalıdır.).

Bu formüllerle bütün Pythagorean üçgenleri ailesini üretir (Sierpinski, 1988).

Tanım 1.16. Herhangi a, b tamsayıları için $b = a.t$ olacak biçimde bir t tamsayısı varsa a, b yi böler denir ve $a|b$ şeklinde gösterilir (Şenay, 2007).

Lemma 1. 1(Öklid Lemması). a, b, c; $c|ab$ olacak şekilde doğal sayılar olsun (Yani c, $a.b$ çarpımının bir böleni olsun). Eğer $(c, a) = 1$ ise o zaman $c|b$ dir.

İspat. $(c, a) = 1$ olduğundan $x, y \in \mathbf{Z}$ için $cx + ay = 1$ olur. Bu eşitliğin her iki yanını b ile çarparsak $bcx + bay = b$ elde edilir. Her pozitif tamsayı ya asal ya da asalların çarpımı olduğundan $c|ab$ ve $c|bc$ olup, $c|(aby + bcx) = b$ elde edilir. Dolayısıyla $c|$b olur ki aranandır (Şenay, 2007). ■

Lemma 1.2. m ile n pozitif tamsayıları;

$$m > n, (m, n) = 1 \text{ ve } m + n \equiv 1\ (mod\ 2)$$

şartlarını sağlasın. O zaman;

(i) $(m^2+n^2, 2mn)=1,$

(ii) $(m^2+n^2,\ m^2-n^2)=1,$

(iii) $(m^2-n^2, 2mn)=1,$

dir (Zelator, 2010).

İspat. (i) m^2+n^2 ve $2mn$ nin ortak asal bölenlerinin olmadığını gösterelim.

Karşıt olarak; eğer $p,\ m^2+n^2$ ile $2mn$ nin ortak bir asal böleni ise o zaman hipotezde $m+n\equiv 1(mod\ 2)$ olduğundan dolayı $m^2+n^2\equiv 1(mod\ 2)$ olacağından p tek olacaktır. Böylece $p|2mn$ ve $(p,2)=1$ olduğu için $p|mn$ elde edilir (Lemma 1.1 den dolayı). Ancak p bir asal olduğundan, $p|mn$ olması p nin m ile n den en az birini bölmesini gerektirir. Eğer ki $p|m$ ise, o zaman $p|(m^2+n^2)$ den $p|n^2$ dolayısıyla $p|n$ sonucuna varılır. Böylece $p|m$ ve $p|n$ olması $(m,n)=1$ hipotezi ile çelişir. Dolayısıyla $p,\ m^2+n^2$ ile $2mn$ nin ortak bir asal böleni olamaz. Yani $(m^2+n^2, 2mn)=1$ olur (Zelator, 2010). ∎

(ii) İspat, (i) dekine benzer düşünce ile yapılır.

Yani $p,\ m^2+n^2$ ile m^2-n^2 bir ortak böleni olsaydı, buradan $p|2n^2$ ve $p|2m^2$ olması gerekirdi. O zaman ya $p|2$ veya $p|m$ ve $p|n$ dir Ancak p tek sayı olduğundan p, 2 yi bölmez. O zaman $p|n$ ve $p|m$ olması gerekir bu ise $(m,n)=1$ hipotezi ile çelişir. Dolayısıyla $(m^2+n^2,\ m^2-n^2)=1$ elde edilir. ∎

(iii) İspat, (i) nin ispatlarına benzer düşünce ile yapılır. Yani m^2-n^2 ve $2mn$ nin ortak asal bölenlerinin olmadığını göstermeliyiz.

Karşıt olarak; eğer p , m^2-n^2 ile $2mn$ nin ortak bir asal böleni ise o zaman hipotezde $m+n\equiv 1(mod\ 2)$ olduğundan ve $m^2-n^2\equiv 1(mod\ 2)$ olacağından p tek olacaktır. Böylece $p|2mn$ ve $(p,2)=1$ olduğu için $p|mn$ elde edilir (Lemma 1.1 den dolayı). Ancak p bir asal olduğundan dolayı; $p|mn$ olması p nin m ile n den en az birini bölmesini gerektirir. Eğer $p|m$ ise o zaman $p|(m^2-n^2)$ den $p|n^2$ dolayısıyla $p|n$ sonucuna varılır. Böylece $p|m$ ve $p|n$ olması $(m,n)=1$ hipotezi ile çelişir. Yani $(m^2-n^2, 2mn)=1$ olmak zorundadır. ∎

Lemma 1.3. $i_1, i_2, i_3, e_1, e_2, e_3$ pozitif tamsayılar, $(i_1,\ i_2)=1$ ve $(i_1,\ i_3)=1$ olacak şekilde verilsin. O zaman (***a***) $\left(i_1^{e_1}, i_2^{e_2}\right) = 1,$

(***b***) $\left(i_1^{e_1}, i_2^{e_2}, i_3^{e_3}\right) = 1$

olur (Zelator, 2010).

İspat. Lemma 1.2 den açıktır.

Tanım 1.17. $a|b$ ve $a|c$ şartlarını sağlayan a tamsayısına b ve c sayılarının bir *ortak böleni* denir. Sıfırdan farklı herhangi bir tamsayının yalnızca sonlu sayıda bölenleri olduğundan b ve c nin $b = c = 0$ durumu dışında sonlu sayıda ortak bölenleri vardır. Eğer b ve c den hiç olmazsa birisi sıfır değilse bunların ortak bölenlerinin en büyüğüne b ve c nin *en büyük ortak böleni* denir ve (b, c) ile gösterilir. Ayrıca $(0,\ a) = |a|$ olur (Şenay, 2007).

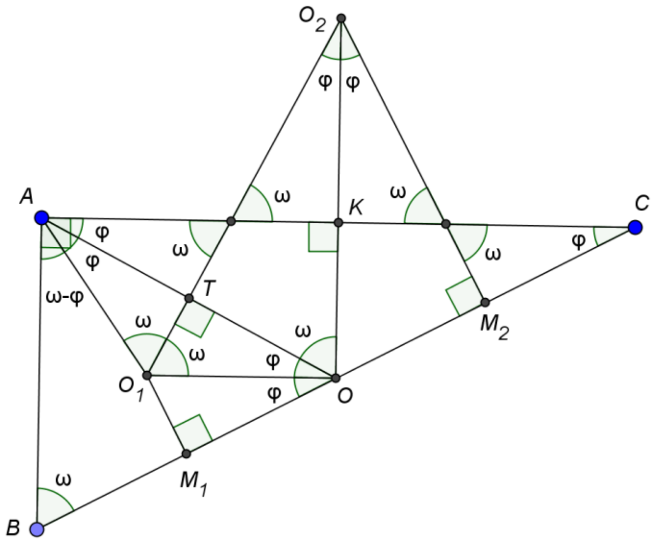
Bir δ tamsayısının $a_1, a_2, \ldots, a_r$ pozitif tamsayıları tarafından bölünebilmesi için gerek ve yeter şart δ tamsayısının; $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tamsayılarının en küçük L ortak katı tarafından bölünebilmesidir. Burada L, r tane sayı tarafından bölünebilen en küçük pozitif tamsayıdır (Şenay, 2007).

Teorem 1.5. Bir ABC üçgeninin açıları A, B, C ise $tan2A = \frac{2tanA}{1-tan^2A}$ dır (Aydın ve Asma, 1997).

2. DİK ÜÇGENLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

2.1. Giriş

Aşağıda Şekil 2.1 deki gibi bir ABC üçgeni verildiğinde, ABC üçgeninden doğal olarak ortaya çıkan ve genellikle dikkatlerden kaçan bir başka dik üçgen vardır.



Şekil 2.1. *ABC Dik Üçgeni ve Çalışmamızla İlgili Bileşenleri*

Şekil 2.1 de ikizkenar olmayan bir ABC dik üçgeni verilmektedir (A köşe noktasında dik açı olan). $[BC]$ hipotenüsünün orta noktası olan O, elbette üçgenin çevrel çemberinin de merkezidir. $[AO]$ doğru parçasını düşünelim. $[AO]$ doğru parçası; ABC dik üçgenini, eş olmayan ABO ve ACO ikizkenar üçgenlerine böler. Eğer ABC üçgeninin alanı E ise o zaman ABO ve ACO ikizkenar üçgenlerinin her birinin alanı $\frac{1}{2}E$ dir. ABO ve ACO ikizkenar üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. Buradan elde edilmiş olan OO_1O_2 üçgeni, çalışmamızın esas konusudur. ABC üçgeni ikizkenar olmadığından, O_1 ve O_2 noktalarından birisi ABC üçgeninin dışında iken diğeri üçgeninin içinde bulunması gerektiğine dikkat edelim ($|AC| = \beta$, $|AB| = \gamma$ ve $|BC| = \alpha$ aynı zamanda $|BC|$ hipotenüs olmak üzere). Özel olarak; Şekil 2.1 de olduğu gibi $|AC| = \beta > \gamma = |AB|$ ise o zaman O_2, ABC üçgenin dışında bulunurken O_1, ABC üçgenin içinde bulunur. Eğer $|AC| = \beta < \gamma = |AB|$ olsaydı o zaman O_1, ABC üçgenin dışında bulunurken O_2, ABC üçgenin içinde bulunurdu.

Bu bölümde verilecekler şöyle özetlenebilir:

Kesim 2.2 de; herhangi bir ABC üçgeni için, R çevrel çemberinin yarıçapı ve E de üçgenin alanı olmak üzere $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ formülü elde edilecektir (Bak. **Şekil 2.2**). Bu formül ayrıca kesim 2.4 de kullanılacaktır.

Kesim 2.3 de basit geometrik bilgiler kullanılarak; OO_1O_2 üçgeninin, ABC üçgenine benzer bir dik üçgen olduğu gösterilecektir.

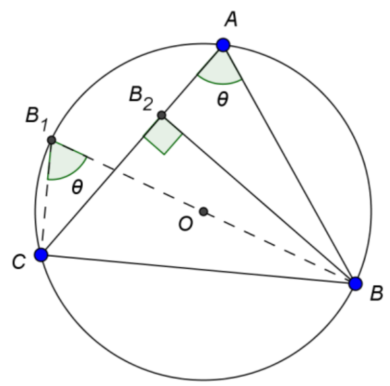
Kesim 2.4 de; $|OO_1|$, $|OO_2|$, $|O_1O_2|$ uzunluklarını, ABC üçgeninin α, β, γ kenar uzunlukları cinsinden veren formüller verilecektir. Bu formüller basit rasyonel ifadelerdir. Ayrıca OO_1O_2 üçgeninin alanı α, β, γ terimleri cinsinden hesaplanacaktır.

Kesim 2.5 de ise; $O_1M_1M_2O_2$ yamuğu incelenecektir. Yamuğun; kenar uzunlukları, $d_2 = |O_2M_1|$ ve $d_1 = |O_1M_2|$ olan köşegen uzunlukları ve ayrıca alanı hesaplanacaktır. Burada M_1, $[OB]$ doğru parçasının orta noktası ve M_2, $[OC]$ doğru parçasının orta noktasıdır.

Kesim 2.6 da; sayılar kuramından faydalanarak ve ABC üçgeninin Pythagorean üçgeni olduğu göz önüne alınarak; OO_1O_2 üçgeni ve $O_1M_1M_2O_2$ yamuğu incelenecek ve sayısal örnekler verilecektir.

Kesim 2.7 de ise ABC üçgeninin Pythagorean üçgeni olduğundan hareketle iki gözlemde (tespitte) bulunulacaktır.

2.2. ABC Üçgeninin Çevrel Çemberinin Yarıçapının Hesaplanması



Şekil 2.2 *ABC Üçgeni ve Çevrel Çemberi*

Şekil 2.2 de bir ABC üçgeni; O merkezli ve R yarıçaplı bir çemberin içine çizilmiştir. Eğer $\theta,$ üçgenin A köşesindeki iç açısının derece (veya radyan) ölçüsü ise o zaman $|BC| = \alpha$, $|AB| = \gamma,$ $|AC| = \beta$ ve $|BB_1| = 2R$ ($[BB_1]$ çap olacak şekilde B_1 çemberde bir nokta) ve $R = |OC| = |OA| = |OB|$ ise BCB_1 dik üçgeninden $2R \sin\theta = \alpha$ elde ederiz.

Bununla birlikte B_2, B den $[AC]$ kenarına çizilen dikmenin bitiş noktası ve $h_\beta = |BB_2|$ olsun. O zaman

$$h_\beta = \gamma \sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{h_\beta}{\gamma}$$

olur ki buradan;

$$\alpha = 2R\, sin\,\theta = 2R\frac{h_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow 2Rh_\beta = \alpha\gamma$$

elde ederiz. Ayrıca E, ABC üçgeninin alanını göstermek üzere $E = \frac{1}{2}\beta h_\beta$ olur. Burada h_β yı E ye bağlı yazarsak; $h_\beta = \frac{2E}{\beta}$ bulunur. Böylece;

$$2R\left(\frac{2E}{\beta}\right) = \alpha\gamma \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} \qquad (2.2.1)$$

ifadesine ulaşılır (Zelator, 2008b).

