



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İKİNCİ MERTEBEDEN 2-BOYUTLU BİR
RİCCATİ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN
ÇÖZÜMLERİ

Muhammet Kadir YANAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Ocak-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Muhammet Kadir YANAR tarafından hazırlanan “İKİNCİ MERTEBEDEN 2-BOYUTLU BİR RİCCATİ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Necati TAŞKARA

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

.....

Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Muhammet Kadir YANAR

29.01.2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN 2-BOYUTLU BİR RİCCATİ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Muhammet Kadir YANAR

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

2021, 70 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU**

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, fark denklemlerinin önemi ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, çeşitli tipteki fark denklemleri ve fark denklem sistemleri üzerine bir literatür araştırması verildi.

Dördüncü bölümde, bu tezin orijinal kısmını oluşturan beşinci bölüme bir kılavuz olması için, yayınlanmış bir makale incelendi ve bu makalenin konusu olan

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden fark denkleminin çözümlerine dair bazı özellikler verildi.

Beşinci bölümde, ikinci mertebeden 2-boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + by_n x_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{1}{c + dx_n y_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliği araştırıldı, genel çözümü elde edildi ve genel çözüm yardımıyla çözümlerin asimptotik davranışı incelendi.

Altıncı bölümde ise, bu çalışma üzerine bazı sonuçlar ve öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Genel çözüm, fark denklemleri, fark denklem sistemleri, periyodik çözüm.

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTIONS OF A 2-DIMENSIONAL SYSTEM OF RICCATI DIFFERENCE EQUATIONS OF ORDER TWO

Muhammet Kadir YANAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2021, 70 Pages

Jury

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of six parts.

In the first chapter, general informations about the importance of difference equations were given.

In the second chapter, general definitions and theorems about difference equations were given.

In the third chapter, a literature research on various types of difference equations and systems of difference equations was given.

In the fourth chapter, in order to be a guide to the fifth chapter, which forms the original part of this thesis, a published article was examined and some features were given about the solutions of the second order difference equation

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

which is the main equipment of the article.

In the fifth chapter, solvability of 2-dimensional system of second order difference equations

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + by_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{c + dx_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

was investigated, its general solution was obtained and the asymptotic behavior of the solutions was investigated with via the general solution.

In the sixth chapter, some results and recommendations were given on this study.

Keywords: General solution, difference equations, system of difference equations, periodic solutions.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU' ya, çalışmalarım boyunca ve hayatımın her anında maddi manevi her türlü yanımda olan babam Mehmet Emin YANAR' a, annem Filiz YANAR' a ve kardeşim Sümeyye Sena YANAR' a en içten saygılarımı ve sevgilerimi sunarım. Ayrıca, beni bu zamanlara getiren fikirleriyle konuşmalarıyla akademik hayata ilk adım atmamı sağlayan değerli hocalarıma da saygı ve sevgilerimi sunarım.

Muhammet Kadir YANAR
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	6
2.1. Fark Denklemleri	7
2.2. Linear Fark Denklemleri.....	13
3. KAYNAK ARAŞTIRMASI	17
3.1. Fark Denklemleri Üzerine Yayınlanmış Bazı Çalışmalar	17
3.2. Fark Denklem Sistemleri Üzerine Yayınlanmış Bazı Çalışmalar	24
4. İKİNCİ MERTEBEDEN ÇÖZÜLEBİLİR BİR FARK DENKLEMİ.....	30
4.1. Genel Çözüm	30
4.2. Yasaklı Küme	34
4.3. Çözümlerin Asimptotik Davranışı	35
4.2.1. $\Delta < 0$ Durumu	35
4.2.2. $\Delta = 0$ Durumu	38
4.2.3. $\Delta > 0$ Durumu	39
5. İKİNCİ MERTEBEDEN ÇÖZÜLEBİLİR BİR FARK DENKLEM SİSTEMİ 43	
5.1. Genel Çözüm	45
5.1.1. $\Delta < 0$ durumu	47
5.1.2. $\Delta = 0$ durumu	49
5.1.3. $\Delta > 0$ durumu	53
5.2. Çözümlerin Asimptotik Davranışı	54
5.2.1. $\Delta < 0$ durumu	54
5.2.2. $\Delta = 0$ durumu	57
5.2.3. $\Delta > 0$ durumu	58
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	64
7. KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	70

SİMGELER

\mathbb{N}	: Doğal sayılar
\mathbb{N}_0	: Sıfırdan başlayan doğal sayılar
\mathbb{Z}	: Tam sayılar
\mathbb{R}	: Reel sayılar
\forall	: Her
\exists	: En az bir
$<$: Küçüktür
$>$: Büyüktür
\leq	: Küçük eşittir
\geq	: Büyük eşittir
$=$: Eşittir
\neq	: Eşit değildir
\in	: Elemanıdır
\notin	: Elemanı değildir
\Rightarrow	: Gerek şart
\Leftarrow	: Yeter şart
\Leftrightarrow	: Gerek ve yeter şart
Δ	: İleri fark operatörü
E	: Kaydırma operatörü
$\sum()$: Belirsiz toplam
$\sum_a^b()$: a dan b ye toplam
$\prod_a^b()$: a dan b ye çarpım
$\overline{a,b}$: a dan b ye kadar tam sayılar

1. GİRİŞ

Fark denklemleri; mühendislik, kimya, fizik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemleri teorisi, diferansiyel denklemler teorisi ile büyük oranda benzerlik göstermektedir. 20. yüzyılda genetik ve radyasyondaki kuantum gibi bilimin çeşitli dallarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik ifadeleri dışında başka ifadelere de ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumları, fark denklemleri ile kaldırılmak istenmiştir (Çatal, 2004).

Ardışık tekrar işlemi bir önceki adımda bulunan değer bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmesi olayıdır. Fark denklemlerinde ise ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istenilen bir terimin değeri bulunabilir. Ayrıca, sadece kesikli (süreksiz) değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler ardışık tekrar işlemlerinin de yardımıyla fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilebilir. Örneğin ekonomide böyle bir değişken zamandır. Ekonomistler bu kesikli zaman aralıkları üzerinde periyot analizi denen ulusal gelir davranışı ve diğer ekonomik değişkenleri inceler (Goldberg, 1960). Ekonomide yine örümcek ağı modeli ve Samuelson'un çoğaltan hızlandırıcı modellerinin çözümünde de fark denklemleri kullanılır (Ersel, 1981).

