



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BROUWER SABİT NOKTA TEORİSİ  
VE  
UYGULAMALARI**

**Ömer DURAK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mart-2022  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır**

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ömer DURAK

22/03/2022

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ BROUWER SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Ömer DURAK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sedat PAK

2021, 40 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Sedat PAK

Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI

Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kaynak araştırması ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, Brouwer sabit nokta teoremi  $\mathbb{R}$  durumu incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Brouwer sabit nokta teoreminin  $\mathbb{R}^n$  deki durumu incelenmiştir. Beşinci bölümde ise çalışmada yer alan bilgilerle uygulamalara yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Homeomorfizm, Kompaktlık, itme ve geri çekilme ve Sabit Nokta

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**BROUWER FIXED POINT THEORY  
AND  
APPLICATIONS**

**Ömer DURAK**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Sedat PAK**

**2021, 40 Pages**

**Jury**

**Doç. Dr. Sedat PAK**

**Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI**

**Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI**

This thesis consists of five main parts. In the first chapter, the source research and the aim of the thesis were given. In the second part, basic definitions and theorems related to the subject were reminded. In the third chapter, Brouwer fixed point theorem  $\mathbb{R}$  case was examined. In the fourth chapter, the case of Brouwer fixed point theorem in  $\mathbb{R}^n$  was analyzed. In the fifth chapter, the information and applications in the study were given.

**Keywords:** Homeomorphism, Compactness, repulsion and retraction, and Fixed Point

## ÖNSÖZ

Brouwer Sabit Nokta Teorisi ve Uygulamaları 1 başlıklı tez çalışmam Doç. Dr. Sedat PAK danışmanlığında hazırlanmıştır. Tez konumun belirlenmesinden teslim edilmesine kadar geçirdiğim süreçte benden yardımlarını esirgemeyen, bana rehberlik eden, bilgisi ve tecrübesi ile çalışmalarına yön veren kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Sedat PAK'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tez hazırlama süresince yanımda olan beni destekleyen sevgili eşim'e kızlarım ve oğlum 'a mesai arkadaşlarım M.Derya BOYLUĞ ve Süleyman GÜZEL'e en içten ve en derin duygularla teşekkür ederim.

Ömer DURAK  
KONYA-2022

# İÇİNDEKİLER

|  |                                  |
|--|----------------------------------|
| TEZ KABUL VE ONAYI.....  | HATA! YER İŞARETİ TANIMLANMAMIŞ. |
| ÖZET .....   | V                                |
| ABSTRACT .....   | VI                               |
| ÖNSÖZ .....  | VII                              |
| İÇİNDEKİLER .....  | VIII                             |
| ŞEKİLLER TABLOSU .....   | IX                               |
| 1. GİRİŞ .....   | 1                                |
| 1.1 LİTERATÜR ÖZETİ .....  | 1                                |
| 1.2 TEZİN AMACI: .....   | 4                                |
| 2. ÖN BİLGİLER .....   | 5                                |
| 2.1. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN HAZIRLIK .....  | 5                                |
| 3. BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ.....  | 9                                |
| 3.1. ÖZET .....  | 9                                |
| 3.2. BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ .....   | 10                               |
| 3.2. $\mathbb{R}$ - BİR BOYUTTA BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ.....                 | 11                               |
| 3.3. HOMEOMORFİK KÜMELERE GENİŞLEME .....  | 13                               |
| 3.4. İKİ BOYUTLU BİRİM DİSKLER İÇİN BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ .....            | 13                               |
| 4. $\mathbb{R}^n$ NİN HERHANGİ BİR BOYUTU İÇİN BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ ..... | 16                               |
| 4.2. STONE-WEIERSTRAUSS TEOREMİ .....  | 16                               |
| 4.3. TERS FONKSİYON TEOREMİ .....  | 16                               |
| 4.4. GERİ ÇEKİLME YOK TEOREMİ .....  | 17                               |
| 4.1.1. $B_n \subset \mathbb{R}^n$ ÜZERİNDE BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ .....     | 20                               |
| 5. UYGULAMALAR .....   | 22                               |
| 5.2. SCHAUNDER-TYCHONOFF SABİT NOKTA TEOREMİ .....                               | 24                               |
| 5.3. FROBENIUS .....   | 24                               |
| 5.4. BİRİMİN PARÇALANMASI .....  | 26                               |
| KAYNAKLAR .....  | 35                               |

## Şekiller Tablosu

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| ŞEKİL 1 AÇIK ARALIK .....          | 6 |
| ŞEKİL 2 AÇIK DİSK .....            | 6 |
| ŞEKİL 3 KONVEKS KÜME .....         | 7 |
| ŞEKİL 4 KONVEKS OLMAYAN KÜME ..... | 9 |
| ŞEKİL 5 SİMPEKSLER .....           | 8 |



## SİMGELER VE KISALTMALAR

|   |  |
|---|--|
| $(X, s)$  | Metrik uzay                                |
| $S$   | Birim Çember                               |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ( $x_n \rightarrow a$ ) | $(x_n)$ dizisinin $a$ sayısına yakınsaması |
| $\mathbb{N}$  | Doğal sayılar kümesi                       |
| $\mathbb{Q}$  | Rasyonel sayılar kümesi                    |
| $\mathbb{R}$  | Reel sayılar kümesi                        |
| $\mathbb{R}^+$  | Pozitif reel sayılar                       |
| $\mathbb{Z}$  | Tam sayılar kümesi                         |
| $\mathbb{C}$  | Karmaşık sayılar kümesi                    |
| $\emptyset$   | Boş küme                                   |
| $\Leftrightarrow$   | Ancak ve ancak                             |
| $[0, \infty)$   | Negatif olmayan reel sayılar               |
| $[0, \infty]$   | Genişletilmiş negatif olmayan reel sayılar |
| $(0, \infty)$   | Pozitif reel sayılar                       |
| $\ x\ $   | Norm fonksiyonu                            |
| $(X, \ \cdot\ )$  | Normlu uzay                                |
| $(X, \tau)$   | Topolojik uzay                             |
| $(x_n)$   | $\{x_n\}$ Dizisi                           |
| $t$   | Geri çekilme fonksiyonu                    |
| $\mathcal{B}$   | Kapalı birim disk                          |
| $\sup A$  | $A$ kümesinin en küçük üst sınırı          |
| $\inf A$  | $A$ kümesinin en büyük alt sınırı          |



# 1.GİRİŞ

## 1.1 Literatür Özeti

Temel olarak sabit nokta teoremi, bir  $F$  fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyen bir sonuç olarak düşünülebilir. Sabit noktalar 19.yüzyılın sonlarında matematiğin önemli bir çalışma alanı oldu. Henri Poincare lineer olmayan problemlerin çözümünde sabit nokta teoremini kullanmaya başladı. Böylece sabit nokta teoremini topolojiye taşıdı. Sabit nokta teoreminin, ekonomik modellerde fiyat dengesi ve Pareto optima, minimum-maksimum veya eyer noktaları, oyun teorisi ve doğrusal olmayan programlama, çözümleri: doğrusal olmayan denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler ve fonksiyonel diferansiyel denklemler. diferansiyel geometri, cebirsel topoloji alanlarında önemli uygulamaları vardır. Bu şekilde geniş bir uygulama alanına sahip olan, sabit nokta teoremlerinin birkaçını hatırlayacak olursak, Banach sabit nokta teoremi, Borel sabit nokta teoremi, Browder sabit nokta teoremi, Caristi sabit nokta teoremi, Kleene sabit nokta teoremi, Nielsen sabit nokta teoremi, Brouwer sabit nokta teoremi vb. sayabiliriz.

Birçok sabit nokta teoremi arasında, Brouwer's sabit nokta teoremini seçmemizin nedeni, matematiğin birçok alanında kullanılmasıdır. Jordan eğri teoremi, tüylü top teoremi ve Borsuk-Ulam teoremi ile birlikte, Öklid uzaylarının topolojisini karakterize eden anahtar teoremlerden biridir. Bu ona topolojinin temel teoremleri arasında bir yer verir. Teorem ayrıca diferansiyel denklemler hakkında önemli sonuçlar elde etmek için kullanılır. Bunun yanı sıra oyun teoride ve ekonomide, Brouwer sabit nokta teoremi ve onun uzantısı olan Kakutani teoremi önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla, Brouwer sabit nokta teoreminin çok fazla uygulama alanına sahip olduğu için diğer sabit nokta teoremlerine göre, yapılacak çalışmalarda önem teşkil etmektedir.

Brouwer Sabit Nokta Teoremi, genellikle Nash dengelerinin varlığının kanıtlanmasında kullanılır. Oyun Teorisinde, oyuncular rakiplerinin hangi stratejileri kullanacağını, kullanılan stratejilerinin değişmeyeceğini ve ayrıca kendilerinin kullandıkları stratejinin mevcut stratejilerin en iyi si olduğunu bildikleri durumda bir Nash dengesi oluşur. Yani her oyuncu diğerinin ne yapmayı planladığını biliyor ve rakiplerinin ne planladığını göz önünde bulundurarak kendi stratejilerinin en iyisi olduğunu biliyor. Bu durum oyun teorisinde farklı oyuncuların neredeyse aynı anda hareket ettiği sorunları veya oyunları analiz etmek için

kullanılır. Bunun özel bir örneği, piyasayı modellemektir; Nash Dengeleri, piyasa krizleri sırasında alınan eylemleri tahmin etmek ve modellemek için kullanılır.

Diğer bir uygulama ise Dinamik Sistemlerdedir. Denge, kararlı veya kararsız sabit noktalar olarak kabul edilebilir. Böylece, belirli uzaylarda, birinin bir dengeye sahip olması garanti edilir.

Bunun özel bir uygulaması, bu sefer Nash Dengeleri yoluyla olduğundan daha doğrudan ekonomiye yöneliktir. Sabit noktalar, serbest piyasada arz ve talep vb. dengenin varlığını kanıtlamak için kullanılır.

Büzülme ve daralma dönüşümü olarakta bilinen Banach sabit nokta teoremi verilen bir fonksiyonun iterasyon adı verilen bir işlem ile sabit bir noktayı bulmamızı sağlayan genel bir teorem iken, tezimizde temel teşkil eden, Brouwer sabit nokta teoremi  $n$  boyutlu Euler uzayında, bir kapalı birim küreden kendi üzerine sürekli olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyonun sabit bir noktaya sahip olduğunu ifade eder, fakat bu sabit noktayı nasıl bulacağımızı göstermez.

Brouwer sabit nokta teoremi, cebirsel topolojinin erken kazanımlarından biridir ve fonksiyonel analizde önemli olan daha genel sabit nokta teoremlerinin temelidir.

LEJ Brouwer (LEJ Brouwer, 1910) çalışmasında Sürekli bir  $f: S \rightarrow S$  dönüşümü altında bir  $n$  boyutlu simpleks  $S$  kendi içinde en az bir nokta vardır öyleki  $x \in S$  ise  $f(x) = x$  teoremini LEJ Brouwer tarafından kanıtlanmıştır. P. Bohl(P. Bohl, 1904) çalışmasında, benzer bir teoremi kanıtlanmıştır.

Brouwer'in teoremi, kapalı dışbükey cisimlerin sürekli dönüşümlerine genişletilebilir. Ayrıca  $n$  boyutlu topolojik vektör uzayı ve çeşitli denklemlerin çözümlerinin varlığına ilişkin teoremlerin ispatlarında yaygın olarak kullanılır ve sonsuz boyutlu topolojik vektör uzaylarına genelleştirilebilir.