2.3. $\boldsymbol{OO_1O_2}$ Dik Üçgeni

Şekil 2.1 dikkatlice incelendiğinde ABC üçgenine benzer olan OO_1O_2 üçgeninin bir dik üçgen olduğu kolayca görülecektir. Bunun için Şekil 2.1 den O_1, AOB ikizkenar üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olduğundan dolayı $|AO| = |OB|$ dir. Bundan dolayı O_1, AOB açısının açıortayı üzerindedir. Yani bu açıortay, $[AB]$ ye dikey açıortay ile çakışır. Burada ACB açısının ölçüsü φ ise o zaman $[OO_1]$, $[CA]$ ya paralel olduğundan (her ikisi de $[AB]$ ye dik), ACB ve O_1OB açılarının ölçüsü de φ olmalıdır. Bu durum; "eğer paralel iki doğruyu üçüncü bir doğru keserse; oluşan yöndeş açılar karşılıklı olarak eştir" biçiminde ifade edilen ve birinci bölümde verilen Aksiyom 1.1' e dayanır. Sonra yukarıda belirttiğimiz üzere; $[OO_1]$ doğru parçası, AOB açısının açıortayı olduğundan O_1OB ve aynı şekilde AOO_1 açılarının her ikisinin ölçümü de φ olur. Üstelik tanımdan dolayı; $[OO_2]$ doğru parçası $[AC]$ ye dik olan bir açıortay olduğundan, $[OO_2]$ doğru parçasının $[AB]$ ye paralel olduğu sonucu çıkar ($[AB]$, $[CA]$ ya dik olduğundan). Eğer "iki paralel doğru üçüncü bir doğru tarafından kesilirse, o zaman oluşan içters açılar eşittir" biçiminde ifade edilen ve birinci bölümde verilen Teorem 1.1 in uygulanmasıyla bu açıların ölçümleri aynı olmalıdır. Şimdi OAB açısının ölçümüne ω diyelim. OAB açısının ölçüsü ω olduğundan dolayı (OBA açısının ölçüsüyle aynı), AOO_2 açısının ölçüsü de ω olur. Sonuç olarak; $[OA]$ doğru parçası, O_2OO_1 açısının iç bölgesinde bulunduğundan dolayı O_2OO_1 açısının ölçüsü; O_2OA ile AOO_1 açılarının ölçülerinin toplamına eşittir. Bundan dolayı $\omega + \varphi = 90^o$ olur. Bu da O_2OO_1 üçgeninin; O açısı dik açı olan bir dik üçgen olduğunu ispatlar. Dolayısıyla OO_1O_2 üçgeni, ABC üçgenine benzerdir, çünkü OO_2O_1 açısının ölçüsünün φ, O_2O_1O açısının ölçüsünün de ω olduğu kolaylıkla görülebilir (Zelator, 2008b).

2.3.1. Şekil 2.1 e Göre Direkt Gözlemler

Şekil 2.1 den ilk olarak;

$|CB| = \alpha,\ |AC| = \beta, |AB| = \gamma,$

$|CM_2| = |M_2O| = |OM_1| = |M_1B| = \frac{\alpha}{4} = |AT| = |TO|,$

$|AO| = |CO| = |BO| = \frac{\alpha}{2},$

$|CK| = |KA| = \frac{\beta}{2}$

olduğu açıktır. Sonra

$ACB,\ AOO_1,\ O_1OB,\ OAO_1, CAO,\ M_2O_2O$ ve O_1O_2O

açılarının ölçüsü aynı olup φ ye eşittir. Öte yandan

$CBA,\ OAB,\ AO_1O_2,\ O_2O_1O,\ O_2OA$

açılarının ölçüsü ω dır. Ayrıca R_1, AOB üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı ve R_2 AOC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı olmak üzere

$R_1 = |O_1O| = |O_1A| = |O_1B|$

ve

$R_2 = |O_2O| = |O_2C| = |O_2A|$

dir (Zelator, 2008b).

2.4. R_1, R_2 ve $|O_1O_2|$ Uzunluklarının Hesaplanması

Eğer E_1 ve E_2 sırasıyla AOB ve AOC ikizkenar üçgenlerinin alanları ve E de ABC üçgeninin alanı ise o zaman

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2}E = \frac{\beta\gamma}{4} \qquad (2.4.1)$$

(2.2.1) ve (2.4.1) in birleştirilmesiyle;

$$|OO_1| = R_1 = \frac{|OA|.|OB|.|AB|}{4E_1} = \frac{(\alpha/_2).(\alpha/_2).\gamma}{\beta\gamma}$$

ve benzer şekilde

$$|OO_2| = R_2 = \frac{|OA|.|OC|.|AC|}{4E_2} = \frac{(\alpha/_2).(\alpha/_2).\beta}{\beta\gamma}$$

elde edilir. Sonuçta

$$R_1 = \frac{\alpha^2}{4\beta}, \quad R_2 = \frac{\alpha^2}{4\gamma} \qquad (2.4.2)$$

olarak bulunur. Eğer $x = |O_1M_1|$ dersek; O_1TO ve O_1M_1O eş dik üçgenler olduklarından $|O_1M_1| = |O_1T|$ bulunur ki buradan $|O_1T| = x$ elde edilir. Benzer yolla

$$y = |O_2M_2| = |O_2T|$$

elde ederiz. Buradan;

$$|O_1O_2| = |O_1T| + |TO_2| = x + y \qquad (2.4.3)$$

olur. M_1O_1O dik üçgeninden ve (2.4.2) den;

$$x = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{16\beta^2} - \frac{\alpha^2}{16}} = \frac{\alpha}{4\beta}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

bulunur. Burada $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ olduğundan

$$x = \frac{\alpha}{4\beta}\sqrt{\gamma^2} \rightarrow x = \frac{\alpha\gamma}{4\beta}$$

elde edilir. Benzer çalışmayı M_2O_2O üçgeni için yaparsak;

$$y = \frac{\alpha\beta}{4\gamma}$$

olarak buluruz. Buradan;

$$x = \frac{\alpha\gamma}{4\beta}, \qquad y = \frac{\alpha\beta}{4\gamma} \qquad (2.4.4)$$

elde edilir. Böylece (2.4.3) ve (2.4.4) ten

$$|O_1O_2| = \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\alpha\beta}{4\gamma}$$

buluruz. Bu ifade düzenlenir ve $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$|O_1O_2| = \frac{\alpha^3}{4\beta\gamma} \qquad (2.4.5)$$

bulunur. Ayrıca OO_1O_2 dik üçgeninin alanı $\frac{1}{2}R_1R_2$ dir. Bu (2.4.2) ile birleştirilirse

$$A(OO_1O_2) = \frac{\alpha^4}{32\beta\gamma} \qquad (2.4.6)$$

elde edilir (Zelator, 2008b).

2.5. Şekil 2.1 deki $O_1O_2M_2M_1$ Yamuğunda Kenar ve Köşegenlerin Bulunması

Şekil 2.1 de verilen $O_1O_2M_2M_1$ yamuğunun $|O_1M_1| = x$, $|O_2M_2| = y$ ve $|O_1O_2|$ kenar uzunlukları; yukarıdaki ABC üçgeninin kenar uzunluklarına bağlı olarak (2.4.4) ve (2.4.5) formülleri ile verilmiştir. Dördüncü kenar uzunluğu da $|M_1M_2| = \frac{\alpha}{2}$ dür. Üstelik $O_1O_2M_2M_1$ yamuğunun alanı;

$$A(O_1O_2M_2M_1) = \frac{1}{2}(|O_1M_1| + |O_2M_2|)|M_1M_2| = \frac{1}{2}(x+y)\frac{\alpha}{2} = \frac{(x+y)}{4}\alpha$$

biçiminde verilir. Bu son ifadede (2.4.4) ü ve $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ yi kullanırsak;

$$A(O_1O_2M_2M_1) = \frac{\alpha^4}{16\beta\gamma} \qquad (2.5.1)$$

olarak bulunur.

Bu $O_1O_2M_2M_1$ yamuğunun köşegenleri $[O_1M_2]$ ve $[M_1O_2]$ dir. Bu köşegenlerin uzunlukları sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $O_1M_2M_1$ ve $O_2M_1M_2$ dik üçgenlerinden ($|M_1M_2| = \frac{\alpha}{2}$ olduğundan);

$$d_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \text{ ve } d_2 = \sqrt{y^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

elde ederiz. Bu son ifadelerde (2.4.4) ü kullanırsak;

$$d_1 = \frac{\alpha}{4\beta}\sqrt{\gamma^2 + 4\beta^2},\ d_2 = \frac{\alpha}{4\gamma}\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} \qquad (2.5.2)$$

bulunur (Zelator, 2008b).

2.6. ABC Üçgeninin Pythagorean Üçgeni Olması Durumu

Bu kesimde; Sayılar Kuramı' nda verilen basit gerçeklerden hareket edeceğiz. Eğer ABC dik üçgeninin γ, β, α kenar uzunlukları tamsayı ise o zaman ABC bir Pythagorean üçgeni olur. O zaman (2.4.2) ve (2.4.5) formüllerinden üçgenin R_1, R_2, $|O_1O_2|$ kenar uzunluklarının rasyonel sayılar olması yeterlidir, tamsayı olması gerekmez.

Önceki bölümde Teorem 1.4 ile verilen parametrik formüllerin; tüm Pythagorean üçlülerinin ailesini ürettiği Sayılar Kuramı'ndan iyi bilinen bir gerçektir. Sayılar Kuramı ile ilgili; lisans notları ve ders kitaplarının hemen hepsinde Pythagorean üçgenleri üzerine bazı materyaller mevcuttur. Bunlar genel olarak; parametrik formüller, onların elde edilmesi ve Pythagorean üçlüleri üzerine bazı alıştırmalardır.

Burada γ, β, α kenar uzunluklu ABC dik üçgenimiz için (γ, β, α) Pythagorean üçlüsü olduğunda Teorem 1.4 den; γ, β, α kenar uzunlukları

$$\gamma = \delta(m^2 - n^2), \beta = 2\delta(mn), \alpha = \delta(m^2 + n^2) \qquad (2.6.1)$$

denklemlerinden elde edilir**.** Burada δ, m, n pozitif tamsayı ve $m > n \geq 1$, $(m, n) = 1$ (yani m ve n sayıları aralarında asal) ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ dir (Yani m ve n sayılarından biri tek iken diğeri çift olmalıdır). Şimdi (2.6.1) ile verilen formülleri (2.4.2), (2.4.5) ve (2.4.6) ye uygular ve düzenlersek;

$$R_1 = \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^2}{4\delta(2mn)} = \frac{\delta(m^2+n^2)^2}{8mn},$$

$$R_2 = \frac{\alpha^2}{4\gamma} = \frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^2}{4\delta(m^2-n^2)} = \frac{\delta(m^2+n^2)^2}{4(m^2-n^2)},$$

$$|O_1O_2| = \frac{\alpha^3}{4\beta\gamma} = \frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^3}{4\delta(2mn)\delta(m^2-n^2)} = \frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^3}{8\delta^2(m^2-n^2)mn} = \frac{\delta(m^2+n^2)^3}{8mn(m^2-n^2)},$$

$$A(OO_1O_2) = \frac{\alpha^4}{32\beta\gamma} = \frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^4}{32\delta(2mn)\delta(m^2-n^2)} = \frac{\delta^4(m^2+n^2)^4}{64\delta^2(m^2-n^2)mn} = \frac{\delta^2(m^2+n^2)^4}{64mn(m^2-n^2)}$$

olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{ll} R_1 = \dfrac{\delta(m^2+n^2)^2}{8mn}, & |O_1O_2| = \dfrac{\delta(m^2+n^2)^3}{8mn(m^2-n^2)}, \\ R_2 = \dfrac{\delta(m^2+n^2)^2}{4(m^2-n^2)}, & A(OO_1O_2) = \dfrac{\delta^2(m^2+n^2)^4}{64mn(m^2-n^2)} \end{array}\right\} \qquad (2.6.2)$$

elde edilir.

