



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**İKİ BOYUTLU (p, q) -CHLODOWSKY
BERNSTEİN OPERATÖRLERİNİN BAZI
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Adem AYIK

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Ekim-2025
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Adem AYIK tarafından hazırlanan “İki Boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein Operatörlerinin Bazı Yaklaşım Özellikleri” adlı tez çalışması 15/10/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK

.....

Üye

Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

.....

Üye

Prof. Dr. Uğur ULUSU

.....

Üye

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Adem AYIK

Tarih: 15.10.2025

ÖZET

DOKTORA TEZİ

İKİ BOYUTLU (p, q) - CHLODOWSKY BERNSTEİN OPERATÖRLERİNİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Adem AYIK

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK

2025, 59 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK
Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR
Prof. Dr. Uğur ULUSU
Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışmada, (p, q) -tamsayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky tipi Bernstein ve bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri tanımlanmıştır. Yeni operatörün yaklaşım özellikleri Korovkin tipi teorem yardımıyla incelenmiştir. Süreklilik modülü ile Lipschitz tipi maksimum fonksiyonu kullanılarak yakınsama hızları belirlenmiştir. Bu operatörler için bir Voronovskaja tipi teorem verilerek ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiş ve aynı uzayda yakınsama hızı tahmin edilmiştir. Ayrıca Maple ile üretilmiş açıklayıcı grafikleri çizilmiştir. Bulanık mantık uygulaması ile de bulguların yapay zekâ ve bulanık sistemler alanına taşınması, bu tür operatörlerin uygulama alanlarını genişletme potansiyeli taşımaktadır.

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde, yaklaşımlar teorisinin temel kavramları sunulmuştur. İkinci bölümde, pozitif lineer operatörler, Bernstein polinomları, q -Bernstein polinomları, Korovkin teoremleri, süreklilik ve ağırlıklı süreklilik modülleri hakkında ve ilerleyen bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ise, (p, q) -tamsayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky tipi Bernstein operatörlerinin tanımlanmasına ve bu operatörlerin çeşitli yaklaşım özelliklerinin incelenmesine ayrılmıştır. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen operatörler bulanık mantık çerçevesinde genişletilmiş ve buna ilişkin bulanık versiyonları ortaya konulmuştur. Tezin son bölümünde ise çalışmadan elde edilen bulgular özetlenmiş, sonuçlar tartışılmış ve gelecekte yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bernstein polinomları, bulanık yaklaşım teorisi, bulanık Korovkin teoremi, bulanık asimptotik açılım, bulanık süreklilik modülü, Chlodowsky tipi operatörler, pozitif lineer operatörler, Voronovskaja-tipi teorem.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME APPROXIMATION PROPERTIES OF TWO-DIMENSIONAL (p, q) -CHLODOWSKY BERNSTEIN OPERATORS

Adem AYIK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Ümit KARABIYIK

2025, 59 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Ümit KARABIYIK

Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

Prof. Dr. Uğur ULUSU

Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

In this study, two-dimensional Chlodowsky-type Bernstein operators based on (p, q) -integers and their fuzzy (p, q) -Chlodowsky-type two-dimensional counterparts were introduced. The approximation properties of the new operators were examined with the help of a Korovkin-type theorem. The rates of convergence were determined using the modulus of continuity and the Lipschitz-type maximal function. A Voronovskaja-type theorem was provided to investigate the weighted approximation properties, and the rate of convergence in the same space was estimated. Illustrative graphs generated using Maple were also presented. Through the application of fuzzy logic, the findings were linked to the fields of artificial intelligence and fuzzy systems, indicating the potential of such operators to expand their areas of application.

In the first chapter of this thesis, the fundamental concepts of approximation theory are presented. The second chapter includes the definitions and theorems related to positive linear operators, Bernstein polynomials, q -Bernstein polynomials, Korovkin theorems, and both standard and weighted moduli of continuity, which are utilized in the subsequent sections. The third chapter is devoted to the definition of two-dimensional Chlodowsky-type Bernstein operators based on (p, q) -integers and the examination of their various approximation properties. In the fourth chapter, the operators introduced in the third chapter are extended within the framework of fuzzy logic, and their fuzzy versions are developed. Finally, the last chapter summarizes the findings, discusses the results, and presents suggestions for future research.

Keywords: Bernstein polynomials, Chlodowsky-type operators, fuzzy approximation theory, fuzzy asymptotic expansion, fuzzy Korovkin theorem, fuzzy modulus of continuity, positive linear operators, Voronovskaja-type theorem.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı tez çalışması olarak sunulmuştur. Bu çalışmada yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK'a teşekkür ederim.

Adem AYIK
KONYA-2025



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	5
2.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	5
2.2. Bulanık Mantık Temel Kavramlar.....	11
3. (p, q) – TAMSAYILARINA DAYALI İKİ BOYUTLU CHLODOWSKY TİPİ BERNSTEİN OPERATÖRLERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	14
3.1. Operatörün Oluşturulması.....	14
3.2. Yakınsaklık Hızı	18
3.3. İki Değişkenli Fonksiyonun Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri.....	30
4. BULANIK (p, q) – CHLODOWSKY TİPİ İKİ BOYUTLU BERNSTEİN OPERATÖRLERİ	35
4.1. Operatörün Oluşturulması.....	35
4.2. Yakınsama Hızı.....	46
4.3. Bulanık Asimptotik Açılımlar.....	50
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	56
5.1 Sonuçlar	56
5.2 Öneriler	56
6. KAYNAKLAR	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.....	23
Şekil 3.2. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.....	24
Şekil 3.3. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.....	25
Şekil 4.1. İki boyutlu bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.....	54
Şekil 4.2. İki boyutlu bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.....	55



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER

$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$C[a, b]$	Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$\ f\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ Fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm
$f_n(x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$f_n(x) \Rightarrow f(x)$	$\{f_n\}$ Fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\omega(f; \delta)$	f Fonksiyonunun süreklilik modülü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$B_n(f; x)$	Bernstein Polinomları
$K(f, \delta)$	Peetre-K fonksiyoneli
$\Omega(f; \delta)$	f Fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$C_{n,p,q}(f; x)$	(p, q) -Bernstein Chlodowsky Operatörleri
$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(f; x, y)$	(p, q) -Tam Sayılarına Dayalı Chlodowsky Tipi İki Boyutlu Bernstein Operatörleri
$C(I_{ab})$	$[a,b]$ üzerinde tüm sürekli fonksiyonlar
$C^2(I_{ab})$	İki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı
B_p	Ağırlıklı fonksiyon uzayı
$P_n(x)$	n dereceli bulanık cebirsel polinom
$C_{n,p,q}^{\mathcal{F}}(h; x)$	Bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörleri
$C_{n,m}^{\mathcal{F}(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y)$	Bulanık (p, q) -Chlodowsky Tipi İki Boyutlu Bernstein Operatörleri

1. GİRİŞ

Araştırmanın amacı

Yaklaşım Teorisi alanında S.N. Bernstein tarafından 1912 yılında tanımlanan Bernstein polinomları birçok özelliğe sahiptir; bundan dolayı, yeni genellemeleri ve uygulamaları zamanla artmıştır (Bernstein, 1913). Bu genellemelerin amacı, bilgisayar destekli geometrik tasarımlar, sayısal analiz ve diferansiyel denklem çözümleri vb. gibi alanlara güçlü araçlar sağlamaktadır.

Son yirmi beş yılda q - hesaplamalarının uygulamaları yaklaşım teorisinde farklı bir çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır. q -hesaplamalarının gelişimi, q -tamsayılarını içeren Bernstein polinomlarının gelişmesine neden olmuştur. Mursaleen ve arkadaşları yaklaşım teorisinde (p, q) -hesaplamasını tanıtip, bu operatörlerin yakınsaklıklarını analiz etmiş ve yakınsaklık hızlarını belirlemişlerdir (Mursaleen, Ansari, vd., 2015). (p, q) -operatörleriyle ilgili daha güncel çalışmalar için okuyucular (Gupta, 2018; Mursaleen, Nasiruzzaman, vd., 2015) kaynaklara başvurabilirler.

Klasik Bernstein Chlodowsky operatörleri, Bernstein polinomlarının bir genellemesi olarak literatüre kazandırılmıştır (Chlodowsky, 1937). Bu operatörlerin çeşitli yaklaşım özellikleri ise sonraki çalışmalarda ayrıntılı biçimde incelenmiştir (Büyükyazıcı ve Ibikli, 2006; Gadjiev vd., 1998; Gadjieva ve Ibikli, 1999). Karsli ve Gupta tarafından yapılan diğer bir çalışmada, söz konusu operatörlerin q -analizi çerçevesinde genellenmesiyle q -Bernstein Chlodowsky tipi operatörler tanıtılmıştır (Karsli ve Gupta, 2008). Ansari ve Karaisa yaptıkları çalışmada (p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörleri tanımlamış, bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri hem klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremi hem de ağırlıklı Korovkin yaklaşım teoremi bağlamında elde etmişlerdir (Ansari ve Karaisa, 2017). Ayrıca, bu operatörlerin yakınsaklık oranları hem süreklilik modülü hem de ağırlıklı süreklilik modülü kullanılarak incelenmiştir.

(p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Ansari ve Karaisa, 2017).

$$\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{p,q}^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(p^s - q^s \frac{x}{b_n}\right) \text{ olmak üzere;}$$

$$C_{n,p,q}(f; x) = \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{p,q}^{n-k} f\left(\frac{[k]_{p,q}}{p^{k-n} [n]_{p,q}} b_n\right).$$

(b_n) dizisi sıfırdan büyük ve azalmayan bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{(p,q)}} = 0$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Ayrıca f fonksiyonu ise tanım kümesi sıfırdan büyük reel sayılar olan bir reel değerli fonksiyon olup $x \in [0, \infty)$ değer aralığında ele alınır.

Aşağıda (p, q) - tamsayıları ile ilgili bazı tanımlar verilmektedir (Mursaleen, Ansari, vd., 2015).

(p, q) -tamsayısı $[n]_{p,q}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < q < p \leq 1.$$

(p, q) -faktöriyeli olan $[n]_{p,q}!$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$[n]_{p,q}! := \begin{cases} [n]_{p,q} [n-1]_{p,q} \cdots [1]_{p,q} & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k]_{p,q}!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ayrıca (p, q) -binom katsayıları ise sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(ax + by)_{p,q}^n = \sum_{k=0}^n p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} a^{n-k} b^k x^{n-k} y^k,$$

$$(x - y)_{p,q}^n = (x - y)(px - qy)(p^2x - q^2y) \cdots (p^{n-1}x - q^{n-1}y).$$

Çalışmamızda ele aldığımız (p, q) -tam sayılarına dayalı Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein Operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır (Karabiyik vd., 2024a).

$$\begin{aligned} & C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(f; x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \Phi_{n,k}(p_1, q_1; x) \Phi_{m,j}(p_2, q_2; y) f\left(\frac{[k]_{p_1, q_1}}{[n]_{p_1, q_1} p_1^{k-n}} \alpha_n, \frac{[j]_{p_2, q_2}}{[m]_{p_2, q_2} p_2^{j-m}} \beta_m\right), \end{aligned}$$

her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(I_{\alpha_n \beta_m})$ için,

$$I_{\alpha_n \beta_m} = \{(x, y) : 0 \leq \alpha_n \leq x, 0 \leq \beta_m \leq y\},$$

$$\mathcal{C}(I_{\alpha_n \beta_m}) = \{f: I_{\alpha_n \beta_m} \rightarrow R, \text{ ise süreklidir } \}.$$

Burada, (α_n) ve (β_m) dizileri, pozitif reel sayılardan oluşan, artan ve sınırsız dizilerdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{[n]_{p_1, q_1}} = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{[m]_{p_2, q_2}} = 0.$$

Operatör tanımında kullanılan ifadeler aşağıdaki eşitlikler ile verilmektedir:

$$\Phi_{n,k}(p_1, q_1; x) = p_1^{\frac{k(k-1)-n(n-1)}{2}} [n]_{p_1, q_1} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^{kn-k-1} \prod_{s=0}^k \left(p_1^s - q_1^s \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

$$\Phi_{m,j}(p_2, q_2; y) = p_2^{\frac{j(j-1)-m(m-1)}{2}} [m]_{p_2, q_2} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^{jm-j-1} \prod_{s=0}^m \left(p_2^s - q_2^s \frac{y}{\beta_m}\right).$$

Bulanık mantık, son yıllarda matematiksel analiz ve yaklaşım kuramı alanlarında önemli bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Bulanık küme kavramı ilk kez Zadeh tarafından ortaya atılmıştır (Zadeh, 1965). Bu temel yaklaşımı takiben, Congxin ve Ming tarafından bulanık reel sayılar sistematik olarak tanımlanmıştır (Cong-Xin ve Ming, 1991). Bulanık sayılar ve bu yapıların özelliklerine ilişkin temel tanımlar ve açıklamalar, literatürde geniş biçimde ele alınmaktadır (Anastassiou, 2001, 2010; Daraby ve Jafari, 2016; Dubois ve Prade, 1987; Gal, 2014; R Jr, 1986).

Yaklaşım teorisinin klasik sonuçları, özellikle son dönemde reel fonksiyon uzaylarından bulanık fonksiyon uzaylarına genellenmiş ve bu yönde dikkate değer katkılar sağlanmıştır. Gal tarafından ortaya konan bulanık Weierstrass yaklaşım teoremi (Gal, 1993, 1995), bu dönüşümün önemli örneklerinden biridir. Ayrıca, Gal tarafından bulanık Bernstein polinomlarının yaklaşık hata sınırları üzerine nicel analizler yapılmıştır (Gal, 1994). Gal ve çalışma arkadaşları, bu bağlamda çeşitli bulanık yaklaşım teoremlerini farklı yönleriyle ele almıştır (Anastassiou, 2001; Bede ve Gal, 2004; Coroianu vd., 2014; Gal ve Gupta, 2009).

Öte yandan, Congxin ve Danghang (Wu ve Danghang, 1999), alternatif bir bulanık Weierstrass yaklaşım teoremi sunarak bu alana katkıda bulunmuştur. Bunun yanında Anastassiou, klasik Korovkin yaklaşım teoremini bulanık fonksiyon uzaylarına başarıyla genelleterek, bu teoremin operatör kuramındaki uygulamalarına dair önemli sonuçlar elde etmiştir (Anastassiou, 2010).

Bu çalışmamızın diğer bir amacı ise (p, q) -tam sayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky tipi Bernstein operatörlerinin yaklaşım özelliklerini gerçek fonksiyon uzaylarından bulanık fonksiyon uzaylarına genellemektir. Bu hedef doğrultusunda, öncelikle bulanık (p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörleri tanımlanarak ve bu operatörler için bir bulanık Korovkin türü yaklaşım teoremi sunulmuştur. İkinci olarak, birinci merteye bulanık süreklilik modülü ve Lipschitz tipi bulanık fonksiyonlar kullanılarak yakınsama hızı incelenmektedir. Son olarak, bulanık (p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörlerinin bulanık asimptotik açılımlarına ilişkin bir tahmin verilmektedir.

Araştırmanın önemi

Yaklaşım teorisi, polinomlar veya pozitif lineer operatörler aracılığıyla fonksiyonlara yaklaşımını inceleyen matematiğin önemli bir alt alanıdır. Bu alanda Bernstein polinomları ve bunların genellemeleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte uzun süredir temel araçlar olarak kullanılmaktadır. Ancak, bu klasik operatörlerin çoğu reel fonksiyon uzaylarıyla sınırlı kalmıştır. Günümüzde bulanık mantık ve bulanık fonksiyon uzayları, belirsizliğin hâkim olduğu sistemleri modelleme açısından büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle, klasik operatörlerin bulanık analize taşınması hem teorik hem de pratik açıdan güçlü bir yenilik alanı sunmaktadır. Bu araştırma, literatürdeki bu boşluğu doldurarak (p, q) -analizi temelinde tanımlanan iki boyutlu Chlodowsky tipi Bernstein operatörlerini bulanık fonksiyon uzaylarına genelleştirmekte ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini, yakınsama hızlarını ve asimptotik davranışlarını kapsamlı biçimde incelemektedir. Böylece, hem yaklaşım teorisinde yeni bir operatör sınıfı kazandırılmakta hem de bulanık matematik ile (p, q) -hesaplamalarının birleştiği disiplinler arası bir çerçeve oluşturulmaktadır. Ayrıca, bu çalışma ile önerilen bulanık Korovkin tipi yaklaşım teoremi, literatürdeki klasik Korovkin teoreminin doğal bir genellemesi niteliğinde olup, ilerleyen araştırmalar için bulanık diferansiyel denklemler, yapay zekâ tabanlı modelleme ve bulanık optimizasyon gibi alanlarda kullanılabilecek yeni yöntemsel temeller sunmaktadır.