Brouwer sabit nokta teoreminin birçok farklı ispatı vardır. Bu kanıtlar içinde en anlaşılabilir olanı cebirsel topolojiyi kullanılarak yapılan ispattır. Istrăţescu (Istrăţescu, 1981), çalışmasında, H. Poincaré (H. Poincaré, 1886) sürekli dönüşümler altında sabit nokta sonucunu ispatlamış ve  $f: B^n \rightarrow B^n$  sürekli dönüşümünün Brouwer sabit nokta teoremine eşdeğer olduğu göstermiştir.

Brouwer sabit noktalarını hesaplamının bazı metotları vardır ve bu metotlar, ekonomik dengelerin hesaplanması da dahil olmak üzere çok sayıda uygulamada önemlidir. H. Scarf( H. Scarf, 1967) Brouwer sabit noktalarının, yaklaşık olarak tahmin etmek için

algoritmalar vermiştir. S. Karamadian(S. Karamadian, 1977) ve E. Allgower, K. Georg(E. Allgower and K. Georg, 1980), bu tür algoritmalar daha sonra fonksiyonların sıfırlarını hesaplamak için sözde homotopi veya devam yöntemlerinde geliştirildi.

L.E.J. Brouwer, "Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten" adlı çalışmasında bir  $E^n$  Euclid uzayında  $A$  nın herhangi bir iç noktası homeomorfik dönüşümler altında bir  $E^n$  Euclid uzayında  $B$  alt kümesine, bu alanın herhangi bir iç noktası da bir iç noktaya eşlenir.  $E^n$  Euclid uzayında herhangi bir iç olmayan nokta, iç olmayan bir noktaya eşlendiğini kanıtlamıştır .

Brouwer alan değişmezliği teoreminin modern bir açıklaması için J. Dugundji, "Topoloji", çalışmasında topolojik boyut fikri için önemli sonuçlar bulabiliriz. ( $dim E^n = n$ ).



## 1.2 Tezin Amacı:

Brouwer sabit nokta teoremi, kendisine kompakt bir dışbükey kümeyi eşleştiren herhangi bir sürekli fonksiyon için böyle bir nokta olduğunu belirtir. Brouwer'in teoreminin en basit formları, gerçel sayılarda kapalı bir aralıktan kendisine veya kapalı bir yuvardan kendisine sürekli fonksiyonlar içindir. 20. yüzyılda çok sayıda sabit nokta teoremi geliştirildi ve hatta sabit nokta teorisi olarak adlandırılan bir matematik dalı bile geliştirildi. Brouwer'in teoremi muhtemelen en önemlisidir. Aynı zamanda topolojik manifoldların topolojisine ilişkin temel teoremler arasındadır ve genellikle Jordan eğri teoremi gibi diğer önemli sonuçları kanıtlamak için kullanılır. 1930'da Brouwer'in sabit nokta teoremi Banach uzaylarına genelleştirildi. Bu genelleme Schauder'in sabit nokta teoremi olarak bilinir ve S. Kakutani tarafından çok değerli fonksiyonlara genelleştirilmiştir. Benzer şekilde, Brouwer'in teoremi, Merkezi Limit Teoreminin ispatı için kullanılır. Teorem, belirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varoluş kanıtlarında da kullanılabilir. Bizde bu çalışmamız da bu kadar önemli ve bir o kadar kullanışlı bir teoremi kullanarak çeşitli uygulamalarını vereceğiz.

## 2. ÖN BİLGİLER

### 2.1. Temel Kavramlar ve Ön Hazırlık

Bu bölümde çalışmamızda geçen, sabit nokta, Banach Sabit nokta, Büzülme teoremi, Açık ve Kapalı yuvar, Topolojik uzay, Homomorfizim ve vb. gerekli tanımlar hatırlatılmıştır.

**Tanım 2.1.1:**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $f: X \rightarrow X$  tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun sabit noktası  $a \in X$  olmak üzere  $f(a) = a$  özelliğini sağlayan noktadır.

**Örnek 2.1.2:** Bir  $f(x) = x$  şeklinde tanımlanan fonksiyonun bütün noktaları sabit nokta iken,  $f(x) = -\frac{1}{x}$  fonksiyonunun hiçbir sabit noktası yoktur,  $f(x) = 3$  ve  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonlarının sabit noktaları vardır ve bu noktalar sırasıyla  $x = 3$  ve  $x = 1$  noktalarıdır.

**Tanım 2.1.3:**  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $(X, d)$  metrik uzayı verilsin.  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $\forall x, y \in X$  için  $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$  olacak şekilde  $\alpha \in (0, 1)$  sabiti bulunabiliyorsa  $f$  fonksiyonuna büzülme fonksiyonu denir. Tanımlanan büzülme fonksiyonu  $X$  üzerinde düzgün süreklidir.

**Tanım 2.1.4:**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $(X, d)$  metrik uzayı verilsin.  $(X, d)$  metrik uzayı içindeki ine her Cauchy dizisi  $(X, d)$  metrik uzayının bir noktasına yakınsıyorsa  $(X, d)$  metrik uzayına tamdır denir.

**Tanım 2.1.5:**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $(X, d)$  bir tam metrik uzayı ve  $f: X \rightarrow X$  bir büzülme fonksiyonu olmak üzere,  $f$  nin  $x \in X$  ile gösterilen bir ve yalnız bir sabit noktası vardır.

**Tanım 2.1.6:**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $\tau$  da  $X$  in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun,

i)  $X, \emptyset \in \tau$

ii)  $\tau$  nun elemanlarının sonlu kesişimi yine  $\tau$  nun elemanıdır.

iii)  $\tau$  nun elemanlarının keyfi bileşimleri yine  $\tau$  nun elemanıdır, şartları sağlanıyor ise bu durumda  $\tau$  ya  $X$  üzerinde bir topoloji,  $(X, \tau)$  ikilisine de **topolojik uzay** denir.

**Tanım 2.1.7:**  $(X, d)$  herhangi bir metrik uzay ve bu uzayın herhangi bir  $G \subseteq X$  alt kümesi verilmiş olsun her  $x \in G$  için  $B(x, \varepsilon)$   $x$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı açık yuvarı  $B(x, \varepsilon) \subseteq G$  olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı varsa  $G$  kümesine  $(X, d)$  metrik uzayında **açık küme** denir.

$\mathbb{R}^n$  euclid metrik uzayı için açık kümeler  $n = 1, 2, 3$  için sırasıyla açık aralık, disk ve yuvardır.



Şekil 1 Açık aralık



Şekil 2 Açık disk

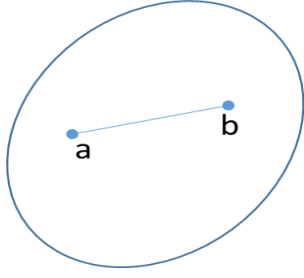
$\mathbb{R}$  ve  $\mathbb{R}^2$  temel açık kümelerdir. Uç noktalar doldurulmadığı için aralığın açık olduğuna ve diskin noktalı bir sınırı olduğuna dikkat edin, bu sınırdaki noktaların aslında kümede olmadığını gösterir.

**Tanım 2.1.8:**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı olmak üzere  $\tau$  nun elemanlarına  $(X, \tau)$  topolojik uzayında açık küme denir.

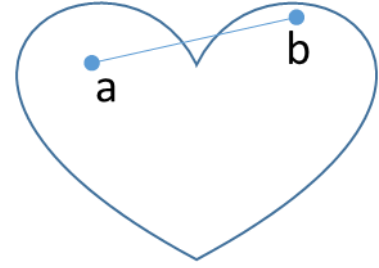
**Tanım 2.1.9:**  $(X, d)$  metrik uzayında  $A \subseteq X$  alt kümesi açık bir küme ise bu durumda  $X \setminus A$  kümesi  $(X, d)$  metrik uzayın da kapalı bir kümedir. Aynı şekilde  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $\tau$  nun elemanlarının tümleyenide  $(X, \tau)$  topolojik uzayında kapalı kümelerdir.

$A$  bir küme ve bu kümenin tümleyeni olan  $A^c$  açık ise bu durum da  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kapalıdır. Kapalı kümelerin, keyfi kesişimi ve sonlu birleşimleri kapalıdır.  $\mathbb{R}$  de kapalı aralıklar ve tek nokta kümeleri kapalıdır.

**Tanım 2.1.10:**  $A \subset \mathbb{R}^n$  ve  $a, b \in A$  olsun. Her  $a$  ve  $b$  noktalarını birleştiren doğru parçası  $A$  kümesi içinde kalıyorsa  $A$  kümesine konveks küme denir.



Şekil 3 Konveks küme



Şekil 4 Konveks olmayan küme

**Tanım 2.1.11:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzayı ve  $A \subseteq X$  alt kümesi verilsin. Her  $i \in I$  ve  $I$  bir indis kümesi  $A_i \in \tau$  olmak üzere  $\{U_i: i \in I\}$  koleksiyonu  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  olacak şekilde varsa  $\{U_i: i \in I\}$  koleksiyonuna  **$A$  nın bir açık örtüsü** denir.

**Tanım 2.1.12:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $X$  in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu durumda  $(X, \tau)$  topolojik uzayına kompakt topolojik uzay denir.

$\mathbb{R}^n$  alışılmış topolojik uzayında kapalı ve sınırlı her alt kümesi kompaktır. Metrik uzaylar, normlu uzaylar ve genel topolojik uzaylarda kapalılık ve sınırlılık kompaktlık için yeterli olmayabilir.

**Tanım 2.1.13:**  $(X, \tau_1)$  ve  $(Y, \tau_2)$  iki topolojik uzay ve bu uzaylar arasında  $f$  ile ifade edeceğimiz bir dönüşüm tanımlı olsun.  $(Y, \tau_2)$  uzayın da her  $V \in \tau_2$  kümenin ters görüntüsü  $f^{-1}(V) \in \tau_1$  olacak şekilde varsa  $f$  fonksiyonu süreklidir denir.

**Tanım 2.1.14:**  $(X, \tau_1)$  ve  $(Y, \tau_2)$  iki topolojik uzay ve bu uzaylar arasında  $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  ile gösterilen dönüşümü verilmiş olsun. Her  $G \in \tau_1$  için  $f(G) \in \tau_2$  olacak şekilde var ise  $f$  fonksiyonuna açık fonksiyon, her  $\mathcal{F} \subseteq X$  kapalı kümesi için  $f(\mathcal{F})$  kapalı oluyorsa bu durumda  $f$  fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.

**Tanım 2.1.15:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu verilsin.  $f$  fonksiyonu her  $y \in Y$  için bir  $x \in X$  vardır, öyle ki  $f(x) = y$  dir. Yani  $f$  fonksiyonu örtendir. Her  $x_1, x_2 \in X$  için  $f(x_1) = f(x_2)$  iken  $x_1 = x_2$  veya duali olan  $x_1 \neq x_2$  iken  $f(x_1) \neq f(x_2)$  olacak şekilde varsa  $f$  fonksiyonuna birebir fonksiyon denir. Hem birebir ve hem de örten ise birebir örten fonksiyon denir.