Benzer şekilde; (2.4.4), (2.5.1) ve (2.5.2) ifadelerine (2.6.1) ile verilen formülleri uygularsak;

$$x = \frac{\alpha\gamma}{4\beta} = \frac{\delta(m^2+n^2)\delta(m^2-n^2)}{4\delta(2mn)} = \frac{\delta(m^2+n^2)(m^2-n^2)}{8mn},$$

$$y = \frac{\alpha\beta}{4\gamma} = \frac{\delta(m^2+n^2)\delta(2mn)}{4\delta(m^2-n^2)} = \frac{2\delta mn(m^2+n^2)}{4(m^2-n^2)} = \frac{\delta mn(m^2+n^2)}{2(m^2-n^2)},$$

$$A(O_1O_2M_2M_1)=\frac{\alpha^4}{16\beta\gamma}=\frac{\left(\delta(m^2+n^2)\right)^4}{16\delta(2mn)\delta(m^2-n^2)}=\frac{\delta^2(m^2+n^2)^4}{32mn(m^2-n^2)},$$

$$d_1=\frac{\alpha}{4\beta}\sqrt{\gamma^2+4\beta^2}=\frac{\delta(m^2+n^2)}{4\delta(2mn)}\sqrt{\left(\delta(m^2-n^2)\right)^2+4\left(\delta(2mn)\right)^2}$$
$$=\frac{\delta(m^2+n^2)}{8mn}\sqrt{m^4+14m^2n^2+n^4},$$

$$d_2=\frac{\alpha}{4\gamma}\sqrt{\beta^2+4\gamma^2}=\frac{\delta(m^2+n^2)}{4\delta(m^2-n^2)}\sqrt{\left(\delta(2mn)\right)^2+4\left(\delta(m^2-n^2)\right)^2}$$
$$=\frac{\delta(m^2+n^2)}{2(m^2-n^2)}\sqrt{m^4-m^2n^2+n^4}$$

olarak bulunur. Böylece

$$x=\frac{\delta(m^2+n^2)(m^2-n^2)}{8mn}, \qquad (2.6.3i)$$

$$y=\frac{\delta mn(m^2+n^2)}{2(m^2-n^2)}, \qquad (2.6.3ii)$$

$$A(O_1O_2M_2M_1)=\frac{\delta^2(m^2+n^2)^4}{32mn(m^2-n^2)}, \qquad (2.6.3iii)$$

$$d_1=\frac{\delta(m^2+n^2)\sqrt{m^4+14m^2n^2+n^4}}{8mn}, \qquad (2.6.3iv)$$

$$d_2=\frac{\delta(m^2+n^2)\sqrt{m^4-m^2n^2+n^4}}{2(m^2-n^2)} \qquad (2.6.3v)$$

elde edilir (Zelator, 2008b).

Şimdi; "**$\boldsymbol{\delta}$ parametresinin hangi değerleri için $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ ve $|O_1O_2|$ rasyonelleri tamsayı olur?**" sorusunu cevaplandıralım. Öncelikle yukarıda $m+n\equiv 1(mod\ 2)$ ve $(m,n)=1$ olduğunu belirtelim. O zaman negatif olmayan herhangi t_1 ve t_2 tamsayı kuvvetleri için

$$((m^2+n^2)^{t_1}, 8mn(m^2-n^2)^{t_2})=1$$

olur (Bu, Lemma 1.3 ten açıktır.). Bu ise

$$\left.\begin{array}{r}((m^2+n^2)^2, 8mn)=1,\\ \left((m^2+n^2)^2, 4(m^2-n^2)\right)=1,\\ \left((m^2+n^2)^3, 8mn(m^2-n^2)\right)=1\end{array}\right\} \qquad (2.6.4)$$

olduğunu ispatlar.

Dahası Lemma 1.1 den biliyoruz ki; "eğer bir a tamsayısı b ve c tamsayılarının $b.c$ çarpımını böler ve $(a,b)=1$ ise o zaman a, c nin bir bölenidir." (Şenay, 2007)

Böylece (2.6.4) den ve (2.6.2) formüllerinden hareketle; R_1, R_2 ve $|O_1O_2|$ nin hepsinin tamsayı olması için gerek ve yeter şart δ tamsayının; $8mn$, $4(m^2-n^2)$ ve $8mn(m^2-n^2)$ tamsayılarının her biri tarafından bölünebilmesidir. Şimdi Sayılar Kuramı'ndan çok daha basit bir sonuca gereksinimimiz var.

Bir δ tamsayısının $a_1, a_2, \ldots, a_r$ pozitif tamsayıları tarafından bölünebilmesi için gerek ve yeter şart δ tamsayısının; $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tamsayılarının en küçük L ortak katı tarafından bölünebilmesidir. Başka bir deyişle L, r tane sayı tarafından bölünebilen en küçük pozitif tamsayıdır(Tanım 1.7). Yukarıdakiler uygulanırsa;

$$a_1 = 8mn, a_2 = 4(m^2-n^2), a_3 = 8mn(m^2-n^2)$$

olur. Buradan L en küçük ortak katı $L = 8mn(m^2-n^2)$ olarak bulunur. Gerçekten a_1, a_2, a_3 değerlerini yeniden düzenlersek;

$$a_1 = 2^3mn, a_2 = 2^2(m-n)(m+n), a_3 = 2^3mn(m-n)(m+n)$$

olur. Buradan a_1, a_2, a_3 pozitif tamsayılarının en küçük ortak katı;

$$2^3mn(m-n)(m+n) = 8mn(m^2-n^2)$$

olduğu görülür. K bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\delta = 8Kmn(m^2-n^2)$$

olarak verildiğinde OO_1O_2 dik üçgeni bir Pythagorean üçgeni olur.

Bir Pythagorean üçgeninin üç kenarının uzunluklarının en büyük ortak böleni 1 ise o zaman bu Pythagorean üçgenine primitif dendiğini biliyoruz. O zaman $\delta = 1$ olduğunda ABC üçgeni primitiftir. Bu durumda OO_1O_2 üçgeninin R_1, R_2, $|O_1O_2|$ kenar uzunluklarının hepsi belirli rasyonel sayılardır. Yani hiçbiri tamsayı değildir. Diğer yandan, eğer $\delta = 8Kmn(m^2-n^2)$ ise OO_1O_2 üçgenin R_1, R_2 ve $|O_1O_2|$ kenar uzunluklarında $(m^2+n^2)^2$ ortak çarpan olduğundan ABC ve OO_1O_2 dik üçgenlerinin her ikisi de primitif değildir. Sonuçta eğer OO_1O_2 bir Pythagorean üçgeni ise o zaman OO_1O_2 üçgeni primitif değildir.

Şimdi de benzer düşünceleri $O_1O_2M_2M_1$ yamuğuna uyguladığımızda kenar uzunluklarının

$$x,\ y, |O_1O_2|, |M_1M_2| = \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta(m^2+n^2)}{2}$$

olduğu görülür.

Aynı düşüncenin kullanılması (OO_1O_2 üçgeni için olduğu gibi), (2.6.3) formülleri ve (2.6.4) şartlarından dolayı aşağıdaki sonuca ulaşırız.

OO_1O_2 üçgeninde olduğu gibi $O_1O_2M_2M_1$ yamuğunun bütün kenar uzunluklarının tamsayı olması için gerek ve yeter şart K bir pozitif tamsayı olmak üzere $\delta = 8Kmn(m^2 - n^2)$ olmasıdır. Ayrıca bu durumda yamuğun alanının da bir tamsayı olacağı (2.6.3) formüllerinden açıktır.

Bu sonuç da bizi çalışmanın son sorusuna getirir.

$\boldsymbol{\delta}$ nın $\boldsymbol{\delta = 8Kmn(m^2 - n^2)}$ olması durumunda (2.6.3) formülleri ile verilen $\boldsymbol{d_1}$ ve $\boldsymbol{d_2}$ köşegen uzunlukları hakkında ne söylenebilir? Onlardan birisi tamsayı olabilir mi? Cevap hayırdır. Çünkü $\delta = 8Kmn(m^2 - n^2)$ olması durumunda d_1 ve d_2 köşegen uzunluklarından hiçbirisi tamsayı olamaz. İlk olarak (2.6.3) formüllerinden kolayca görebileceği gibi δ nın tamsayı değerlerine karşılık d_1 in bir tamsayı olması için gerek ve yeter şart $\sqrt{m^4 + 14m^2n^2 + n^4}$ reel sayısının bir tamsayı olmasıdır. Benzer şekilde d_2 nin bir tamsayı olması $\sqrt{m^4 - m^2n^2 + n^4}$ nin bir tamsayı olması durumunda mümkündür.

Bu durumla ilgili Sayılar Kuramı'ndan aşağıdaki çıkarıma ihtiyaç vardır.

r ve ℓ pozitif tamsayılar olsun. O zaman $\sqrt[r]{\ell}$ nin (ℓ nin r inci kökü) rasyonel sayı olması için gerek ve yeter şart ℓ nin bir i pozitif tamsayısının r inci kuvveti olmasıdır. Yani $\ell = i^r$ olmasıdır. Benzer şekilde; $\ell = i^r$ olması durumunda $\sqrt[r]{\ell}$ ifadesi tamsayı olur. Özel olarak bir i pozitif tamsayısı için $\ell = i^2$ olması durumunda; ℓ nin karekökü ($r = 2$ durumu) bir tamsayı olacaktır (Rosen, 1993; Sierpinski, 1988; Şenay, 2007).

Yukarıdaki çıkarımı, (2.6.3*iv*) **ile verilen $\boldsymbol{d_1}$ e uygularsak;** bir i pozitif tamsayısı için $m^4 + 14m^2n^2 + n^4 = i^2$ olduğu zaman d_1 bir tamsayı olacaktır. Bunun anlamı; (m, n, i) pozitif tamsayılarının $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$ diophantine denkleminin bir çözümü olmasıdır. Böylece yukarıdaki denklemin bütün çözümleri; bir δ pozitif tamsayısı için $x = y = \delta, z = 4\delta^2$ biçiminde verilir. Tarihte bunu kanıtlayan ilk kişi Leonard Euler olarak bilinir (Dickson 1992).

Böylece $(x, y) = 1$ şartı altında yukarıdaki eşitliğin $x = y = 1,\ z = 4$ biçiminde sadece bir çözümü vardır. Burada m ve n tamsayıları da aynı şartları sağlar, yani $(m, n) = 1$ dir. Fakat m ve n farklı sayı ikilileri olduğundan dolayı (birisi çift iken, diğeri tek), $(m, n) \neq (1, 1)$ olması gerekir. Bundan dolayı (m, n, i) tamsayı üçlüsü, $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$ diophantine denkleminin bir tamsayı çözümü olamaz. Dolayısıyla $\sqrt{m^4 + 14m^2n^2 + n^4}$ ifadesi bir rasyonel sayı olamaz.

Benzer düşünceyi (2.6.3v) **ile verilen d_2 durumuna uygulayalım:** d_2 nin rasyonel olması için gerek ve yeter şart bir i pozitif tamsayısı için $m^4 - m^2n^2 + n^4 = i^2$ olmasıdır. Bunun anlamı (m, n, i) pozitif tamsayılarının $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$ diophantine denkleminin bir çözümü olmasıdır.

Pocklington (1914) tarafından elde edilen, yukarıdaki son denklemin pozitif tamsayılar kümesindeki bütün çözümleri, herhangi bir δ pozitif tamsayısı için $x = y = \delta,\ z = \delta^2$ biçiminde verilmektedir. Bu denklemin $(x, y) = 1$ şartı altında $x = y = z = 1$ biçiminde yalnız bir çözümü vardır. Ancak $(m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ olması gerektiğinden dolayı (m, n, i), $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$ denkleminin bir çözümü olamaz. Dolayısıyla $\sqrt{m^4 - m^2n^2 + n^4}$ bir irrasyonel sayı olmalıdır. Ayrıca Pocklington'un ispatı, kısa bir şekilde Sierpinski (1988)' de verilmektedir (Zelator, 2008b).

Sonuç olarak ABC bir Pythagorean üçgeni olduğunda, d_1 ve d_2 köşegen uzunluklarının daima irrasyonel sayı olacağını söyleyebiliriz.

Kenar uzunlukları, alanı ve köşegen uzunlukları tamsayı olan dörtgene Heron dörtgeni dendiğini biliyoruz. Sastry (2005), Heron dörtgenlerinin bir ailesini sunmuştur.

Bu tanıma göre $\delta = 8Kmn(m^2 - n^2)$ için elde edilen $O_2M_2M_1O_1$ yamuklarının ailesi asla Heron dörtgenleri olamaz. Çünkü $O_2M_2M_1O_1$ yamukları ailesinin $|OO_1|$, x, y ve $\frac{\alpha}{2}$ kenar uzunlukları ve alanı tamsayı olur. Ancak d_1 ve d_2 köşegen uzunlukları daima irrasyonel sayılardır.

Sonuçta; $\delta = 8Kmn(m^2 - n^2)$ için (2.6.2) ile (2.6.3) deki formüller ve $\frac{\alpha}{2}$, β ve γ ifadeleri;

$R_1 = K(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^2$,

$R_2 = 2Kmn(m^2 + n^2)^2$,

$|O_1O_2| = K(m^2 + n^2)^3$,

$A(OO_1O_2) = K^2mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^4,$

$x = K(m^2 - n^2)^2(m^2 + n^2),$

$y = 4K(mn)^2(m^2 + n^2),$

$A(O_1O_2M_2M_1) = K^2 2mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^4,$

$d_1 = K(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)\sqrt{m^4 + 14m^2n^2 + n^4},$

$d_2 = 4Kmn(m^2 + n^2)\sqrt{m^4 - m^2n^2 + n^4},$

$\frac{\alpha}{2} = 4Kmn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2),$

$\beta = 16K(mn)^2(m^2 - n^2),$

$\gamma = 8Kmn(m^2 - n^2)^2$

olarak elde edilir (Zelator, 2008b).