Sonuç olarak, bu araştırma yalnızca mevcut çalışmalarını genişletmekle kalmamakta, aynı zamanda bulanık analiz ve operatör teorisinin kesişim noktasında yeni bir araştırma yönü ortaya koyarak, matematiksel modelleme ve hesaplamalı analiz alanlarında orijinal ve uygulama potansiyeli yüksek bir katkı sağlamaktadır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tez çalışmamızın bu bölümünde öncelikle lineer pozitif operatörler ve bu operatörlerin taşıdığı başlıca özellikler tanıtılacaktır. Devamında, Bernstein polinomları ile Bernstein Chlodowsky operatörleri üzerinde durularak ilerleyen bölümlerde kullanılacak çeşitli tanımlar da bu bölümde verilecektir.

Tanım 2.1.1. ((p, q)-Tamsayıları) (Mursaleen, Ansari, vd., 2015)

$0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}$$

ifadesine (p, q)-tamsayısı denir.

Buna karşılık, $[n]_{p,q}!$ ifadesi (p, q)-faktöriyeli olup,

$$[n]_{p,q}! = [n]_{p,q} [n-1]_{p,q} \cdots [1]_{p,q},$$

$$[0]_{p,q}! = 1$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, (p, q)-binom katsayıları,

$$\binom{n}{k}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k]_{p,q}!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

biçiminde ifade edilir (Mursaleen, Ansari, vd., 2015).

Tanım 2.1.2. $X^+ = \{f \in X: f(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$ kümeleri verilsin. L, X üzerinde tanımlı bir lineer operatör olmak üzere X^+ kümesindeki fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürüyorsa, bu durumda L pozitif lineer operatör olarak adlandırılır. Bu tür operatörler için,

$$L(X^+) \subseteq Y^+$$

kapsama ilişkisi sağlanır. Eğer $f(x) \geq 0$ ise, $L(f; x) \geq 0$ olur. Ayrıca, $f(x) \leq g(x)$ olduğu durumda $L(f; x) \leq L(g; x)$ eşitsizliği elde edilir. Bu özellikten dolayı pozitif lineer operatörlerin monoton oldukları görülmektedir.

Pozitif lineer operatörlere verilen ilk örneklerden biri Bernstein tarafından 1912 yılında ortaya konulmuştur. Bernstein, $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonları yaklaşık olarak ifade eden polinomları tanımlamıştır. Bugün Bernstein polinomları olarak bilinen bu polinomlar:

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Her $x \in [0,1]$ için $x^k(1-x)^{n-k}$ çarpanının pozitif olması nedeniyle, $B_n(f; x) \geq 0$ 'dır. Bu nedenle Bernstein polinomları, pozitif lineer operatörlerin tipik bir örneğini oluşturmaktadır.

Teorem 2.1.1. Korovkin Teoremleri (Hacısalihoglu, 1995)

1951 'de H. Bohman,

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) p_{k,n}(x),$$

$$p_{k,n}(x) \geq 0, 0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$$

şeklinde verilen lineer pozitif operatörler dizisinin, $[0,1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlara yakınsaması için gerekli ve yeterli koşulları belirlemiştir. Bu koşullar:

- (i) $L_n(1; x) = 1,$
- (ii) $L_n(t; x) = x,$
- (iii) $L_n(t^2; x) = x^2.$

1953 yılında P. P. Korovkin, Bohman'ın elde ettiği bu sonuçları daha genel bir çerçevede ele alarak aşağıdaki teoremi vermiştir:

$[a, b]$ aralığında tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi, koşullar (i), (ii) ve (iii) sağladığında, her $f \in C[a, b]$ için ve tüm reel ekseninde sınırlı fonksiyonlar açısından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Lemma 2.1.1. $f(x) = 1$ için, tüm $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = 1.$$

İspat. Binom Teoremi'ne göre,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Sabit fonksiyon $f(x) = 1$ alındığında, Bernstein polinomu

$$B_n(1; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Sonuç, tüm $n = 1, 2, \dots$ için geçerlidir.

Lemma 2.1.2. Eğer $f(x) = x$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f; x) = x.$$

Yani,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

İspat. Öncelikle $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} B_n(x; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikte indis değişimini $j = k - 1$ şeklinde yaptığımız zaman,

$$\begin{aligned}
B_n(x; x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{(n-1)-j} \\
&= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son toplam, Bernstein operatörünün sabit fonksiyon $f(x) = 1$ için ifadesidir.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = B_{n-1}(1; x) = 1,$$

$B_n(x; x) = x \cdot 1 = x$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 2.1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$B_n(ax + b; x) = ax + b.$$

Lemma 2.1.3. Tüm $n = 2, 3, \dots$ için,

$$B_n(x^2; x) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

İspat.

$$\begin{aligned}
B_n(x^2; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \right] \\
&= \frac{x}{n} \left[(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} + B_{n-1}(1; x) \right] \\
&= \frac{x}{n} [(n-1)B_{n-1}(x; x) + 1] \\
&= \frac{x}{n} [(n-1)x + 1] = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}.
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.2. (Voronovskaja, 1932)

Eğer $f \in C[0,1]$ sınırlı ve $[0,1]$ üzerinde iki kez türevlenebilir ise, o hâlde her $x \in [0,1]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x),$$

eşitliği sağlar.

İspat. f fonksiyonuna x noktası etrafında ikinci dereceden Taylor açılımı uygulanırsa,

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 + s(y)(y-x)^2$$

elde edilir ki burada $\lim_{y \rightarrow x} s(y) = 0$ dır.

Yukarıdaki eşitlikte $y = k/n$ yazılarak Bernstein polinomu tanımına yerleştirilir. Bernstein operatörünün sabit, doğrusal ve ikinci dereceden polinomlar üzerindeki özellikleri kullanılarak ilk üç terim açıkça elde edilir. Geriye kalan hata terimi, $n \rightarrow \infty$ için kaybolacaktır. Böylece limit,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x),$$

sonucunu verir.

Tanım 2.1.3. $f \in C[a, b]$ olsun. Her $\delta > 0$ için,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine, f fonksiyonunun süreklilik modül adı verilir (Altomare ve Campiti, 1994).

$f \in C[a, b]$ için $\omega(f; \delta)$ şu niteliklere sahiptir (Altomare ve Campiti, 1994):

- (i) $\omega(f; \delta) \geq 0$,
- (ii) Eğer $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$,
- (iii) $\omega(f + g; \delta) \leq \omega(f; \delta) + \omega(g; \delta)$,
- (iv) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$,

- (v) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$,
- (vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$,
- (vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f; \delta)$,
- (viii) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$.

Tanım 2.1.4. $0 < \alpha \leq 1$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar Lipschitz sınıfına ait fonksiyonlar olarak adlandırılır. Burada $M > 0$ sabiti fonksiyonun Lipschitz sabiti olup, bu tür fonksiyonlar $f \in \text{Lip}_M(\alpha)$ biçiminde gösterilir (Ersan, 2008).

Tanım 2.1.5. $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve M_f pozitif bir sabit olmak üzere,

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2), \quad x \geq 0$$

koşulu sağlanıyorsa, bu tür fonksiyonlar, $B_{x^2}[0, \infty)$ olarak adlandırılan ağırlıklı fonksiyon uzayını oluşturur. Bu uzayın sürekli fonksiyonlardan meydana gelen alt kümesi $C_{x^2}[0, \infty)$ şeklinde tanımlanır. Buna ek olarak,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 + x^2}$$

sınırlı olan sürekli fonksiyonların oluşturduğu alt uzay $C_{x^2}^*[0, \infty)$ olarak ifade edilir. Bu uzayda kullanılan norm,

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^2}$$

şeklindedir (Atakut ve Büyükyazıcı, 2010; Hacısalıhoğlu, 1995).

Tanım 2.1.6. $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ ve her $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{x \geq 0, h \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

biçiminde tanımlanan $\Omega(f; \delta)$, ilgili fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü olarak adlandırılır (Atakut ve Büyükyazıcı, 2010).

$f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Ashieser, 1956; Ispir, 2001).

- (i) $\Omega(f; \delta) \geq 0$,
- (ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$,
- (iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(f; \delta) = 0$,
- (iv) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f; m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$,
- (v) Herhangi $\delta > 0$ için $\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$,
- (vi) $|f(t) - f(x)| \leq (1 + x^2)(1 + (t - x)^2)\Omega(f; |t - x|)$,
- (vii) $|f(t) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2)\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)(1 + (t - x)^2)\Omega(f; \lambda\delta)$.

2.2. Bulanık Mantık Temel Kavramlar

Bu bölümde öncelikle, bulanık mantığa ilişkin bazı önemli kavramlar verilmektedir.

Tanım 2.2.1. v , \mathbb{R} kümesinden $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer v aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa v fonksiyonu bir bulanık sayı olarak adlandırılır ve tüm bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ile gösterilir (Anastassiou, 2010):

- (i) En az bir $a_0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır ki, $v(a_0) = 1$,
- (ii) Her $\lambda \in [0,1]$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$v(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min\{v(a), v(b)\},$$
- (iii) a_0 noktasının en az bir komşuluğu $U(a_0)$ vardır ki, bu komşuluktaki her $x \in U(a_0)$ için, $v(x) \leq v(a_0) + \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır,
- (iv) $\{x \in \mathbb{R}: v(x) > 0\}$ kümesi \mathbb{R} içinde kompakt bir kümedir (burada, \bar{A} ifadesi A kümesinin kapanışını göstermektedir).

Aşağıdaki ifade,

$$[v]^r = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: v(x) \geq r\}, & r \in (0,1] \\ \{x \in \mathbb{R}: v(x) > 0\}, & r = 0 \end{cases}$$

\mathbb{R} 'nin sınırlı ve kapalı bir aralığıdır, $[v]^r = [v_-^r, v_+^r]$ şeklinde ifade edilir.

Tüm $r \in [0,1]$ için, v_-^r ve v_+^r sırasıyla $[v]^r$ aralığının sol ve sağ uç noktalarını göstermektedir. Eğer $r_1, r_2 \in [0,1]$ ve $r_1 \leq r_2$ ise,

$$[v]^{r_2} \subseteq [v]^{r_1}$$

olur.

Tüm $v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $r \in [0,1]$ ve $k \in \mathbb{R}$ için, toplama ve skaler ile çarpım işlemleri aşağıdaki şekilde tekil olarak tanımlanır.

$$[v \oplus w]^r = [v]^r + [w]^r,$$

$$[k \odot v]^r = k[v]^r.$$

Burada $[v]^r + [w]^r$ toplamı, \mathbb{R} kümesinin alt kümeleri olarak iki aralığın klasik toplamını, $k[v]^r$ ise bir reel skaler ile bir aralığın klasik çarpımını ifade eder.

Ayrıca,

$$(v \oplus w)_-^r = v_-^r + w_-^r,$$

$$(v \oplus w)_+^r = v_+^r + w_+^r,$$

$$(k \odot v)_-^r = kv_-^r,$$

$$(k \odot v)_+^r = kv_+^r.$$

$v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere, $v \oplus w$ ve $k \odot v$ sırasıyla $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ kümesinde tanımlı toplama ve skaler çarpım işlemleridir (Anastassiou, 2010; Gal, 2014; Wu ve Gong, 2001).

D fonksiyonu, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan gerçekteğerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D(v, w) = \sup_{r \in [0,1]} \max\{|v_-^r - w_-^r|, |v_+^r - w_+^r|\}.$$

$$[v]^r = [v_-^r, v_+^r],$$

$$[w]^r = [w_-^r, w_+^r] \subset \mathbb{R}.$$

D , $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde tanımlı bir tam metrik olup, tüm $z, v, w, e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $k \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$D(z \oplus v, w \oplus v) = D(z, w) \quad (2.1)$$

$$D(k \odot z, k \odot w) = |k|D(z, w) \quad (2.2)$$

$$D(z \oplus w, v \oplus e) \leq D(z, v) + D(w, e) \quad (2.3)$$

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, üzerinde bir kısmi sıralama ilişkisi \preceq ile gösterilir. Her $v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $r \in [0,1]$ için

$$z \preceq w \text{ ise } v_-^r \leq w_-^r, v_+^r \leq w_+^r \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki " \leq " işareti \mathbb{R} kümesindeki kısmi sıralamayı ifade etmektedir (Anastassiou, 2010).

Bulanık sayıların diğer özellikleri aşağıda verilmiştir (Anastassiou, 2010).

$k, l \in \mathbb{R}$ ve $w, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Ayrıca, $\tilde{0} = \chi_{\{0\}} \{0\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) \oplus işlemi bakımından etkisiz eleman $\tilde{0} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 'dir,
- (ii) Her $z \neq \tilde{0}$ için, $z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ kümesinde bir ters (zıttı) eleman bulunmaz,
- (iii) Eğer $k, l \geq 0$ veya $k, l < 0$, $(k + l) \odot z = k \odot z \oplus l \odot z$. (2.5)

Genel olarak $k, l \in \mathbb{R}$ için, (iii) geçerli değildir.

Bulanık sayıların skaler çarpım \odot işleminin klasik reel sayılardaki gibi tam doğrusal olmamasına işaret eder.

$$(i) \quad k \odot (w \oplus z) = k \odot w \oplus k \odot z. \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad k \odot (l \odot z) = (k.l) \odot z. \quad (2.7)$$

3. (p, q) – TAMSAYILARINA DAYALI İKİ BOYUTLU CHLODOWSKY TİPİ BERNSTEİN OPERATÖRLERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (p, q) -tamsayılarına dayalı Chlodovsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörünü tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı, grafikleri ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Operatörün Oluşturulması

(p, q) -Bernstein Chlodovsky operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Ansari ve Karaisa, 2017).

$$C_{n,p,q}(f; x) = \frac{1}{p^{n(n-1)/2}} \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} [k]_{p,q} p^{k(k-1)/2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{p,q}^{n-k} f\left(\frac{[k]_{p,q}}{p^{k-n} [n]_{p,q}} b_n\right),$$

burada

$$\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{p,q}^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(p^s - q^s \frac{x}{b_n}\right).$$

(p, q) -tamsayılarına dayalı Chlodovsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$0 < q_1, q_2 < p_1, p_2 \leq 1$ olmak üzere,

$$C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \Phi_{n,k}(p_1, q_1; x) \Phi_{m,j}(p_2, q_2; y) f\left(\frac{[k]_{p_1, q_1}}{[n]_{p_1, q_1} p_1^{k-n}} \alpha_n, \frac{[j]_{p_2, q_2}}{[m]_{p_2, q_2} p_2^{j-m}} \beta_m\right). \quad (3.1)$$

Her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(I_{\alpha_n \beta_m})$ için,

$I_{\alpha_n \beta_m} = \{(x, y) : 0 \leq \alpha_n \leq x, 0 \leq \beta_m \leq y\}$ ve $C(I_{\alpha_n \beta_m}) = \{f : I_{\alpha_n \beta_m} \rightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir}\}$ koşulları sağlanır.