**Tanım 2.1.16:**  $(X, \tau_1)$  ve  $(Y, \tau_2)$  iki topolojik uzay ve bu uzaylar arasında tanımlı  $f$  fonksiyonu verilmiş olsun.  $f$  fonksiyonu birebir ve örten ayrıca  $f$  ve  $f^{-1}$  fonksiyonları sürekli ise bu durumda  $f$  ye homeomorfizm denir.  $(X, \tau_1)$  ve  $(Y, \tau_2)$  topolojik uzaylarına homeomorfik uzaylar denir.

**Tanım 2.1.17:**  $(X, \tau)$  topolojik uzayına ait bir özellik bu uzaya homeomorf olan diğer topolojik uzaylara da ait ise bu özelliğe topolojik özellik denir.

Kompaktlık ve bağlantılılık topolojik özelliklerden en iyi bilinenlerdendir.

**Tanım 2.1.18:**  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  kümesinin elemanları  $R^n$  de sıralı kümeler.  $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0, \}$  kümesi de  $R^n$  vektör uzayının lineer bağımsız alt uzayı olmak üzere,  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  alt kümesi tarafından gerilen konveks kümeye  $n - sipleks$  denir ve  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  ile gösterilir.

$n = 0$  için   $0 - sipleks$  şekil olarak nokta,

$n = 1$  için   $1 - sipleks$  şekil olarak doğru,

$n = 2$  için   $2 - sipleks$  şekil olarak üçgen,

$n = 3$  için   $3 - sipleks$  , şekil olarak düzgün dörtyüzlü belirtir.

Şekil 5 Simpleksler

### 3. Brouwer Sabit Nokta Teoremi

#### 3.1. Özet

Brouwer sabit nokta teoremi(Brouwer,1911) sonlu boyutlu her simpleksten kendi içine her fonksiyonun sabit bir noktası var olduğunu ifade eder. Bu teorem Tychonof (Tychono, 1935) ve Dyer (Dyer,1956) tarafından, topolojik vektör uzayların, boştan farklı kompakt konveks kümeleri üzerine genellenmiştir.

Brouwer sabit nokta teoremi kompakt konveks kümeler sınıfının  $\mathbb{R}^n$  de sabit nokta özelliğine sahip olduğunu ifade eder. Fakat bu noktanın nasıl bulunacağı hakkında bilgi vermez. Bu noktanın veya noktaların bulunması için çeşitli çalışmalar olmuştur. Bolzano “Eğer bir fonksiyon kapalı bir aralıkta sürekli ve bu aralıkta zıt değerler alıyor ise bu fonksiyon en az bir noktada sıfır değerine sahiptir” şeklinde ifade edilen ara değer teoremi ile bu aralıkta sabit bir noktanın bulunabileceğini göstermiştir.

Bu çalışmamızda ağırlıklı olarak (C. Buxton, 2016) dan faydalandık.

**Örnek 3.1.1:**  $X = [0,1]$  aralığı ve  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  sürekli fonksiyonu verilsin.  $x \in [0,1]$  için  $f(x) = x$  şeklinde tanımlı fonksiyonu sabit noktaya sahiptir.

**Çözüm**  $x \in [0,1]$  için  $g(x) = x - f(x)$  şeklinde tanımlı  $g(x)$  fonksiyonu sürekli olup.

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \text{ olup } g(0) \leq 0,$$

$$g(1) = 1 - f(1) = 1 - 1 = 0 \text{ olup } g(1) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan da

$$g(0) \leq 0 \leq g(1)$$

yazılır.

Ara değer teoreminden bir  $x^* \in [0,1]$  elemanı vardır ve  $g(x^*) = 0$  dır. Buradan da

$$x^* - f(x^*) = 0$$

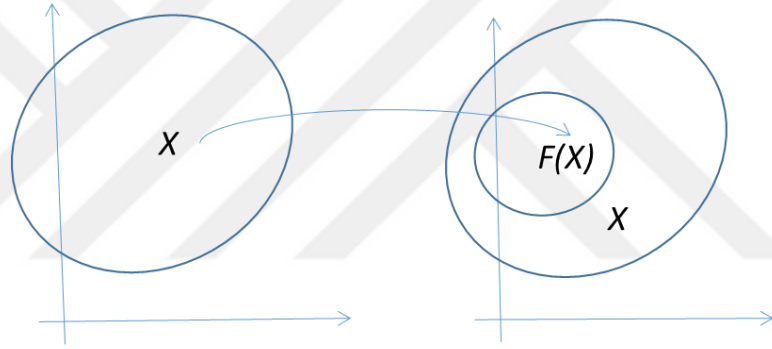
yazabiliriz ve

$$f(x^*) = x^*$$

elde edilir ki  $x^*$  sabit noktası bulunmuş olur.

### 3.2. Brouwer Sabit Nokta Teoremi

$X \subset \mathbb{R}^n$  kapalı konveks bir küme ve  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sürekli fonksiyonu  $X$  in kendi içine ise yani  $f(X) \subseteq X$  ise bu durumda  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $c$  gibi bir sabit notaya sahiptir ve bu nokta  $f(c) = c$  şeklindedir.



*Brouwer Sabit Nokta Teoremi*

**Tanım 3.2.1: ( $\mathbb{R}$  de Brouwer Sabit Nokta Teoremi)**  $X \subset \mathbb{R}^n$  kapalı konveks bir küme ve

$$f: X \rightarrow X$$

sürekli fonksiyonu içine bir fonksiyon, yani  $f(X) \subseteq X$  ise bu durumda  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $c$  gibi bir sabit notaya sahiptir ve bu nokta  $f(c) = c$  şeklindedir.

Teorem  $n$  simpleksler için kompakt ve konveks kümelerin özel bir ailesini verir; bir  $n$  –simpleks,  $n + 1$  köşesi olan  $n$  boyutta 'en basit' çokgendir. Biz çalışmamızda simpleksler yerine birim aralıklarına ve diskler üzerinde duracağız.

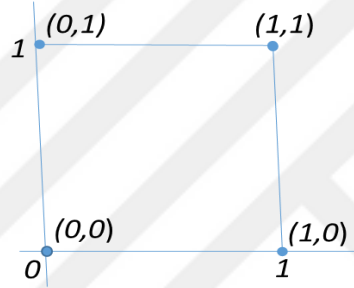
### 3.2. $\mathbb{R}$ - Bir Boyutta Brouwer Sabit Nokta Teoremi

İlk olarak sabit nokta teoreminin en basit hali olan bir boyutlu durumunu yani göz önüne alalım, bu durumda  $F \subset \mathbb{R}$  olduğunda  $\mathbb{R}$  sadece bir boyuta sahiptir ve  $I = [0,1]$  kapalı aralığı birim kare belirtir. Ayrıca

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

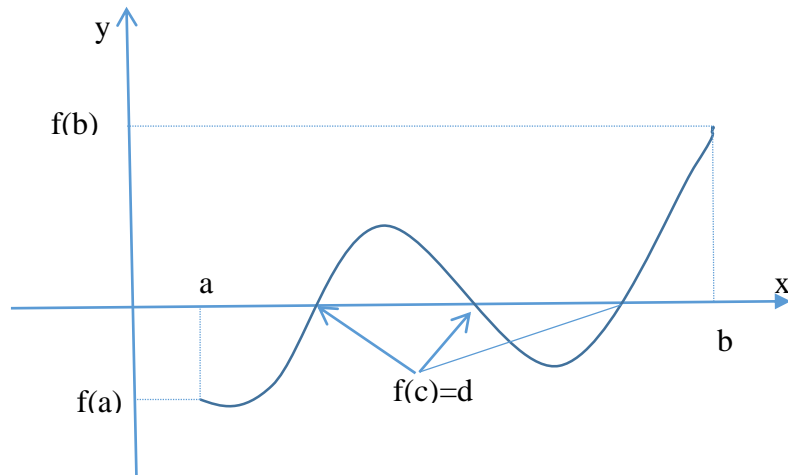
sürekli fonksiyonu sabit noktaya sahiptir. Bu sabit nokta  $f(c) = c$  olacak şekilde,  $c \in X$  noktasıdır.

$F$ ,  $[0,1]$  birim karesi 1-boyutlu ve  $[0,1] \times [0,1]$ , 2- boyutu göstermek üzere elde edilen birim kare, şekilde de görüldüğü gibi, birim aralıkta kendisi ile kesişir.



Şekil: Birim Kare

**Teorem 3.2.1. (Ara Değer Teoremi)**  $X, Y \in \mathbb{R}$  ve  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu olsun. Bu durumda her  $d \in (f(a), f(b)) \subseteq Y$  dir. Yani  $f(a) \leq f(b)$  iken bazı  $c \in (a, b)$  için  $f(c) = d$  dir.



Şekil: Ara değer teoremi.

$\mathbb{R}$  nin kapalı ve konveks bir boyutlu alt kümesi  $[0,1]$  kapalı aralığı ile homeomorfiktir. Yani aralarında tanımlı bire-bir, örten sürekli ve tersi de sürekli olan bir fonksiyon vardır.

Brouwer Sabit Nokta teoremini herhangi bir boyuttaki durumunun ile  $[0,1]$  durumu denk olup, aşağıdaki teoremin ispatında uygulayabiliriz.

**Teorem 3.2.2.**  $F$  kompakt ve konveks bir küme ve  $f: F \rightarrow F$  sürekli fonksiyonu verilsin.  $\exists c \in K$  için  $f(c) = c$  olacak şekilde bir  $c$  sabit noktası vardır.

**İspat:**  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  birim karesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.  $f$  sürekli ve  $I(x) = x$  özdeşlik fonksiyonu da sürekli olup bu fonksiyonların farkı olan

$$g(x) = f(x) - x$$

fonksiyonu da birim kare üzerinde süreklidir. Burada,

$$x = 0, f(0) \geq 0 \text{ ve } g(0) = f(0) - 0$$

olduğundan  $g(0)$  pozitif veya 0 dır. Yani  $g(0) \geq 0$  dır. Benzer şekilde

$$x = 1, f(1) \leq 1 \text{ ve } g(1) = f(1) - 1$$

olduğundan  $g(1)$ , ya negatiftir veya 0 dır. Yani  $g(1) \leq 0$  dır

Böylece, kapalı küme üzerinde ki  $g$  sürekli fonksiyonuna ara değer teoremini uygulayacak olursak.

$[0,1]$  kapalı aralığında fonksiyon  $g(0) \geq 0$  ve  $g(1) \leq 0$  olmak üzere zıt işaretli değerler alır, herhangi bir  $d$  sabiti  $d = 0$  için  $g(c) = d$  olacak şekilde bir  $c \in [0,1]$  vardır.

Böylece

$$g(c) = f(c) - c = 0$$

$$f(c) = c$$

Olacak şekilde bir  $c$  noktası vardır. Böylece  $f(c) = c$  olur dolayısıyla  $c$  istenen sabit noktadır. Böylece ispat yapılmış olur.

**Not:** Bir sabit nokta,  $f(x) = x$  doğrusunu keser. Dolayısıyla sabit noktası olmayan bir fonksiyon  $f(x) = x$  noktasını kesmez.

Sürekli bir fonksiyon  $i(x) = x$  doğrusu ile daima kesişir. Dolayısıyla  $i(x) = x$  doğrusu ile kesişmesi sabit bir noktaya sahip olması demektir. Çünkü  $i(x) = x$  doğrusu üzerindeki tüm noktalar sabit noktalardır.