2.6.1. Sayısal Örnekler

Tablo 2.1 *Bazı ABC Dik Üçgenleri İle Bunların Çevrel Çember Yarıçapları ve Oluşturduğu OO_1O_2 Üçgenleri*

K	m	n	γ	β	α	$\lvert O_1O_2\rvert$	R_1	R_2	$A(OO_1O_2)$
1	2	1	144	192	240	125	75	100	3750
2	2	1	288	384	480	250	150	200	15000
1	3	2	1200	2880	3120	2197	845	2028	856830
3	3	2	3600	8640	9360	6591	2535	6084	7711470
1	4	1	7200	3840	8160	4913	4335	2312	5011260
3	4	1	21600	11520	24480	14739	13005	6936	45101340

Tablo 2.2 *Tablo* 2.1 *de Verilen Üçgenlerden Elde Edilen Yamuklar*

K	m	n	$\lvert O_1O_2\rvert$	$\lvert O_1M_1\rvert$	$\lvert M_1M_2\rvert$	$\lvert O_2M_2\rvert$	d_1	d_2	$A(O_1O_2M_2M_1)$
1	2	1	125	45	120	80	$15\sqrt{73}$	$40\sqrt{13}$	7500
2	2	1	250	90	240	160	$30\sqrt{73}$	$80\sqrt{13}$	30000
1	3	2	2197	325	1560	1872	$65\sqrt{601}$	$312\sqrt{61}$	1713660
3	3	2	6591	975	4680	5616	$195\sqrt{601}$	$936\sqrt{61}$	15422940
1	4	1	4913	3825	4080	1088	$255\sqrt{481}$	$272\sqrt{241}$	10022520
3	4	1	14739	11475	12240	3264	$765\sqrt{481}$	$816\sqrt{241}$	90202680

2.7. Gözlemler

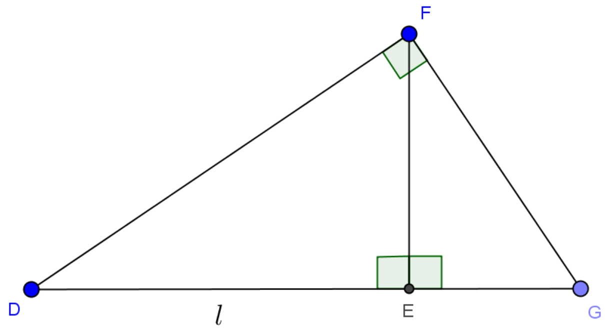
Gözlem 2.7.1. Şekil 2.1 de $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ olduğundan ve (2.4.2) ifadesinde

$R_1 = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, $R_2 = \frac{\alpha^2}{4\gamma}$

olduğundan;

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\alpha/4}\right)^2 \qquad (2.7.1)$$

olduğu kolayca görülür. (2.7.1) denklemi; kenar uzunlukları $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ ve hipotenüs uzunluğu $\frac{1}{\alpha/4}$ olan bir dik üçgenin varlığını gerektirir. Şekil 2.1 deki CM_2, M_2O, OM_1 ve M_1B doğru parçalarının her birinin uzunluğunun $\frac{\alpha}{4}$ olduğunu belirtelim.



Şekil 2.3. *Pythagorean Üçgenine Benzer FDG Üçgeni*

Şimdi bunun için Şekil 2.3 de görüldüğü üzere bir DFG üçgeni ve bu üçgenin DG kenarı üzerinde $|DE|=\ell$, $|FE|=1$ ve $[FE]\perp[DG]$ olacak şekilde bir E noktası belirleyelim. O zaman $\frac{1}{\ell}$ uzunluğunda bir doğru parçası çizilebilir. Çünkü buradan $|EG|=\frac{1}{\ell}$ olacağı açıktır. Gerçekten; bu çizim sonucunda elde edilen EDF, EFG ve FDG dik üçgenlerinin hepsi benzerdir ve benzerlikten;

$$\frac{|FE|}{|DE|}=\frac{|EG|}{|FE|}\Rightarrow\frac{1}{\ell}=\frac{|EG|}{1}\Leftrightarrow|EG|=\frac{1}{\ell}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece yukarıdaki kabullerle R_1, R_2 ve α uzunluklarıyla verilen üç doğru parçasından hareketle; $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{\alpha/4}$ uzunlukları olan üç tane doğru parçası oluşturabiliriz ve bunlar yukarıda bahsedilen dik üçgenlerden elde edilmiş olur.

Bu dik üçgenin şaşırtıcı özelliklere sahip olabileceği düşünülür. Bu dik üçgen CBA üçgenine benzerdir. Çünkü (2.4.2) den dolayı $\frac{R_1}{R_2}=\frac{\gamma}{\beta}$ dir.

Gözlem 2.7.2. Şekil 2.1 den $0 < \gamma < \beta \Leftrightarrow 0° < \varphi < 45° < \omega < 90°$ ve $\omega + \varphi = 90°$ olur. Ayrıca (Şekil 2.1 veya (2.4.2) den) $0 < R_1 < \frac{\beta}{2}$ ve $0 < \frac{\gamma}{2} < R_2$ olduğunu belirtelim. (2.4.2) den dolayı; $R_1 = \gamma$ olması için gerek ve yeter şart $R_2 = \beta$ olması gerektiği açıktır. Kısa bir hesaplamayla

$$\beta^2 + \gamma^2 = 4\beta\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 4\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) +1$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ikinci dereceden denklem çözülürse $tan\,\omega = \frac{\beta}{\gamma} = 2 - \sqrt{3}$ veya $tan\,\omega = \frac{\beta}{\gamma} = 2 + \sqrt{3}$ olduğu sonucuna varılır. Ancak $\tan\omega > 1$ olduğundan dolayı

$$tan\,\omega = 2 + \sqrt{3} = tan\,75^o$$

bulunur. Bunu görmek için; Tanjant ve $tan\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ için yarım açı özdeşliğini kullanırsak; $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ değerini hesaplarız. Bundan dolayı,

$$tan\,75° = cot\,15° = \frac{1}{tan\,15°} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$$

elde edilir. Yani buradan $\omega = 75^o$ olarak bulunur.

Buradan aşağıdakiler direkt olarak gözlenir. Bunlar;

1. $0° < \varphi < 45° < \omega < 60° \Leftrightarrow 0 < R_1 < R_2 < \gamma < \beta$,

2. Eğer $0° < \varphi < 45° < \omega = 60°$ ise o zaman

$$\varphi = 30, \gamma = \frac{\alpha}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha; 0 < R_1 < R_2 = \gamma < \beta$$

olur. Bu durumda, B, O_1,T ve O_2 noktalarının hepsi aynı doğrultudadır.

3. $0° < \varphi < 45° < 60° < \omega < 75° \Leftrightarrow 0 < R_1 < \gamma < R_2 < \beta$

4. $0° < \varphi < 45° < 60° < \omega = 75°; \varphi = 15°$

olur. Bu durumda $R_1 = \gamma$ ve $R_2 = \beta$ olup ABC ve OO_1O_2 dik üçgenleri eş üçgenlerdir.

5. $0° < \varphi < 45° < 60° < 75 < \omega < 90° \Leftrightarrow 0 < \gamma < \mathrm{R}_1 < \beta < \mathrm{R}_2$

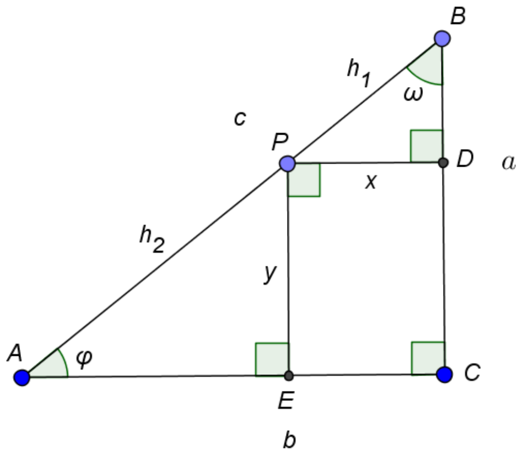
olarak verilir (Zelator, 2008b).

2.8. Sonuç

Bu bölümde bir dik üçgen verildiğinde bu dik üçgenin çevrel çemberlerinin merkezlerinin birleştirilmesiyle elde edilen üçgenin esas üçgene benzer olduğu gösterildi. Sonra bu yeni üçgene bağlı bir dik yamuk bulundu. Ayrıca bulunan dik üçgenin ve yamuğun kenarları esas üçgenin kenarlarına bağlı olarak bulunmuştur.

3. PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİ İÇİNDEKİ PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİ

3.1. Giriş



Şekil 3.1. *CBA Üçgeni*

Yukarıda verilen CBA Pythagorean üçgeninin kenar uzunlukları $|AB| = c$, $|CA| = b$ ve $|CB| = a$ olsun. Yani CBA, C açısı dik açı olan bir dik üçgen ve $a,\ b,\ c$ pozitif tamsayıları $a^2 + b^2 = c^2$ olacak şekilde verilsin. O zaman $a,\ b,\ c$ pozitif tamsayıları (a ile b nin yer değiştirmesi genelliği bozmaz);

$$a = d(m^2 - n^2),\ b = d(2mn),\ c = d(m^2 + n^2) \qquad (3.1)$$

formülleriyle tam olarak verilir ki burada

$$m > n, (m, n) = 1\ ve\ m + n \equiv 1(mod2)$$

olacak şekilde d, m, n pozitif tamsayılardır(Zelator, 2010).

Not: Ön bilgiler kısmında Teorem 1.4 ile de verildiği üzere; (m, n) ifadesi, $m\ ile\ n$ tamsayılarının en büyük ortak böleni anlamına gelmektedir. Böylece $(m, n) = 1$ gösteriminin; $m\ ile\ n$ nin aralarında asal olduğunu ifade edeceği açıktır. Ayrıca $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ gösterimi de m ile n nin "zıt ikililer" olduğunu, yani birisi tek iken diğerinin çift olması gerektiğini ifade eder. (3.1) ile verilenler; ($a,\ b,\ c$) Pythagorean üçgenlerinin veya üçlülerinin bütününü üreten iyi bilinen parametrik formüllerdir.

Bu formülerin elde edilişi ve Pythagorean üçgenleri hakkında daha fazla bilgi için (Rosen, 1993; Sierpinski, 1988; Dickson, 1992; Şenay, 2007; v.b.) literatüre de bakılabilir.

Şimdi $[AB]$ hipotenüsü üzerinde bir P noktası alalım. $[DP] // [CA]$ ve $[PE] // [BC]$ olacak şekilde $[BC]$ kenarı üzerinde D noktasını ve $[CA]$ kenarı üzerinde de E noktasını işaretleyelim. Böylece CBA dik üçgeninden DBP ve EPA dik üçgenleri elde edilmiş olur. Burada $|DP| = x$, $|PE| = y$, $|BP| = h_1$ ve $|AP| = h_2$ dersek, o zaman

$$\left.\begin{array}{r}|DP| = |CE| = x, |PE| = |DC| = y\,, \\ |BD| = |BC| - |DC| = a - y, \\ |AE| = |AC| - |CE| = b - x\end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

elde edilir. Böylece DBP ve EPA dik üçgenlerinin her ikisi de ABC dik üçgenine benzer olur. Buradan;

$$\frac{x}{b} = \frac{a-y}{a} = \frac{h_1}{c} \qquad (3.3i)$$

$$\frac{y}{a} = \frac{b-x}{b} = \frac{h_2}{c} \qquad (3.3ii)$$

benzerlik oranları elde edilir. Burada $a, b,$ c (pozitif) tamsayılar olduğu için (3.3*i*) orantısından; eğer x ile y den veya h_1 den birisi rasyonel sayı ise o zaman bunların üçünün de rasyonel sayı olması gerektiği ortaya çıkar. Bundan dolayı; x, y, h_1 in ya her üçü de rasyoneldir, ya da her üçü de irrasyoneldir. Benzer bir şekilde (3.3*ii*) den; x, y, h_2 den ya her üçü de rasyonel ya da her üçü de irrasyonel olması gerekir. Bu iki gözleminin birleştirilmesinden; "x, y, h_1, h_2 sayılarının ya tamamı rasyonel veya tamamı irrasyoneldir" sonucu çıkar.

Bu bölümde CBA dik üçgeninin $[AB]$ hipotenüsü üzerinde alınan bir P noktasından dik kenarlara veya C dik köşesine çizilen doğru parçaları sonucunda CBA üçgeni içinde elde edilen dik üçgenlerin Pythagorean olması veya olmaması durumları araştırılmıştır.

Teorem 3.1. CBA; C açısı dik açı olan bir Pythagorean üçgeni ve onun kenar uzunlukları (3.1) formülleri ile verilsin. Yani a, b, c kenar uzunlukları

$$a = d(m^2 - n^2), b = d(2mn), c = d(m^2 + n^2)$$

biçiminde verilir ki burada d, m, n pozitif tamsayılar ve $m > n, (m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1 (mod\ 2)$ olur. Ayrıca $[AB]$ hipotenüsü üzerinde A ile B den farklı bir nokta P olarak alınsın. Sonra P noktasından $[CA]$ ve $[CB]$ kenarlarına paralel doğru parçaları çizilsin. Bu paralel doğru parçalarının; $[CB]$ kenarını kestiği nokta D, $[CA]$ kenarını kestiği nokta da E olsun (Şekil 3.1 de verildiği gibi).