Sosyolojik araştırmalarda bir ülkedeki sosyal demografîyi¹, sosyal bulaşıcı hastalıkların yayılması, söylentilerin yayılması ve kamuoyunda yaşanan hızlı değişimler birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin çözümleriyle bulunur. Ayrıca, birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin sosyolojik araştırmalarda birçok modellemesi de mevcuttur (Huckfeldt, 1982).

Elektrikli otomobilin modellenmesinde de fark denklemleri kullanılır. Bunun için içinde akümülatör-filtre, tahrik motoru ve taşıt direnci olmak üzere oluşturulan otomobil simülasyonu modelinde her kısma ilişkin sistem simülasyonu programı elde edilmesi için ayrı ayrı fark denklemleri oluşturulur. Bulunan bu fark denklemlerinin uygun sırayla yazılmasıyla sistem simülasyon programı hiçbir nümerik yöntem

¹Bir ülkede bulunan nüfusun yapısını, durumunu ve dinamik özelliklerini inceleyen bilim dalı.

kullanılmadan doğrudan programlanabilir. Bu denklemlerle gerçekleştirilen programlarda herhangi bir kararlılık sorunuyla karşılaşmaz. Ayrıca denklemler fark denklemleri şeklinde düzenlenmiş olduğundan herhangi bir kontrol algoritması altında sistemin kararlılığını da incelemek mümkündür. Bu programla bir elektrikli otomobilin tasarımında motor gücü seçimi, seçilen motorla çeşitli yol ve yük koşullarında elde edilebilecek hız ve ivme profilleri belirlenebilir. Ayrıca, farklı kontrol algoritmalarının taşıt performansı üzerindeki etkileri ve enerji tüketimi gibi konuların irdelenmesi de mümkündür (Kurtulan ve diğ., 1995).

Fark denklemlerinin en basit ifade edilmesi M.Ö. 2000 yıllarında görülmektedir. Bu kavram ilk defa bir denklemin kökünü bulma çalışması olarak Babillerde görülmüştür (Kelly, 2003).

M.Ö. 600-0 yılları arasında Arşimet², Öklid³ ve Pisagor⁴'u görmekteyiz. M.S. 0-400 yıllarında Heron⁵, Theon⁶ ve Diophantus⁷ fark denklemlerine katkıda bulunmuştur. 400-1200 yılları arasında Avrupa'da büyük başarılar imza atılmamış olup bu dönemdeki başarılar çoğunlukla Ortadoğu'dan gelmiştir. Bu dönemde Hintli matematikçi Brahmagupta⁸ ikinci dereceden bir denklemi çözmek için kurallar geliştirmiş ve bu kurallarda ardışık tekrar yöntemini kullanmıştır. Bu dönemde ayrıca Al-Karaji⁹, Ömer Hayyam¹⁰, Bhaskara¹¹ ve Al-Samawal¹²'in çalışmalarını görüyoruz (Kulenovic ve diğ., 2000).

1200-1600 yılları arasında fark denklemleri ve ardışık tekrar bağıntılarına Fibonacci¹³, Nasir Al-Tusi¹⁴, YangHui¹⁵, Al-Banna¹⁶, Al-Farisi¹⁷ ve Shih-Chieh¹⁸

² Arşimet (M.Ö. 287-M.Ö. 212) Yunan matematikçi, fizikçi, astronom, filozof ve mühendis.

³ Öklid (M.Ö. 325-M.Ö. 265) İskenderiyeli matematikçi.

⁴ Pisagor (M.Ö. 569-M.Ö. 475) İyonyalı matematikçi ve filozof.

⁵ Heron (10-15) Yunan matematikçi ve mekanik uzmanı

⁶ Theon (70-135) Yunan bilgin ve matematikçi.

⁷ Diophantus (200-284) Yunan matematikçi.

⁸ Brahmagupta (598-670) Hintli matematikçi ve astronom.

⁹ Abû Bakribn Muhammed ibn al Husayn al-Karaji (953-1029) Persli matematikçi ve mühendis.

¹⁰ Gıyaseddin Eb'ulFeth Ömer İbni İbrahim'el Hayyam (1048-1122) Persli matematikçi, şair, filozof.

¹¹ II. Bhaskara (1114-1185) Hintli matematikçi.

¹² Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal (1130-1180) Arap matematikçi, astronom ve fizikçi.

¹³ Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) İtalyan matematikçi.

¹⁴ Nasîrüddin Tûsî (1201-1274) Farslı matematikçi.

¹⁵ Yang Hui (1238-1298) Çinli matematikçi.

¹⁶ Al-Marrakushiibn Al-Banna (1256-1321) Farslı matematikçi.

¹⁷ Kamal al-Din Abu'l Hasan Muhammed Al-Farisi (1260-1320) Persli matematikçi.

tarafından önemli katkılar yapılmıştır. Ayrıca, 1202 yılında Fibonacci biyolojide ilk matematiksel modelini (tavşan problemi olarak bilinen) oluşturmuştur. Bu problemde çiftlikteki tavşanlar doğduktan sonra ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre bu çiftlikte bir çift tavşanla başlanırsa kaç ay sonra kaç çift tavşan elde edileceği sorusunun cevabına ulaşmak istenmiştir. Fibonacci bu çalışmasında

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

fark denklemini oluşturmuştur (Elaydi, 2005). Bu fark denklemi ise Alfred Binet¹⁹ tarafından çözülmüş olup bu çözüme Binet formülü adı verilmiştir (Weisstein, 1999).

1600-1700 yıllarında Jacob²⁰, Moivre²¹, Newton²² ve Pascal²³ fark denklemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu kişiler arasında en önemli çalışmayı ise Newton, günümüzde “Newton metodu” olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemiyle ifade etmiştir (Kulenovic ve diğ., 2000).

1700-1750 yılları arasında Riccati²⁴, Cotes²⁵ ve Simson²⁶’u görmekteyiz. Bu dönemde Riccati analiz ve özellikle diferansiyel denklemler üzerinde çalışmıştır. Günümüzde de

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

şeklinde ifade edilen fark denklemi onun adıyla özdeşleşerek Riccati fark denklemi olarak anılmaktadır. Bu fark denkleminin bu adın verilmesi Riccati diferansiyel denkleminin ayrıştırılarak elde edilebilmesinden kaynaklanır.

¹⁸ChuShih-Chieh (1260-1320) Çinli matematikçi.

¹⁹AlfredBinet (1857-1911) Fransız psikoloji uzmanı.

²⁰Jacob (Jacques) Bernoulli (1655-1705) İsviçreli matematikçi.

²¹ Abraham de Moivre (1667-1754) Fransız matematikçi.

²²Sir Isaac Newton (1643-1727) İngiliz fizikçi, matematikçi, astronom, filozof ve ilahiyatçı.