### 3.3. Homeomorfik Kümelere Genişleme

Başka bir kompakt dışbükey  $K$  aralığı için sabit bir noktanın olup olmadığını belirlemek için  $F$  aralığı ile  $[0,1]$  kapalı aralığının homomorfik olduğunu göstermeliyiz. Yani aralarında bir  $f$  dönüşümü birebir ve örten, kendisi ve tersi sürekli olacak şekilde var olduğunu göstermeliyiz. Eğer gerçekten öyle bir  $f$  dönüşümü var ise, o zaman  $F$  kendi içine herhangi bir sürekli fonksiyon için bir sabit noktaya sahiptir deriz.

$F$  kümesi kompakt ve konveks olmak üzere,  $f$  fonksiyonu sürekli iken, daha yüksek boyutlar içinde benzer şekilde  $f:F \rightarrow F$  fonksiyonunu sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

### 3.4. İki Boyutlu Birim Diskler İçin Brouwer Sabit Nokta Teoremi

**Tanım 3.4.1.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesini kapsayan kapalı kümelerin en dar olanına  $A$  kümesinin kapanışı denir ve  $\bar{A}$  şeklinde gösterilir. Dolayısıyla tüm kapalı kümelerin kesişimi  $A$  yi kapsar. Kapanışın kümesi daima kapalı bir kümedir.

**Tanım 3.4.2. Geri Çekme**  $M \subseteq N$  ,  $N \subseteq \mathbb{R}^2$  kümeleri verilsin. Sürekli bir  $t:N \rightarrow M$  fonksiyonu her  $b \in M$  için  $r(b) = b$  şeklinde tanımlı olacak şekilde varsa bu fonksiyona bir geri çekilme denir

Burada  $N$  nin bir disk  $M$  nin de diskin, yüzeyi veya sınır olarak düşünebiliriz, dahası böyle bir geri çekilmenin yokluğunun ele alacağız.

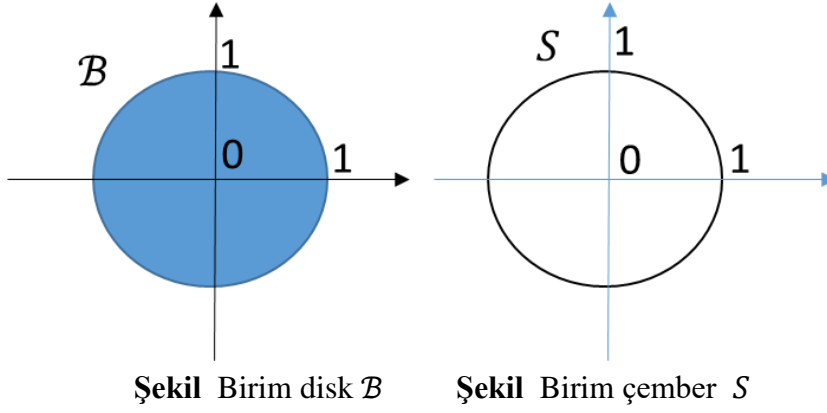
$\mathbb{R}^2$  de birim disk;

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$$

ve birim çember;

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$$

olarak tanımlanır.



Brouwer sabit nokta teoreminin kanıtlarının çoğu geri çekilmeme teoremine dayandığından aşağıdaki teorem önemlidir. Böylece sabit noktası olmayan bir fonksiyonu sınıflandırmak da mümkün olacaktır.

**Teorem 3.4.3.** Kapalı bir,  $B \subset \mathbb{R}$  birim diskten  $S$  birim çemberinin sınırına geri çekme mevcut değildir.

**İspat:**  $B$  birim diskinden  $S$  birim çemberinin sınırına geri çekilme

$$r: B \rightarrow S$$

Olsun.  $a, b \in S$  olmak üzere,  $S$  nin tümleyeni  $S \setminus \{a, b\}$  den ayrık açık iki eğriyi  $S$  den çıkartalım.

$A = r^{-1}(a)$  ve  $B = r^{-1}(b)$  olsun.  $r$  geri çekilmesinden,  $a \in A$ ,  $b \in B$  olmak üzere  $A$  ve  $B$  kümeleri  $S$  ile kesişirler.  $r$  sürekli olduğu için  $\{a\}$  ve  $\{b\}$  kapalıdırlar. Dolayısıyla  $A$  ve  $B$  kapalı olmalıdırlar. Ayrıca  $a$  ve  $b$  noktaları sırasıyla  $A$  ve  $B$  nin  $S$  yi kesebileceği tek tek noktalar olabilir. Çünkü bu noktalar  $A$  ve  $B$  nin  $S$  deki tek elemanlarıdır.

$\overline{(S \setminus \{a, b\})} = S$  olup, kapanışı  $S$  yi içerecek  $B \setminus (A \cup B)$  alt kümesi elde edebiliriz. Elde edilen bu kümeye  $P$  diyelim, bu kümeyi açık ve yol bağlantılı olarak seçebiliriz.

$S$  nin  $a$  noktasını içeren, kapalı yayını  $S_a$  olarak ifade edelim.  $S_a$  kapalı yayının başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla  $x_a, y_a$  olsun. Dolayısıyla  $x_a, y_a$  noktaları,  $\bar{P}$  aittir. Böylece onları birbirine bağlayan bir yol vardır yani yol bağlantılıdır.

Dahası  $P$  yi  $\mathcal{B} \setminus (A \cup B)$  kümesinin altkümesi olup, bu yol  $A$  veya  $B$  kesmez. Ancak bu yolu  $C \setminus \{a, b\}$  ile birleştirecek, başka bir bağlantılı küme elde ederiz. Yolun ve  $S \setminus \{a, b\}$  nin birleşiminin geri çekilmesinin görüntüsü  $S \setminus \{a, b\}$  dir. Sürekli fonksiyon altında bağlantılı bir kümenin görüntüsü bağlantılı olmayabilir. Dolayısıyla  $r$  bir geri çekilme yoktur. (J. Coughlin, 2011).

Yukarıda ispatlanan geri çekilmez teoremi,  $\mathcal{B}$ 'deki Brouwer sabit nokta teoreminin ispatı için önemlidir.

**Teorem 3.4.4.**  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^2$  üzere  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  sürekli fonksiyonu verilsin.  $f(c) = c$ ,  $c \in \mathcal{B}$  için  $c$  sabit noktadır.

**İspat:**  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbb{R}^2$  de birim disk ve  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki bu fonksiyonun bir sabit noktası olmasın. Ayrıca her  $x \in \mathcal{B}$  için  $t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , fonksiyonunu tanımlarsak,  $S$  birim diskini,  $f(x)$  boyunca geçerek  $\mathcal{B}$  nin sınırından geçen ışının ucuna tanımlar. Dolayısıyla her  $x \in \mathcal{B}$  için  $f(x) \neq x$  olup, iyi tanımlı olacaktır.  $t, f$  nin terimleri ile tanımlandığı ve  $f$  sürekli olduğu için  $t$  de süreklidir.

Fakat  $S$  üzerinde bulunan bir  $x_0$  noktasını alırsak. Bu durumda  $r(x) = x$  olur ki  $t$  geri çekme olması demektir. Fakat böyle bir geri çekilme mevcut değildir. Bu bir çelişki olup, kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla bu bir geri çekilmemedir.

O halde herhangi bir  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  fonksiyonun sabit noktasının olması gereki

Yine bu  $\mathbb{R}^2$  de  $\mathcal{B}$  ye homeomorfik olan herhangi bir küme için, yani kompakt dışbükey kümeler için de geçerli olacaktır.

## 4. $\mathbb{R}^n$ nin Herhangi Bir Boyutu için Brouwer Sabit Nokta Teoremi

Bu çalışmamızda ağırlıklı olarak (C. Buxton, 2016) dan faydalandık. Brouwer Sabit Nokta Teoremini  $\mathbb{R}^n$  nin herhangi bir boyutu için ispatlamaya çalışalım.

**Tanım 4.1.**  $C^1$ : Bir  $C_1$  fonksiyonu sürekli ve sürekli türevi vardır.

### 4.2. Stone-Weierstrauss Teoremi

Sürekli bir fonksiyon altında noktaları ayıran bir alt cebir ile herhangi bir dereceye kadar yaklaşabiliriz. Yani verilen fonksiyona istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Burada  $C^1$  polinomu alt cebiri ayıran bir noktadır. Biz polinomları vermek için yalnızca Stone-Weierstrauss kullanacağız.

### 4.3. Ters Fonksiyon Teoremi

$X \subseteq \mathbb{R}^n$  açık olsun.  $c \in X$  noktasında  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu sürekli türevlenebilir ve kısmi türevlerin bir matrisi olarak ifade edilebilir olsun ve türev  $c \in X$  noktasında tersi alınabilir ise  $c$  nin komşuluğunda da tersi alınabilir.

İlk olarak, yine böyle bir integral parça olduğu için, Brouwer Sabit Nokta Teoremini kullanmadan önce, geri çekilmeme teoreminin genel boyutlu durumunu kanıtlayacağız. Daha fazla boyutun eklenmesi, teoremde değişiklik yapılmasını gerektirir, çünkü artık bunu kanıtlamak için türevler kullanılır ve  $C^1$  sınıfının dışında fonksiyonların kullanılabilir türevleri yoktur. Böyle bir geri çekilmenin var olabileceğini varsayarak ve ardından çelişki yoluyla varlığını çürüterek ilerleyelim.

#### 4.4. Geri Çekilme Yok Teoremi

$B^{n-1}$  birim küresinin sınırından,  $n - boyutu$   $B^n$  birim topundan  $C^1$  geri çekme olamaz.

**İspat:**  $t: B^n \rightarrow B^{n-1}$ , fonksiyonu,  $n - boyutu$   $B^n$  birim diskinden  $B^{n-1}$  sınırına  $C^1$  geri çekilmesi olsun.  $t$ - sabit olmak üzere;

$$g(x) = t(x) - x, \quad r \in [0,1]$$

olsun ve

$$\begin{aligned} f_l(x) &= x + mg(x) \\ &= x(1 - m) + mt(x) \end{aligned}$$

$x \in B^n$  için üçgen eşitsizliğine göre

$$\|f_m(x)\| \leq \|x\|(1 - m) + m\|t(x)\|,$$

çünkü  $m$  ve  $1 - m$  nin her ikisinde büyüklük olarak 1 den küçüktür. Üstelik  $x$  ve  $t(x)$  büyüklük olarak 1 den küçük olmalı.

$$\|f_m(x)\| \leq (1 - m) + m = 1;$$

bu  $f_m : B^n \rightarrow B^n$  fonksiyonun yapar. Dahası eğer  $x \in B^{n-1}$  ise,

$$\begin{aligned} f_l(x) &= x(1 - m) + mt(x) \\ &= x(1 - m) + m(x) \\ &= x \end{aligned}$$

olup  $r$  geri çekilmedir. Bu  $B^{n-1}$  in tüm noktalarını  $f_m$  nin sabit noktası yapar.

$t, C^1$  dir ve  $h$  da  $C^1$  olmalıdır. Dolayısıyla

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|$$

Sabit olan bazı  $C$  ler vardır.