O zaman DBP ve EPA dik üçgenlerinin ya her ikisi de Pythagorean üçgenidir veya her ikisi de Pythagorean üçgeni değildir.

Ayrıca eğer her ikisi de Pythagorean ise; o zaman DBP üçgeninin

$$|BD| = a - y, |DP| = x, \ |BP| = h_1$$

kenar uzunlukları

$$a - y = \delta(m^2 - n^2), \ x = \delta(2mn), \ h_1 = \delta(m^2 + n^2)$$

formülleriyle ve benzer şekilde EPA üçgeninin

$$|PE| = y, |EA| = b - x, |PA| = h_2$$

kenar uzunlukları da

$$y = (d - \delta)(m^2 - n^2), \ b - x = (d - \delta)(2mn), \ h_2 = (d - \delta)(m^2 + n^2)$$

formülleriyle verilir. Burada δ, $1 \leq \delta \leq d - 1$ şartını sağlayan pozitif tamsayıdır.

İspat 3.1. Teoremde; DBP ve EPA üçgenlerinin ya her ikisi de Pythagorean veya her ikisi de Pythagorean değildir" diye iddia edildiğinden; DBP üçgeninin Pythagorean üçgeni olduğunu kabul ederek EPA üçgeninin Pythagorean olması gerektiğini ispatlayacağız. Çünkü biri kabul edilerek diğerinin gösterilmesi yeterlidir.

DBP üçgeni, Pythagorean olduğundan dolayı x, $a - y$ ve h_1 kenar uzunlukları doğal sayılar olmalıdır (Bak Şekil 3.1). (3.3i) den

$$\frac{x}{b} = \frac{h_1}{c} \Rightarrow x = \frac{b.h_1}{c} = \frac{d(2mn)}{d(m^2+n^2)} h_1 \Rightarrow x = \frac{2mnh_1}{m^2+n^2} \qquad (3.4)$$

elde edilir. Burada $(m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ ve Lemma 1.2(i) den

$$(m^2 + n^2, 2mn) = 1 \qquad (3.4i)$$

şartları sağlanmalıdır. Hipotezde x bir doğal sayı olarak verildiğinden dolayı (3.4) denkleminden $m^2 + n^2$ tamsayısı, $2mnh_1$ çarpımının bir böleni olmalıdır. Böylece (3.4i) ve Lemma 1.1 den $m^2 + n^2$ nin h_1 i bölmesi gerektiği açıktır. Yani δ pozitif tamsayısı için

$$h_1 = \delta(m^2 + n^2) \qquad (3.4ii)$$

olur. Burada h_1; DBP üçgeninin $[BP]$ hipotenüsünün uzunluğu ve P noktası A ile B arasında yer aldığı için

$$h_1 = |BP| < c = |BA| = d(m^2 + n^2)$$

olması gerektiği açıktır. Bu son ifade ile (3.4ii) birlikte düşünülürse

$1 \leq \delta < d;$

veya dengi olan

$$1 \leq \delta \leq d - 1 \qquad (3.4iii)$$

olarak bulunur. (3.4iii) den dolayı $d \geq 2$ olması gerektiği açıktır. (3.4) e geri döner ve (3.4ii) yi kullanırsak,

$$x = \delta(2mn) \qquad (3.4iv)$$

olur. Sonra (3.4iv), (3.3i), (3.4ii) ve (3.1) den dolayı;

$$a - y = \delta(m^2 - n^2) \Rightarrow y = a - \delta(m^2 - n^2) \Rightarrow y = d(m^2 - n^2) - \delta(m^2 - n^2)$$

$$\Rightarrow y = (d - \delta)(m^2 - n^2) \qquad (3.4v)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1), (3.3i) ve (3.4v) kullanılarak;

$$b - x = (d - \delta)(2mn) \qquad (3.4vi)$$

ve

$$h_2 = (d - \delta)(m^2 + n^2) \qquad (3.4vii)$$

ifadeleri elde edilir ki ispat biter (Zelator 2010). ■

Teorem 3.1 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır.

Tablo 3.1.1 *Teorem* 3.1’ *e Göre Üretilen Bazı Üçgenler*

d	***δ***	***m***	***n***	***a***	***b***	***c***	***a-y***	***x***	***h_1***	***y***	***b-x***	***h_2***
2	1	3	2	10	24	26	5	12	13	5	12	13
2	1	4	3	14	48	50	7	24	25	7	24	25
2	1	5	2	42	40	58	21	20	29	21	20	29
3	1	3	2	15	36	39	5	12	13	10	24	26
3	1	4	3	21	72	75	7	24	25	14	48	50
3	1	5	2	63	60	87	21	20	29	42	40	58
4	1	3	2	20	48	52	5	12	13	15	36	39
4	1	4	3	28	96	100	7	24	25	21	72	75
4	1	5	2	84	80	116	21	20	29	63	60	87
5	1	3	2	25	60	65	5	12	13	20	48	52
5	1	4	3	35	120	125	7	24	25	28	96	100
5	1	5	2	105	100	145	21	20	29	84	80	116

Teorem 3.2. CBA, C açısı 90° olan bir Pythagorean üçgeni olsun. Ayrıca $|CB| = a$, $|CA| = b$ ve $|BA| = c$ kenar uzunlukları; m, n, d pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$a = d(m^2 - n^2), \; b = d(2mn), c = d(m^2 + n^2)$$

biçiminde verilsin. Öyle ki $(m,n)=1$, $m>n$ ve $m+n\equiv 1(mod\ 2)$ dir. Ayrıca $[BA]$ hipotenüsü üzerindeki P noktası B ile A uç noktaları arasında yer alsın. P noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları D ile E olsun. O zaman;

(*i*) Eğer $d=1$ ise, yani CBA Pythagorean üçgeni primitif ise o zaman DBP ve EPA dik üçgenlerinden hiçbiri Pythagorean değildir.

(*ii*) Eğer $d=2$ ve P noktası $[BA]$ hipotenüsünün M orta noktası ile çakışık ise o zaman DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisi de Pythagoreandır. Başka bir deyişle eğer ki $P\neq M$ ise bu iki üçgenin hiçbiri Pythagorean değildir.

(*iii*) Eğer $d=3$ ve P noktası $\frac{|PB|}{|BA|}=\frac{1}{3}$ veya $\frac{|PB|}{|BA|}=\frac{2}{3}$ olacak şekilde verilmiş ise o zaman DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisi de Pythagoreandır. Başka bir değişle eğer $\frac{|PB|}{|BA|}\neq\frac{1}{3}, \frac{|PB|}{|BA|}\neq\frac{2}{3}$ ise bu üçgenlerin hiçbiri Pythagorean değildir.

İspat 3.2. (*i*) Eğer $d=1$ ise o zaman DBP ve EPA dik üçgenlerinin hiçbiri Pythagorean olamaz, çünkü Teorem 3.1 e göre δ doğal sayısı $1\leq\delta\leq d-1$ olmalıdır ki bu $d=1$ olduğunda imkânsızdır. ■

(*ii*) $d=2$ olduğunu varsayalım. Eğer P noktası $[BA]$ hipotenüsünün M orta noktası ile kesişmekte ise o zaman DBP ve EPA üçgenlerinin her biri CBA üçgeninin yarı boyutundadır. Bu durumda;

$$|BD|=|PE|=\frac{a}{2}=\frac{2(m^2-n^2)}{2}=m^2-n^2,\ |DP|=|EA|=\frac{b}{2}=\frac{2(2mn)}{2}=2mn,$$

$$|BP|=|PA|=\frac{c}{2}=\frac{2(m^2+n^2)}{2}=m^2+n^2$$

olarak bulunur ki bu DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisinin de primitif Pythagorean üçgenleri olduğunu ispatlar. Üstelik karşıt olarak, eğer her iki üçgende Pythagorean ise o zaman Teorem 1.1 den

$$1\leq\delta\leq d-1=2-1=1,\ 1\leq\delta\leq 1,\ \ \delta=1$$

olur. Bu da üçgenlerin her birinin CBA üçgeninin yarı boyutunda olduğunu ve P nin $[BA]$ nın orta noktası olduğunu göstermektedir. ■

(*iii*) $d=3$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\frac{|PB|}{|BA|}=\frac{1}{3}$ veya $\frac{|PB|}{|BA|}=\frac{2}{3}$ olur.

Eğer $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{1}{3}$ ise o zaman DBP üçgeni, CBA üçgeninin $\frac{1}{3}$ i boyutunda ve EPA üçgeni de CBA üçgeninin $\frac{2}{3}$ si boyutundadır. Böylece

$$|BD| = \frac{a}{3} = \frac{3(m^2-n^2)}{3} = m^2 - n^2,$$

$$|DP| = \frac{b}{3} = \frac{3(2mn)}{3} = 2mn,$$

$$|PB| = \frac{c}{3} = \frac{3(m^2+n^2)}{3} = m^2 + n^2$$

ve

$$|PE| = \frac{2a}{3} = 2(m^2 - n^2), |EA| = \frac{2b}{3} = 4mn, \ |PA| = \frac{2c}{3} = 2(m^2 + n^2)$$

olarak bulunur. Buradan DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisinin de Pythagorean olduğu açık olarak görülür.

Diğer durumda, yani $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{2}{3}$ durumu için yöntem yukarıdakine benzerdir.

Yani $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{2}{3}$ ise o zaman DBP üçgeni, CBA üçgeninin $\frac{2}{3}$ si boyutunda ve EPA üçgeni CBA üçgeninin $\frac{1}{3}$ i boyutundadır. Buradan,

$$|BD| = \frac{2a}{3} = \frac{2.3(m^2-n^2)}{3} = 2(m^2 - n^2),$$

$$|DP| = \frac{2b}{3} = \frac{2.3(2mn)}{3} = 4mn,$$

$$|PB| = \frac{2c}{3} = \frac{2.3(m^2+n^2)}{3} = 2(m^2 + n^2)$$

ve

$$|PE| = \frac{a}{3} = \frac{3(m^2-n^2)}{3} = m^2 - n^2,$$

$$|EA| = \frac{b}{3} = \frac{3(2mn)}{3} = 2mn,$$

$$|PA| = \frac{c}{3} = \frac{3(m^2+n^2)}{3} = m^2 + n^2$$

olur. Buradan DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisinin de Pythagorean olduğu görülür.

Şimdi tersine olarak DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisinin de Pythagorean olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 3.1 den dolayı;

$1 \leq \delta \leq d - 1 = 3 - 1 = 2$; $\delta = 1$ veya $\delta = 2$

olarak buluruz.

Eğer $\delta = 1$ ise Teorem 3.1 de DBP ve EPA üçgenlerinin kenar uzunlukları için verilen formüller kullanılarak $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{1}{3}$ olduğu kolayca görülür.

Benzer şekilde eğer $\delta = 2$ ise o zaman $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{2}{3}$ olacağı da bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.2 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablolardadır.

Tablo 3.2.1. *Teorem* 3.2. *(ii)' nin Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

d	*m*	*n*	*a*	*b*	*c*	|*DB*|	|*DP*|	|*BP*|	|*EP*|	|EA|	|*PA*|
2	2	1	6	8	10	3	4	5	3	4	5
2	3	2	10	24	26	5	12	13	5	12	13
2	4	3	14	48	50	7	24	25	7	24	25
2	5	2	42	40	58	21	20	29	21	20	29
2	5	4	18	80	82	9	40	41	9	40	41
2	6	5	22	120	122	11	60	61	11	60	61
2	7	2	90	56	106	45	28	53	45	28	53
2	7	4	66	112	130	33	56	65	33	56	65
2	7	6	26	168	170	13	84	85	13	84	85

Tablo 3.2.2. *Teorem* 3.2. *(iii)*-1*' in Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

d	*m*	*n*	*a*	*b*	*c*	|*DB*|	|*DP*|	|*BP*|	|*EP*|	|*EA*|	|*PA*|
3	2	*1*	9	12	15	3	4	5	6	8	10
3	3	2	15	36	39	5	12	13	10	24	26
3	4	3	21	72	75	7	24	25	14	48	50
3	5	2	63	60	87	21	20	29	42	40	58
3	6	5	33	180	183	11	60	61	22	120	122
3	7	2	135	84	159	45	28	53	90	56	106
3	7	4	99	168	195	33	56	65	66	112	130
3	7	6	39	252	255	13	84	85	26	168	170

Tablo 3.2.3. *Teorem* 3.2. *(iii)*-2*' nin Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

d	*m*	*n*	*a*	*b*	*c*	|*DB*|	|*DP*|	|*BP*|	|*EP*|	|*EA*|	|*PA*|
3	2	1	9	12	15	6	8	10	3	4	5
3	3	2	15	36	39	10	24	26	5	12	13
3	4	3	21	72	75	14	48	50	7	24	25
3	5	2	63	60	87	42	40	58	21	20	29
3	6	5	33	180	183	22	120	122	11	60	61
3	7	2	135	84	159	90	56	106	45	28	53
3	7	4	99	168	195	66	112	130	33	56	65
3	7	6	39	252	255	26	168	170	13	84	85

3.2. Pythagorean Üçgeninin Hipotenüsü Üzerindeki P Noktasının Üç Farklı Durumunun İncelenmesi

3.2.1. P Noktasının [BA] Hipotenüsünün M Orta Noktasıyla Çakışık Olması

Şekil 3.1 dikkate alınır ve bu durum incelenirse; DBP, EPA, CDP, EPD, DCE ve PEC olarak isimlendirilen altı dik üçgenlerin hepsinin birbirine eş ve bunların her birinin CBA üçgeninin yarı boyutunda olduğu görülür. O zaman (3.1) den dolayı; bu altı üçgenin Pythagorean olması için gerek ve yeter şart (3.1) de verilen d pozitif tamsayısının çift olmasıdır.