²³Blaise Pascal (1623-1662) Fransız fizikçi, matematikçi, yazar ve filozof.

²⁴JacopoFrancescoRiccati (1676-1754) İtalyan matematikçi.

²⁵RogerCotes (1682-1716) İngiliz matematikçi.

²⁶ Robert Simson (1687-1768) İskoç matematikçi.

1751-1800 yıllarında ise Euler²⁷, Johann Bernouilli²⁸, Monge²⁹ ve Laplace³⁰,ın çalışmalarını görmekteyiz. 1755 yılında Euler “Instituti ones calculi differentialis” adlı yayınında sonlu farkın analiziyle ilgili çalışmalarına yer vermiş olup ilk defa Δ fark operatörünü kullanmıştır. 1801-1825 yılları arasında bu konuda Babagge³¹, Bessel³², Farey³³, Gompertz³⁴, Gauss³⁵ ve Legendre³⁶,in çalışmalarını görüyoruz. Bu yıllardaki önemli buluşlardan biriye 1755 yılında bulunan Δ fark sembolünün artık Babagge tarafından

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1), \quad x_1 \neq x_2$$

şeklindeki bir özel halinin oluşturulmasıdır. Bu bağıntı bir polinom şeklinde yazılabilen herhangi bir fonksiyonun nümerik değerini hesaplamak için kullanılmaktadır (Kulenovic ve diğ., 2000).

1851-1875 yılları arasında Heine³⁷, Casorati³⁸ ve Riemann³⁹ fark denklemlerine katkıda bulunmuştur. Bu dönemde Casorati, diferansiyel denklemlerle fark denklemlerinin önemli ortak özelliklere sahip olduğunu farkına varmıştır. Ayrıca Casorati, lineer fark denklemleri için Casorati formülünü geliştirmiş ve n . mertebeden fark denklemi, homojen fark denklemi ve Casorati matrisi üzerinde yaptığı çalışmalar fark denklemleri teorisinde önemli yer tutmuştur. 1876-1900 yılları arasında Hermite⁴⁰, Christoffel⁴¹, Routh⁴², Laguerre⁴³, Lucas⁴⁴, Gegenbauer⁴⁵, Poincare⁴⁶, Markov⁴⁷,

²⁷LeonhardEuler (1707-1783) İsviçreli matematikçi ve fizikçi.

²⁸ Johann III Bernouilli (1744-1807) İsviçreli matematikçi.

²⁹GaspardMonge (1746-1818) Fransız matematikçi.

³⁰ Pierre-SimonLaplace (1749-1827) Fransız matematikçi ve astronom.

³¹ Charles Babagge (1791-1871) İngiliz matematikçi, filozof ve mühendis.

³²Friedric Wilhelm Bessel (1784-1846) Alman matematikçi ve gökbilimci.

³³ John Farey (1766-1826) İngiliz jeolog, yazar ve matematikçi.

³⁴ Benjamin Gompertz (1779-1865) İngiliz matematikçi ve aktüer.

³⁵ Carl Friendrich Gauss (1777-1855) Alman fizikçi ve matematikçi.

³⁶ Adrien-Marie Legendre (1752-1833) Fransız matematikçi.

³⁷ HeinrichEduardHeine (1821-1881) Alman matematikçi.

³⁸ FeliceCasorati (1835-1890) İtalyan matematikçi.

³⁹ George FriedrichBernhardRiemann (1826-1866) Alman matematikçi.

⁴⁰ Charles Hermite (1822-1901) Fransız matematikçi.

⁴¹ ElwinBrunoChristoffel (1829-1900) Alman matematikçi ve fizikçi.

⁴² Edward John Routh (1831-1907) İngiliz matematikçi.

⁴³ Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) Fransız matematikçi.

⁴⁴ François ÉdouardAnatoleLucas (1842-1891) Fransız matematikçi.

⁴⁵ LeopoldBernhardGegenbauer (1849-1903) Avusturyalı matematikçi.

⁴⁶ Jules HenriPoincaré (1854-1912) Fransız matematikçi, teorik fizikçi, mühendis ve filozof.

⁴⁷ AndreyevichMarkov (1856-1922) Rus matematikçi.

Chebychev⁴⁸ ve Peano⁴⁹ fark denklemlerine katkıda bulunmuşlardır (Kulenovic ve diğ., 2000).

Bu zamana kadar yapılan araştırmalardaki bilgiler 1950'li yıllardan sonraki matematikçilerin lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri için bir zemin oluşturmuştur. Bu çalışmalardan bazıları 1995-2000 yılları arasında Ladas tarafından yapılmıştır. 1999-2004 yılları arasında Amleh ve diğ. (1999), Komsala ve diğ. (2000), DeVault ve diğ. (2001), Kulenovic ve diğ. (2001), Aboutaleb ve diğ. (2001), Yan ve diğ. (2002-2003), Al-Saris ve DeVault (2003), El-Owaidy ve diğ. (2003), Fan ve diğ. (2004), El-Owaidy ve diğ. (2004), He ve diğ. (2004) fark denklemleri üzerinde çalıştıkları görülmektedir.

Bu güne kadar yapılan birçok çalışma şüphesiz ki fark denklem teorisine çok önemli katkılar sağlamıştır. Yapmış olduğumuz bu tez çalışmasının da fark denklemler teorisine önemli katkılar sağlamasını umuyoruz.

⁴⁸PafnutyLvovichChebychev (1821-1894) Rus matematikçi.

⁴⁹GiuseppePeano (1858-1932) İtalyan matematikçi.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde fark denklemleriyle ilgili genel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. Herhangi bir $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, “ Δ fark operatörü” veya “ x in birinci basamaktan farkı”

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre; x in ikinci basamaktan farkı

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$$

olur. Böyle devam edersek x in k yıncı basamaktan farkı

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$$

olur (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 2.1. $\Delta(8n^2 - 6n + 17)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \Delta(8n^2 - 6n + 17) &= 8\Delta(n^2) - 6\Delta(n) + \Delta(17) \\ &= 8((n+1)^2 - n^2) - 6(n+1-n) + (17-17) \\ &= 16n + 2 \end{aligned}$$

Tanım 2.2. Herhangi bir $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, “ E öteleme operatörü”

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan “ x in k yıncı basamaktan ötelemesi”

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

şeklinde hesaplanır. Δ ve E operatörleri arasında

$$\Delta = E - I$$

bağıntısı vardır. Burada “ I özdeşlik operatörü” dür. Böylece $Ix(n) = x(n)$ yazılabilir.