$x_1, x_2 \in B$  için,  $x_1 \neq x_2$  iken  $f_m(x_1) = f_m(x_2)$  olsun.  $f_l$  nin tanımından

$$f_m(x_1) = f_m(x_2)$$

$$x_1 + mg(x_1) = x_2 + mg(x_2)$$

Gerekli işlemler yapılırsa,

$$x_1 - x_2 = mg(x_2) - mg(x_1)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|mg(x_2) - mg(x_1)\| \\ &= \|m(g(x_2) - g(x_1))\| \\ &= m\|g(x_2) - g(x_1)\| \\ &\leq mC\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu  $mC \geq 1$  olması demektir.

$m < C^{-1}$  olduğunda  $r_l$  birebirdir. Çünkü  $mC \leq 1$  ve  $x_1 - x_2 = 0$  durumunda

$$\|x_1 - x_2\| \leq lC\|x_1 - x_2\|$$

dir.  $U_m = f_m[B^n]$  ve

$$f'_m(x) = (1, 1, 1, \dots, 1) + lm(x)$$

olsun. Ayrıca,  $g$  nin  $C^1$  olmasından hareketle, tüm  $m < m_0$  için bir kısmi matris olarak  $f'_m$  nin pozitif determinanı olan bir  $m_0$  vardır. Bu ters fonksiyon teoreminin kullanımına olanak sağlar. Bu nedenle  $f_m$  fonksiyonu bu noktanın civarında tersi alınabilir. Bu  $U_m$  nin yeteri kadar küçük değerleri için  $m$  nin açık olması demektir. Çünkü  $f$  sürekli olduğu için, tersini açık bir dönüşüm yapar. Buradan  $m \in [0, m_0]$  keyfi bir sabit olsun. Bu durumda dönüşümümüz birebirdir.

Kabul edelim ki;

$$U_l = f_m[B^n] \neq B^n.$$

olsun. Açıkça  $B^n \subset U_l$  dir ve  $f_m$ , dönüşümü  $B^n$  in dışında bir dönüşüm değildir. O halde  $U_l$  nin sınırı  $B^n$  in içini kesecek şekilde olmalıdır, yani  $U_m$  nin sınırı  $B^n$  in sınırında olmayan, noktayı kesmelidir.

Noktayı  $x_0$  olarak alalım. Kompaktlık ve dizisel kompaktlığı kullanarak,  $y_0, U_l$  nin sınırında ve kapanışında olduğu için bir limit noktasıdır. Dolayısıyla  $U_m$  de  $y$  ye yakınsayan bir dizi vardır.  $(x_n) \subset B^n$  ve  $B^n$  de bir dizi ve  $f(x_0) \rightarrow y_0$  olsun. Kompakt olmasından dolayı,  $(x_n)$ 'nin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Kabul edelim ki  $x_{n_m} \rightarrow x_0$  olsun.  $f$  sürekli olduğu için  $f(x_{n_m}) \rightarrow f(x_0)$  dır. Ayrıca  $f(x_n) \rightarrow y_0$  yakınsak olduğu için  $f(x_0) = y_0$  dır.

Henüz  $U_l$  açık ve sınırlarını içermediğinden  $U_l$  nin içinde  $y_0$  olamaz.  $x_0$  noktası  $B^{n-1}$  de  $B^n$  nin sınırında olmalıdır. Aksi halde  $U_l$  nin sınırına bir dönüşüm yoktur. Fakat bir geri çekilmemiz olduğu için  $f(x_0) = x_0$  olup  $x_0 = y_0$  dır.

Başlangıç şartlarımıza göre  $y_0$  noktasının  $B^n$  in sınırında olmamasına rağmen  $y_0 \in B^{n-1}$  olup bu bir çelişkidir.  $m \in [0, m_0]$  için

$$f(B^n) = U_l = B^n,$$

dir dolayısıyla  $f_m$  örtendir. Böylece  $m \in [0, m_0]$  ve  $m < C^{-1}$  olduğunda  $f_m$  fonksiyonu birebir ve örtendir. Bundan sonra  $f_m$  yi sadece birebir ve örten olduğu yerlerde ele alacağız.

$f_m$  sürekli fonksiyonu olmak üzere,

$$F(m) = \int_{D_n} \det f'_m(x) dx$$

vardımıyla  $F : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu tanımlayıp

$$f'_m = (1, 1, 1, \dots, 1) + m g'(x)$$

ile birlikte kare matris oluşturabiliriz. Bu aslında  $dx$  in  $n$  boyut için  $n$  tane integral olacaktır ve  $n - boyut$  için

$$dx ; dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n,$$

olarak ifade edeceğiz. Bir matrisin determinantını bir polinom şeklinde yazılabilir.  $F$ ,  $l$ 'nin bir fonksiyonu olduğuna dikkat edin ve bu nedenle determinantını  $l$ 'nin bir polinomu olarak düşünebiliriz. Fakat  $F, f_m$  nin integralidir ve eğer  $m < C^{-1}$  ise  $f_m(B^n)$  dir.

$B^n$  birebir iken  $f_m(B^n) = B^n$  dir ve bu bize polinomun sabit olduğu bir aralık sağlar. Belirli bir aralıkta sabit olan bir polinom her yerde sabittir. Şimdi her  $m \in [0, 1]$  için  $F(m)$ 'nin  $B^n$  in değerini verdiğini söyleyebiliriz.

$F(1)$  bize bu değeri verir ve bu değer 0'dan büyük olacaktır. Bununla birlikte  $f_m$  nin kendisi ile iç çarpımını düşünelim.  $\langle f_m, f_m \rangle$  ile gösterilir.

Herhangi  $x \in B^{n-1}$  için  $f_m(x) = f(x)$  dir. Buradan  $m = 1$  için  $\langle f_m, f_m \rangle$  basitce  $\|f_1(x)\| = 1$  olur.  $v \in \mathbb{R}^n$  keyfi vektörünü düşünelim.  $v f_1'(x)$  in iç çarpımı ve

$$f(x), \frac{1}{2} \langle f_1(xt + vt), f_1(x + vt) \rangle$$

iç çarpımının  $t$  ye göre türevine eşittir. Ancak bu  $\frac{1}{2}(1)$  türeviyle sonuçlanır ve sabitin türevi her zaman 0 dır. Buradan  $f_1'$  determinantının 0 olacağını görebiliriz. Buda bize  $F(1) = 0$  olduğunu gösterir. Bu ise  $F(1) > 0$  olduğu kabulü ile çelişir. Bu neden ile  $f$  in tanımı  $r$  nin var olamayacağı şekilde olmalıdır. Birim  $B^n$  den  $B^{n-1}$  e  $C^1$  geri çekilme olamaz.

Bu, Brouwer sabit nokta teoreminin ispatı için Milnor-Rogers geliştirdiği bir ispattır. Ayrıca Milnor-Rogers yöntemi. ( R. Howard, 2004) ( J. Milnor, 1978) teoremi kanıtlamak topolojik içinde bir yöntemdir.

#### 4.5. $B^n \subset \mathbb{R}^n$ Üzerinde Brouwer Sabit Nokta Teoremi

Verilen,  $f: B^n \rightarrow B^n$  sürekli fonksiyonu verilsin.  $c \in B^n$  için  $f(c) = c$  olacak biçimde bir  $c$  sabit noktası vardır.

**İspat:**  $\epsilon > 0$  olmak üzere,  $\epsilon/2$  keyfi sabitimiz ve  $f: B^n \rightarrow B^n$  sürekli fonksiyon olsun.

Burada  $B^n$  bizim  $n$  boyutlu birim yuvardır. Stone-Weierstrauss teoremi  $p_l: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu için  $C^1$  in dizisini verir.

$$\text{her } x \in B^n \text{ ve } l \in \mathbb{N} \text{ için } \|p_l(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{l}$$

olur. Her  $l \in \mathbb{N}$  için

$$q_l = \left(1 + \frac{1}{l}\right)^{-1} p_l.$$

olur.

Daha sonra yerine koyma yöntemiyle herhangi  $x \in B^n$  için

$$\begin{aligned} \|q_l(x) - f(x)\| &= \left\| \left(1 + \frac{1}{l}\right)^{-1} p_l(x) - f(x) \right\| \\ &\leq 1 + \frac{1}{l} \end{aligned}$$

elde ederiz.  $\epsilon/2$  için, her  $m \geq L_1$  olacak şekilde bir  $L_1$  vardır öyleki,

$$\|p_l(x) - f(x)\| \leq \epsilon/3$$

olur.  $L_2 = L_1 + 1$  alacak olursak, bu durumda herhangi  $x \in \mathcal{B}^n$  ve her  $l \geq L_2$  için

$$\|p_l(x) - f(x)\| \leq \epsilon/2$$

olur. Böylece  $g_l \rightarrow f$  olur ve  $L_2 = L_1$  iken alt dizimizde  $g_{m_l} \rightarrow f$  elde edilir.

$h_l: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^{n-1}$  fonksiyonu düz bir çizgi boyunca önce  $q_l(x)$  sonra  $x$  değsin, daha sonra  $\mathcal{B}^{n-1}$  ile kesiştiği noktadan döndüren bir fonksiyon olsun. Burada her  $C^1$  dönüşümü için  $h_l$  sabit noktaya sahip değildir,  $q_l$  fonksiyonu  $C^1$  den türetilmiştir. Ancak aynı zaman da o bir geri çekmedir. Bu nedenle var olamaz, bu da  $g_l$  'nin tüm  $l$  için bir sabit noktasına sahip olması gerektiği anlamına gelir, aksi takdirde  $h_l$  geri çekilmesi mümkün olmazdı.

$\{x_l\}_{m=1} \subset \mathcal{B}^n$ ,  $g_l$  için sabit noktaya sahip bir dizisi olsun. Burada uzayımız kompakt bir uzay olup,  $\{x_l\}$ 'nin yakınsak bir alt dizisi vardır.

$x_0 \in \mathcal{B}^n$  ve  $x_{l_k k=m}$  yakınsak olsun. Her  $\epsilon/2$  için  $K_2 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $m \geq L_2$  için

$$\|x_{l_k} - x_0\| \leq \epsilon/2 \text{ dir.}$$

Burada  $L = \max\{L_1, L_2\}$  alacak olursak, herhangi bir  $\epsilon$  için öyle bir  $L$  vardır ki her  $l \geq L$  için

$$\|g_{l_k}(x_{l_k}) - f(x_0)\| < \epsilon \text{ dir.}$$

Fakat burada  $g_{l_k}(x_{m_l})$  sabittir. Bu yüzden her  $k$  için  $g_{m_l}(x_{m_l}) = x_{m_l}$  dır. Böylece

$$\|x_{l_k} - f(x_0)\| < \epsilon$$

elde ederiz ki bu  $x_{l_k} \rightarrow x_0$  ve  $x_0 = f(x_0)$  olması demektir. Dolayısıyla  $f$  sabit noktaya sahip olmuş olur.

Şimdi, bu sonucu yalnızca belirli bir küme için gösterdik. Ayrıca herhangi bir kompakt ve dışbükey kümeye homeomorfik olduğu için, tüm kompakt ve dışbükey  $L$  kümelerinde de, Brouwer Sabit Nokta Teoremi geçerlidir.

## 5. Uygulamalar

Bu bölümde ağırlıklı olarak (V. Pata, 2019) faydalanılmıştır. Ayrıntılı araştırmak isteyenler oraya bakabilir.