Teorem 3.3. CBA, C açısı 90° olan bir Pythagorean üçgeni olsun. Bu üçgenin kenar uzunlukları; $m, n, d \in \mathbf{Z}^{+}$, $(m, n) = 1, m > n$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ olmak üzere

$$|CB| = a = d(m^2 - n^2),\ \ |CA| = b = d(2mn),\ |BA| = c = d(m^2 + n^2)$$

biçiminde verilsin. Ayrıca M, $[BA]$ hipotenüsünün orta noktası ve D ile E noktaları sırasıyla $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına M noktasından inilen dikmelerin ayakları olsun (Böylece D ile E, $[CB]$ ve $[CA]$ nın orta noktaları olur.)

O zaman, BDM, MEA, CDM, EMD, DCE ve MEC biçiminde oluşan altı dik açılı üçgen eştir ve kenar uzunlukları;

Yatay kenar uzunluğu $= \frac{d}{2}(2mn) = dmn,$

Dikey kenar uzunluğu $= \frac{d(m^2-n^2)}{2},$

Hipotenüs uzunluğu $= \frac{d(m^2+n^2)}{2}$

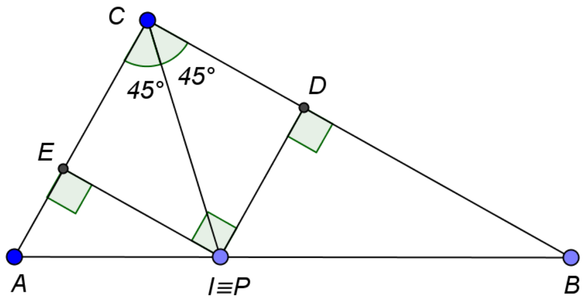
biçiminde verilir. Eğer d çift bir doğal sayı ise o zaman yukarıdaki altı üçgenin her biri Pythagoreandır. Aksi durumda; yani d tek sayı ise o zaman bu altı üçgenin hiçbirisi Pythagorean değildir (Zelator, 2010). ■

Teorem 3.3 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır.

Tablo 3.3.1. *Teorem* 3.3’ *ün Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

d	*m*	*n*	*a*	*b*	*c*	*a-y*	x	h_1	*b-x*	*y*	h_2
2	2	1	6	8	10	3	4	5	4	3	5
3	2	1	9	12	15	4,5	6	7,5	6	4,5	7,5
4	2	1	12	16	20	6	8	10	8	6	10
5	2	1	15	20	25	7,5	10	12,5	10	7,5	12,5
6	2	1	18	24	30	9	12	15	12	9	15
7	2	1	21	28	35	10,5	14	17,5	14	10,5	17,5
8	2	1	24	32	40	12	16	20	16	12	20
9	2	1	27	36	45	13,5	18	22,5	18	13,5	22,5

3.2.2. P Noktasının, C Açısının [CP] Açıortayının [AB] Hipotenüsünü Kestiği I Noktasıyla Çakışık Olması



Şekil 3.2. CBA *Üçgeninde* $I \equiv P$ *Durumu*

Teorem 3.1 deki gösterimi kullanırsak;

$|BD| = a - y, |DI| = x, |BP| = h_1, |EA| = b - x, |EI| = y$ ve $|IA| = h_2$

olarak elde ederiz. Bu durumda $x = y$ olacağı açıktır. Burada elde edilen DCI, IEC, DCE, DIE eş(kongruent) ikizkenar dik üçgenleri Pythagorean olamaz (Çünkü hiçbir Pythagorean üçgeni ikizkenar dik üçgen değildir.).

Teorem 3.1 den dolayı BDI ve IEA üçgenlerinin ya her ikisi de Pythagoreandır veya ikisi de Pythagorean değildir.

Eğer her ikisi de Pythagorean ise o zaman Teorem 3.1 den

$x = \delta(2mn), y = (d - \delta)(m^2 - n^2)$

olarak elde edilir ki burada m, n, d, δ pozitif tamsayıları

$m > n, (m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$

ve $1 \leq \delta \leq d - 1$ için $d \geq 2$ şartları sağlanmalıdır. $x = y$ olduğundan

$$x = y \Longrightarrow \delta(2mn) = (d - \delta)(m^2 - n^2) \quad (3.5)$$

olur. Lemma 1.2 den $(m^2 - n^2, 2mn) = 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Lemma 1.1 ve (3.5) den;

$2mn|d - \delta$ ve $(m^2 - n^2)|\delta$

olması gerekir ki buradan (3.5) e geri döndüğümüzde bir K pozitif tamsayısı için;

$\delta = K(m^2 - n^2)$ ve $d - \delta = K(2mn)$

alınırsa

$$d = K(m^2 - n^2 + 2mn) \quad (3.5i)$$

olarak bulunur. (3.5i) den $1 \leq \delta \leq d - 1$ olması gerektiği açıktır. Gerçekten d nin mümkün olan en küçük değeri; $K = 1$ ve $m = 2$, $n = 1$ için 7 olarak bulunur.

Üstelik $K(2mn)$ nin mümkün olan en küçük değeri 4 olduğundan $1 \leq \delta \leq d - 4$ dür.

Teorem 3.1 ve (3.5i) ifadesi kullanılarak d nin değeri; m, n ve K ya bağlı olarak hesaplanabilir. BDI ve IEA üçgenlerinin diğer dört kenar uzunlukları hesaplanabilir. Ayrıca (3.5i) den dolayı

$$x = \delta(2mn) = K(2mn)(m^2 - n^2) = y$$

olur. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.4. CBA, C de 90 derece açılı bir Pythagorean üçgeni olsun. Bu üçgenin kenar uzunlukları; $m, n, d \in \mathbf{Z}^+$, $(m, n) = 1, m > n$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ olmak üzere

$$|CB| = a = d(m^2 - n^2),\ |CA| = b = d(2mn), |BA| = c = d(m^2 + n^2)$$

biçiminde verilsin. Sonra $[CI]$, C dik açısının açıortayı olacak şekilde I, $[BA]$ hipotenüsü üzerinde bir nokta olsun. Ayrıca I noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları D ile E olsun. Bu durumda, BDI ve IEA dik üçgenlerinin her ikisininde Pythagorean olması için gerek ve yeter şart herhangi K tamsayısı için,

$$d = K(m^2 - n^2 + 2mn)$$

olmasıdır. Eğer

$$d = K(m^2 - n^2 + 2mn)$$

ise o zaman BDI üçgeninin kenar uzunlukları;

$$|DI| = x = K(2mn)(m^2 - n^2),$$

$$h_1 = |BI| = K(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = K(m^4 - n^4),$$

$$|BD| = a - y = K(m^2 - n^2)^2$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde IEA üçgeninin kenar uzunlukları da;

$$|IE| = y = K(2mn)(m^2 - n^2),$$

$$|EA| = b - x = K(2mn)(2mn) = K(2mn)^2,$$

$$h_2 = |IA| = K(2mn)(m^2 + n^2)$$

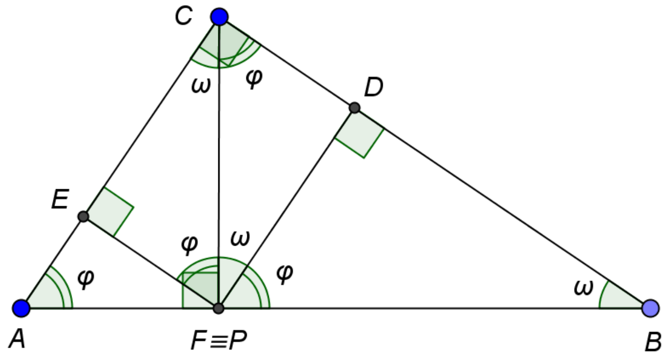
olarak verilir. Eğer d tamsayısı, $m^2 - n^2 + 2mn$ ile bölünemiyorsa o zaman BDI ve IEA üçgenlerinin her ikisi de Pythagorean değildir (Zelator, 2010).

Teorem 3.4 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır.

Tablo 3.4.1. *Teorem 3.4' ün Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

K	*m*	*n*	*d*	*a*	*b*	*c*	*a-y*	*x*	h_1	*y*	*b-x*	h_2
1	2	1	7	21	28	35	9	12	15	12	16	20
1	3	2	17	85	204	221	25	60	65	60	144	156
2	2	1	14	42	56	70	18	24	30	24	32	40
2	3	2	34	170	408	442	50	120	130	120	288	312
3	2	1	21	63	84	105	27	36	45	36	48	60
3	3	2	51	255	612	663	75	180	195	180	432	468

3.2.3. P Noktasının, C Köşesinden [BA] Hipotenüsüne Çizilen Dikin Kesişme Noktası Olan F İle Çakışık Olması



Şekil 3.3 *CBA Üçgeninde $F \equiv P$ Durumu*

Bu kesimde; Teorem 3.1 i kullanmak yerine, ilk olarak BDF, FEA üçgenleri ile FDC, DFE, CED, CEF eş üçgenlerinin kenar uzunluklarını BCA üçgeninin a, b, c kenar uzunluklarına bağlı olarak hesaplayacağız. Sonra bu ifadelerde (3.1) deki formülleri kullanarak bu üçgenlerin kenar uzunluklarını d, m, n tamsayılarına bağlı olarak bulacağız.

Son olarak; Teorem 3.5 e ulaşmak için Lemma 1.2 yi uygulamalıyız. F noktası, C köşesinden $[BA]$ hipotenüsüne çizilen dikin kesişme noktası olması durumunda, yukarıda oluştuğu belirtilen altı dik üçgen, CBA üçgenine benzerdir. ω ve φ sırasıyla CBA ve CAB açılarının derece cinsinden ölçümleri olsun (Şekil 3.3 e bak). Burada

$$\left.\begin{array}{r} |CB| = a, |CA| = b, |BA| = c \\ |DF| = |CE| = x, |EA| = b - x \\ |DC| = |FE| = y, |BD| = a - y \\ |BF| = h_{1,}|FA| = h_2, |CF| = |DE| = h \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

olur. Ayrıca

$$\sin\omega = \frac{y}{h} = \cos\varphi = \frac{b}{c} \text{ ve } cos\,\omega = \frac{h}{b} = \frac{a}{c};$$

olduğundan dolayı

$$h = \frac{ab}{c}$$

olur ki buradan

$$y = h.\cos\varphi = h\cdot\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}\cdot\frac{b}{c} = \frac{ab^2}{c^2}$$

bulunur. Böylece

$$a - y = a - \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a(c^2-b^2)}{c^2},$$

olup burada $c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan

$$a - y = \frac{a^3}{c^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde x ve $b - x$ uzunluklarını hesaplayalım. Şekil 3.3 ten;

$$\tan\omega = \cot\varphi = \frac{y}{x};\ \cot\omega = \tan\varphi = \frac{x}{y} \text{ ve } \tan\varphi = \frac{a}{b}$$

elde ederiz ki buradan

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\cdot y$$

olur. Yukarıda

$$y = \frac{ab^2}{c^2}$$

olduğundan hareketle

$$x = \frac{a}{b}\cdot\frac{ab^2}{c^2} = \frac{ba^2}{c^2}$$

olarak bulunur. Burada $c^2 - a^2 = b^2$ olduğundan

$$b - x = b - \frac{ba^2}{c^2} = \frac{b(c^2-a^2)}{c^2} = \frac{b.b^2}{c^2} \Rightarrow b - x = \frac{b^3}{c^2}$$

olur. Ayrıca

$$\sin\omega = \frac{x}{h_1} \Rightarrow\ h_1 = \frac{1}{\sin\omega}\cdot x = \frac{c}{b}\cdot\frac{ba^2}{c^2} \Rightarrow h_1 = \frac{a^2}{c}$$

dir. Benzer bir şekilde

$$\sin\varphi = \frac{y}{h_2} \Rightarrow\ h_2 = \frac{1}{\sin\varphi}\cdot y = \frac{c}{a}\cdot\frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow h_2 = \frac{b^2}{c}$$

elde ederiz.