Buradan

$$\Delta E = E \Delta$$

değişme özelliğinden

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j}$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Delta^{k-j}$$

elde edilir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Uyarı 2.1. Bu çalışmada genellikle $x(n)$ bilinmeyen fonksiyonu için x_n gösterimini kullanacağız. Yukarıda verilen tüm sonuçlar x_n için de geçerlidir.

2.1. Fark Denklemleri

Tanım 2.1.1. $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = 0 \quad (2.1)$$

eşitliğine bir “*fark denklemi*” denir. Burada F verilen bir fonksiyondur. Eğer (2.1) denklemi en büyük indisli terimine göre çözülebilirse bu denkleme normal fark denklemi denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 2.1.1. e göre (2.1) denkleminin normal formu

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.2)$$

olur. Eğer f , n bağımsız değişkenine bağlı değilse bu durumda fark denklemi skaler olarak adlandırılır ve

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.3)$$

formundadır. Burada f ,

$$f : I^{k+1} \rightarrow I$$

olacak şekilde $k+1$ değişkenli bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.1.den görölür ki bir fark denklemi, bir bağımsız değişken, bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre ötelemeleri ile oluşturulur.

Tanım 2.1.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin “*basamağı*” denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 2.1.2.ye göre, eğer denklem alt indis notasyonu ile verilmiş ise, denklemin basamağı denklemdaki en büyük indisli terimin indisi ile en küçük indisli terimin indisi arasındaki farka eşittir. Çoęu zaman, basamak yerine “*mertebe*” terimi de kullanılır.

Örnek 2.1.1. $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{n+3} + ax_{n+2} = 2^n, \quad a \neq 0$$

denklemini birinci mertebeden,

$$y_{n+1} + ay_n + by_n y_{n-1} = 0, \quad b \neq 0$$

denklemini ikinci mertebeden ve

$$z_{n+1} = \frac{z_{n-1} + z_{n-3}}{z_n + z_{n-2}}$$

denklemini ise dördüncü mertebededir.

Tanım 2.1.3. \mathbb{N}_0 üzerinde tanımlı bir x_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (2.1) denklemini sağlıyorsa, bu durumda x_n fonksiyonuna \mathbb{N}_0 üzerinde (2.1) denkleminin bir “çözümü” denir. k yuncı mertebeden bir fark denkleminin ϕ ve ψ birer fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(n, x_n, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0$$

veya

$$x_n = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözüme “genel çözüm” adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de “özel çözüm” denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Fark denklemlerinin çözümleri temel olarak iterasyon yapılarak elde edilir. Yani verilen başlangıç değerleri kullanılarak elde edilen bir değer, bir sonraki değeri elde etmek için kullanılır. Bu sayede çözümü oluşturan dizinin bütün terimleri bulunmuş olur.

Tanım 2.1.4. $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ reel sabitler olmak üzere, k yuncı mertebeden bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözümle ilişkili

$$x_{n_0-i} = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k \tag{2.4}$$

formunda ilk $k+1$ tane ardışık değer belirtilmesi gereklidir. (2.4) koşullarına “başlangıç koşulları” adı verilir. k yuncı mertebeden bir fark denklemi ve (2.4) başlangıç koşullarından oluşan probleme ise “başlangıç değer problemi” denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Bu çalışmadaki fark denklemleri, bağımsız değişkeni tam sayılar kümesinin bir alt kümesi olduğundan elde edilen çözüm bir dizidir. Buna göre (2.3) fark denkleminin bir çözümünü $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.1.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi (2.3) fark denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü ne pozitif ne de negatif ise bu çözüme sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 2.1.6. Eğer bir $\bar{x} \in I$ için (2.3) denklemi $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ bağıntısını sağlıyor ise \bar{x} noktasına (2.3) denkleminin bir denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 2.1.7. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi (2.3) fark denkleminin bir çözümünü olsun. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne \bar{x} denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 2.1.8. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir. Aksi halde $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine sınırsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Genel olarak fark denklemlerinin çözümü iterasyon (özyineleme) yöntemiyle elde edilir. Fakat bazı tipler için özel metotlar geliştirilmiştir. Aşağıdaki örnekte basit bir denklemin çözümü iterasyon ile elde edilmiştir.

Örnek 2.1.2. x_0 bir reel başlangıç değeri ve a bir reel parametre olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n \geq 0, \quad (2.5)$$

fark denkleminin genel çözümünü elde edelim.

Çözüm. Açıkça görülür ki, eğer $a=0$ ise denklem, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n+1} = 0$ dır. Bu yüzden $a \neq 0$ kabul edilmelidir. x_0 başlangıç değerini denklemde yerine yazarak iterasyonu başlatmak gereklidir. Böylece

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 \\
x_2 &= ax_1 = a^2x_0 \\
x_3 &= ax_2 = a^3x_0 \\
x_4 &= ax_3 = a^4x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur. Bu şekilde iterasyona devam edilip, genelleme yapılırsa

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a^n x_0\}_{n=0}^{\infty} = \{x_0, ax_0, a^2x_0, \dots\}$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Burada c bir keyfi sabit olmak üzere $x_0 = c$ kabul edilirse $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine genel çözüm olarak bakılabilir. Yukarıdaki tanımlara göre (2.5) denkleminin çözümü için şu sonuçlar verilebilir:

- i) Eğer $a > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{sgn}(x_0) \cdot \infty$ olur. Bu durum bir sınırsızlık durumudur.
- ii) Eğer $a = 1$ ise çözüm her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_n = x_0$ olacak şekilde sabittir. Bu durum bir sınırlılık durumudur.
- iii) Eğer $0 < a < 1$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü $n \rightarrow \infty$ için monoton azalan olarak sifira yakınsar. Bu durumda çözüm sınırlıdır.
- iv) Eğer $-1 < a < 0$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü $n \rightarrow \infty$ için sıfır civarında salınarak sifira yakınsar. Bu durumda çözüm sınırlıdır.
- v) Eğer $a = -1$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü 2 periyotludur. Bu durum da bir sınırlılık durumudur. Ayrıca çözümün sıfır civarında salındığı söylenebilir.
- vi) Eğer $a < -1$ ise, bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü $n \rightarrow \infty$ için sıfır civarında salınarak mutlak değerce büyür ve sınırsız değerler alır. Bu durum da bir sınırsızlık durumudur.

Tanım 2.1.9. (Yasaklı Küme ve İyi küme) f verilen bir fonksiyon olmak üzere, (2.3) fark denklemindeki f fonksiyonunun tanım kümesi D_f olsun. Bu durumda

$$Y = \{(x_0, x_{-1}, \dots, x_k) : i \in \{-k, \dots, n-1\} \text{ için } x_i \in D_f \text{ ve } x_n \notin D_f\}$$

kümesine (2.3) fark denkleminin “yasaklı kümesi” denir. $\mathbb{R} \setminus Y$ kümesine (2.3) fark denkleminin “iyi kümesi” denir.