Burada (α_n) ve (β_m) pozitif sayılardan oluşan, artan ve sınırsız diziler olup aşağıdaki ifadeleri sağlamaktadır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{[n]_{p_1, q_1}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{[m]_{p_2, q_2}} = 0. \quad (3.3)$$

Ayrıca, operatöre ait temel elemanlar aşağıdaki şekildedir:

$$\Phi_{n,k}(p_1, q_1; x) = p_1^{\frac{k(k-1)-n(n-1)}{2}} [k]_{p_1, q_1} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(p_1^s - q_1^s \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

$$\Phi_{m,j}(p_2, q_2; y) = p_2^{\frac{j(j-1)-m(m-1)}{2}} [j]_{p_2, q_2} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{s=0}^{m-j-1} \left(p_2^s - q_2^s \frac{y}{\beta_m}\right).$$

Çalışmamızın temel sonuçlarını elde edebilmek için gerekli olan yardımcı sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Lemma 3.1.1. (Ansari ve Karaisa, 2017)

$$C_{n,p,q}(1; x) = 1$$

$$C_{n,p,q}(e_1; x) = x$$

$$C_{n,p,q}(e_2; x) = \frac{p^{n-1} b_n}{[n]_{(p,q)}} x + \frac{q[n-1]_{(p,q)}}{[n]_{(p,q)}} x^2$$

$$C_{n,p,q}(e_3; x) = \frac{b_n^2 x}{[n]_{(p,q)}^2} p^{2n-2} + \frac{(2p+q)q[n-1]_{(p,q)} b_n x^2}{[n]_{(p,q)}^2} p^{n-1} + \frac{q^3 [n-1]_{(p,q)} [n-2]_{(p,q)} x^3}{[n]_{(p,q)}^2}$$

$$C_{n,p,q}(e_4; x) = \frac{b_n^3 x}{[n]_{(p,q)}^3} p^{3n-3} + \frac{q(3p^2 + 3pq + q^3)[n-1]_{(p,q)} b_n^2 x^2}{[n]_{(p,q)}^3} p^{2n-4}$$

$$+ \frac{q^3(3p^2 + 2pq + q^2)[n-1]_{(p,q)} [n-2]_{(p,q)} b_n x^3}{[n]_{(p,q)}^3} p^{n-3}$$

$$+ \frac{q^6 [n-1]_{(p,q)} [n-2]_{(p,q)} [n-3]_{(p,q)} x^4}{[n]_{(p,q)}^3}.$$

Lemma 3.1.1'den yararlanarak, yeni tanımlanan operatör için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Lemma 3.1.2.

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(1; x, y) = 1,$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(s; x, y) = x,$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(t; x, y) = y,$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(st; x, y) = xy,$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(s^2; x, y) = \frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}}x + \frac{q_1[n-1]_{p_1,q_1}}{[n]_{p_1,q_1}}x^2,$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(t^2; x, y) = \frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}y + \frac{q_2[m-1]_{p_2,q_2}}{[m]_{p_2,q_2}}y^2.$$

Lemma 3.1.2'nin kullanımı ve $C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}$ operatörünün doğrusallığı (lineerliği) nedeniyle, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

Açıklama 3.1.1.

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^2; x, y) = \frac{-p_1^{n-1}x^2}{[n]_{p_1,q_1}} + \frac{xp_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}}, \quad (3.4)$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^2; x, y) = \frac{-p_2^{m-1}y^2}{[m]_{p_2,q_2}} + \frac{yp_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}. \quad (3.5)$$

Teorem 3.1.1.

$q_1 := (q_{1,n}), p_1 := (p_{1,n}), q_2 := (q_{2,m}), p_2 := (p_{2,m})$ olmak üzere,

$0 < q_{1,n}, q_{2,m} < p_{1,n}, p_{2,m} \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lim_n p_{1,n} &= 1, & \lim_n q_{1,n} &= 1, \\ \lim_m p_{2,m} &= 1, & \lim_m q_{2,m} &= 1, \\ \lim_n p_{1,n}^n &= a_1, & \lim_m p_{1,m}^m &= a_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(f; x, y)$ operatörü her $f \in C(I_{ab})$ için $[0, a] \times [0, b] = I_{ab}$ üzerinde $f(x, y)$ fonksiyonuna yakınsar.

a, b reel sayılar olup $a \leq \alpha_n, b \leq \beta_m$ ve $C(I_{ab})$ normu,

$$\|f\|_{C(I_{ab})} = \sup_{(x,y) \in I_{ab}} |f(x, y)|$$

şeklinde tanımlanan, I_{ab} üzerindeki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayını göstermektedir.

İspat. (3.6), (3.2) ve (3.3) numaralı eşitliklerin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $n, m \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki limitler elde edilir.

$$\frac{p_{(1,n)}^{n-1} \alpha_n}{[n]_{(p(1,n), q(1,n))}} \rightarrow 0, \quad \frac{p_{(2,m)}^{m-1} \beta_m}{[m]_{(p(2,m), q(2,m))}} \rightarrow 0.$$

$$\frac{q_{(1,n)} [n-1]_{(p(1,n), q(1,n))}}{[n]_{(p(1,n), q(1,n))}} \rightarrow 1, \quad \frac{q_{(2,m)} [m-1]_{(p(2,m), q(2,m))}}{[m]_{(p(2,m), q(2,m))}} \rightarrow 1.$$

Lemma 3.1.2. ve $e_{ij}(x, y) = x^i y^j, 0 \leq i + j \leq 2$ test fonksiyonlarını dikkate alarak

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(e_{ij}; x, y) = e_{ij}(x, y)$$

I_{ab} üzerinde yakınsak olarak elde edilir.

Volkov tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin Korovkin teoreminden, her $f \in C(I_{ab})$ için,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(f; x, y) = f(x, y)$$

I_{ab} üzerinde yakınsak olarak elde edilir (Volkov, 1957).

3.2. Yakınsaklık Hızı

Bu bölümde, (p, q) -tamsayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky tipi Bernstein operatörlerinin $f(x, y)$ fonksiyonuna yakınsaklık hızları, süreklilik modülü kullanılarak analiz edilmektedir. Ayrıca, iki değişkenli gerçel değerli fonksiyonlar için süreklilik modülü ve Peetre'nin K -fonksiyoneli ile ilgili temel tanım ve gösterimlerin bir özeti sunulmaktadır.

$f \in C(I_{ab})$ için, iki değişkenli fonksiyonlarda tam süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega(f, \delta) = \sup \left\{ |f(t, s) - f(x, y)| : \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \delta \right\}.$$

Burada $(t, s), (x, y) \in I_{ab}$ olmak üzere x ve y değişkenlerine ilişkin kısmi süreklilik modülleri,

$$\omega^1(f, \delta) = \sup \{ |f(x_1, y) - f(x_2, y)| : y \in [0, b], |x_1 - x_2| \leq \delta \},$$

$$\omega^2(f, \delta) = \sup \{ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| : x \in [0, a], |y_1 - y_2| \leq \delta \},$$

şeklinde verilmektedir.

Bu ifadelerin, standart süreklilik modülünün özelliklerini sağladığı görülmektedir (Anastassiou ve Gal, 2002).

$\delta > 0$ için Peetre K -fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Berens ve Butzer, 1967).

$$K(f, \delta) = \inf_{g \in C^2(I_{ab})} \{ \|f - g\|_{C(I_{ab})} + \delta \|g\|_{C^2(I_{ab})} \}.$$

Burada, $C^2(I_{ab}), f, \frac{\partial^j f}{\partial x^j}, \frac{\partial^j f}{\partial y^j}$, ($j = 1, 2$) fonksiyonlarının $C(I_{ab})$ içinde bulunduğu fonksiyonlar uzayıdır.

$C^2(I_{ab})$ uzayı üzerindeki norm aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\|f\|_{C^2(I_{ab})} = \|f\|_{C(I_{ab})} + \sum_{j=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \right\|_{C(I_{ab})} + \left\| \frac{\partial^j f}{\partial y^j} \right\|_{C(I_{ab})} \right).$$

Teorem 3.2.1. $f \in C(I_{ab})$ olsun. Tüm $(x, y) \in I_{ab}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| \leq 2\omega(f; \delta_{(n,m)}).$$

Burada $\delta_{(n,m)}^2 = \frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{(p_1,q_1)}} + \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{(p_2,q_2)}}$ eşitliği göz önünde bulundurulmaktadır.

İspat. Tanım gereği, $f(x, y)$ 'nin tam süreklilik modülü ile birlikte operatörün doğrusallığı ve pozitifliği kullanılarak aşağıdaki ifade yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| &\leq C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|f(t,s) - f(x,y)|) \\ &\leq C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\omega \left(f; \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right) \\ &\leq \omega(f, \delta_{(n,m)}) \left[\frac{1}{\delta_{(n,m)}} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında, (3.4) ve (3.5)'den aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| &\leq \omega(f, \delta_{(n,m)}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{(n,m)}} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\begin{array}{c} (t-x)^2 \\ + (s-y)^2 \end{array} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \omega(f, \delta_{(n,m)}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{(n,m)}} \left\{ \begin{array}{c} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (t-x)^2 \\ + C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (s-y)^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \omega(f, \delta_{(n,m)}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{(n,m)}} \left(\frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{(p_1,q_1)}} + \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{(p_2,q_2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$\delta_{(n,m)}$ ifadesi aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\delta_{(n,m)} = \left(\frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{(p_1,q_1)}} + \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{(p_2,q_2)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

tüm $(x, y) \in I_{ab}$ için istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.2. $f \in C(I_{ab})$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| \leq \omega^1(f; \delta_n) + \omega^2(f; \delta_m).$$

Burada,

$$\delta_n^2 = \frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{p_1, q_1}}, \quad (3.7)$$

$$\delta_m^2 = \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{p_2, q_2}}. \quad (3.8)$$

Başka bir deyişle, f fonksiyonu I_{ab} aralığında sürekli olduğunda, operatörün yaklaşık hatası ω^1 ve ω^2 terimleriyle sınırlandırılır.

İspat. Tanım gereği, $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi süreklilik modülleri ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanması aşağıdaki sonucu verir:

$$\begin{aligned} & \left| C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} f(t, s) - f(x, y) \right| \\ & \leq C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|f(t, s) - f(x, s) + f(x, s) - f(x, y)|) \\ & \leq C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|f(t, s) - f(x, s)|) + C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|f(x, s) - f(x, y)|) \\ & \leq C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|\omega^1(f; |t - x|)|) + C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|\omega^2(f; |s - y|)|) \\ & \leq \omega^1(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|t - x|) \right] \\ & \quad + \omega^2(f, \delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} (|s - y|) \right] \\ & \leq \omega^1(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} ((t - x)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \quad + \omega^2(f, \delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)} ((s - y)^2) \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

buradan,

$$\delta_n^2 = \frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{p_1, q_1}},$$

$$\delta_m^2 = \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{p_2, q_2}}.$$

sonucu elde edilir.

Tanım 3.2.1. $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2 \in (0,1]$ ve $(s, t), (x, y) \in I_{ab}$ olmak üzere, iki değişkenli durumda Lipschitz sınıfı $\text{Lip}_M(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq M|t - x|^{\hat{\alpha}_1}|s - y|^{\hat{\alpha}_2}.$$

Teorem 3.2.3. $f \in \text{Lip}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ olmak üzere tüm $(x, y) \in I_{ab}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t, s) - f(x, y) \right| \leq M \delta_n^{\frac{\hat{\alpha}_1}{2}} \delta_m^{\frac{\hat{\alpha}_2}{2}}.$$

δ_n ve δ_m sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de tanımlanmıştır.

İspat. $f \in \text{Lip}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ olduğundan, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t, s) - f(x, y) \right| &\leq C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|f(t, s) - f(x, y)|; x, y) \\ &\leq M C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|t - x|^{\hat{\alpha}_1}|s - y|^{\hat{\alpha}_2}; x, y) \\ &= M C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|t - x|^{\hat{\alpha}_1}; x) C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|s - y|^{\hat{\alpha}_2}; y) \end{aligned}$$

$\hat{p} = 1/\hat{\alpha}_1, \hat{q} = \hat{\alpha}_1/(2 - \hat{\alpha}_1)$ ve $\hat{p} = 1/\hat{\alpha}_2, \hat{q} = \hat{\alpha}_2/(2 - \hat{\alpha}_2)$ seçilerek, yukardaki ifadeye Hölder eşitsizliği uygulandığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t, s) - f(x, y) \right| &\leq M \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|t - x|^2; x) \right\}^{\hat{\alpha}_1/2} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (1; x) \right\}^{\hat{\alpha}_1/2} \\ &\quad \times \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|s - y|^2; y) \right\}^{\hat{\alpha}_2/2} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (1; y) \right\}^{\hat{\alpha}_2/2} \\ &= M \delta_n^{\hat{\alpha}_1/2} \delta_m^{\hat{\alpha}_2/2}. \end{aligned}$$

Teorem 3.2.4. $f \in C^1(I_{ab})$ ve $0 < q_{(1,n)}, q_{(2,m)} < p_{(1,n)}, p_{(2,m)} \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| C_{(n,m)}^{(p_1,p_1),(p_2,q_2)} f(t) - f(s) \right| \leq \|f'_x\|_{C(I_{ab})} \delta_n + \|f'_y\|_{C(I_a)} \delta_m.$$

İspat. $(t, s) \in I_{ab}$ için aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$f(t) - f(s) = \int_x^t f'_u(u, s) du + \int_y^s f'_v(x, v) dv.$$

Operatörü yukarıdaki denklemde her iki tarafa uygulandığında,

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t) - f(s) \right| &\leq C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\left| \int_x^t f'_u(u,s) du \right|; x, y \right) \\ &\quad + C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\left| \int_y^s f'_v(x,v) dv \right|; x, y \right). \end{aligned}$$

Açıkça görüldüğü gibi,

$$\left| \int_x^t f'_u(u,s) du \right| \leq \|f'_x\| C_{(I_{as})} |t - x|, \quad \left| \int_y^s f'_v(x,v) dv \right| \leq \|f'_y\| C_{(I_{as})} |s - y|,$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t) - f(s) \right| &\leq \|f'_x\| C_{(I_{s,s})} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|t - x|; x, y) \\ &\quad + \|f'_y\| C_{(I_{s,s})} C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (|s - y|; x, y) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t) - f(s) \right| &\leq \|f'_x\| C_{(I_{\infty})} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} ((t-x)^2; x, y) \right\}^{1/2} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (1; x, y) \right\}^{1/2} \\ &\quad + \|f'_y\| C_{(I_s)} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} ((s-y)^2; x, y) \right\}^{1/2} \left\{ C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} (1; x, y) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Denklemler (3.4) ve (3.5)'in birlikte değerlendirilmesiyle, teoremden belirtilen sonuç elde edilmiştir. Dolayısıyla, teoremin ispatı burada tamamlanmaktadır.

Tanımladığımız operatörlerin uygulamalarına yönelik aşağıda verilen örneklerde MapleSoft yazılımını kullanarak belirli fonksiyonlara ait operatörlerin yakınsaklık hızlarını gösteren üç boyutlu grafikler elde edilmiştir (Karabiyik vd., 2024b).

Örnek 3.2.1. Şekil 3.1'de, $\alpha_n = \ln(n)$, $\beta_m = \sqrt{m}$ olmak üzere,

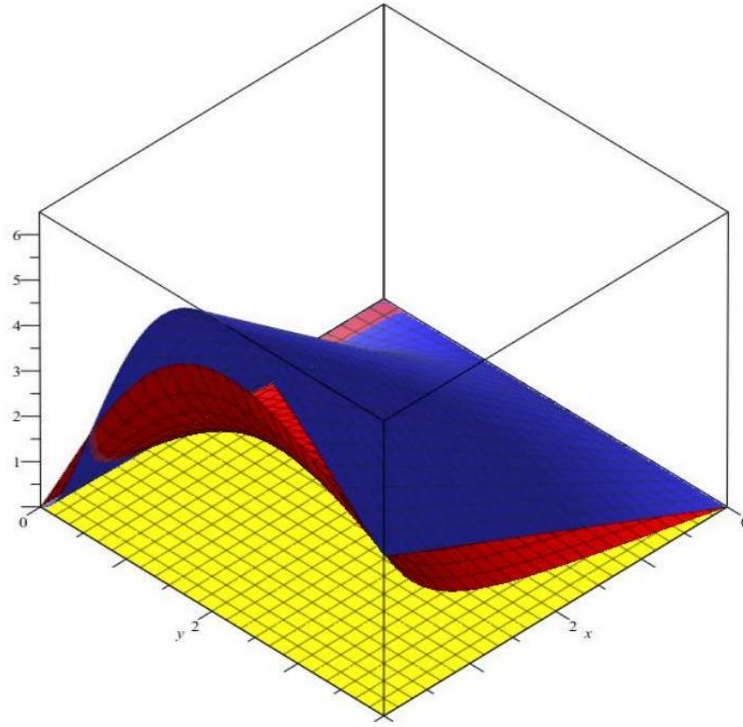
$$C_{20,20}^{(0.999,0.9),(0.999,0.9)}(f; x, y) \text{ (kırmızı)}$$

$$C_{20,20}^{(0.90,0.86),(0.996,0.89)}(f; x, y) \text{ (sarı)}$$

operatörlerinin,

$$f(x, y) = 3xy^2e^{-y} \text{ (mavi)}$$

fonksiyonuna en uygun yakınsamaları gösterilmektedir.