**Tanım 5.1.1. (Brouwer Sabit Nokta Teoremi)**  $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  ve  $X \subset \mathcal{B}^n$  olsun. Eğer;

$$t: \mathcal{B}^n \rightarrow X$$

Sürekli dönüşü var ve her  $x \in X$  için  $r(x) = x$  şeklinde tanımlı ise,  $A$  kümesine  $\mathcal{B}^n$  nin geri çekilmesi denir.

**Teorem 5.1.2.**  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  kümesi,  $\mathcal{B}^n$  nin bir geri çekilmesi değildir. (W.S. Massey, 1991)

**İspat:** Cebirsel topolojiden faydalanarak ispat (W.S. Massey, 1991) verilmiştir.

$$h: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$$

fonksiyonu bir  $C^2$  ile ilişkilendirelim ve

$$t: \mathcal{B}^n \rightarrow S^{n-1}$$

geri çekilmesi;

$$\omega_h = h_1 dh_2 \wedge \dots \wedge dh_n$$

olsun. Stokes teoremini (F. Riesz, B. Sz-Nagy, 1955) ve (W. Rudin, 1976) bakabilirsiniz.  $J_h(x)$ ,  $x$ 'teki  $h$ 'nin  $(n \times n)$  Jacobian matrisini göstermek üzere;

$$\begin{aligned} \ell_h &:= \int_{S^{n-1}} \omega_h = \int_{\mathcal{B}^n} dw_h \\ &= \int_{\mathcal{B}^n} dh_1 \wedge \dots \wedge dh_n \\ &= \int_{\mathcal{B}^n} \det[J_h(x)] dx \end{aligned}$$

$\mathcal{B}^n$  den  $S^{n-1}$  tanımlı dönüşüm,  $C^2$  sınıfının bir  $t$  geri çekilmesidir.

Formülde  $\ell_t$  nin  $S^{n-1}$  üzerindeki  $r$  değerleriyle belirlenir.  $i : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$  birim dönüşümü olmak üzere;

$$t|_{S^{n-1}} = i|_{S^{n-1}}$$

dir. Böylece

$$\ell_t = \ell_i = \mathcal{B}^n$$

dir. Diğer yandan  $\|t\| \equiv 1$  ve her  $x \in \mathcal{B}^n$  için  $J_t(x)t(x)$  vektörünün boş olup, her  $x \in \mathcal{B}^n$  için  $J_t(x)$ 'in bir öz değeri sıfırdır.  $\det[J_t] \equiv 0$ , olması da  $\mathcal{D}_t = 0$  olması demektir. Farklı bir gösterim içinde (L.C. Evans, 1998) bakılabilir.

**Teorem 5.1.3. (Brouwer)**  $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$  sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonu sabit bir  $\bar{x} \in \mathcal{B}^n$  noktasına sahiptir.

**İspat:**  $C^2$  nin bir sınıfı,  $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$  olsun. Eğer  $f$  nin sabit noktası yok ise, bu durumda

$$t(x) = r(x)f(x) + (1 - r(x))x$$

yazılabilir. Bir önceki teoremden  $\mathcal{B}^n$  den  $S^{n-1}$  ye  $C^2$  sınıfının bir geri çekilmesi

$$t(x) = \frac{\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle - \sqrt{(\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle)^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}$$

dir. Grafiksel olarak  $t(x)$ ,  $f(x)$  i  $x$  e bağlayan doğru parçasını uzatarak elde edilen doğrunun  $S^{n-1}$  ile kesişimi dir. Dolayısıyla  $f$  nin sabit noktası vardır.

$f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$  sürekli olmak üzere. Stone-Weierstrass teoremine uygulayacak olursak,  $\mathcal{B}^n$  üzerinde  $f$  ye düzgün yakınsayan  $C^2$  sınıfı, fonksiyonların  $f_j : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$  bir dizisini elde ederiz.

Burada  $f_j$  nin sabit noktasını  $\bar{x}_j$  ile gösteririz. Öyle ki  $\bar{x} \in \mathcal{B}^n$  öyle ki  $\bar{x}_j \rightarrow \bar{x}$  dir. Öyleyse,

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leq \|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_j)\| + \|f(\bar{x}_j) - f_j(\bar{x}_j)\| + \|\bar{x}_j - \bar{x}\| \rightarrow 0$$

$j \rightarrow \infty$  iken,  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  dir.

## 5.2.Schauder-Tychonoff Sabit Nokta Teoremi

$L$ , sonlu boyutlu gerçel  $X$  Banach uzayının kompakt konveks aralıksız bir alt kümesi olsun. Bu durumda her sürekli  $f: L \rightarrow L$  fonksiyonunun sabit bir  $\bar{x} \in L$  noktası vardır.

**İspat:**  $X$ , bazı  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathbb{R}^n$  homeomorfiktir. Genelliği bozmadan  $X = \mathbb{R}^n$  ve  $L \subset \mathcal{B}^n$  yazabiliriz. Her  $x \in \mathcal{B}^n$  için  $x - L$  kümesinin minimum normunun tek noktası  $p(x) \in L$  olsun. Her  $x \in L$  için  $p(x) = x$  olup,  $p$  dönüşümü  $\mathcal{B}^n$  üzerinde süreklidir.

Gerçekte de, verilen  $x_n, x \in \mathcal{B}^n$ , için

$$\begin{aligned} \|x - p(x)\| &\leq \|x - p(x_n)\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \inf_{k \in K} \|x_n - k\| \rightarrow \|x - p(x)\| \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  dir.

Böylece,  $x - L$  'de  $x_n \rightarrow x$  bir minimize edilmiş dizisi  $x - p(x_n)$  dir, ve bu,  $p(x_n) \rightarrow p(x)$  yakınsamasını ifade eder.

Şimdi  $g(x) = f(p(x))$  tanımlayalım.  $\mathcal{B}^n$  den  $L$  ye  $g$  ye dönüşümü sürekli olur. Dolayısıyla  $\bar{x} \in K$  vardır, öyle ki

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= \bar{x} \\ &= f(\bar{x}) \end{aligned}$$

dir.

## 5.3. Frobenius

Teorem, bir lineer denklem sisteminin uyumlu olması için, katsayıların oluşturduğu matris ile bağımsız terimlerin genişlettiği matrisin aynı sıraya sahip olmasının gerekli ve yeterli bir koşul olduğunu ortaya koymaktadır.

$\mathbb{A}$ , kesinlikle pozitif girdileri olan  $n \times n$  matrisi olsun. O zaman  $\mathbb{A}$  kesin olarak pozitif bir özdeğere sahiptir.

**İspat:**  $\mathbb{A}$  matrisi,  $\mathbb{R}^n$  'den  $\mathbb{R}^n$  'e lineer bir dönüşüm olarak görülebilir.

$$\{x \in \mathbb{R}^n: \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \dots, n\}$$

Kompakt konveks kümesini tanıtalım.  $f(x) = \mathbb{A}x / \|\mathbb{A}x\|_1$  (Burada  $\|\cdot\|_1$  öklid1-normudur).  $x \in L$  ise  $x$ 'in tüm girdilerinin negatif olmadığına ve en az birinin kesinlikle pozitif olduğuna dikkat

edelim, dolayısıyla  $Ax$ 'in tüm girdilerinin kesinlikle pozitifdir. O halde  $f: L \rightarrow L$  ya sürekli bir fonksiyondur ve bu nedenle,  $A\bar{x} = ||A\bar{x}||_1 \bar{x}$  olacak şekilde  $\bar{x} \in L$  vardır.

**Teorem 5.3.1** Matematikte **cebirin temel teoremi** veya D'Alembert-Gauss **teoremi** olarak da bilinen, teorem: Katsayıları karmaşık olan ve sabit olmayan tek değişkenli her polinomun en az bir (karmaşık) kökü vardır, şeklindedir.

$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ,  $n \geq 1$  dereceden kompleks polinom olmak üzere.  $p(z_0) = 0$  olacak şekilde  $z_0 \in \mathbb{C}$  vardır.

**İspat:**  $\mathbb{C}$  yi  $\mathbb{R}^2$  ile tanımlayalım.  $a_n = 1$  için genelliği bozmayız.

$$r = 2 + |a_0| + \dots + |a_{n-1}|$$

olsun.

$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli fonksiyonunu;

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)\theta}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1 \end{cases}$$

tanımlayalım. Buradan  $z = pe^{i\theta}$  ile  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Şimdi kompakt ve konveks  $C = \{z : |z| \leq r\}$  kümesini düşünün. Brouwer sabit nokta teoremini uygulamak için  $g(C) \subset C$  göstermemiz gerekir.

Gerçekten, eğer  $|z| \leq 1$ ,

$$|g(z)| \leq |z| + \frac{|p(z)|}{r} \leq 1 + \frac{1 + |a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{r} \leq 2 \leq r$$

Tersine, eğer  $1 < |z| \leq r$  varsa

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \left| z - \frac{p(z)}{rz^{n-1}} \right| \\ &= \left| z - \frac{z}{r} - \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}}{rz^{n-1}} \right| \\ &\leq r - 1 + \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{r} \\ &\leq r - 1 + \frac{r-2}{r} \leq r \end{aligned}$$

Dolayısıyla  $C, g$  için değişmezdir ve  $g$ , açıkça  $p$  nin kökü olan sabit bir  $z_0 \in C$  noktasına sahiptir.

#### 5.4. Birimin Parçalanması

$V_1, \dots, V_n$  yerel kompakt bir Hausdorff  $X$  uzayının açık alt kümeleri olduğunu varsayalım,  $L \subset X$  kompakttır ve

$$L \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$$

dir. Böylece her  $j = 1, \dots, n$  ve  $0 \leq \varphi_j \leq 1$  için  $\varphi_j \in C(X)$  vardır. Buradan  $V_j$  üzerinde,

$$\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) = 1, \quad \forall x \in K$$

dir. Daha sonra  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  koleksiyonu  $L$  nin birim parçalanışı için  $\{V_1, \dots, V_n\}$  açık örtüdür.

Urysohn teoreminin doğrudan bir sonucudur. Örnekler için (J.L. Kelley, 1955) bakabiliriz.

Elemanları  $L$  üzerinde tanımlanan sürekli fonksiyonlar olan kompakt bir  $L \subset X$  kümesi için birimin parçalanışını bulmaya çalışalım. Açıkçası, bu durumda  $X$  yerel olarak kompakt olması gerekmez.

**Teorem 5.4.1. (Schauder-Tychonof)**  $X$  yerel konveks uzay,  $L \subset X$  boştan farklı konveks bir alt küme,  $L_0 \subset L$  iken  $L_0$  alt kümesi kompakt olsun. Sürekli bir  $f: L \rightarrow L_0$  dönüşümü altında  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  olacak şekilde  $\bar{x} \in L_0$  vardır.