Tanım 2.1.9.a göre başlangıç değerlerinin iyi kümeden seçilmesi çözümlerin iyi tanımlı olmasını sağlar. Böylece iyi tanımlı çözüm denildiğinde, başlangıç değerlerinin iyi kümeden seçildiği çözüm anlaşılacaktır. Bu tanım daha yüksek boyutlu sistemlere de genelleştirilebilir. Aşağıdaki tanım iki boyutlu bir sistemin yasaklı kümesi için verilir.

Örnek 2.1.3. x_0 başlangıç değeri olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad n \geq 0,$$

fark denkleminin yasaklı kümesini ve iyi kümesini elde ediniz.

Çözüm. İterasyon ile verilen denklemin x_0 başlangıç değerine karşılık gelen çözümü

$$x_n = \frac{x_0}{1 + nx_0}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi tanımsız yapan değerler paydayı sıfır yapan değerler olduğundan denklemin yasaklı kümesi

$$Y = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : x_0 = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

olarak bulunur. Bu durumda denklemin iyi kümesi $\mathbb{R} \setminus Y$ olur.

Tanım 2.1.10. (İki boyutlu bir sistemin Yasaklı Kümesi ve İyi kümesi)

$$x_{n+1} = f_1(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}), \quad y_{n+1} = f_2(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \quad (2.6)$$

fark sisteminde f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tanım kümeleri sırasıyla D_{f_1} ve D_{f_2} olsun.

Bu durumda, $D_{f_1} \times D_{f_2} = D_s$ olmak üzere,

$$Y_s = \{(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) : i \in \{-k, \dots, n-1\} \text{ için } (x_i, y_i) \in D_s \text{ ve } (x_n, y_n) \notin D_s\}$$

kümesine (2.6) fark denklem sisteminin “yasaklı kümesi” denir. $\mathbb{R}^2 \setminus Y_s$ kümesine (2.6) fark denklem sisteminin “iyi kümesi” denir.

Tanım 2.1.9. ve Tanım 2.1.10. daha yüksek boyutlu sistemlere de genelleştirilebilir.

2.2. Linear Fark Denklemleri

Tanım 2.2.1. $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayı fonksiyonları ve reel değerli $g(n)$ fonksiyonu verilsin. $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun.

$$x_{n+1} + a_1(n)x_n + \dots + a_k(n)x_{n-k} = g(n) \quad (2.7)$$

formundaki denkleme “ $k+1$ inci mertebeden bir lineer fark denklemi” denir. Böylelikle lineer fark denklemleri denklemin mertebe durumuna göre sınıflandırılmış olur. Eğer, $\forall n \geq n_0$ için $g(n) = 0$ ise

$$x_{n+1} + a_1(n)x_n + \dots + a_k(n)x_{n-k} = 0 \quad (2.8)$$

denklemine “*homojen denklem*” denir. $g(n) \neq 0$ ise (2.7) denklemine “*homojen olmayan denklem*” denir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv \alpha_i$ şeklinde sabit ise (2.7) denklemine “*sabit katsayılı*”, aksi durumda “*değişken katsayılı fark denklemi*” denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Örnek 2.2.1. Aşağıda verilen denklemleri mertebe, homojenlik ve lineerlik bakımından inceleyelim.

$$x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-2} = 0 \quad (2.9)$$

$$x_{n+3} = 5x_{n-1} + 7 \quad (2.10)$$

$$x_{n+1} - x_n^4 = 0 \quad (2.11)$$

$$x_{n-1} + 8x_n - e^{x_{n-2}} = e^{-4n} \quad (2.12)$$

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (2.13)$$

Çözüm. (2.9) denklemi 3. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemdir. (2.10) denklemi 4. mertebeden homojen olmayan lineer bir fark

denklemdir. (2.11) denklemi 1. mertebeden lineer olmayan bir fark denklemdir. (2.12) denklemi 2. mertebeden lineer olmayan bir fark denklemdir. (2.13) denklemi bir fark denklemi olmayıp, bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.2. $k+1$ inci basamaktan lineer sabit katsayılı homojen

$$x_{n+1} + a_1 x_n + \dots + a_k x_{n-k} = 0 \quad (2.14)$$

fark denklemini ele alalım. Burada $a_i, (i=1,2,\dots,k)$, katsayıları reel sabitler olup $a_k \neq 0$ dir.

İkinci basamaktan lineer sabit katsayılı homojen denklemde olduğu gibi (2.14) denkleminin λ^n şeklinde bir çözümü aranır,

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (2.15)$$

denklemi bulunur. Bu denkleme karakteristik denklem ve onun köklerine de karakteristik kökler adı verilir. (2.14) fark denkleminin çözümleri karakteristik köklere bağlı olarak hesaplandıkları için aşağıdaki durumların incelenmesi yeterlidir (Spiegel, 1971).

Durum 1. (2.15) karakteristik denkleminin k tane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ kökü reel ve birbirinden farklı ise bu durumda $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ cümlesi (2.14) denkleminin bir temel cümlesi olup (2.14) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n \quad (2.16)$$

dir. Burada c_1, c_2, \dots, c_k keyfi sabitlerdir.

Durum 2. (2.15) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ kökleri reel ve sırasıyla

m_1, m_2, \dots, m_r katlı olsunlar. Burada $\sum_{i=1}^r m_i = k$ olur. Bu durumda (2.14) denklemi E

operatörü cinsinden

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir $i \in [1, r]$ için $(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$ denkleminin bir temel cümlesi

$$\Psi_i = \{ \lambda_i^n, n\lambda_i^n, \dots, n^{m_i-1} \lambda_i^n \}$$

dir. Dolayısıyla (2.17) in bir temel cümlesi $\Psi = \bigcup_{i=1}^r \Psi_i$ olup genel çözüm

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + \cdots + c_{im_i-1}n^{m_i-1}) \quad (2.18)$$

olur.

Durum 3. (2.15) karakteristik denkleminin bir $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleks kökü q_1 katlı olsun. ($2q_1 \leq k$). Bu durumda (2.14) in $2q_1$ tane reel değerli bağımsız özel çözümleri

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin n\theta, \dots, n^{q_1-1} r^n \cos n\theta, n^{q_1-1} r^n \sin n\theta$$

şeklinde dir.

Örnek 2.2.2. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 7x_n = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

olup, buradan $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 7$ karakteristik kökleri bulunur. Buradan genel çözüm

$$x_n = c_1 + c_2 7^n$$

olur.