Şekil 3.1. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.

Bu grafik, (p, q) -tamsayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky-Bernstein operatörlerinin üstel tipte bir fonksiyon üzerindeki yaklaşım davranışını temsil etmektedir.

Mavi yüzey, orijinal fonksiyon $f(x, y)$ 'nin gerçek değerlerini; kırmızı ve sarı yüzeyler ise farklı (p, q) parametre çiftleri altında elde edilen yaklaşık değerleri göstermektedir. Grafikselleştirme, her iki parametre seti için operatörlerin pozitif lineer yapılarını koruduğunu ve fonksiyonun tanım aralığında düzgün bir yakınsama sergilediğini göstermektedir. Özellikle p ve q parametreleri 1'e yaklaştıkça, yaklaşık yüzeyin orijinal fonksiyon yüzeyine daha da yaklaştığı gözlemlenmiştir. Bu durum, tanımlanan operatörlerin klasik Bernstein-Chlodowsky operatörlerine limite indirgenebildiğini ve asimptotik olarak istikrarlı bir yaklaşım karakteristiği sergilediğini kanıtlamaktadır.

Örnek 3.2.2. Şekil 3.2'de, $\alpha_n = \ln(n)$, $\beta_m = \sqrt{m}$ olmak üzere,

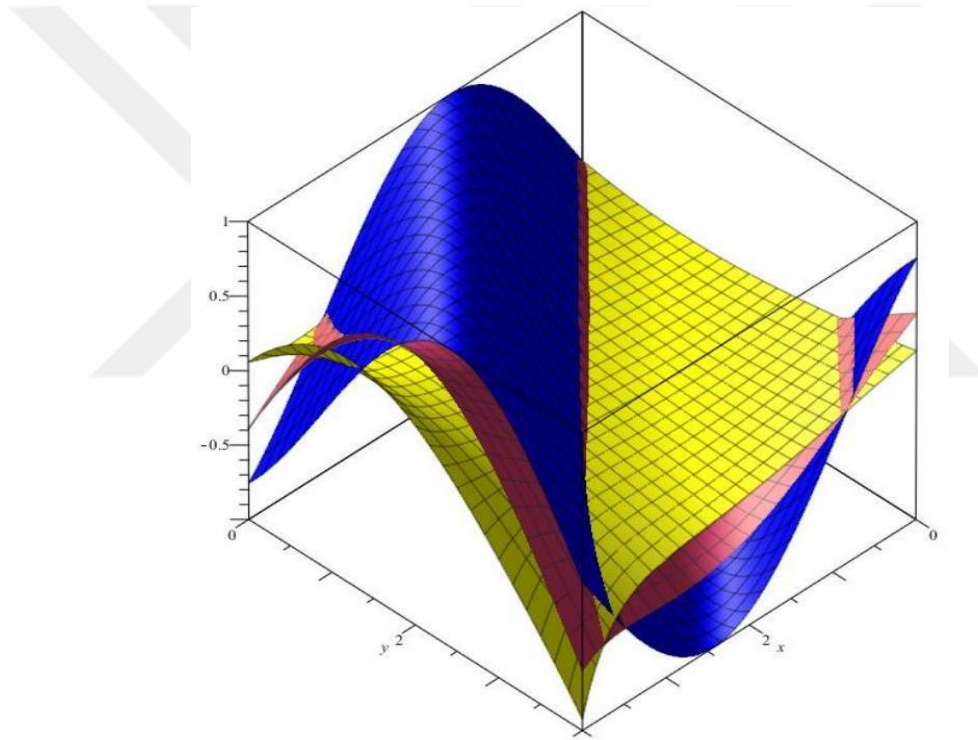
$$C_{20,20}^{(0.999,0.9),(0.99,0.9)}(f;x,y) \text{ (kırmızı)}$$

$$C_{20,20}^{(0.990,0.86),(0.996,0.89)}(f;x,y) \text{ (sarı)}$$

operatörlerinin,

$$f(x,y) = \sin(x-y) \text{ (mavi)}$$

fonksiyonuna en uygun yakınsamaları gösterilmektedir.



Şekil 3.2. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.

Bu grafik, trigonometrik biçimli bir fonksiyon üzerinde tanımlanan iki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörlerinin dalgalı ve periyodik yapıya sahip fonksiyonlarda yakınsama yeteneğini ortaya koymaktadır. Mavi yüzey orijinal fonksiyonu, kırmızı ve sarı yüzeyler ise farklı (p, q) parametreleriyle elde edilen yaklaşık değerleri temsil etmektedir.

Elde edilen grafiksel sonuçlar, fonksiyonun simetrik ve periyodik yapısına rağmen operatörlerin düzgün bir yaklaşım sergilediğini göstermektedir. Bu durum,

operatörlerin Lipschitz süreklilik koşullarını koruyarak lokal hata davranışını minimize ettiğini ifade eder. Ayrıca, p ve q parametrelerinin küçük değişimleri, yüzey eğrisinin genel biçimini önemli ölçüde etkilememekte, bu da operatörlerin parametrik stabiliteye sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, trigonometrik fonksiyonlar üzerinde de bu operatörlerin klasik anlamda bir Korovkin yakınsaması sağladığı sonucuna ulaşılmaktadır.

Örnek 3.2.3. Şekil 3.3'te, $\alpha_n = \ln(n)$, $\beta_m = \ln(m)$ olmak üzere,

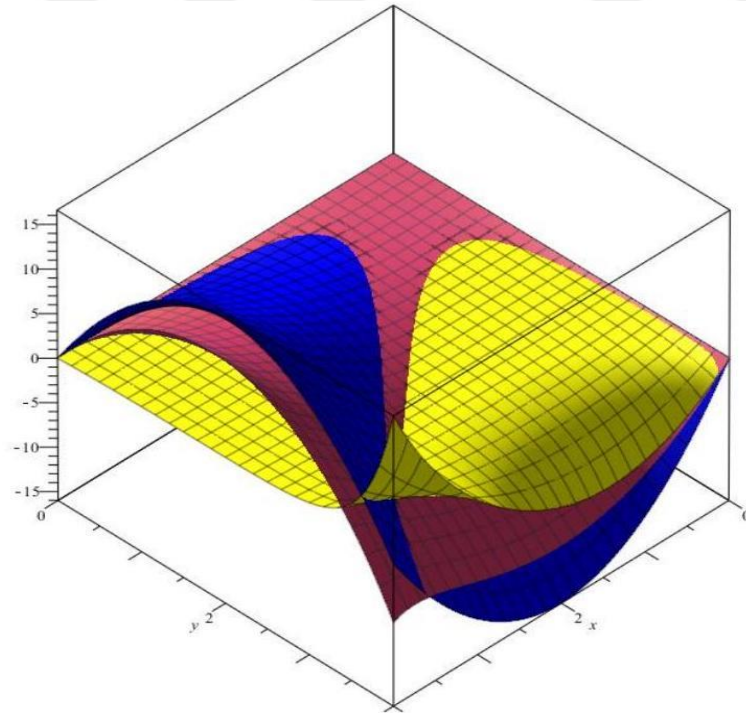
$$C_{20,20}^{(0.99,0.9),(0.999,0.96)}(f; x, y) \text{ (kırmızı)}$$

$$C_{20,20}^{(0.99,0.9),(0.990,0.90)}(f; x, y) \text{ (sarı)}$$

operatörlerinin,

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 \text{ (mavi)}$$

fonksiyonuna en uygun yakınsamaları gösterilmektedir.



Şekil 3.3. İki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.

Bu grafik, polinomsal biçimli bir fonksiyon için tanımlanan operatörlerin yüksek dereceli terimlerdeki yaklaşım doğruluğunu değerlendirmektedir. Mavi yüzey, fonksiyonun gerçek değerlerini; kırmızı ve sarı yüzeyler ise farklı (p, q) parametreleri altında elde edilen yaklaşık değerleri temsil etmektedir.

Grafiksel analizler, operatörlerin polinomsal fonksiyonlar üzerinde yüksek dereceli doğrulukta bir yakınsama sergilediğini ve bu fonksiyon sınıfının yeniden üretim (reproduction) özelliğini sağladığını göstermektedir. Ayrıca, p ve q parametrelerinin 1'e yaklaşmasıyla yaklaşık yüzeyin orijinal yüzeye tamamen çakışma eğilimine girdiği gözlenmiştir. Bu durum, tanımlanan operatörlerin Korovkin tipi test fonksiyonlarını tam olarak yeniden ürettiğini ve polinomsal taban fonksiyonlar için ideal bir yaklaşım davranışı sergilediğini ortaya koymaktadır.

Teorem 3.2.5. $f \in C(I_{ab})$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\delta_{(n,m)}(x, y) = \frac{1}{2} \max\left(\frac{a\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{(p_1, \rho_1)}}, \frac{b\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{(p_2, \rho_2)}}\right),$$

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1, p_1), (p_2, q_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C(I_a)} \leq 2M\left(f; \frac{\delta_{(n,m)}(x,y)}{2}\right). \quad (3.9)$$

İspat.

$g \in C^2(I_{ab})$ olsun. Taylor formülünü kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} g(s_1, s_2) - g(x, y) &= g(s_1, y) - g(x, y) + g(s_1, s_2) - g(s_1, y) \\ &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}(s_1 - x) + \int_x^{s_1} (s_1 - u) \frac{\partial^2 g(u, y)}{\partial u^2} du \\ &\quad + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}(s_2 - y) + \int_y^{s_2} (s_2 - v) \frac{\partial^2 g(x, v)}{\partial v^2} dv \\ &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}(s_1 - x) + \int_0^{s_1-x} (s_1 - x - u) \frac{\partial^2 g(u, y)}{\partial u^2} du \\ &\quad + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}(s_2 - y) + \int_0^{s_2-y} (s_2 - y - v) \frac{\partial^2 g(x, v)}{\partial v^2} dv. \end{aligned}$$

Söz konusu eşitliğin her iki tarafına $C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}$ operatörü uygulandığında, buna karşılık gelen aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}
\left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} g(s_1, s_2) - g(x, y) \right| &\leq \left| \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right| \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s_1 - x); x, y) \right| \\
&\quad + \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\int_0^{s_1-x} (s_1 - x - u) \frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial x^2} du; x, y \right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right| \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s_2 - y); x, y) \right| \\
&\quad + \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} \left(\int_0^{s_2-y} (s_2 - y - v) \frac{\partial^2 g(x,u)}{\partial v^2} dv; x, y \right) \right|.
\end{aligned}$$

Açıkça görüldüğü gibi,

$$C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s_1 - x); x, y) = 0,$$

$$C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s_2 - y); x, y) = 0,$$

olduğundan,

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} g(s_1, s_2) - g(x, y) \right\|_{C(I_a)} \leq \frac{1}{2} \|g'_x(x, y)\|_{C(I_a)} \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s_1 - x)^2; x, y) \right|.$$

Denklem (3.4) ve (3.5)'den

$$\begin{aligned}
&\left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_2),(p_2,q_2)} g(s_1, s_2) - g(x, y) \right\|_{C(I_a)} \\
&\leq \frac{1}{2} \max \left(\frac{p_1^{n-1} x^2}{[n]_{\{p_1, s_1\}}} + \frac{x p_1^{n-1} \alpha_n}{|n|_{\{p_1 - A_1\}}}, \frac{p_2^{n-1} y^2}{|m|_{\{p_2 - q_2\}}} + \frac{y p_2^{m-1} \beta_m}{|m|_{\{p_2 - q_2\}}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} g(s_1, s_2) - g(x, y) \right\|_{C(I_{ab})} \leq \|g\|_{C(I_{ab})} \delta_{(n,m)}$$

elde edilir ve operatörün doğrusallığından dolayı,

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_2),(p_2,q_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C(I_{ab})} \leq \left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f - C_{(n,m)}^{(p_1,q_2),(p_2,q_2)} g \right\|_{C(I_{as})}$$

eşitsizliği yazılır. (3.8) ve (3.9)'dan

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C(I_a)} \leq 2M \left(f; \frac{\delta_{[a,m]}(x, y)}{2} \right),$$

sonucuna ulaşılır ki bu adımla ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.1. $0 < q_n < p_n \leq 1$ olacak şekilde $(p_n, q_n) \rightarrow 1$ ve $p_n^n \rightarrow a_1$ koşullarını sağlayan diziler verilsin. Aşağıdaki limitler sağlanır:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}}{\alpha_n} C_{(n, n)}^{(p_n + q_n)}((t - x)^2; x) = a_1 x,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}^n}{\alpha_n^2} C_{(n, n)}^{(p_n, q_n)}((t - x)^4; x) = 3a_1 x^2.$$

İspat.

(i) Lemma 3.1.1 kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$C_{n, n}^{(p_n, q_n)}((t - x)^2; x) = \frac{-p_n^{n-1} x^2}{[n]_{p_n, q_n}} + \frac{x p_n^{n-1} \alpha_n}{[n]_{p_n, q_n}}$$

$$C_{n, n}^{(p_n, q_n)}((t - x)^2; x) = \frac{-p_n^{n-1} x^2}{[n]_{p_n, q_n}} + \frac{x p_n^{n-1} \alpha_n}{[n]_{p_n, q_n}} \quad (3.10)$$

Buna göre,

$$\frac{[n]_{p_n, q_n}}{\alpha_n} C_{(n, n)}^{(p_n, q_n)}((t - x)^2; x) = \frac{p_n^{n-1} x^2}{\alpha_n} + x p_n^{n-1}.$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının limitini aldığımız zaman,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}}{\alpha_n} \left\{ C_{(n, n)}^{(p_n, q_n)}((t - x)^2; x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{p_n^{n-1} x^2}{\alpha_n} + x p_n^{n-1} \right\} = a_1 x \text{ olur.}$$

(ii) Lemma 3.1.1 ile $C_{n, n}^{(p_n, q_n)}$ operatörlerinin doğrusallığı özelliğini kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$C_{n, n}^{(p_n, q_n)}((t - x)^4; x) = A_{1, n} x^4 + A_{2, n} x^3 + A_{3, n} x^2 + A_{4, n} x \quad (3.11)$$

Burada aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$A_{1, n} = \frac{p_n^{n-3} [n]_{p_n, q_n}^2 (-p_n^2 + 2p_n q_n - q_n^2) + p_n^{n-5} [n]_{p_n, q_n} (-p_n^3 + 3p_n q_n^2 + q_n^3) - p_n^{3n-6} (p_n^2 + p_n^3 + 2p_n q_n^2 + q_n^3)}{[n]_{p_n, q_n}^3}$$

$$A_{2, n} = \frac{p_n^{n-3} [n]_{p_n, q_n}^2 (p_n^2 - 2p_n q_n + q_n^2)}{[n]_{p_n, q_n}^3} \alpha_n + \frac{p_n^{2n-5} [n]_{p_n, q_n} (-q_n^3 - 4p_n q_n^2 - 3p_n^2 q_n + 2p_n^3) - p_n^{3n-6} (3p_n^3 + 3p_n q_n^2 + 5p_n^2 q_n + q_n^3)}{[n]_{p_n, q_n}^3} \alpha_n$$

$$A_{3, n} = \frac{p_n^{2n-4} [n]_{p_n, q_n} (-p_n^2 + 3p_n q_n + q_n^2) - p_n^{3n-5} (3p_n^2 + q_n^2 + 3p_n q_n)}{[n]_{p_n, q_n}^3} \alpha_n^2$$

$$A_{4, n} = \frac{p_n^{3n-3} \alpha_n^3}{[n]_{p_n, q_n}^3}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}^2}{\alpha_n^2} \{A_{4, n} x\} = 0. \quad (3.12)$$

$A_{1,n}$ 'in her iki tarafının limiti alındığında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}^2}{\alpha_n^2} \{A_{1,n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-p_n^{n-3} [n]_{p_n, q_n} (p_n - q_n)^2}{\alpha_n^2} + \frac{p_n^{n-5} (-p_n^3 + 3p_n q_n^2 + q_n^3)}{\alpha_n^2} \right. \\ \left. - \frac{p_n^{3n-6} (p_n^2 + p_n^3 + 2p_n q_n^2 + q_n^3)}{[n]_{p_n, q_n} \alpha_n^2} \right\} \\ = 0.$$

Aynı şekilde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}^2}{\alpha_n^2} \{A_{2,n}\} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}^2}{\alpha_n^2} \{A_{3,n}\} = 3a_1 x^2 \quad (3.13)$$

Denklemler (3.12) ve (3.13)'ün birlikte değerlendirilmesiyle teoremden öne sürülen sonuç elde edilmiştir. Dolayısıyla, teoremin ispatı burada tamamlanmaktadır.