Özetlersek; BDF üçgeninin kenar uzunlukları,

$$|BD| = a - y = \frac{a^3}{c^2}, |DF| = x = \frac{ba^2}{c^2}, |BF| = h_1 = \frac{a^2}{c} \quad (3.6i)$$

FEA üçgeninin kenar uzunlukları,

$$|FE| = y = \frac{ab^2}{c^2}, |EA| = b - x = \frac{b^3}{c^2}, |FA| = h_2 = \frac{b^2}{c} \quad (3.6ii)$$

FDC, DFE, DCE, CFE eş üçgenlerinin kenar uzunlukları,

$$|DC| = |FE| = y = \frac{ab^2}{c^2}, |DF| = |CE| = x = \frac{ba^2}{c^2}, |CF| = |DE| = \frac{ab}{c} = h \quad (3.6iii)$$

olarak bulunur. Daha sonra, CBA bir Pythagorean üçgeni olduğundan, (3.6*i*), (3.6*ii*) ve (3.6*iii*) deki uzunluk formülleri ile (3.1) deki formülleri birleştirirsek;

$$\left.\begin{array}{c} x = \frac{d(m^2-n^2)^2(2mn)}{(m^2+n^2)^2}, y = \frac{d(m^2-n^2)(2mn)^2}{(m^2+n^2)^2} \\ a - y = \frac{d(m^2-n^2)^3}{(m^2+n^2)^2}, b - x = \frac{d(2mn)^3}{(m^2+n^2)^2} \\ h = \frac{d(2mn)(m^2-n^2)}{m^2+n^2}, h_1 = \frac{d(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}, h_2 = \frac{d(2mn)^2}{m^2+n^2} \end{array}\right\} \quad (3.7)$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca Lemma 1.2 ve 1.3 den;

$$\left.\begin{array}{c} ((m^2+n^2)^2,\ (m^2-n^2)^3) = 1, \\ ((m^2+n^2)^2,\ (2mn)^2) = 1 \\ (m^2+n^2,\ (m^2-n^2)^2) = 1, \\ (m^2+n^2,\ (2mn)^2) = 1, \\ \left(m^2+n^2,\ (2mn)(m^2-n^2)\right) = 1, \\ \left((m^2+n^2)^2,\ (m^2-n^2)^2(2mn)\right) = 1, \\ ((m^2+n^2)^2,\ (m^2-n^2)(2mn)^2) = 1 \end{array}\right\} \quad (3.8)$$

olarak bulunur. (3.7) deki formüllere ve (3.8) deki şartlara dikkatlice bakılır ve Lemma 1.1 ile birleştirilirse; $BDF, FEA, FDC, DFE, DCE\ ve\ CFE$ üçgenlerinin ya hepsinin Pythagorean olduğu ya da hiçbirinin Pythagorean olmadığı görülür.

Bu altı üçgenin tamamının Pythagorean olması için gerek ve yeter şart d tamsayısının $(m^2+n^2)^2$ ile bölünebilmesi, yani bir K pozitif tamsayısı için

$$d = K(m^2+n^2)^2 \quad (3.9)$$

olmasıdır. Bu durumda; $y, a-y, x,\ b-x, h, h_1, h_{2,}$ sayılarının hepsi tamsayı olur. (3.9) şartı sağlandığında; (3.6*i*), (3.6*ii*) ve (3.6*iii*) ifadelerinden hareketle (3.7) formülleriyle m, n ve K tamsayılarına bağlı olarak bütün kenar uzunluklarını hesaplayabiliriz. Yukarıda yapılanlardan hareketle aşağıdaki teoreme ulaşırız.

Teorem 3.5. CBA, C de 90 derece açılı bir Pythagorean üçgeni olsun. Bu üçgenin kenar uzunlukları; m, n, d pozitif tamsayıları için $(m, n) = 1$, $m > n$ ve $m + n \equiv 1(mod\ 2)$ olmak üzere

$$|CB| = a = d(m^2 - n^2),\ |CA| = b = d(2mn),\ |BA| = c = d(m^2 + n^2),$$

biçiminde verilsin. Ayrıca F, C köşesinden $[BA]$ hipotenüsüne inilen dikin kesişme noktası olsun. O zaman $BDF, FEA, FDC, DFE, DCE,\ CFE$ (son dördü eştir) biçiminde ifade edilen altı benzer üçgenin ya hepsi Pythagoreandır ya da hiçbiri değildir. Bu altı üçgenin tamamının Pythagorean olması için gerek ve yeter şart bir K pozitif tamsayısı için, $d = K(m^2 + n^2)^2$ olmasıdır. Eğer d bu şartı sağlıyorsa yukarıdaki altı üçgenin kenar uzunlukları;

BDF üçgeni için;

$$|BD| = a - y = K(m^2 - n^2)^3,$$
$$|DF| = x = K(m^2 - n^2)^2(2mn),$$
$$h_1 = K(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)^2$$

FEA üçgeni için;

$$|FE| = y = K(m^2 - n^2)(2mn)^2,$$
$$|EA| = b - x = K(2mn)^3,$$
$$h_2 = K(m^2 + n^2)(2mn)^2$$

$FDC, DFE, DCE,\ CFE$ eş üçgenleri için;

$$|DC| = |FE| = y = K(m^2 - n^2)(2mn)^2,$$
$$|DF| = |CE| = x = K(2mn)(m^2 - n^2)^2,$$
$$h = |CF| = |DE| = K(2mn)(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = K(2mn)(m^4 - n^4)$$

formülleri ile verilir (Zelator, 2010).

Teorem 3.2. deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablolardadır.

Tablo 3.5.1. *Teorem 3.5' in Şartları Altında Üretilen Bazı Üçgenler*

K	*m*	*n*	*d*	*a*	*b*	*c*	*a-y*	*x*	h_1	*y*	*b-x*	h_2	*x*	*y*	*h*
1	2	1	25	75	100	125	27	36	45	48	64	80	36	48	60
2	2	1	50	150	200	250	54	72	90	96	128	160	72	96	120
3	2	1	75	225	300	375	81	108	135	144	192	240	108	144	180
1	3	2	169	845	2028	2197	125	300	325	720	1728	1872	300	720	780
2	3	2	338	1690	4056	4394	250	600	650	1440	3456	3744	600	1440	1560
3	3	2	507	2535	6084	6591	375	900	975	2160	5184	5616	900	2160	2340
1	4	1	289	4335	2312	4913	3375	1800	3825	960	512	1088	1800	960	2040
2	4	1	578	8670	4624	9826	6750	3600	7650	1920	1024	2176	3600	1920	4080
3	4	1	867	13005	6936	14739	10125	5400	11475	2880	1536	3264	5400	2880	6120

Örnek 3.5.1. Yukarıdaki tabloda elde edilmiş olan değerleri, $K = 1$ ve $mn \leq 4$ durumu için alarak aşağıdaki gibi de üretebiliriz.

Bu durumda ya $K = 1,\ m = 2,\ n = 1$ veya $K = 1, m = 4, n = 1$ olur. Bu durumlara karşılık gelen değerleri ayrı - ayrı hesaplayalım.

(*i*) $K = 1, m = 2,\ n = 1$ olduğunda;

$d = 1(2^2 + 1^2)^2 = 5^2 = 25, h = 60, h_1 = 45, h_2 = 80,$

$y = 48, a - y = 75 - 48 = 27, x = 36, b - x = 100 - 36 = 64,$

$a = 75, b = 100, c = 125$

olarak bulunur.

(*ii*) $K = 1, m = 4, n = 1$ olduğunda ise;

$d = 289, a - y = 15, x = 1800, h_1 = 3825,$

$y = 960, b - x = 512, h_2 = 1088, h = 2040,$

$a = 4335, b = 2312, c = 4913$

olur (Zelator, 2010).

3.3. P nin Tam Olarak $(\mathbf{d-1})$ Farklı Durumu

Şekil 3.1 de olduğu gibi; CBA Pythagorean üçgeninin $[BA]$ hipotenüsü üzerinde verilen P noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları D ile E olsun. Teorem 3.1 den; DBP ve EPA üçgenlerinin ya her ikisi de Pythagoreandır ya da ikisi de değildir. Teorem 3.1 de belirtildiği gibi; δ tamsayısı $1 \leq \delta \leq d - 1$ şartını sağlayacak şekilde belirlenirse, δ için; $d - 1$ farklı durum söz konusudur. Eğer $[BA]$ hipotenüsünü; her birinin uzunluğu $m^2 + n^2$ olan d tane eşit doğru parçasına bölersek, P noktasının her bir durumunda elde edilen DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisi de Pythagoreandır. $[BA]$ hipotenüsü üzerindeki P noktası için, tam olarak $d - 1$ farklı pozisyon mevcuttur. Bu $[BA]$ hipotenüsü üzerindeki P noktası için $d - 1$ farklı durumu $P_1, \dots, P_{d-1}$ noktaları ile gösterirsek; ardışık $[BP_1]$, $[P_1P_2]$, ... , $[P_{d-1}A]$ doğru parçalarının her birinin uzunluğu $m^2 + n^2$ olur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.6. CBA, C de 90 derece açılı bir Pythagorean üçgeni olsun. Burada m, n, d pozitif tamsayılar ve $d \geq 2, m > n,\ m + n \equiv 1(mod\ 2)$ olmak üzere CBA üçgenin kenar uzunlukları;

$|CB| = a = d(m^2 - n^2),\ |CA| = b = d(2mn),\ |BA| = c = d(m^2 + n^2)$

biçiminde verilsin. Ayrıca $[BA]$ hipotenüsü üzerindeki P noktası için $d-1$ farklı durumu $P_1, \dots, P_{d-1}$ noktaları ile gösterirsek; ardışık $[BP_1]$, $[P_1P_2]$, … , $[P_{d-1}A]$ doğru parçalarının her birinin uzunluğu eşit ve $m^2 + n^2$ olsun.

O zaman DBP ve EPA üçgenlerinin her ikisi de Pythagorean olacak şekilde $[BA]$ hipotenüsü üzerinde tam olarak $(d-1)$ tane farklı P noktası mevcuttur. Burada P noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları sırasıyla D ve E dir. Bu $(d-1)$ nokta, yukarıda $P_1, \dots, P_{d-1}$ biçiminde verilen noktalardır. Ayrıca BD_iP_i ve P_iE_iA Pythagorean üçgenlerinin her bir çiftinin kenar uzunlukları $i = 1, \dots, d-1$ için;

$|BD_i| = i(m^2 - n^2), \qquad |D_iP_i| = i(2mn), \qquad |BP_i| = i(m^2 + n^2)$

$|P_iE_i| = (d-i)(m^2 - n^2), \quad |E_iA| = (d-i)(2mn), \quad |P_iA| = (d-i)(m^2 + n^2)$

biçiminde verilir. Burada D_i ve E_i noktaları, P_i noktasından sırasıyla $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktalarıdır (Zelator, 2010).

3.4. Diğer Durumlar

Bu kesimde; Şekil 3.1 de verilen DBP ve EPA üçgenlerinin Pythangorean olmalarına ek olarak DCE, PEC, CDP, EPD eş üçgenlerinin de Pythagorean olmaları durumunu araştıracağız. Yani; CBA Pythagorean üçgeni içerisinde oluşan altı dik üçgenin Pythagorean olması için gerekli ve yeter şartlar nelerdir?

Bu dört eş üçgenin Pythagorean olması için;

$x = |DP| = |CE|, y = |DC| = |PE|$

tam sayılarının "$x^2 + y^2$ = Tam kare" olma şartını sağlamalıdır.

Bunu Teorem 3.6 ile birleştirdiğimizde aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.7. CBA, C de 90 derece açılı bir Pythagorean üçgeni olsun. Bu üçgenin kenar uzunlukları; $m, n\, d$ pozitif tamsayılar ve $d \geq 2, (m,n) = 1, m > n$ ve $m + n \equiv 1 (mod\ 2)$ olmak üzere

$|CB| = a = d(m^2 - n^2), |CA| = b = d(2mn), |BA| = c = d(m^2 + n^2)$

biçiminde verilsin. Ayrıca $[BA]$ hipotenüsü üzerindeki olan P noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları sırasıyla D ile E olsun. Ek olarak

$x = |DP| = |CE|,$ $y = |DC| = |PE|$

için

$a - y = |BD|,$ $b - x = |EA|$

olur. O zaman DBP ve EPA dik üçgenleri ile birlikte $DCE,\ PEC,\ CDP,\ EPD$ eş üçgenlerinin de Pythagorean olması için gerek ve yeter şart; D, M, N pozitif tamsayıları $M > N,\ (M,N) = 1,\ M + N \equiv 1(mod\ 2)$ şartlarını sağlamak ve δ, $1 \leq \delta \leq d - 1$ şartını sağlayan pozitif bir tamsayı olmak üzere;

$$y = \delta(m^2 - n^2) = D.(M^2 - N^2), x = (d - \delta).(2mn) = D.(2MN) \quad (3.10i)$$

veya $1 \leq \delta \leq d - 1$ şartını sağlayan pozitif bir tamsayı olmak üzere;

$$y = \delta(m^2 - n^2) = D.(2MN), x = (d - \delta)(2mn) = D.(M^2 - N^2) \quad (3.10ii)$$

olmasıdır (Zelator, 2010).