Örnek 2.2.3. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 25x_n = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$$

şeklinde dir. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ karakteristik kökleri bulunur. Buradan genel çözüm

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)(-5)^n$$

şeklinde dir.

Örnek 2.2.4. $(E^4 - 16)x(n) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem dördüncü basamaktan olup, $x_{n+4} - 16x_n = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 - 16 = 0$$

olup, karakteristik kökler $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Böylece genel çözüm

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n + 2^n \left(c_3 \cos \frac{n\pi}{2} + c_4 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

şeklinde olup, burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerdir.

Lemma 2.2.1. Üçüncü dereceden

$$P(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma = 0 \quad (2.19)$$

polinom denklemini verilsin. Bu durumda (2.19) denkleminin diskriminantı

$$\Delta = -\alpha^2 \beta^2 - 4\beta^3 + 4\alpha^3 \gamma + 27\gamma^2 + 18\alpha\beta\gamma \quad (2.20)$$

şeklinde ve aşağıdakiler doğrudur:

1) Eğer $\Delta < 0$ ise P polinomunun ρ_1, ρ_2, ρ_3 gibi üç farklı reel kökü vardır.

2) Eğer $\Delta = 0$ ise iki farklı durum vardır.

i) $\beta = \frac{-\alpha^2}{3}$ ve $\gamma = \frac{\alpha^3}{27}$ ise P polinomunun üç katlı bir $\rho = \frac{\alpha}{3}$ kökü vardır.

ii) $\beta \neq \frac{-\alpha^2}{3}$ veya $\gamma \neq \frac{\alpha^3}{27}$ ise P polinomunun çift katlı bir ρ kökü ve basit bir r kökü vardır.

3) Eğer $\Delta > 0$ ise P polinomunun bir tane reel ρ kökü ve iki tane karmaşık ve eşlenik olan $re^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$ kökü vardır (Raouf, 2012).

3. KAYNAK ARAŞTIRMASI

3.1. Fark Denklemleri Üzerine Yayınlanmış Bazı Çalışmalar

Bu kısımda, çeşitli tipteki fark denklemlerinin çözümleri, çözümlerin periyotları, sınırlılığı ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili son yıllarda yapılmış bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Camouzis ve arkadaşları (1994) yaptıkları çalışmada; $\beta \in (0, \infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n^2}{1 + x_{n-1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Gibbons ve arkadaşları (2000) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0, \infty)$ aralığında olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lineer olmayan fark denklemini incelemişlerdir.

Amleh, Kirk ve Ladas (2001) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0, \infty)$ aralığında olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini incelemişlerdir.

Stević (2002) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{Bx_{n-1}}{B + x_n}$$

fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_{2n} = x_0 \left(1 - x_1 \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i} \right), \quad x_{2n+1} = x_{-1} \left(1 - \frac{x_0}{1+x_0} \sum_{j=0}^n \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_i} \right)$$

çözümlerini elde etmiştir.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2003) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0, \infty)$ aralığında olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini incelemişlerdir.

Çinar (2004a) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_n = \begin{cases} x_{-1} \frac{\prod_{i=0}^{\lceil n+1/2 \rceil - 1} 2x_{-1}x_0i + 1}{\prod_{i=0}^{\lceil n+1/2 \rceil - 1} 2i + 1} x_{-1}x_0 + 1, & n \text{ tek ise} \\ x_0 \frac{\prod_{i=0}^{n/2} 2i - 1} \prod_{i=1}^{n/2} 2ix_{-1}x_0 + 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

çözümünü elde etmiştir.

Çinar (2004b) yaptığı iki çalışmadan birincisinde; x_0, x_1 başlangıç şartları ve $a, b > 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin, ikincisinde ise

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

El-Owaidy, Ahmed ve Youssef (2005) yaptıkları çalışmada; $p \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$$

fark denklemini incelemiştir.

Zeng ve arkadaşları (2005) yaptıkları çalışmada; $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $g(x)$; $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin global davranışını incelemiştir.

Aloqeili (2006a) yaptığı çalışmada; $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a - x_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve çözümleri için

$$x_n = \begin{cases} x_0 \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{a^{2i-1} (1-a) - 1-a^{2i-1} x_{-1}x_0}{a^{2i} (1-a) - 1-a^{2i} x_{-1}x_0}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-1} \prod_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{a^{2i-1} (1-a) - 1-a^{2i} x_{-1}x_0}{a^{2i+1} (1-a) - 1-a^{2i+1} x_{-1}x_0}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Aloqeili (2006b) yaptığı çalışmada; $x_{-k}, x_{-k-1}, \dots, x_0 > 0$, $A > 0$ ve k herhangi pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{A + x_{n-k}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini ve kararlılığını incelemiştir.

Elsayed (2008a) yaptığı çalışmada; x_{-1}, x_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar ve a, b, c, d pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{bx_n x_{n-1}}{cx_n + dx_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Elsayed (2008b) yaptığı çalışmada; x_{-1}, x_0 başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n \pm 1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

Elabbasy ve Elsayed (2009) yaptıkları çalışmada; $x_{-r}, x_{-r+1}, \dots, x_0$ pozitif reel sayılar, $r = \max \{l, k, p, q\}$ negatif olmayan bir tam sayı ve a, b, c pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-l}x_{n-k}}{bx_{n-p} + cx_{n-q}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Sedaghat (2009) yaptığı çalışmada; $a, b > 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{x_n x_{n-1} + b} \text{ ve } x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-1}}{x_n + bx_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denklemlerinin tüm çözümlerinin global davranışını incelemiştir. Bu denklemlerin yarı eşlenik olduğunu ve birinci mertebeden denklemlere indirgenebildiğini göstermiş ve bu durumu kullanarak her bir denklemin yasaklı kümelerini belirlemiş, bu yasaklı kümeler dışındaki başlangıç değerleri için çözümlerinin sifıra veya pozitif sabit bir noktaya yakınsadığını belirtmiştir. Ayrıca, çözümlerin 2 periyotlu veya sınırsız olduğunu göstermiştir. Bazı durumlarda, başlangıç şartlarına bağlı olarak farklı türden çözümlerin olduğunu da söylemiştir.