Teorem 3.2.6. $f \in C^2(I_{ab})$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{(p_n, q_n)} \left(C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right) = \frac{a_1 x f''_{x^2}(x, y)}{2} + \frac{a_1 y f''_{y^2}(x, y)}{2}. \quad (3.14)$$

İspat. $(x, y) \in I_{ab}$ olmak üzere, f 'in Taylor açılımı aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f(s, t) = f(x, y) + f'_x(x, y)(s - x) + f'_y(x, y)(t - y) + e(s, t),$$

$$(s, t) \in I_{ab} \text{ ve } \varepsilon(s, t) \rightarrow 0, (s, t) \rightarrow (x, y)$$

(3.14) eşitliğine $C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}(f; s, t)$ operatörü uygulanırsa aşağıdaki sonucu elde edilir:

$$C_{n,n}^{(p_n, q_n)}(f; s, t) - f(x, y) = f'_x(x, y) C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((s - x); x, y) + f'_y(x, y) C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((t - y); x, y) \\ + \frac{1}{2} \{ f''_{x^2} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((t - x)^2; x, y) + 2f'_{xy} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((s - x)(t - y); x, y) \\ + f''_{y^2} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((t - y)^2; x, y) \} + C_{n,n}^{(p_n, q_n)} \left(\varepsilon(s, t) \left(\begin{matrix} (s - x)^2 \\ + (t - y)^2 \end{matrix} \right); x, y \right).$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının limitini aldığımızda $n \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}(f; s, t) - f(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \frac{1}{2} \left\{ f''_{x^2} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((t-x)^2; x, y) \right. \\ &\quad \left. + 2f'_{xy} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((s-x)(t-y); x, y) \right. \\ &\quad \left. + f''_{y^2} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}((t-y)^2; x, y) \right\} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} C_{n,n}^{(p_n, q_n)} \left(\varepsilon(s, t) \left(\frac{(s-x)^2}{+(t-y)^2} \right); x, y \right) \end{aligned}$$

Burada Cauchy–Schwarz eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}(\varepsilon(s, t)((s-x)^2 + (t-y)^2); x, y) &\leq \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n,n}^{(p_n, q_n)}(\varepsilon^2(s, t); x, y)} \\ &\quad \times \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 C_{n,n}^{(p_n, q_n)}(\varepsilon(s, t)((s-x)^4 + (t-y)^4); x, y)}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}(\varepsilon^2(s, t); x, y) = \varepsilon^2(x, y) = 0$ ve Lemma 3.2.1. (ii) ile birlikte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{(p_n, q_n)}^2 C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}((s-x)^4 + (t-y)^4; x, y)$$

sonlu olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{(p_n, q_n)}^2 C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}(\varepsilon(s, t)((s-x)^4 + (t-y)^4); x, y) = 0$$

elde edilir ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{(p_n, q_n)} \left(C_{(n,n)}^{(p_n, q_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right) = \frac{a_1 x f''_{x^2}(x, y)}{2} + \frac{a_1 y f''_{y^2}(x, y)}{2}$$

ispat tamamlanmış olur.

3.3. İki Değişkenli Fonksiyonun Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, ağırlıklı bir uzayda tanımladığımız iki değişkenli bir fonksiyona karşılık gelen doğrusal pozitif operatörler dizisi $C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}$ 'in yakınsamasını ve özelliklerini incelenmektedir. Ayrıca, operatörün ağırlıklı süreklilik modülü kullanılarak yakınsama hızı da hesaplanmaktadır.

Öncelikle ağırlıklı süreklilik modülü tanımı için temel kavramları aşağıda verilmiştir.

$$\rho(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

olsun ve B_ρ , reel eksen üzerinde tanımlı tüm fonksiyonlardan oluşan,

$$|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir uzay olarak tanımlansın. Burada M_f , yalnızca f' e bağlı pozitif bir sabittir.

B_ρ 'nun altuzayı olan C_ρ , sürekli fonksiyonlardan oluşur ve aşağıdaki norm ile donatılmıştır.

$$\|f\|_\rho = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)}.$$

C_ρ^0 uzayı; $f \in C_\rho$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x,y)}{\rho(x,y)}$ limitinin var ve sonlu olduğu fonksiyonların alt uzayıdır.

Her $f \in C_\rho^0$ olmak üzere ağırlıklı süreklilik modülünü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Omega_f(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \sup_{|h_1| < \delta_1, |h_2| < \delta_2} \frac{|f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y)|}{\rho(x, y) \rho(h_1, h_2)}. \quad (3.15)$$

Lemma 3.3.1. (3.1)'de verilen $C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}$ operatörler, $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayına ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizlik sağlandığında, doğru dönüşüm yapar. c , pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\left\| C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(\rho; x, y) \right\|_{(x^2)} \leq c.$$

Teorem 3.3.1. Herhangi bir $f \in C_\rho^0$ fonksiyonu ve tüm $(x, y) \in I_{\alpha_0 \beta_\infty}$ noktaları için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_\rho = 0.$$

İspat. Lemma 3.1.2.'den

$$\begin{aligned} \left\| C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(1; x, y) - 1 \right\|_\rho &= 0, \\ \left\| C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(s; x, y) - x \right\|_\rho &= 0, \\ \left\| C_{(n,m)}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(t; x, y) - y \right\|_\rho &= 0. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.2.'ye göre aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left\| C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(s^2 + t^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{\rho} \\ &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ \frac{p_1^{n-1} \alpha_n x}{[n]_{p_1,q_1}(x^2 + y^2 + 1)} + \frac{p_1^{n-1} x^2}{[n]_{p_1,q_1}(x^2 + y^2 + 1)} + \frac{p_2^{m-1} \beta_m y}{[m]_{p_2,q_2}(x^2 + y^2 + 1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{p_2^{m-1} y^2}{[m]_{p_2,q_2}(x^2 + y^2 + 1)} \right\} \\ &\leq \frac{p_1^{n-1} \alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}} + \frac{p_1^{n-1}}{[n]_{p_1,q_1}} + \frac{p_2^{m-1} \beta_m}{[m]_{p_2,q_2}} + \frac{p_2^{m-1}}{[m]_{p_2,q_2}} \end{aligned}$$

Her iki tarafın limitini $n, m \rightarrow \infty$ iken alıp (3.2) ve (3.3)'ü uyguladığımızda,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \left\| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}(s^2 + t^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{\rho} = 0 \text{ sonucuna ulaşırız.}$$

Burada Gadzhiev tarafından iki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı Korovkin teoremi uygulanarak, hedeflenen sonuçlara ulaşılmaktadır (Gadjiev, 1980; Gadjiev ve Hacısalihoğlu, 1995).

Tanımladığımız operatörün yakınsama hızını inceleyebilmek için aşağıdaki lemma gereklidir.

Lemma 3.3.2. Tüm $(x, y) \in I_{\alpha_n, \beta_m}$ için (3.4), (3.5) ve (3.11) kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^2; x, y) = O\left(\frac{\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{p_1,q_1}}\right)(x^2 + x), \quad (3.16)$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^4; x, y) = O\left(\frac{\alpha_n p_1^{n-1}}{[n]_{p_1,q_1}}\right)(x^4 + x^3 + x^2 + x), \quad (3.17)$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^2; x, y) = O\left(\frac{\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{p_2,q_2}}\right)(y^2 + y + 1), \quad (3.18)$$

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^4; x, y) = O\left(\frac{\beta_m p_2^{m-1}}{[m]_{p_2,q_2}}\right)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1). \quad (3.19)$$

Ağırlıklı fonksiyonel uzaylarda tanımlanan $C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}$ operatörünün yakınsama oranı, aşağıdaki teorem aracılığıyla elde edilmektedir.

Teorem 3.3.2. Eğer $f \in C_\rho^0$ ise,

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|C_{(n,m)}^{(p_1,q_2),(p_2,q_2)}(f; x, y) - f(x, y)|}{\rho(x, y)^3} \leq C_2 \omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m).$$

Burada C_2 , n, m 'den bağımsız bir sabittir ve

$$\delta_n = \frac{p_1^{n-1} \alpha_n}{[n]_{(p_1, q_2)}},$$

$$\delta_m = \frac{p_2^{m-1} \beta_m}{[m]_{(p_2, q_2)}}.$$

İspat.

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq 8(1 + x^2 + y^2) |\omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m)| \times \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_m}\right) (1 + (t-x)^2)(1 + (s-y)^2).$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafına $C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}$ operatörünü uygulayıp Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullandığımızda, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left| C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t, s) - f(x, y) \right| \leq 8(1 + x^2 + y^2) \omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m) \\ & \times \left[1 + C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^2; x, y) + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^2; x, y)} \right. \\ & \left. \frac{1}{\delta_n} \sqrt{C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^2; x, y) C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((t-x)^4; x, y)} \right] \\ & \times \left[1 + C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^2; x, y, a) + \frac{1}{\delta_m} \sqrt{C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^2; x, y)} \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\delta_m} \sqrt{C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^2; x, y) C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)}((s-y)^4; x, y)} \right]. \end{aligned}$$

Buradan da (3.16) ve (3.19)'da verilen eşitlikler kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| C_{n,m}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| \leq 8(1+x^2+y^2)\omega_p(f; \delta_n, \delta_m) \\
& \times \left[1 + O\left(\frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}}\right)(x^2+x) + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{O\left(\frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}}\right)(x^2+x)} \right. \\
& + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{O\left(\frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{p_1,q_1}}\right)(x^2+x)(x^4+x^3+x^2+x)} \\
& \times \left[1 + \frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}(y^2+y) + \frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}} \sqrt{\frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\delta_m} \sqrt{\frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}(y^2+y)} \frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{p_2,q_2}}(y^4+y^3+y^2+y) \right].
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left(\frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{(p_1+q_1)}} \right)^{1/2}, \\
\delta_m &= \left(\frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{(p_2+q_2)}} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

seçildiğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| C_{(n,m)}^{(p_1,q_1),(p_2,q_2)} f(t,s) - f(x,y) \right| \leq C_2(1+x^2+y^2)\omega_p(f; \delta_n, \delta_m) \\
& \times \left[1 + \delta_n^2(x^2+x) + \sqrt{(x^2+x)} + \sqrt{(x^2+x)(x^4+x^3+x^2+x)} \right] \\
& \times \left[1 + \delta_m^2(y^2+y) + \sqrt{(y^2+y)} + \sqrt{(y^2+y)(y^4+y^3+y^2+y)} \right].
\end{aligned}$$

Burada C_2 , n, m 'den bağımsız bir sabittir.

n, m yeterince büyük seçildiğinde ve $\delta_n^2 < 1$, $\delta_m^2 < 1$ olduğundan,

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{\left| C_{(n,m)}^{(p_1+q_1),(p_2,q_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right|}{(1+x^2+y^2)^3} \leq C_2 \omega_p \left(f; \sqrt{\frac{p_1^{n-1}\alpha_n}{[n]_{[p_1+q_1]}}}, \sqrt{\frac{p_2^{m-1}\beta_m}{[m]_{[p_2+q_2]}}} \right).$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. BULANIK (p, q) – CHLODOWSKY TİPİ İKİ BOYUTLU BERNSTEİN OPERATÖRLERİ

4.1. Operatörün Oluşturulması

Bu bölümde, Bulanık (p, q) -Chlodowsky Tipi İki Boyutlu Bernstein operatörlerini tanımlayarak bazı yardımcı sonuçlar vereceğiz.

$[a, b]$ aralığından $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ kümesine tanımlı herhangi bir h fonksiyonu, bulanık sayı değerli fonksiyon olarak adlandırılır. Uygulamada kolaylık sağlamak amacıyla, bu tür fonksiyonlar genellikle $[a, b]$ üzerinde tanımlı bulanık fonksiyon olarak da ifade edilir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$[h(x)]^r = [h_-^r(x), h_+^r(x)].$$

Her $x \in [a, b]$ ve $r \in [0, 1]$ için $h_-^r(x)$ ve $h_+^r(x)$ sırasıyla $[h(x)]^r$ aralığının sol ve sağ uç noktalarını belirtir. Ayrıca h_-^r ve h_+^r fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçekteğerli fonksiyonlardır (Gal, 2014).

n dereceli bulanık cebirsel polinom aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n * x^k \odot c_k.$$

$c_k \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere, $\sum_{k=0}^n *$ ifadesi sonlu bulanık toplamı belirtir (Anastassiou, 2010).

g ve h , $[a, b]$ aralığında tanımlı iki bulanık fonksiyon olsun. g ile h arasındaki uzaklık aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} D^*(g, h) &= \sup_{x \in [a, b]} D(g(x), h(x)) \\ &= \sup_{x \in [a, b]} \sup_{r \in [0, 1]} \max\{|g_-^r(x) - h_-^r(x)|, |g_+^r(x) - h_+^r(x)|\}. \end{aligned}$$

$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tanımlı olsun. Eğer $x_0 \in [a, b]$ noktası için h fonksiyonu ardışık süreklilik özelliğini sağlıyorsa, h fonksiyonu x_0 noktasında bulanık sürekli olarak adlandırılır. Ayrıca, h fonksiyonu $[a, b]$ aralığındaki her x_0 noktası için ardışık süreklilik gösteriyorsa, bu durumda h fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde bulanık sürekli fonksiyon olarak

tanımlanır. Bu açıdan, h 'nin bulanık sürekliliği, metrik D altında tanımlanan ardışık süreklilik kavramı ile eşdeğerdir.

Eğer h fonksiyonu $[a, b]$ aralığında bulanık sürekli bir fonksiyon ise, buna karşılık gelen h_-^r ve h_+^r fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçek değerli sürekli fonksiyonlardır (Anastassiou, 2010).

$[a, b]$ aralığında tanımlı tüm bulanık sürekli fonksiyonların kümesi $C_F[a, b]$ ile gösterilsin. Bu durumda, D^* metriği altında tanımlanan $(C_F[a, b], D^*)$, tam bir metrik uzay oluşturur (Gal, 2014).

Her $x \in [a, b]$, $k \in \mathbb{R}$ ve $h, l \in C_F[a, b]$ için, $C_F[a, b]$ uzayında toplama ve skaler çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(h \oplus l)(x) = h(x) \oplus l(x),$$

$$(k \odot h)(x) = k \odot h(x).$$

$\tilde{0}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında tanımlı bulanık sayı değerli bir fonksiyon olup, her $x \in [a, b]$ için $\tilde{0}(x) = \tilde{0}$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Burada $\tilde{0}$, \mathbb{R}_F kümesinde tanımlı \oplus işlemine göre etkisiz (nötr) elemandır.

Her $x \in [a, b]$ ve $r \in [0, 1]$ için,

$$[h(x)]^r = [h_-^r(x), h_+^r(x)],$$

$$[l(x)]^r = [l_-^r(x), l_+^r(x)],$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda bulanık toplama ve skaler çarpma işlemleri aşağıdaki koşulları sağlar:

$$(h \oplus l)_+^r = h_+^r + l_+^r, \quad (h \oplus l)_-^r = h_-^r + l_-^r, \quad (4.1)$$

$$(k \odot h)_-^r = kh_-^r, \quad (k \odot h)_+^r = kh_+^r, \quad k \geq 0 \text{ için}, \quad (4.2)$$

$$(k \odot h)_-^r = kh_+^r, \quad (k \odot h)_+^r = kh_-^r, \quad k < 0 \text{ için}, \quad (4.3)$$

elde edilir (Anastassiou, 2010).