**İspat:**  $\mathcal{B}$  ile  $X$  üzerindeki  $\mathcal{P}$  yarı normlarının ayrıcı ailesi tarafından üretilen  $X$  topolojisinin yerel tabanını gösterelim.  $U \in \mathcal{B}$  verildiğinde  $L_0$ 'in kompaktlığından  $x_1, \dots, x_n \in L_0$  vardır, öyle ki

$$L_0 \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + U)$$

dir.  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(L_0)$  için  $L_0$  birim parçalanmasının açık örtüsü  $\{x_j + U\}$  ve tanımdan;

$$f_U(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(f(x))x_j, \quad \forall x \in L.$$

yazılır, böylece

$$f_U(L) \subset L_U = co(\{x_1, \dots, x_n\}) \subset L$$

yazılır. Sonlu boyutlu gerçel  $X$  Banach uzayının kompakt konveks aralıksız bir alt kümesi olsun. Bu durumda her sürekli  $f: L \rightarrow L$  fonksiyonunun sabit bir  $\bar{x} \in L$  noktası vardır. Teoremini kullanarak,  $f_U(x_U) = x_U$  olacak şekilde  $x_U \in L_U$ 'nin varlığı elde edilir. Burdanda

$$\begin{aligned} x_U - f(x_U) &= f_U(x_U) - f(x_U) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(f(x_U))(x_j - f(x_U)) \in U \end{aligned}$$

$\varphi_j(f(x_U)) = 0$  için  $(x_j - f(x_U)) \notin U$ .  $L_0$ 'ın kompaktlığından

$$\bar{x} \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{\{f(x_U): U \in \mathcal{B}, U \subset W\}} \subset L_0$$

dir. Şimdi  $p \in \mathcal{P}$  ve  $\varepsilon > 0$  seçersek;

$$V = \{x \in X: p(x) < \varepsilon\} \in \mathcal{B}.$$

dir.  $f$ , dönüşümü  $L$  üzerinde sürekli olduğundan,  $W \in \mathcal{B}$ ,  $W \subset V$  vardır, öyle ki;

$$f(x) - f(\bar{x}) \in V$$

$x - \bar{x} \in 2W$ ,  $x \in L$ . Ayrıca

$$\bar{x} \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} \overline{\{f(x_U): U \in \mathcal{B}, U \subset W\}} \subset L_0$$

den  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U \subset W$  vardır, öyle ki;

$$\bar{x} - f(x_U) \in W \subset V.$$

$$x_U - f(x_U) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(f(x_U))(x_j - f(x_U)) \in U$$

ve  $f(x) - f(\bar{x}) \in V$  işleme tabi tutarsak,

$$x_U - \bar{x} = x_U - f(x_U) + f(x_U) - \bar{x} \in U + W \subset +W = 2W$$

yazarız, buradan da

$$f(x_U) - f(\bar{x}) \in V$$

Dolayısıyla  $f(x) - f(\bar{x}) \in V$  ve  $f(x_U) - f(\bar{x}) \in V$  den,

$$p(\bar{x} - f(\bar{x})) \leq p(\bar{x} - f(\bar{x})) + p(f(x_U) - f(\bar{x})) < 2\varepsilon$$

elde edilir.

Buradan da  $p$  ve  $\varepsilon$  keyfi olduğundan her  $p \in P$  için  $p(\bar{x} - f(\bar{x})) = 0$  yazabiliriz, bu da  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  eşitliğini ifade eder.

Aşağıdaki iki teorem, Banach uzayı üzerindeki dönüşümler sıfırlarının varlığıyla ilgilidir. Bir  $X$  Banach uzayı ve  $r > 0$  için  $B_r = \overline{B}_x(0, r)$  olsun. Sürekli bir  $g: B_r \rightarrow X$  dönüşümü olmak üzere,  $g(B_r)$  relative kompakttır.

**Teorem 5.4.2.** Her  $x \in \partial B_r$  için  $g(x) \notin \{\lambda x: \lambda > 0\}$  olsun. Bu durumda  $x_0 \in B_r$  vardır öyle ki

$$g(x_0) = 0$$

dir.

**İspat:** Eğer  $g(x_0) \neq 0$  ise,  $f: B_r \rightarrow B_r'$

$$f(x) = \frac{rg(x)}{\|g(x)\|}$$

Şeklinde tanımlı  $f$  fonksiyonu süreklidir ve  $f(B_r)$  relative kompakttır. **Schauder-Tychonof** teoreminden  $f$ , nin sabit bir  $\bar{x} \in B_r$  noktası vardır. Hipotezden,  $\|\bar{x}\| = r$  iken

$$g(\bar{x}) = \frac{\|g(\bar{x})\|\bar{x}}{r}$$

dir.

**Teorem 5.4.3.** Her  $x \in \partial B_r$  için  $\Lambda_x \in X^*$ ,  $\Lambda_x x = 1$  öyle ki  $\Lambda_x g(x) \geq 0$  olduğunu varsayalım. O halde  $g(x_0) = 0$  olacak şekilde  $x_0 \in B_r$  vardır.

**İspat:**  $f(x) = \frac{-rg(x)}{\|g(x)\|}$  ile tanımlayalım.

Eğer  $g$ 'nin sıfırı yoksa, yukarıdaki gibi, mantık yürütürsek  $f$ 'nin sabit bir  $\bar{x} \in B_r$  noktası vardır ve  $-g(\bar{x}) = \|g(\bar{x})\|\bar{x}/r$  ilişkisi ile  $\|\bar{x}\| = r$  ile tutar.  $\Lambda \in X^*$  'i  $\Lambda\bar{x} = 1$  olacak şekilde alarak  $\Lambda g(\bar{x}) = -\|g(\bar{x})\|/r < 0$  elde ederiz.

Matrisler için iyi bilinen bir sonucu sürekli dönüşümlerin daha genel durumuna genişleten,  $\mathbb{R}^n$ 'den  $\mathbb{R}^n$ 'ye dönüşümlerin örtenliği hakkında ilginç bir sonuca bakalım.

**Teorem 5.4.4.**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sürekli bir fonksiyon olsun

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty$$

olup  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  dir.

**İspat:**  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  sabit ve  $g(x) = f(x) - y_0$  olsun. Yeterince büyük,  $r > 0$

$$\langle g(x), x/\|x\| \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \partial B_r$$

dir. Dolayısıyla her  $x \in \partial B_r$  için  $\Lambda_x = \langle \cdot, x/\|x\| \rangle$  fonksiyonu bir önceki teoremden  $g(x_0) = 0$  dir. Dolayısıyla  $f(x_0) = y_0$  olacak şekilde  $x_0 \in B_r$  vardır.

**Not:**  $g$ 'nin  $\partial B_r$  üzerindeki davranışıyla ilgili bu tür koşullar, Leray – Schauder sınır koşulları olarak bilinir. Yukarıdaki sonuçlar,  $X$ 'in açık altkümelerinin kapanışında kesinliği sağlayan  $X$ 'deki değerlerle  $X$ 'in açık altkümelerinin kapanmasında tanımlanan sürekli fonksiyonlara genelleştirilebilir ve  $X$ 'deki değerler belirli kompaktlık özelliklerini karşılar. (K. Deimling , 1980 ve V.I. Istrăţescu, 1981) de örnekler bulabiliriz.

Uygulamalarda,  $X$  uzayının tamamında tanımlanmış tüm fonksiyonlarla çalışmaktan daha ziyade fonksiyonların kompaktlık gibi daha kısıtlayıcı koşullar isteyen dönüşümlerle çalışmak daha kolaydır.

**Tanım 5.4.5.**  $X, Y$  Banach uzayları ve  $C \subset X$  olsun.  $f: C \rightarrow Y$  fonksiyonunun, sınırlı kümeleri relative kompakt kümelere dönüştürmesi koşuluyla kompakt olduğu söylenir.

$f \in L(X, Y)$  ise,  $f$  altındaki kapalı birim topun görüntüsünün relative kompakt olduğunu ifade edilir. Diziler açısından, eğer her  $x_n$  sınırlı dizisi için  $f(x_n)$  dizisi yakınsak bir altdiziye sahipse,  $f$  kompakttır.

**Teorem 5.4.6. [Schaefer]**  $X$  bir Banach uzayı ve  $f: X \rightarrow X$  sürekli ve kompakt bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki

$$F = \{x \in X : x = \lambda f(x) \text{ bazı } \lambda \in [0,1]\}$$

kümesi sınırlıdır. Bu durumda  $f$  sabit bir noktaya sahiptir.

**Not:** Schaefer teoremi,  $\lambda f$  tüm olası sabit noktalarının kümesi üzerinde öncelik tahminleri kanıtlayabilirsek geçerlidir. Bu teknik, belirli bir denklemin olası bir çözümüne ilişkin tahminlerin kanıtlandığı ve daha sonra, bu tahminlerin yürürlüğe girmesiyle, böyle bir çözümün gerçekten var olduğu sonucuna varılan kısmi diferansiyel denklemlerde tipiktir.

**İspat:**  $r > \sup_{x \in F} \|x\|$ , olsun ve

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } \|f(x)\| \leq 2r \\ \frac{2rf(x)}{\|f(x)\|} & \text{if } \|f(x)\| > 2r \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlayalım,  $g : \bar{B}_x(0, 2r) \rightarrow \bar{B}_x(0, 2r)$  sürekli ve kompakttır. Schauder-Tychonoff teoremine göre,  $g(x_0) = x_0$  için  $x_0 \in \bar{B}_x(0, 2r)$  vardır.

Kabul edelim ki  $g(x_0) \neq x_0$  olsun. Bu durumda  $\|f(x)\| \leq 2r$  için

$$x_0 = \lambda_0 f(x_0)$$

$$\lambda_0 = \frac{2r}{\|f(x_0)\|} < 1$$

olup,  $x_0 \in F$  iken  $\|x_0\| = 2r$  elde edilirdi ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden

$$g(x_0) = f(x_0) = x_0$$

olmalıdır.

#### **Teorem 5.4.6. [Krasnoselskii]**

$X$  bir Banach uzayı,  $C \subset X$  boştan farklı, kapalı ve konveks bir küme olsun.

$$f, g : C \rightarrow X$$

Fonksiyonu,

- a.  $\forall x_1, x_2 \in C$  için  $f(x_1) + g(x_2) \in C$ ,
- b.  $f$  sürekli ve kompakttır.
- c.  $g$  bir büzülme dönüşümüdür ( $C$  den  $X$  e)

Şeklinde tanımlansın, bu durumda  $\bar{x} \in C$  vardır, öyle ki  $f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = \bar{x}$

**İspat:** Önce  $\mathbb{I} - g$  fonksiyonun homeomorfik olarak  $C$  ile  $(\mathbb{I} - g)(C)$  arasında eşleştirilebilir. Aslında  $\mathbb{I} - g$  sürekli ve

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{I} - g)(x_1) - (\mathbb{I} - g)(x_2)\| &\geq \|x_1 - x_2\| - \|g(x_1) - g(x_2)\| \\ &\geq (1 - \lambda)\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

dir.

$\lambda < 1$   $g$  nin Lipschitz sabiti olup  $(\mathbb{I} - g)^{-1}$  süreklidir. Herhangi bir  $y \in C$  için,

$$x \rightarrow f(y) + g(x)$$

fonksiyonu  $C$  üzerinde bir büzülmedir, dolayısıyla Banach sabit nokta teoremine yani  $f$  bir büzülme dönüşümü ve  $X$  de tam bir metrik uzay olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $\bar{x} \in X$  olacak şekilde sabit noktası vardır. Dolayısıyla  $z = f(y) + g(z)$  olacak şekilde bir  $z = z(y) \in C$  vardır. Buradan da

$$z = (\mathbb{I} - g)^{-1}(f(y)) \in C$$

yazılır. Öte yandan,  $(\mathbb{I} - g)^{-1}$  fonksiyonu  $C$  'den  $C$  'ye sürekli ve kompaktır, sürekli bir fonksiyonun sürekli ve kompakt bir fonksiyon ile karşılaştırılmasıdır. O zaman Schauder-Tychonoff teoremine göre,  $\bar{x} \in C$  nin varlığını gerektirir, öyle ki  $(\mathbb{I} - g)^{-1}(f(\bar{x})) = \bar{x}$ , yani  $f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = \bar{x}$  dir.