Papaschinopoulos ve Stefanidou (2010) yaptıkları çalışmada; a pozitif bir reel sayı, $m, k \in \{1, 2, \dots\}$ ve başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-m(k+1)+1}}{\prod_{s=0}^k x_{n-m(s+1)+1} + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ile

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-2k-1} \prod_{s=0}^k x_{n-2s}}{\prod_{s=0}^{2k+1} x_{n-s} + \prod_{s=0}^k x_{n-2s} + \prod_{s=0}^k x_{n-2s-1}}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-m(k+1)+1}}{x_n + x_{n-m(k+1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığını ve bu pozitif çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemiştir. Ayrıca, söz konusu bu denklemlerin ortak özellik olarak homojen olmayan lineer bir denkleme indirgediğine dikkat çekmişlerdir.

Dehghan ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad x_0, x_{-1} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin üçüncü mertebeden lineer bir fark denkleminin ilişkili olduğunu gösterdiler. Bu ilişki ve lineer denklemlerin özelliklerini kullanarak çözümlerin global davranışını incelediler. $a, b \geq 0$ ve $a + b, c > 0$ iken söz konusu denklemin tek pozitif denge noktasının kararlı ve global çekimli olduğunu gösterdiler.

Tollu ve arkadaşları (2013) yaptıkları çalışmada; Riccati fark denkleminin iki özel hali olan

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

denklemlerinin genel çözümlerini Fibonacci sayılarıyla ilişkilendirerek verdiler.

Anisimova ve Bula (2014) yaptıkları çalışmada; negatif olmayan parametreler ve keyfi negatif olmayan başlangıç şartları altında, payda her zaman pozitif olacak biçimde daha önce Amleh ve arkadaşlarının (2008) yaptığı çalışmadaki

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n x_{n-1} + \gamma x_{n-1}}{A + B x_n x_{n-1} + C x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden kuadratik rasyonel fark denklemini incelemişlerdir. Söz konusu fark denkleminin bazı özel durumlarını göz önünde bulundurmuşlar, Amleh ve arkadaşlarının (2008) buldukları varsayımı doğrulamışlar ve vermiş oldukları açık probleme çözüm aramışlardır.

Taşdemir ve Soykan (2016) yaptıkları çalışmada; x_{-1} ve x_0 başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lineer olmayan fark denkleminin periyodikliğini ve terimlerinin davranışlarını incelenmişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2018) yaptıkları çalışmada; a, b, c birer parametre, $c \neq 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları karmaşık sayılar olmak üzere iyi tanımlanmış

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lineer olmayan ikinci mertebeden fark denkleminin çözümlerini yapmışlardır. Bu fark denkleminin çözümlerini yaparken özel bir çözüm olarak, sabit katsayılı üçüncü

mertebeden homojen lineer bir fark denklemine dönüştürmüşler, literatürde var olan bazı teorik açıklamalardan faydalanarak özel bir yöntem kullanıp ispatı tamamlamışlar ve bazı genellemeler yapmışlardır.

Abo-Zeid (2019) yaptığı çalışmada; $\alpha > 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n x_{n-1} - 1}, n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini incelemiş, bu denklemin çözümlerinin değişmez aralığını bulmuş ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir. $\alpha > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken belirli koşullar altında, her bir çözümün periyodik olduğunu veya periyodik çözümlere yakınsadığını, ayrıca çözümlerin yoğun olduğunu göstermiştir. Sonuç olarak; $\alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken negatif denge noktalarından birinin Lebesgue kümesinin dışında kalan bütün noktaları sıfıra çektiğini göstermiştir.

Khastan ve Alijani (2019) yaptıkları çalışmada; A, B pozitif fuzzy sayıları olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

fuzzy fark denkleminin global davranışını incelemişler ve söz konusu fuzzy sayıları için bir bölge genellemesi yapmışlardır. Elde ettikleri sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için bazı sayısal örneklere yer vermişlerdir.

3.2. Fark Denklemler Sistemleri Üzerine Yayınlanmış Bazı Çalışmalar

Bu kısımda, çeşitli tipteki fark denklemler sistemlerinin çözümleri ile ilgili son yıllarda yapılmış bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Grove ve arkadaşları (2001) yaptıkları çalışmada; a, b, c ve d reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin, her $n \geq 0$ için iyi tanımlı çözümleri için x_0 ve y_0 başlangıç şartlarının yasaklı kümesini ve iyi kümesini elde ettiler. Bunu yapmak için bu fark denklem sisteminde, $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denkleminde ulaştılar ve bu

denklemin çözümlerini kullanarak yukarıdaki sistemin genel çözümünü elde ettiler. Son olarak sistemin çözümlerinin asimptotik davranışını incelediler.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2007) yaptıkları çalışmada; a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, k$) pozitif sabitler, $k \geq 3$ bir tam sayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= \frac{a_k x_k(n) + b_k}{x_{k-1}(n-1)}, \\ x_2(n+1) &= \frac{a_1 x_1(n) + b_1}{x_k(n-1)}, \\ &\vdots \\ x_i(n+1) &= \frac{a_{i-1} x_{i-1}(n) + b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)}, \quad i = 3, 4, \dots, k \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Berg ve Stević (2011) yaptıkları çalışmada; u_0 ve v_0 kompleks başlangıç şartları olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n}, v_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemlerinin

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin genel çözümü yardımıyla çözüleceğini gösterdiler ve bu sistemlerin genel çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelediler.

Kurbanlı (2011) yaptığı çalışmada; $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1}$ başlangıç şartları $y_0 x_{-1} \neq 1, x_0 y_{-1} \neq 1, y_0 z_0 \neq 0$ şartlarını sağlayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, z_{n+1} = \frac{1}{y_n z_n}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini araştırmıştır.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini araştırmışlardır.

El-Metwally (2013) yaptığı çalışmada; $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}}, \quad y_n = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını elde ederek bu çözümlerin bazı özelliklerini inceledi.

Yazlık ve arkadaşları (2013) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını incelemişler ve elde ettikleri bu çözüm formlarını Padovan sayıları ile ilişkilendirmişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2014) yaptıkları çalışmada; x_0 ve y_0 reel başlangıç şartları ve p_n, q_n, r_n, s_n dizilerinin her biri ya x_n dizisini ya da y_n dizisini göstermek üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1 + p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1 + r_n}{s_n}$$

fark denklem sistemini incelemişlerdir. Bu durumda, on altı muhtemel durumda ortaya çıkan sistemlerin on dördünü çözmüşlerdir. Bu on dört sistemin on iki tanesinin çözümlerinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğunu bulmuşlardır.

El-Dessoky (2016) yaptığı çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1 + y_{n-2}x_{n-1}y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\pm 1 \pm x_{n-2}y_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

Elsayed ve Ahmed (2016) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2} \pm z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2} \pm x_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2} \pm y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

üç boyutlu rasyonel fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını elde ettiler.