Lemma 4.1.1. (Gal, 2014) $k, m \in \mathbb{R}$ ve $h, l, f, g \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$$(i) \quad \begin{aligned} h \oplus l &= l \oplus h, \\ (h \oplus l) \oplus g &= h \oplus (l \oplus g), \\ h \oplus \tilde{0} &= \tilde{0} \oplus h. \end{aligned}$$

(ii) $C_{\mathcal{F}}[a, b]$ 'deki $\tilde{0}$ 'ya göre, $h([a, b]) \cap \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ kesişimi boş olmayan herhangi bir $h \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ fonksiyonunun, $C_{\mathcal{F}}[a, b]$ 'deki \oplus işlemi bakımından zıt(ters) elemanı yoktur.

(iii) $k, m \in \mathbb{R}$ ve $k, m \geq 0$ veya $k, m < 0$ olmak üzere,

$$(k + m) \odot h = k \odot h \oplus m \odot h.$$

(Genel olarak $k, m \in \mathbb{R}$ için bu özellik yukardaki şartlar dışında geçerli değildir.)

$$(iv) \quad \begin{aligned} k \odot (h \oplus l) &= k \odot h \oplus k \odot l, \\ k \odot (m \odot h) &= (km) \odot h. \end{aligned}$$

$$(v) \quad \begin{aligned} D^*(k \odot h, m \odot h) &= |k - m|D^*(\tilde{0}, h), \\ D^*(h \oplus g, l \oplus g) &= D^*(h, l), \\ D^*(h \oplus l, g \oplus f) &= D^*(h, g) + D^*(l, f). \end{aligned}$$

$C_{\mathcal{F}}[a, b]$ üzerinde tanımlı herhangi bir T operatörü aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$[T(h)(x)]^r = [(T(h)(x))^-]_-, (T(h)(x))_+^r].$$

Tanım 4.1.1. (Ozkan, 2022) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha < b_n$ ve $h, [0, \alpha]$ aralığında tanımlı bulanık sürekli bir fonksiyon olsun. Bulanık (p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

tüm $k, n \in \mathbb{N}, q \in (0, 1]$ ve $p \in (q, 1]$ için,

$$C_{n,p,q}^{\mathcal{F}}(h; x) = \sum_{k=0}^n * h(\tau_{k,n}^{p,q}) \odot S_{k,n}^{p,q}(x), x \in [0, \alpha],$$

$$\tau_{k,n}^{p,q} := \frac{b_n [k]_{p,q}}{p^{k-n} [n]_{p,q}},$$

$$S_{k,n}^{p,q}(x) = \frac{p^{\frac{k(k-1)}{2}}}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} [n]_{p,q} [k]_{p,q} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(p^s - q^s \frac{x}{b_n}\right).$$

$S_{k,n}^{p,q}(x) \geq 0$ eşitsizliği, her $x \in [0, \alpha]$ iken $k, n \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1]$ ve $p \in (q, 1]$ için geçerlidir. Bulanık (p, q) - Chlodowsky Bernstein operatörleri $C_{\mathcal{F}}[0, \alpha]$ uzayını yine kendisine görüntüleyen (kendi içine tanımlı) operatörlerdir.

Ansari ve Karaisa tarafından (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörleri tanımlanmış (Ansari ve Karaisa, 2017). Özkan tarafından ise tanımlanan bu operatöre bulanık mantık uygulanarak Bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörleri tanımlanmıştır (Ozkan, 2022). Tanımladığımız (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörlerine bulanık mantık uygulayarak Bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein Operatörleri oluşturulmuştur.

$$C\mathcal{F}_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m * h(\tau_{k,n}^{(1)}, \tau_{j,m}^{(2)}) \odot \Phi_{n,k}(p_1, q_1; x) \cdot \Phi_{m,j}(p_2, q_2; y),$$

$$C\mathcal{F}_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m * h(\tau_{k,n}^{(1)}, \tau_{j,m}^{(2)}) \odot (S_{k,n}^{(1)}, S_{j,m}^{(2)}), (x, y).$$

- $\tau_{k,n}^{(1)} = \frac{[k]_{p_1, q_1}}{[n]_{p_1, q_1}} p_1^{k-n} \alpha_n$,
- $\tau_{j,m}^{(2)} = \frac{[j]_{p_2, q_2}}{[m]_{p_2, q_2}} p_2^{j-m} \beta_m$,
- $S_{k,n}^{(1)} = p_1^{\frac{k(k-1)-n(n-1)}{2}} [n]_{p_1, q_1} [k]_{p_1, q_1} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(p_1^s - q_1^s \frac{x}{\alpha_n}\right)$,
- $S_{j,m}^{(2)} = p_2^{\frac{j(j-1)-m(m-1)}{2}} [m]_{p_2, q_2} [j]_{p_2, q_2} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{s=0}^{m-j-1} \left(p_2^s - q_2^s \frac{y}{\beta_m}\right)$.
- $\Phi_{n,k}(p, q; x)$ ve $\Phi_{m,j}(p, q; y)$ iki boyutlu baz fonksiyonlarıdır ve pozitif değer alırlar,
- $* h$ fonksiyonun belirli bir noktadaki bulanık değerlendirmesini, \odot ise skaler çarpımı ifade eder.

Tanımlanan bu operatör, klasik iki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörlerinin bulanık uzaya taşınmış halidir ve $C^{\mathcal{F}}([0, \alpha] \times [0, \beta])$ kümesi içinde pozitif doğrusal bir

dönüşüm tanımlar. Tanımlanan operatör, klasik yaklaşımın her bir bileşenine karşılık gelen işlemleri bulanık uzayda tanımlayarak, bulanık yaklaşım teorisinin temel ilkeleriyle tutarlı biçimde çalışmaktadır. Tanımda kullanılan α_n ve β_m dizileri, aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{[n]_{p_1, q_1}} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{[m]_{p_2, q_2}} = 0.$$

Belirtilen koşullar sayesinde, tanımlanan bulanık operatörlerin klasik operatörlere karşı asimptotik yakınsaması garanti edilmekte; bu durum, bulanık fonksiyonların yaklaşık temsillerinde yapısal tutarlılığın korunmasını sağlamaktadır.

Klasik (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri ile bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri arasındaki ilişki aşağıda verilemektedir.

Lemma 4.1.2. Eğer $h \in C_{\mathcal{F}}[0, \alpha]$ aralığında tanımlı bir bulanık sürekli fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \right)_{\pm}^r = C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h_{\pm}^r; x, y), \quad r \in [0, 1] \text{ ve } x, y \in [0, \alpha].$$

İspat. Her $r \in [0, 1]$ ve $x, y \in [0, \alpha]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left[C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \right]^r = \left[\left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \right)_{-}^r, \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \right)_{+}^r \right].$$

Bulanık polinom tanımı gereği, aşağıdaki ifade doğrudan yazılabilir:

$$\begin{aligned} \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \right)_{-}^r &= \left(\sum_{k=0}^n * h(\tau_{k,n}^{(1)}, \tau_{j,m}^{(2)}) \odot (S_{k,n}^{(1)}, S_{j,m}^{(2)}) \right)_{-}^r \\ &= \sum_{k=0}^n h_{-}^r(\tau_{k,n}^{(1)}, \tau_{j,m}^{(2)}) S_{k,n}^{(1)} S_{j,m}^{(2)}(x, y) \\ &= C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h_{-}^r; x, y). \end{aligned}$$

Benzer şekilde yapılan işlemler sonucunda, aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$\left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_+^r = C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h_+^r; x, y).$$

$C_{\mathcal{F}}[a, b]$ uzayından yine bu uzaya tanımlı bir operatörün bulanık doğrusallık ve pozitiflik özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1.2. (Anastassiou, 2010) $T, C_{\mathcal{F}}[a, b]$ uzayından yine kendisine tanımlı bir operatör olsun, öyle ki,

$$\begin{aligned} T(l \oplus h) &= T(l) \oplus T(h), \\ T(k \odot h) &= k \odot T(h), \end{aligned}$$

her $k \in \mathbb{R}$, $h, l \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için, bu koşullar sağlanıyorsa T operatörüne bulanık doğrusal operatör denir.

Her $h, l \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için $h \leq l$ olduğunda $T(h) \leq T(l)$ koşulu sağlanıyorsa, o halde T operatörü pozitif olarak adlandırılır.

Bu pozitiflik, ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizliklerin her $r \in [0,1]$ için sağlanıyorsa geçerlidir.

Her $x \in [a, b]$ ve $r \in [0,1]$ için,

$$(T(h))_+^r \leq (T(l))_+^r,$$

$$(T(h))_-^r \leq (T(l))_-^r,$$

$$[T(h)(x)]^r = [(T(h)(x))_-^r, (T(h)(x))_+^r].$$

Burada " \leq " işareti $C_{\mathcal{F}}[a, b]$ uzayında tanımlı kısmi sıralamayı ve " \leq " işareti ise $C[a, b]$ uzayındaki kısmi sıralamayı ifade eder (Anastassiou, 2010; Gal, 2014).

Lemma 4.1.3. Bulanık (p, q) - Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri, bulanık pozitif lineer operatörlerdir.

İspat: h ve g , $[0, \alpha]$ aralığında tanımlı iki bulanık sürekli fonksiyon ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lemma 4.2'yi kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_\pm^r = C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}((l \oplus h)_\pm^r; x, y). \quad (4.4)$$

Her $x \in [0, \alpha]$ ve $r \in [0,1]$ için sırasıyla “-“ ve “+” yönlerinden ele alındığında;

$$\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h) \in C_{\mathcal{F}}[0, \alpha],$$

$$\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h) \right)_{-}^r,$$

$$\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h) \right)_{+}^r \in C[0, \alpha].$$

(4.1)’de verilen denklem ve $\mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}$ operatörünün bulanık doğrusallığı göz önünde bulundurarak operatör aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}((l \oplus h)_{\pm}^r; x) &= \mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l_{\pm}^r + h_{\pm}^r; x) \\ &= \mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l_{\pm}^r; x) \\ &\quad + \mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h_{\pm}^r; x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.4) ve (4.5)’de verilen denklemleri uygulayarak ve Lemma 4.1.2’yi dikkate alarak, aşağıdaki eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h; x) \right)_{\pm}^r &= \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x) \right)_{\pm}^r \\ &\quad + \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x) \right)_{\pm}^r. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Her $x \in [0, \alpha]$ ve $r \in [0,1]$ için, ifadeler sırasıyla “-” ve “+” yönlerinden ele alındığında, denklem (4.6)’dan yararlanarak ve ilgili aralığın toplamı dikkate alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$l, h \in C_{\mathcal{F}}[0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned}
& \left[\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h; x, y) \right]^r \\
&= \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h; x, y) \right)_-^r, \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h; x, y) \right)_+^r \right] \\
&= \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \right)_-^r + \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_-^r, \right. \\
&\quad \left. \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \right)_+^r + \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_+^r \right] \\
&= \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \right)_-^r, \right] + \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_-^r, \right] \\
&\quad + \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \right)_+^r, \right] + \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_+^r, \right] \\
&= \left[\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \right]^r + \left[\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right]^r \\
&= \left[\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l; x, y) \oplus \mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right]^r \\
&= \left[\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l) \oplus \mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h); x, y \right) \right]^r.
\end{aligned}$$

Bu işlemler sonucunda, aşağıda verilen eşitliğin geçerli olduğu görülür.

$$\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l \oplus h) = \mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(l) \oplus \mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h).$$

$k \geq 0$ varsayımı altında, Lemma 4.1.2'de verilen özelliklerden yararlanarak, aşağıdaki eşitlik sonucuna ulaşılır.

$$\left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h; x, y) \right)_\pm^r = \mathcal{C}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}((k \odot h)_\pm^r; x, y). \quad (4.7)$$

Her $x \in [0, \alpha], r \in [0, 1]$ için, sırasıyla "-" ve "+" yönlerinden ele alındığında; $\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h) \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}[0, \alpha]$ olduğundan ve $\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}$ operatörü göz önünde bulundurulduğunda,

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h) \right)_-^r, \\
& \left(\mathcal{CF}_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h) \right)_+^r \in \mathcal{C}[0, \alpha].
\end{aligned}$$

(4.2) ifadesinde belirtilen skaler çarpma özelliği ile $\mathcal{C}_n^{(p,q)}$ operatörünün doğrusal yapısı göz önüne alındığında, aşağıdaki eşitlik geçerli olur.

$$\begin{aligned}
C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}((k \odot h)_{\pm}^r; x, y) &= C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(kh_{\pm}^r; x, y) \\
&= k C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h_{\pm}^r; x, y). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

(4.7) ve (4.8) ifadeleri ile Lemma 4.1.2'nin sonuçları birlikte değerlendirildiğinde, aşağıda verilen eşitliğin geçerli olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
\left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h; x, y) \right)_{\pm}^r &= k \left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(h; x, y) \right)_{\pm}^r \\
&= \left((k \odot C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)})(h; x, y) \right)_{\pm}^r \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Her $x \in [0, \alpha]$ ve $r \in [0, 1]$ için, r -kesitleri “-” ve “+” yönlerinden değerlendirildiğinde, (4.9) ifadesinden yararlanılarak aşağıdaki eşitlik geçerli olur.

$$\begin{aligned}
\left[C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h; x, y) \right]^r &= \left[\begin{array}{l} \left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h; x, y) \right)_{-}^r, \\ \left(C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h; x, y) \right)_{+}^r \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{l} \left((k \odot C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)})(h; x, y) \right)_{-}^r, \\ \left((k \odot C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)})(h; x, y) \right)_{+}^r \end{array} \right] \\
&= \left[(k \odot C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)})(h; x, y) \right]^r.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(k \odot h) = (k \odot C_{n,m}^{(p_1,q_1)(p_2,q_2)})(h), \quad k \geq 0, h \in C_{\mathcal{F}}[0, \alpha]$$

eşitliğini elde ederiz.

Aynı şekilde $k < 0$ durumu için de, $k \geq 0$ durumu ile benzer sonuç elde edilir.

h ve l , $[0, \alpha]$ aralığında tanımlı iki bulanık sürekli fonksiyon ve $h \leq l$ olsun. Burada, “ \leq ” bağıntısı $C_{\mathcal{F}}[0, \alpha]$ üzerinde tanımlı bir kısmi sıralamadır. Tüm $r \in [0, 1]$ için $h_{-}^r \leq l_{-}^r$ ve $h_{+}^r \leq l_{+}^r$ eşitsizlikleri sağlanır. Burada, “ \leq ” bağıntısı $C[0, \alpha]$ üzerinde tanımlı kısmi sıralamadır.

$h^r, h_+^r, l_-^r, l_+^r \in C[0, \alpha]$ ve $C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}$ operatörü pozitif bir lineer operatör olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h_{\pm}^r) \leq C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(l_{\pm}^r), \quad r \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Fonksiyonun “-” ve “+” yönlerinden ayrı ayrı değerlendirilmesi durumunda, (4.10) numaralı eşitlik ile Lemma 3.2’de verilen özellikler birlikte ele alınarak, aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h) \right)_{\pm}^r \leq \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(l) \right)_{\pm}^r, \quad r \in [0, 1].$$

Sırasıyla “-” ve “+” yönlerinden ele alındığında, bu ifadeler aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y) \leq C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(l; x, y), \quad x, y \in [0, \alpha] \text{ ve } r \in [0, 1].$$

Bu sonuç ise $C_{\mathcal{F}_{n,p,q}}$ operatörünün pozitifliğini göstermektedir.

Teorem 4.1.1. (Anastassiou, 2010) $[a, b] \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $C_{\mathcal{F}}[a, b]$ uzayından yine kendisine tanımlı her bir bulanık pozitif lineer operatör dizisi $\{\tilde{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ için, $C[a, b]$ uzayından yine kendisine tanımlı bir pozitif lineer operatörler dizisi $\{\tilde{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bulunduğu varsayalım ve bu dizi aşağıdaki koşulu sağlasın,

Her $r \in [0, 1]$ ve $h \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için,

$$(T_n(h))_{\pm}^r = (\tilde{T}_n(h_{\pm}^r)) \quad (4.11)$$

eşitlik sağlanmaktadır.