Teorem 3.7 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır (***d*** tek).

Tablo 3.7.1. ***(i)*** *Teorem* 3.7' *nin Şartlarına Göre Üretilen Bazı Üçgenler (d nin Tek Olması)*

d	***δ***	***m***	***n***	***a***	***b***	***c***	***x***	***y***	x^2+y^2	$\sqrt{x^2+y^2}$
3	1	2	1	9	12	15	8	3	73	8,544004
3	2	2	1	9	12	15	4	6	52	7,211103
3	1	3	2	15	36	39	24	5	601	24,5153
3	2	3	2	15	36	39	12	10	244	15,6205
3	1	4	1	45	24	51	16	15	481	21,93171
3	2	4	1	45	24	51	8	30	964	31,04835
5	1	2	1	15	20	25	16	3	265	16,27882
5	2	2	1	15	20	25	12	6	180	13,41641
5	3	2	1	15	20	25	8	9	145	12,04159
5	4	2	1	15	20	25	4	12	160	12,64911
5	1	3	2	25	60	65	48	5	2329	48,25971
5	2	3	2	25	60	65	36	10	1396	37,36308
5	3	3	2	25	60	65	24	15	801	28,30194
5	4	3	2	25	60	65	12	20	544	23,32381
5	1	4	1	75	40	85	32	15	1249	35,34119
5	2	4	1	75	40	85	24	30	1476	38,41875
5	3	4	1	75	40	85	16	45	2281	47,75982
5	4	4	1	75	40	85	8	60	3664	60,53098

Örnek 3.7.1. Tablo 3.7.1.(i) de hesaplandığı gibi; $d = 5, m = 2, n = 1$ olsun. O zaman CBA üçgeninin kenar uzunlukları;

$$a = 5.(2^2 - 1^2) = 15, b = 5.(2.2.1) = 20, c = 5.(2^2 + 1^2) = 25$$

olur. O zaman δ tamsayısı $1 \leq \delta \leq d - 1$ şartından $\delta = 1, 2, 3, 4$ değerlerini alır. δ tamsayısının bu değerleri için

$y = \delta(m^2 - n^2), x = (d - \delta)(2mn)$

formüllerini kullanırsak aşağıdakileri elde ederiz.

1) $\delta = 1 : y = 3, x = (5 - 1).4 = 16 \Rightarrow y^2 + x^2 = 9 + 256 = 265$

olup 265 herhangi bir tamsayının karesi değildir.

2) $\delta = 2, y = 2.3 = 6, x = (5 - 2).4 = 12 \Rightarrow y^2 + x^2 = 36 + 144 = 180$

olup 180 herhangi bir tamsayının karesi değildir.

3) $\delta = 3, y = 3.3 = 9, x = (5 - 3).4 = 8 \Rightarrow y^2 + x^2 = 81 + 64 = 145$

olup 145 herhangi bir tamsayının karesi değildir.

4) $\delta = 4, y = 4.3 = 12, x = (5 - 4).4 = 4 \Rightarrow y^2 + x^2 = 144 + 16 = 160$

olup 160 herhangi bir tamsayının karesi değildir.

Yukarıda verilen Teorem 3.7 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır (***d*** çift).

Tablo 3.7.1.*(ii)* *Teorem* 3.7' *nin Şartlarına Göre Üretilen Bazı Üçgenler (d nin çift olması)*

d	***δ***	***m***	***n***	***a***	***b***	***c***	***x***	***y***	x^2+y^2	$\sqrt{x^2+y^2}$
2	1	2	1	6	8	10	4	3	25	5
4	1	2	1	12	16	20	12	3	153	12,36932
4	2	2	1	12	16	20	8	6	100	10
6	1	2	1	18	24	30	20	3	409	20,22375
6	2	2	1	18	24	30	16	6	292	17,08801
6	3	2	1	18	24	30	12	9	225	15
2	1	3	2	10	24	26	12	5	169	13
4	1	3	2	20	48	52	36	5	1321	36,34556
4	2	3	2	20	48	52	24	10	676	26
6	3	3	2	30	72	78	36	15	1521	39
2	1	4	1	30	16	34	8	15	289	17
4	1	4	1	60	32	68	24	15	801	28,30194
4	2	4	1	60	32	68	16	30	1156	34
2	1	4	3	14	48	50	24	7	625	25
4	2	4	3	28	96	100	48	14	2500	50
6	1	4	3	42	144	150	120	7	14449	120,204
6	2	4	3	42	144	150	96	14	9412	97,01546
6	3	4	3	42	144	150	72	21	5625	75
8	4	3	2	40	96	104	48	20	2704	52
10	5	2	1	30	40	50	20	15	625	25
10	5	3	2	50	120	130	60	25	4225	65

Teorem 3.7 nin (3.10*i*) veya (3.10*ii*) şartlarını kullanarak; bir Pythagorean üçgeninin hipotenüsü üzerinde alınan bir *P* noktasından dik kenarlara dik inilerek

oluşturulan altı üçgeninde Pythagorean olabilmesi (elde edilebilmesi) için bir çok yol vardır. Şimdi böyle bir aileyi oluşturalım.

Aşağıdaki örnek; bir primitif olmayan CBA Pythagorean üçgeninin $[BA]$ hipotenüsü üzerinde; DBP, EPA, DCE, PEC, CDP, EPD üçgenlerinin hepsi de Pythagorean üçgeni olacak şekilde bir P noktasının bulunamayacağını gösterir.

Örnek 3.7.1. Şimdi

$$y = \delta(m^2 - n^2) = D(M^2 - N^2), x = (d - \delta)(2mn) = D(2MN) \quad (3.10i)$$

olarak verilsin. K bir pozitif tamsayı olmak üzere $D = Kmn(m^2 - n^2)$ olarak alalım. (3.10i) deki ikinci ifadeden $d - \delta = KMN(m^2 - n^2)$ olarak ve (3.10i) deki birinci ifadeden $\delta = Kmn(M^2 - N^2)$ elde ederiz. Böylece

$$d = \delta + KMN(m^2 - n^2) = K[mn(M^2 - N^2) + MN(m^2 - n^2)]$$

olarak bulunur. $1 \leq \delta \leq d - 1$ Şartından $d \geq 2$ olması gerektiği açıktır. Böylece aşağıdakilere ulaşırız.

Herhangi m, n, M, N pozitif tamsayıları

$$m > n, (m, n) = 1, m + n \equiv 1(mod\ 2), M > N, (M, N) = 1, M + N \equiv 1(mod\ 2)$$

olacak şekilde verilsin. Ayrıca K pozitif tamsayısı için

$$\delta = Kmn(M^2 - N^2), d = K[mn(M^2 - N^2) + MN(m^2 - n^2)]$$

olsun. Kenar uzunlukları;

$$|CB| = a = d(m^2 - n^2), |CA| = b = d(2mn), |BA| = c = d(m^2 + n^2)$$

olan CBA Pythagorean üçgenini göz önüne alalım. P, $[BA]$ hipotenüsü üzerinde $|BP| = h_1 = \delta(m^2 + n^2)$ olacak şekilde bir nokta ve P noktasından $[CB]$ ve $[CA]$ kenarlarına çizilen dikmelerin kesişme noktaları sırasıyla D ile E olsun. O zaman DBP, EPA, DCE, PEC, CDP ve EPD biçiminde ifade edilen altı üçgen de Pythagoreandır.

Örnek 3.7.1 deki parametrelerin bazı değerleri ile karşılıkları tablodadır (***d*** tek).

Tablo 3.7.2. *Örnek* 3.7.1' *in Şartlarına Göre Üretilen Bazı Üçgenler*

K	m	n	D	M	N	d	δ	a	b	c	x	y	h_1
1	2	1	6	3	2	28	10	84	112	140	72	30	50
2	2	1	12	3	2	56	20	168	224	280	144	60	100
3	2	1	18	3	2	84	30	252	336	420	216	90	150
1	3	2	30	2	1	28	18	140	336	364	120	90	234
2	3	2	60	3	2	120	60	600	1440	1560	720	300	780
3	3	2	90	3	2	180	90	900	2160	2340	1080	450	1170

3.5. Sonuç

Bu bölüm boyunca bir Pythagorean üçgeninin hipotenüsü üzerinde alınan bir noktadan, dik kenarları ve dik açının bulunduğu köşeyi birleştiren doğru parçaları çizilerek, üçgenin içerisinde yeni üçgenler üretilmiştir. Üretilen üçgenlerin her birinin Pythagorean olup olmadıkları araştırılmıştır. Esas Pythagorean üçgenin primitif olması durumunda yeni dik üçgenlerin Pythagorean olamayacakları gösterilmiştir. Esas Pythagorean üçgeni primitif değilse; yeni üçgenlerden bazılarının veya tamamının Pythagorean üçgeni olabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

4. KAYNAKLAR

Aydın, Nesibe ve Asma, Nevzat (1997), **Liseler İçin Matematik 3**, Aydın Yayınları, Ankara.

Buchholz, Ralph H. (1989), **On Triangles With Rational Altitudes, Angle Bisectors or Medians**, Doctoral Dissertation, Newcastle University, Newcastle- UK.

Dickson, Leonard Eugene (1992), **History of Theory of Numbers, Vol. II** "**Diophantine Analysis",** AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, ISBN: 0-8218-1935-6; 803 p.p. (un altered text reprint of the original book, first published by Carnegie Institute of Washington in 1919, 1920, and 1923).

Mordell, L.J. ,(1969), **Diophantine Equations**, Academic Pres, New York, NY.

Pocklington, Henry Cabourn (1914), **Some Diophantine Impossibilities**, Proc. Cambridge Philosophical Society 17, p.p. 108 – 121

Rosen, Kenneth H. (1993), **Elementary Number Theory and its Applications**, Addison-Wesley Publishing Company (there is now a fourth edition as well), ISBN 0-201-57889-1

Sastry, K. R. S. (2005), **A Description of a Family of Heron Quadrilaterals**, Mathematics and Computer Education, Winter, 72 -77, ISBN 0-201-57889-1

Sierpinski, Wacław (1962), **Pythagorean Triangles**, Graduate School of Science, New York.

Sierpinski, Wacław (1988), **Elementary Theory of Numbers,** Warsaw - Poland 1964, 480 p.p. (no ISBN number). More recent version (1988) published by Elsevier Publishing, and distributed by North-Holland. North-Holland Mathematical Library **32**, Amsterdam

Şahin, Ramazan ve Ark. (1997), **Sürat Geometri 2**, Sürat Yayınları, İstanbul.

Şenay, Hasan (2007), **Sayılar Teorisi Dersleri**, Dizgi Ofset Matbacılık. Konya.

Wiles, Andrew (1995), **Modular Elliptic Curves And Fermat's Last Theorem**, Annals of Mathematics (Annals of Mathematics) 142 (3): 443–551

Zelator, Konstantine (2005), **Triangles With Integer Side Lengths and Rational Internal Radius *P* and External Radius *R***, Mathematics and Computer Education; Spring 2005; 39, 2; Academic Research Library,152-159.

Zelator, Konstantine (2008a), **Certain Properties of Pythagorean Triangles Involving The Interior Diameter 2ρ And The Exterior Diameters $2\rho_\alpha$, $2\rho_\beta$, $2\rho_\gamma$, Part II: The Legs Case**, arxiv.org; arxiv: 0803.3605.

Zelator, Konstantine (2008b), **A Little Noticed Right Triangle**, arxiv.org; arxiv:0804.1340.

Zelator, Konstantine (2008c), **The Seventeen Elements of Pythagorean Triangles**, arxiv.org; arxiv: 0809.0902.

Zelator, Konstantine (2010), **Pythagorean Triangles With in Pythagorean Triangles**, arxiv.org; arxiv: 1007.5264.

T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	**Havva Gül KARATAŞ**	İmza:	
Doğum Yeri:	**Beyşehir**		
Doğum Tarihi:	**22.06.1987**		
Medeni Durumu:	**Bekâr**		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim:	**Atatürk İlköğretim Okulu**		**Konya**	**1993 – 1998**
Ortaöğretim:	**Atatürk İlköğretim Okulu**		**Konya**	**1998 – 2001**
Lise:	**Beyşehir Lisesi**		**Konya**	**2001 – 2004**
Lisans:	**Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi**	**İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı**	**Konya**	**2006 – 2010**
Yüksek Lisans:	**Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü**	**İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı**	**Konya**	**2010 – 2016**

Becerileri:	
İlgi Alanları:	**Matematik Eğitimi, Kitap Okumak, Yürümek, Tarih, Yüzme**
İş Deneyimi:	**2012 – 2014 Antalya Alanya Kestel Alantur Ayhan Şahenk Ortaokulu Matematik Öğretmeni** **2014 -…Konya Hüyük Suludere Şehit İsmail Şahin Ortaokulu Matematik Öğretmeni**
Aldığı Ödüller:	**Bölüm İkinciliği (2010)**
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	**Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR**
Tel / e-mail	**0544 203 64 22 / havvagul87_k@hotmail.com**
Adres:	**Yeni Mahalle, 769. Sokak, No:6, Daire No:8 - Beyşehir/KONYA**