Genel olarak Schauder-Tychonoff teoremi kompakt olmayan kümelere genişletmek mümkün değildir. Bu gerçek, genişlemeyen dönüşümler hakkındaki önceki bilgilerimizden öngörülmektedir.

**Örnek 5.4.7**  $\ell^2$  Hilbert uzayı olsun. Sabit bir  $\varepsilon \in (0,1]$  ve için,  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$

$$f_\varepsilon: \bar{B}_{\ell^2}(0,1) \rightarrow \bar{B}_{\ell^2}(0,1)$$

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon(1 - \|x\|), x_0, x_1, \dots)$$

şeklinde tanımlansın, böylece  $f_\varepsilon$  nin  $\bar{B}_{\ell^2}(0,1)$  de sabit noktası yoktur, ancak Lipschitz sabiti 1'den biraz büyük olan Lipschitz süreklidir. Her  $x, y \in \bar{B}_{\ell^2}(0,1)$  için,

$$\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2}\|x - y\|$$

dir.

$C$ , bir  $X$  Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğunda  $f : C \rightarrow C$  sürekli dönüşümü altında, sabit noktalarının olduğu sorulması gereken doğal bir sorudur. Schauder Tychonoff teoreminden,  $X$  sonlu boyutluysa, cevap evettir, çünkü sonlu boyutlu Banach uzayları Heine-Borel özelliğine sahiptir. Sonsuz boyutlu Banach uzaylarındaki benzer sonuç, bir kompaktlık varsayımı olmaksızın yanlış çıkar.

ilk olarak kompakt olmayan kapalı sınırlı kümelerin bir karakterizasyonunu verelim

**Teorem 5.4.8.**  $X$  bir Banach uzayı,  $C \subset X$  kapalı, sınırlı kompakt olmayan bir küme olsun. Bu durumda  $\varepsilon > 0$  ve  $C$  nin elemanlarından oluşan bir  $x_n$  dizisi vardır, öyle ki

$$\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}(\{x_0, \dots, x_n\})) \geq \varepsilon$$

dir.

**İspat:**  $X$  sonsuz boyutlu olmalıdır, aksi takdirde böyle bir  $C$  kümesi olmazdı. Biz ilk olarak herhangi bir sonlu  $F \subset X$  kümesi ve  $\varepsilon > 0$  için

$$C \setminus [\text{span}(F) + B_x(0, \varepsilon)] \neq \emptyset$$

olduğunu gösterelim.

Eğer eşitlik sağlanıyorsa, her  $\varepsilon > 0$  için  $C \subset \text{span}(F) + B_x(0, \varepsilon)$  olacak şekilde sonlu bir  $F \subset X$  buluruz.  $C$ 'den beri bazı  $r > 0$  için  $C \subset B_x(0, r)$  ile sınırlıdır. Öyleyse,

$$C \subset [\text{span}(F) + B_x(0, \varepsilon)] \cap B_x(0, r) \subset [\text{span}(F) \cap B_x(0, r + \varepsilon)] + B_x(0, \varepsilon).$$

Olur, fakat  $\text{span}(F) \cap B_x(0, r + \varepsilon)$  tamamen sınırlıdır ve dolayısıyla  $\varepsilon$  yarıçaplı topların sonlu bir örtüsünü kabul eder, bu da  $C$ 'nin  $2\varepsilon$  yarıçaplı topların sonlu bir örtüsünü kabul ettiği anlamına gelir. Yani  $C$  tamamen sınırlıdır (dolayısıyla kompakttır) hipotezlerle çelişir.

Gerekli  $x_n$  dizisini oluşturmak için tümevarım yöntemini kullanırsak. İlk olarak keyfi bir  $x_0 \in C$  alalım. Eğer verilen  $x_0, \dots, x_{n+1}$  için

$$\text{dist}(x_{n+1}, \text{span}(\{x_0, \dots, x_n\})) \geq \varepsilon$$

Koşulunu sağlayacak şekilde varsa,

$$x_{n+2} \in C \setminus [\text{span}(\{x_0, \dots, x_{n+1}\}) + B_x(0, \varepsilon)]$$

dır.

**Teorem 5.4.9. (Klee)**  $X$  sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve  $C \subset X$  kapalı, sınırlı, konveks kompakt olmayan bir küme olsun. Bu durumda  $f: C \rightarrow C$  sürekli dönüşümü vardır ve sabit noktası serbesttir.

**İspat:**  $x_n, C$  'de  $dist(x_{n+1}, span(\{x_0, \dots, x_n\})) \geq \varepsilon$  koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Genelliği bozmadan,  $0 \in C$  ve  $\|x_0\| \geq \varepsilon$  olduğunu varsayalım.  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , noktalarını birleştiren parçalı bir lineer eğri oluşturalım, burada  $[x_n, x_{n+1}] = co(\{x_n, x_{n+1}\})$  iken

$$\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}],$$

dir. Böylece  $\Gamma \subset C$  kapalıdır ve  $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \Gamma$  fonksiyonu ile parametreleştirebilir ve  $n = [t]$  ve  $s = t - n$  iken

$$\gamma(t) = (1 - s)x_n + sx_{n+1}$$

ifade edilir,

$dist(x_{n+1}, span(\{x_0, \dots, x_n\})) \geq \varepsilon$  yardımıyla,  $\gamma$  bire bir ve örten olduğu açıktır. Çünkü her  $O \subset [0, \infty)$  açık küme için  $\gamma(O)$ ,  $\Gamma$  nin, bazı  $v < \varepsilon$  için, yarıçapı  $v$  olan bir açık topunun kesişimini içerir. Dolayısıyla bunun tersi  $\gamma^{-1}: \Gamma \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu da süreklidir.

Tietze genişleme teoreminin (J.L. Kelley, 1955) biraz değiştirilmiş bir versiyonunu uygulayarak,  $\gamma^{-1}$  sürekli bir  $g: C \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonuna genişletebiliriz. Şimdi sabit nokta serbest sürekli bir fonksiyon  $f: C \rightarrow C$

$$f(x) = \gamma(g(x) + 1)$$

olarak tanımlanabilir ve öyle ki, eğer  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in \Gamma$ . Dolayısıyla

$$\gamma(\gamma^{-1}(\bar{x}) + 1) = \gamma(\gamma^{-1}(\bar{x})),$$

$\gamma$  nin birebir olduğunu gösterir.

**Not:** Klee'nin  $f: C \rightarrow C$  fonksiyonun düzgün sürekli değildir, çünkü  $\Gamma$  üzerinde  $g$  nin kısıtlaması düzgün sürekli olup,  $g \circ f$  fonksiyonu da, sınırlı konveks olup  $C$  den  $[1, \infty)$  tanımlıdır.

Klee teoremi bize,  $f: \overline{B_x}(0,1) \rightarrow \overline{B_x}(0,1)$  fonksiyonunun, sonsuz boyutlu bir Banach uzayı  $X$ , sabit noktalarının olmadığını ifade eder. Böylece sonsuz boyutlu Banach uzaylarının başka bir özelliğini bulmamızı sağlar.

**Teorem 5.4.10.**  $X$  sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olsun. Kapalı birim topun geri çekilmesi, kapalı birim küredir.

**İspat:**  $f: \overline{B_x}(0,1) \rightarrow \overline{B_x}(0,1)$  sürekli sabit noktalı serbest bir fonksiyonu olsun.

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ise } \|x\| \leq 1 \\ (2 - \|x\|)f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{ise } 1 < \|x\| \leq 2 \end{cases}$$

Şeklinde tanımlayarak, dönüşümümüzü  $\overline{B_x}(0,2)$  çift topuna genişletelim ve yeni fonksiyon

$$f_2: \overline{B_x}(0,1) \rightarrow \overline{B_x}(0,1)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}f_1(2x)$$

Olarak tanımlayalım, bu durumda  $f_2$ 'nin sabit noktasın serbest olduğunu ve her  $x \in \partial\overline{B_x}(0,1)$  için  $f_2(x) = 0$  olur.

Böylece

$$r: \overline{B_x}(0,1) \rightarrow \partial\overline{B_x}(0,1)$$

$$r(x) = \frac{x - f_2(x)}{\|x - f_2(x)\|}$$

fonksiyonu ile istenen geri çekilme elde edilir.

## Kaynaklar

Andrzej Granas. Fixed Point Theory. Springer, 2003.

Brouwer, L.E.J. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. *Math. Ann.* **69**, 176–180 (1910)

Brouwer L.E.J. (1911) "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 71(1), 97{115}.

Eberhard Zeidler, *Applied Functional Analysis: main principles and their applications*, Springer, 1995.

Bohl, P.. "Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage." , vol. 1904, no. 127, 1904, pp. 179-276

Eugene Allgower and Kurt Georg, "Simplicial and Continuation Methods for Approximating Fixed Points and Solutions to Systems of Equations", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 1 (Jan., 1980), pp. 28-85

F. Riesz, B. Sz-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing Co., New York (1955)

H. Poincaré, "Sur les courbes définies par les équations différentielles" *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1886), Volume: 2, page 151-218

H. Scarf, "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping" *SIAM Journal on Applied Mathematics* Vol. 15, No. 5 (Sep., 1967), pp. 1328-1343 (16 pages)

Istrătescu, "Fixed point theory" Springer, 1981, page(488)

J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand Co., Princeton (1955)

J. L. Casti. *Five Golden Rules*. Wiley & Sons, 1996.

J. Coughlin. The no retraction theorem and a generalization. [https://www.math.washington.edu/~morrow/336\\_11/papers/jack.pdf](https://www.math.washington.edu/~morrow/336_11/papers/jack.pdf), May 20, 2011.

Jack Coughlin. The no retraction theorem and a generalization. [https://www.math.washington.edu/~morrow/336\\_11/papers/jack.pdf](https://www.math.washington.edu/~morrow/336_11/papers/jack.pdf), May 20, 2011.

Jong Bum Lee. *Topological fixed point theory*. July 2013.

John Milnor. *Analytic proofs of the hairy ball theorem, and the Brouwer fixed point theorem*. 1978.

K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1980)

Kim C. Border. Fixed Point Theorems with applications to Economics and Game Theory. Cambridge University Press, 1985.

L.C. Evans, Partial differential equations, Amer. Math. Soc., Providence (1998)

Matt Young. The stone-weierstrass theorem. <http://www.mast.queensu.ca/~speicher/Section14.pdf>.

Ralph Howard. "The milnor-rogers proof of the brouwer \_fixed point theorem. <http://people.math.sc.edu/howard/Notes/brouwer.pdf>, 2004.

Sehie Park. Ninety years of the brouwer \_xed point theorem. May 15, 1999.

S. Karamadian , Fixed points. Algorithms and applications, Elsevier Inc, Academic Press Inc, 1977,(488 pages)

Vittorino Pata, Fixed Point Theorems and Applications, Springer, 2019(171 pages)

V.I. Istr̃at,escu, Fixed point theory, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1981)

W.S. Massey, A basic course in algebraic topology, Springer-Verlag, New York (1991)

W. Rudin, Principles of mathematical analysis, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York (1976)