Varsayalım ki, $i = 0, 1, 2$ için

$$\tilde{T}_n(t^i) \rightarrow x^i$$

yakınsaması geçerlidir.

Bu durumda, her $h \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için $T_n(h)$ bulanık anlamda D^* metriğine göre h fonksiyonuna yakınsar.

$$D^*(T_n(h), h) \rightarrow 0.$$

Bu teorem sonucunda bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri için aşağıdaki bulanık Korovkin türü yaklaşım teoremi verilecektir.

Teorem 4.1.2. (p_n) ve (q_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0, 1]$ ve $p_n \in (q_n, 1]$ olacak şekilde tanımlanmış iki keyfi dizi olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)^n < \infty. \quad (4.12)$$

Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^*(C_{n,p,q}^F(h), h) = 0, \forall h \in C^F[0, \alpha].$$

Başka bir deyişle, $(C_{n,p,q}^F)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, bulanık fonksiyon uzayı $C^F[0, \alpha]$ üzerinde D^* -metriğine göre bulanık yakınsaktır.

Bu durum, tanımlanan bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörlerinin fuzzy Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını sağladığını göstermektedir.

İspat. Bulanık Korovkin türü yaklaşım teoremi olan Teorem 4.2.1 dikkate alalım.

Lemma 4.1.3.'den bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörleri $C^F[0, \alpha]$ uzayını yine kendisine yansıtan, pozitif doğrusal operatörler olduğu ve (4.11) numaralı varsayımı sağladığı görülmektedir.

$i = 0, 1, 2, \dots$ için,

$$C_n^{p_n, q_n}(e_i) \rightarrow e_i$$

yakınsaması sağlanmaktadır (Ansari ve Karaisa, 2017; Korovkin, 1953). Dolayısıyla, bulanık Korovkin türü yaklaşım teoreminin tüm varsayımları sağlanmış olur ve böylece ispat tamamlanır.

4.2. Yakınsama Hızı

Bu bölümde, birinci mertebeden bulanık süreklilik modülü ve Lipschitz tipi bulanık fonksiyonlar kullanılarak nicel yakınsama tahminleri verilmektedir.

Birinci mertebeden bulanık süreklilik modülü kavramını Anastassiou tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1. (Anastassiou, 2010) $[a, b]$ aralığında tanımlı herhangi bir bulanık fonksiyon h için birinci mertebeden bulanık süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\omega_1^F(h; \mu) := \sup_{\substack{t, s \in [a, b] \\ |t-s| \leq \mu}} D(h(t), h(s)), \mu > 0.$$

Her $\mu > 0$ ve $r \in [0, 1]$ için $\omega_1^F(h; \mu)$, $\omega_1(h_-^r; \mu)$ ve $\omega_1(h_+^r; \mu)$ değerlerinin tümü sonlu olsun.

Burada ω_1 , aşağıdaki şekilde tanımlanan klasik birinci mertebe süreklilik modülüdür.

$$\omega_1(f; \mu) = \sup_{\substack{t, s \in [a, b] \\ |t-s| \leq \mu}} |f(t) - f(s)|, \mu > 0.$$

Bulanık birinci mertebe süreklilik modülü ise aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\omega_1^F(h; \mu) = \sup_{r \in [0, 1]} \max\{\omega_1(h_-^r; \mu), \omega_1(h_+^r; \mu)\}, \mu > 0.$$

Bulanık birinci mertebe süreklilik modülü olan $\omega_1^F(h; \mu)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $\omega_1^F(h; \mu_1 + \mu_2) \leq \omega_1^F(h; \mu_1) + \omega_1^F(h; \mu_2), \mu_1, \mu_2 > 0,$
- (ii) $\omega_1^F(h; n\mu) \leq n\omega_1^F(h; \mu), \mu > 0, n \in \mathbb{N},$
- (iii) $\omega_1^F(h; \kappa\mu) \leq (\kappa + 1)\omega_1^F(h; \mu), \mu > 0, \kappa > 0,$
- (iv) Eğer $h \in C_F[a, b]$ ise, o hâlde $\lim_{\mu \rightarrow 0} \omega_1^F(h; \mu) = 0.$

Bu tanım ve özellikler yardımıyla, bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörlerinin yakınsama oranı aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 4.2.1. Eğer $h \in C_F([0, \alpha] \times [0, \beta])$ ise,

$$D^* \left(C\mathcal{F}_{n,m}^{(p_1, q_1) (p_2, q_2)} (h; x, y), h(x, y) \right) \leq 2\omega_1^F \left(h; \sqrt{\frac{p_1^{n-1} \alpha_n (b_n - \alpha_n)}{[n]_{p_1, q_1}}} + \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta_m (b_m - \beta_m)}{[m]_{p_2, q_2}}} \right).$$

İspat. $h \in C_F([0, \alpha] \times [0, \beta])$ olmak üzere her $r \in [0, 1]$ ve $(x, y) \in [0, \alpha] \times [0, \beta]$ için bulanık fonksiyonun r aralığı şu şekilde tanımlanır:

$$[h(x, y)]^r = [h_-^r(x, y), h_+^r(x, y)].$$

Bulanık metrik tanımını gereği,

$$D^* \left(C\mathcal{F}_{n,m}(h; x, y), h(x, y) \right) = \sup_{r \in [0, 1]} \max \{ |C_{n,m}^+(h; x, y)^r - h_+^r(x, y)|, |C_{n,m}^-(h; x, y)^r - h_-^r(x, y)| \}$$

ifadesi yazılabilir.

Bulanık operatörün r -aralığı ise aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$[C\mathcal{F}_{n,m}(h; x, y)]^r = [C_{n,m}(h_-^r; x, y), C_{n,m}(h_+^r; x, y)].$$

Bulanık metrik tanımını ve r -aralığının birleşimi dikkate alındığında, D^* metriği aşağıdaki biçimde yazılır:

$$D^* \left(C_{n,m}^F(h; x, y), h(x, y) \right) = \sup_{r \in [0, 1]} \max \{ |C_{n,m}(h_+^r; x, y) - h_+^r(x, y)|, |C_{n,m}(h_-^r; x, y) - h_-^r(x, y)| \}.$$

Burada h_+^r ve h_-^r fonksiyonları klasik anlamda süreklidir. Klasik yaklaşım teorisinden bilindiği gibi, bu tür fonksiyonlar için süreklilik modülü aşağıdaki biçimde tanımlanır (Karabıyık vd., 2024a).

$g \in C([0, \alpha] \times [0, \beta])$ olmak üzere,

$$\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{p_1^{n-1} \alpha_n (b_n - \alpha_n)}{[n]_{p_1, q_1}}} + \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta_m (b_m - \beta_m)}{[m]_{p_2, q_2}}},$$

$$|C_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \leq 2\omega_1(g; \delta_{n,m}).$$

Bu sonucu hem h_-^r hem h_+^r için ayrı ayrı uygulanırsa,

$$|C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y)| \leq 2\omega_1(h_{\pm}^r; \delta_{n,m})$$

ifadesi elde edilir.

Bulanık modül tanımı gereği,

$$\omega_1^F(h; \mu) = \sup_{r \in [0,1]} \max\{\omega_1(h_+^r; \mu), \omega_1(h_-^r; \mu)\}$$

ifadesini tüm $r \in [0,1]$ için uygularsak,

$$|C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y)| \leq 2\omega_1^F(h; \delta_{n,m})$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{p_1^{n-1} \alpha_n (b_n - \alpha_n)}{[n]_{p_1, q_1}}} + \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta_m (b_m - \beta_m)}{[m]_{p_2, q_2}}},$$

$$D^*(C_{\mathcal{F}_{n,m}}(h; x, y), h(x, y)) \leq 2\omega_1^F(h; \delta_{n,m})$$

teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.2. Eğer $h \in CF([0, \alpha] \times [0, \beta])$ ve h fuzzy Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, yani

$$D^*(h(x_1, y_1), h(x_2, y_2)) \leq M(|x_1 - x_2|^\gamma + |y_1 - y_2|^\gamma),$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, \alpha] \times [0, \beta]$$

olmak üzere bulanık iki boyutlu (p, q) - Chlodowsky Bernstein operatörleri için aşağıdaki ifade yazılır:

$$D^*\left(CF_{n,m}^{(p_1, q_1), (p_2, q_2)}(h; x, y), h(x, y)\right) \leq M((\delta_n)^\gamma + (\delta_m)^\gamma).$$

- $\delta_n = \sqrt{\frac{p_1^{n-1} \alpha_n (b_n - \alpha_n)}{[n]_{p_1, q_1}}}$,
- $\delta_m = \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta_m (b_m - \beta_m)}{[m]_{p_2, q_2}}}$,
- $M > 0$ ve $\gamma \in (0, 1]$ sabitlerdir.

İspat. $h \in CF([0, \alpha] \times [0, \beta])$ bulanık Lipschitz-tipi fonksiyon ve her $r \in [0, 1]$ için,

$$[h(x, y)]^r = [h_-^r(x, y), h_+^r(x, y)],$$

bulanık operatörün r -aralığı tanımını aşağıdaki gibi yazılır:

$$[CF_{n,m}(h; x, y)]^r = [C_{n,m}(h_-^r; x, y), C_{n,m}(h_+^r; x, y)].$$

Bulanık metriğe uygulaması ise aşağıdaki gibi yazılır:

$$D^*\left(CF_{n,m}(h; x, y), h(x, y)\right)$$

$$= \sup_{r \in [0, 1]} \max\{|C_{n,m}(h_-^r; x, y) - h_-^r(x, y)|, |C_{n,m}(h_+^r; x, y) - h_+^r(x, y)|\}.$$

Eğer h_\pm^r klasik Lipschitz fonksiyonlarsa, iki boyutlu klasik sonuçtan,

$$|C_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \leq M(|x - \tau_{k,n}|^\gamma + |y - \tau_{j,m}|^\gamma).$$

operatörün varyansı tahmin edilir ve aşağıdaki ifade ile sınırlandırılır:

$$|C_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \leq M(\delta_n^\gamma + \delta_m^\gamma).$$

Buradan $g = h_-^r$ ve $g = h_+^r$ için ayrı ayrı uygulanarak,

$$D^* \left(C_{n,m}(h; x, y), h(x, y) \right) \leq \sup_{r \in [0,1]} [M(\delta_n^\gamma + \delta_m^\gamma)] = M(\delta_n^\gamma + \delta_m^\gamma)$$

eşitsizliği yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

4.3. Bulanık Asimptotik Açılımlar

Tanım 4.3.1. $[a, b]$ aralığında tanımlı herhangi bir bulanık fonksiyon h , $x \in [a, b]$ noktasında $h'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olacak şekilde bir türevi mevcutsa, bu noktada türevlenebilir olarak adlandırılır.

$$h'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t}.$$

h 'nin k -inci türevi $h^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$ benzer şekilde tanımlanır (Anastassiou, 2010; Wu ve Gong, 2001).

$CF^2[0, \alpha]$ ile $[0, \alpha]$ aralığında tanımlı ve k defa sürekli türevlenebilir tüm bulanık sürekli fonksiyonların uzayı gösterilsin.

Aşağıdaki teoremden, bulanık (p, q) -Chlodowsky tipi iki boyutlu Bernstein operatörlerinin bulanık asimptotik açılımlarına ilişkin bir tahmin verilmektedir.

Teorem 4.3.1. Eğer $h \in CF^2([0, \alpha] \times [0, \beta])$ olmak üzere her $(x, y) \in [0, \alpha] \times [0, \beta]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & D^* \left(C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h; x, y), h(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_n^{(p_1, q_1)}(\sigma_x; x) \right. \\ & \quad \left. \odot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_m^{(p_2, q_2)}(\tau_y; y) \odot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) \right) \\ & \leq D(\omega_1^{\mathcal{F}}(h; \delta_n, \delta_m), \tilde{\delta}) + \frac{\delta_n^2}{2} D^* \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tilde{0} \right) + \frac{\delta_m^2}{2} D^* \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \tilde{0} \right). \end{aligned}$$

Burada,

- $\delta_n = \sqrt{\frac{p_1^{n-1} \alpha_n (b_n - \alpha_n)}{[n]_{p_1, q_1}}}$,
- $\delta_m = \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta_m (b_m - \beta_m)}{[m]_{p_2, q_2}}}$,
- $\sigma_x(t) = (t - x)^2, \tau_y(s) = (s - y)^2$,
- $\tilde{0}$, bulanık toplama için nötr elemandır,
- $\tilde{0}$, her (x, y) için sabit fuzzy sıfır fonksiyonudur: $\tilde{0}(x, y) = \tilde{0}$,
- $\omega_1^{\mathcal{F}}(h; \delta_n, \delta_m)$ iki boyutlu fuzzy süreklilik modülüdür.

İspat. Her $h \in C^2_{\mathcal{F}}([0, \alpha] \times [0, \beta])$ için,

$$[h(x, y)]^r = [h_-^r(x, y), h_+^r(x, y)].$$

denklemden tüm $(x, y) \in [0, \alpha] \times [0, \beta]$ ve $r \in [0, 1]$ için h_-^r ve h_+^r fonksiyonları $C^2([0, \alpha] \times [0, \beta])$ kümesine aittir ve ayrıca;

$$\left\| \frac{\partial^2 h_-^r}{\partial x^2} \right\|, \left\| \frac{\partial^2 h_-^r}{\partial y^2} \right\|, \left\| \frac{\partial^2 h_+^r}{\partial x^2} \right\|, \left\| \frac{\partial^2 h_+^r}{\partial y^2} \right\|$$

normları \mathbb{R} içinde sonludur.

Klasik iki boyutlu (p, q) -Chlodowsky Bernstein operatörleri dikkate alındığında, aşağıdaki ifade yazılır:

$$\begin{aligned} & \left| C_{n,m}^{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2}(x, y) C_n^{(p_1, q_1)}((t-x)^2; x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2}(x, y) C_m^{(p_2, q_2)}((s-y)^2; y) \right| \\ & \leq |C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y)| + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2} \right\| |C_n((t-x)^2; x)| + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2} \right\| |C_m((s-y)^2; y)|. \end{aligned}$$

Teorem 4.2.2'ye göre $h_{\pm}^r \in C^2([0, \alpha] \times [0, \beta])$ olduğundan sürekli fonksiyonlardır.

$$|C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y)| \leq 2\omega_1(h_{\pm}^r; \delta_n, \delta_m).$$

Burada,

$$\delta_n = \sqrt{\frac{p_1^{n_1} - \frac{1}{2}(b_n - \alpha)}{[n]_{p_1 - q_1}}},$$

$$\delta_m = \sqrt{\frac{p_2^{m-1} \beta (b_m - \beta)}{[m]_{p_2} \alpha_2}},$$

klasik ikinci moment üst sınırları (yani $|C_n((t-x)^2; x)| \leq \delta_n^2$, $|C_m((s-y)^2; y)| \leq \delta_m^2$, $|C_m((s-y)^2; y)| \leq \delta_m^2$) kullanılarak aşağıdaki ifade yazılır:

$$\left| C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2}(x, y) C_n((t-x)^2; x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2}(x, y) C_m((s-y)^2; y) \right|$$

$$\leq 2\omega_1(h_{\pm}^r; \delta_n, \delta_m) + \frac{\delta_n^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2} \right\| + \frac{\delta_m^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2} \right\|.$$

Sonuç olarak, D metriğinin tanımı ve bulanık fonksiyonların gösterimi göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D^* \left(C_{n,m}^F(h; x, y), h(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_n((t-x)^2; x) \odot h_{xx}(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_m((s-y)^2; y) \odot h_{yy}(x, y) \right)$$

$$= \sup_{r \in [0,1]} \max \left\{ \left| C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y) - \frac{1}{2} h_{xx,-}^r(x, y) C_n((t-x)^2; x) - \frac{1}{2} h_{yy,-}^r(x, y) C_m((s-y)^2; y) \right|, \right.$$

$$\left. \left| C_{n,m}(h_{\pm}^r; x, y) - h_{\pm}^r(x, y) - \frac{1}{2} h_{xx,+}^r(x, y) C_n((t-x)^2; x) - \frac{1}{2} h_{yy,+}^r(x, y) C_m((s-y)^2; y) \right| \right\}.$$

$$D^* \left(C_{n,m}^F(h; x, y), h(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_n((t-x)^2; x) \odot h_{xx}(x, y) \oplus \frac{1}{2} C_m((s-y)^2; y) \odot h_{yy}(x, y) \right)$$

$$\leq \sup_{r \in [0,1]} \max \left\{ 2\omega_1(h_{\pm}^r; \delta_n, \delta_m) + \frac{\delta_n^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2} \right\| + \frac{\delta_m^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2} \right\| \right.$$

$$\left. \leq 2\omega_1(h_{\pm}^r; \delta_n, \delta_m) + \frac{\delta_n^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial x^2} \right\| + \frac{\delta_m^2}{2} \left\| \frac{\partial^2 h_{\pm}^r}{\partial y^2} \right\| \right\}.$$

Burada supremum özelliği dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
& D^* \left(C_{n,m}^F(h; x, y), h(x, y) \right) \\
& \leq \sup_{r \in [0,1]} \max \{ 2\omega_1(h_-^r; \delta_n, \delta_m), 2\omega_1(h_+^r; \delta_n, \delta_m) \} \\
& + \sup_{r \in [0,1]} \max \left\{ \frac{\delta_n^2}{2} \|h_{xx,-}^r\| + \frac{\delta_m^2}{2} \|h_{yy,-}^r\|, \frac{\delta_n^2}{2} \|h_{xx,+}^r\| + \frac{\delta_m^2}{2} \|h_{yy,+}^r\| \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz ki buradan;

$$D^* \left(C_{n,m}^F(h; x, y), h(x, y) \right) \leq D(\omega_1^F(h; \delta_n, \delta_m), \delta) + \frac{\delta_n^2}{2} D^*(h_{xx}, \delta) + \frac{\delta_m^2}{2} D^*(h_{yy}, \delta).$$

Son olarak Örnek 3.2.1. ve Örnek 3.2.2.'deki grafikleri aynı fonksiyon ve verilen parametre değerleriyle bulanık iki boyutlu (p, q) -Bernstein Chlodowsky operatörlerin grafikleri aşağıda çizilecektir.

Örnek 4.3.1. Şekil 4.1'de, $\alpha_n = \ln(n)$, $\beta_m = \sqrt{m}$ olmak üzere,

$$C_{20,20}^{(0.999,0.9),(0.999,0.9)}(f; x, y)$$

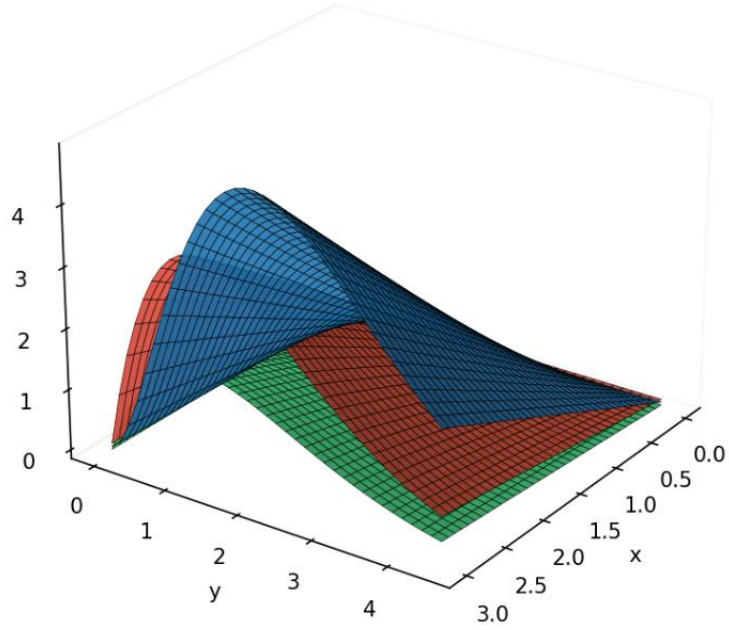
operatörünün,

$$f(x, y) = 3xy^2e^{-y} \text{ (kahverengi - gerçek değer),}$$

$$f_1(x, y) = 3xy^2e^{-y} \text{ (mavi - üst değer),}$$

$$f_2(x, y) = 3xy^2e^{-y} \text{ (yeşil - alt değer)}$$

fonksiyonuna en uygun alt ve üst yakınsamaları gösterilmektedir.



Şekil 4.1. İki boyutlu bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.

Örnek 4.3.2. Şekil 4.2'de, $\alpha_n = \ln(n)$, $\beta_m = \sqrt{m}$ olmak üzere,

$$C_{20,20}^{(0.990,0.86),(0.996,0.89)}(f; x, y)$$

operatörünün,

$$f(x, y) = \sin(x - y) \text{ (mavi - gerçek değer),}$$

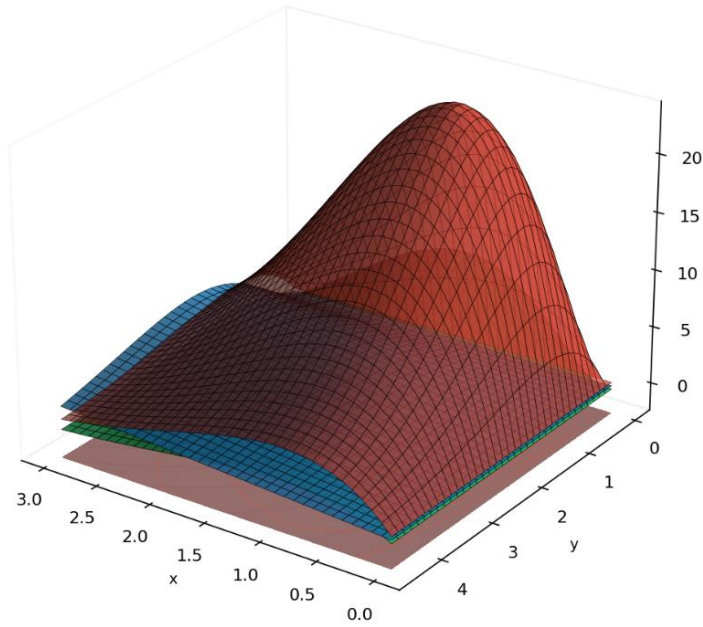
$$f(x, y) = \sin(x - y) \text{ (kahverengi - üst değer),}$$

$$f(x, y) = \sin(x - y) \text{ (yeşil - alt değer)}$$

$$f^-(x, y) = \sin(x - y) - 0.2$$

$$f^+(x, y) = \sin(x - y) + 0.2$$

fonksiyonuna en uygun alt ve üst yakınsamaları gösterilmektedir.



Şekil 4.2. İki boyutlu bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması.

Bu grafiklerde iki boyutlu bulanık (p, q) -Chlodowsky Bernstein polinomlarının yakınsaması grafiği polinom fonksiyonları ile çizilmiştir. Verilen parametre değerleri arttıkça gerçek fonksiyona yakınladığını yukarıdaki Örnek 3.2.1. ve Örnek 3.2.2. grafiklerinde görmüştük. Bu grafiklerde ise orijinal fonksiyonun hata payı olan bulanık mantık ile üst ve alt değerlerini çizmiş olduk.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu doktora tezinde, (p, q) tamsayılarına dayalı iki boyutlu Chlodowsky Bernstein operatörleri ele alınmış ve bu operatörlerin hem klasik fonksiyon uzayında hem de bulanık fonksiyon uzayında sahip oldukları yaklaşım özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular göstermektedir ki tanımlanan yeni operatörler pozitif lineer bir yapıya sahiptir ve Korovkin tipi teoremler yardımıyla sürekli fonksiyonlar uzayında yakınsama sağladıkları ortaya konulmuştur. Bunun yanında süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfı kullanılarak bu operatörlerin yakınsama hızları belirlenmiş, ayrıca Voronovskaja tipi bir teorem yardımıyla operatörlerin asimptotik davranışları ortaya çıkarılmıştır. Çalışmanın bulanık mantık çerçevesinde ele alınan kısmında ise bulanık Korovkin teoremi uygulanmış ve operatörlerin bulanık fonksiyon uzayındaki yakınsama özellikleri incelenerek klasik sonuçların bulanık ortamda da geçerli olduğu ispat edilmiştir. Böylece tez kapsamında ulaşılan sonuçlar hem klasik hem de bulanık yaklaşımlar teorisi açısından literatüre önemli katkılar sunmaktadır.

5.2 Öneriler

Elde edilen sonuçların yanı sıra, bu çalışmanın ileride yapılacak araştırmalar için çeşitli öneriler sunduğu da ifade edilebilir. Öncelikle, iki boyutlu Chlodowsky Bernstein operatörlerinin daha yüksek boyutlara genelleştirilmesi gelecekteki çalışmalar için önemli bir yönelim olabilir. Bunun yanı sıra, farklı ağırlıklı fonksiyon uzaylarında bu operatörlerin yaklaşım özelliklerinin araştırılması literatüre yeni açılımlar getirecektir. Çalışmanın bulanık versiyonu dikkate alındığında, söz konusu operatörlerin bulanık diferansiyel denklemler ve kontrol teorisi gibi alanlarda uygulanabilirliği değerlendirilebilir. Ayrıca operatörlerin sayısal performanslarının daha geniş fonksiyon sınıfları üzerinde test edilmesi, bu yaklaşımların algoritmik ve hesaplamalı yönlerinin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır. Son olarak, elde edilen bulguların yapay zekâ ve bulanık sistemler alanına, özellikle de bulanık sinir ağları ile ilişkilendirilerek taşınması, bu tür operatörlerin uygulama alanlarını genişletme potansiyeli taşımaktadır.

6. KAYNAKLAR

- Altomare, F., ve Campiti, M. (1994). Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. <https://doi.org/https://hdl.handle.net/11586/67184>
- Anastassiou, G. A. (2001). A Fuzzy Trigonometric Approximation Theorem of Weierstrass-Type. *İçinde Fuzzy Mathematics: Approximation Theory* (ss. 75-82). Springer.
- Anastassiou, G. A. (2010). Fuzzy mathematics: Approximation theory (C. 251). Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-642-11220-1>
- Anastassiou, G. A., ve Gal, S. G. (2002). *Approximation theory. moduli of continuity and global smoothness preservation*. Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1017345502133>
- Ansari, K. J., ve Karaisa, A. (2017). On the approximation by Chlodowsky type generalization of (p, q) -Bernstein operators. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl*, 8(2), 181-200. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2017.1827.1479>
- Ashieser, N. I. (1956). Lecture on Approximation Theory, OGIZ, Moscow-Leningrand, 1947. Theory of approximation (in English). *Translated by Hymann, CJ Frederick Ungar Publishing Co., New York*.
- Atakut, Ç., ve Büyükyazıcı, İ. (2010). Stancu type generalization of the Favard–Szász operators. *Applied Mathematics Letters*, 23(12), 1479-1482. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.08.017>
- Bede, B., ve Gal, S. G. (2004). Best approximation and Jackson-type estimates for fuzzy-number-valued functions. *Journal of concrete and applicable mathematics, to appear*.
- Berens, H., ve Butzer, P. L. (1967). Semigroups of operators and approximation. *Springer-Verlag*.
- Bernstein, S. N. (1913). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* 13 (1912/13), 1-2. <https://doi.org/https://www.mathnet.ru/rus/khmo107>
- Büyükyazıcı, İ., ve Ibikli, E. (2006). Inverse theorems for Bernstein-Chlodowsky type polynomials. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 46(1), 21-29.
- Chlodowsky, I. (1937). Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de MS Bernstein. *Compositio Mathematica*, 4, 380-393. https://doi.org/http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__380_0
- Cong-Xin, W., ve Ming, M. (1991). Embedding problem of fuzzy number space: *Part I*. *Fuzzy Sets and Systems*, 44(1), 33-38. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114\(91\)90030-T](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90030-T)

- Coroianu, L., Gal, S. G., ve Bede, B. (2014). Approximation of fuzzy numbers by max-product Bernstein operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 257, 41-66. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2013.04.010>
- Daraby, B., ve Jafari, J. (2016). Some properties of fuzzy real numbers. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 3(1), 21-27. <https://doi.org/http://scma.maragheh.ac.ir/>
- Dubois, D., ve Prade, H. (1987). Fuzzy numbers: An overview, Analysis of fuzzy information, vol. 1, *Mathematical Logic*. CRC Press, Boca Raton, FL. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-1450-4.50015-8>
- Ersan, S. S. Ç. (2008). *İki Değişkenli q-Bleimann, Butzer ve Hahn Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 1-53.
- Gadjiev, A. D. (1980). Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables. *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, Ser. Fiz.-Teh. Mat. Nauk*, 4, 32-37.
- Gadjiev, A. D., Efendiev, R. O., ve Ibikli, E. (1998). Generalized Bernstein-Chlodowsky polynomials. *The Rocky Mountain journal of mathematics*, 1267-1277. <https://doi.org/https://www.jstor.org/stable/44238231>
- Gadjiev, A. D., ve Hacısalihoğlu, H. (1995). *Convergence of the sequences of linear positive operators*. Ankara University, Yenimahalle.
- Gadjieva, E. A., ve Ibikli, E. (1999). Weighted approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30, 83-88.
- Gal, S. G. (1993). A fuzzy variant of the Weierstrass' approximation theorem. *J. Fuzzy Math*, 1(4), 865-872.
- Gal, S. G. (1994). Degree of approximation of fuzzy mappings by fuzzy polynomials. *J. Fuzzy Math*, 2(4), 847-853.
- Gal, S. G. (1995). Approximate selections for fuzzy-set-valued mappings and applications. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3, 941-947.
- Gal, S. G. (2014). Linear continuous functionals on FN-type spaces. *arXiv preprint arXiv:1407.7898*.
- Gal, S. G., ve Gupta, V. (2009). Approximation of vector-valued functions by q-Durrmeyer operators with applications to random and fuzzy approximation. *Oradea Univ. Math. J*, 16, 233-242.
- Gupta, V. (2018). (p, q)-Szász–Mirakyan–Baskakov Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, 12(1), 17-25. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11785-015-0521-4>
- Hacısalihoğlu, H. (1995). Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsallığı. *Hiperlink*.

- Ispir, N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 25(3), 355-365.
- Karabıyık, Ü., Ayık, A., ve Karaisa, A. (2024a). Approximation Properties of Chlodovsky-Type Two-Dimensional Bernstein Operators Based on (p, q) -Integers. *Symmetry*, 16(11), 1503. <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/sym16111503>
- Karabıyık, Ü., Ayık, A., ve Karaisa, A. (2024b). Maplesoft, version 2023.0. Computer Software. *Maplesoft: Waterloo, ON, Canada*, 2024. (version 2023.0.). MAPPLE.
- Karsli, H., ve Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q -Chlodowsky operators. *Applied Mathematics and Computation*, 195(1), 220-229. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.085>
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR (NS)*, 90, 961.
- Mursaleen, M., Ansari, K. J., ve Khan, A. (2015). On (p, q) -analogue of Bernstein operators. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 874-882. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.090>
- Mursaleen, M., Nasiruzzaman, M., ve Nurgali, A. (2015). Some approximation results on Bernstein-Schurer operators defined by (p, q) -integers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015(1), 249. <https://doi.org/https://doi.org/10.1186/s13660-015-0767-4>
- Ozkan, E. Y. (2022). Approximation by Fuzzy (p, q) -Bernstein-Chlodowsky Operators. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 19(2), 113-132. <https://doi.org/https://doi.org/10.22130/scma.2022.524506.910>
- R Jr, G. (1986). *Elementary fuzzy calculus*. Fuzzy sets and systems, 18, 31-43.
- Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Doklady Akademii Nauk*, 115(1), 17-19. <https://doi.org/https://www.mathnet.ru/eng/dan22112>
- Voronovskaja, E. (1932). Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein. *CR Acad. Sci. URSS*, 79, 79-85.
- Wu, C., ve Danghang, L. (1999). A fuzzy variant Weierstrass approximation theorem. *J. Fuzzy Math*, 7(1), 101-104.
- Wu, C., ve Gong, Z. (2001). On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions (I). *Fuzzy sets and systems*, 120(3), 523-532. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00057-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00057-3)
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353. Received August, 1, 2024. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)