Elsayed ve Alghamdi (2016) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-7}}{1 + x_{n-7} y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-7}}{\pm 1 \pm x_{n-3} y_{n-7}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelediler.

Elyased ve arkadaşları (2017) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{y_n + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-2}}{\pm x_n \pm x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelediler.

Tollu ve arkadaşları (2017) yaptıkları çalışmada; $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemini tanımladılar ve bu sistemin çözümlerinin global davranışını incelediler. Ayrıca, elde ettikleri sonuçlar için nümerik örnekler verdiler.

Şahinkaya ve arkadaşları (2018) yaptıkları çalışmada; $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemini tanımladılar, bu sistemin genel çözümlerini kapalı formda elde ettiler ve çözümlerin davranışını incelediler.

Tollu ve Yalçınkaya (2018) yaptıkları çalışmada; $n \in \mathbb{N}_0$ için u_{-1}, v_{-1}, w_{-1} ($i = 0, 1, 2$) başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$) parametreleri ve p, q, r pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2 + \gamma_2 w_{n-2}^q}, \quad w_{n+1} = \frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3 + \gamma_3 u_{n-2}^r}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir.

Yılmazyıldırım ve Tollu (2018) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{1 + x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{1 + y_n z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{1 + z_n x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin genel çözümünü açık formda elde ettiler, çözümlerin varlığını ve asimptotik davranışını araştırdılar.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN ÇÖZÜLEBİLİR BİR FARK DENKLEMİ

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.1)$$

rasyonel fark denkleminin çözülebilirliği ve çözümlerinin davranışı ele alınacaktır. Burada açıkça $x_0 x_{-1} \neq 0$ olmalıdır. (4.1) fark denklemi ilk olarak Dehghan ve arkadaşları (2011) tarafından çalışılmış, fakat bu makalede sadece parametrelerin negatif olmadığı durum incelenmiştir. Daha sonra Raouf (2012) parametrelerin tüm reel değerleri için (4.1) denklemini tekrar ele almıştır. İncelemenin kapsamlı olmasını sağlamak için bu bölümdeki sonuçlar (Raouf, 2012) kaynağından alınmıştır.

4.1. Genel Çözüm

(4.1) denklemi

$$x_n = \frac{y_n}{y_{n-1}} \quad (4.2)$$

değişken değiştirilmesi ile üçüncü mertebeden lineer homojen

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} \quad (4.3)$$

denklemine dönüşür. (4.3) denklemi için başlangıç değerleri $y_{-2} = 1$, $y_{-1} = x_{-1}$, $y_0 = x_0 x_{-1}$ şeklinde alınırsa, bu durumda (4.1) denkleminin çözümleri ile (4.3) denkleminin çözümleri arasında bire-bir bir bağıntı elde edilir. Bu sayede, (4.3) denkleminin genel çözümü (4.2) değişken değiştirmesinde kullanılarak, (4.1) denkleminin genel çözümü elde edilebilir. Diğer taraftan (4.3) denkleminin aşıkâr çözümü olan $y_n = 0$ yardımıyla (4.1) denkleminin tanımlanamayan çözümleri elde edilebilir. Böylece, bu çözümleri üreten başlangıç değerlerinin kümesi, yani yasaklı küme elde edilerek iyi tanımlı çözümler karakterize edilebilir.

(4.3) lineer denkleminin karakteristik denklemi

$$P(y) = y^3 - ay^2 - by - c = 0 \quad (4.4)$$

olup, bu denklem Lemma 2.2.1. deki (2.19) denklemi ile aynıdır. Dolayısıyla (4.4) denkleminin diskriminantı

$$\Delta = -a^2b^2 - 4b^3 + 4a^3c + 27c^2 + 18abc \quad (4.5)$$

ile verilir. Bu durumda, Lemma 2.2.1. e göre (4.3) denkleminin genel çözümü (4.4) denkleminin köklerinin durumuna ve dolayısıyla Δ nın durumuna göre değişiklik gösterir. Aşağıdaki teoremden bu şekilde bir inceleme yapılarak (4.3) denkleminin genel çözümü elde edilecektir.

Teorem 4.1.1. (4.3) denkleminin $y_{-2} = 1$, $y_{-1} = x_{-1}$, $y_0 = x_0x_{-1}$ başlangıç değerlerine karşılık gelen çözümü $(y_n)_{n \geq -2}$ olsun. Bu durumda,

1) Eğer $\Delta < 0$ ise (4.4) karakteristik denkleminin ρ_1, ρ_2, ρ_3 ile gösterilen üç ayrık reel kökü vardır ve $n \geq 0$ şartını sağlayan tüm n ler için

$$y_n = C_1\rho_1^n + C_2\rho_2^n + C_3\rho_3^n$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_1(x_{-1}, x_0) = \frac{\rho_1^2 [x_{-1}x_0 - (\rho_2 + \rho_3)x_{-1} + \rho_2\rho_3]}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}, \\ C_2 &:= C_2(x_{-1}, x_0) = \frac{\rho_2^2 [x_{-1}x_0 - (\rho_1 + \rho_3)x_{-1} + \rho_1\rho_3]}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)}, \\ C_3 &:= C_3(x_{-1}, x_0) = \frac{\rho_3^2 [x_{-1}x_0 - (\rho_1 + \rho_2)x_{-1} + \rho_1\rho_2]}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklindedir.

2) Eğer $\Delta=0$, $b=-a^2/3$ ve $c=a^3/27$ ise (4.4) karakteristik denkleminin $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{a}{3}$ olacak şekilde üç katlı reel kökü vardır ve $n \geq 0$ şartını sağlayan tüm n ler için

$$y_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n [C_1 n^2 + C_2 n + C_3]$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_1(x_{-1}, x_0) = \frac{1}{2} \left[x_{-1} x_0 - 2 \frac{a x_{-1}}{3} + \frac{a^2}{9} \right], \\ C_2 &:= C_2(x_{-1}, x_0) = \frac{1}{2} \left[3 x_{-1} x_0 - 4 \frac{a x_{-1}}{3} + \frac{a^2}{9} \right], \\ C_3 &:= C_3(x_{-1}, x_0) = x_{-1} x_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklindedir.

3) Eğer $\Delta=0$ ve $(b+a^2/3)(c-a^3/27) \neq 0$ ise (4.4) karakteristik denkleminin ρ ile gösterilen bir ayrık reel kökü ve r ile gösterilen iki katlı reel kökü vardır ve $n \geq 0$ şartını sağlayan tüm n ler için

$$y_n = C_1 \rho^n + (C_2 n + C_3) r^n$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_1(x_{-1}, x_0) = \rho^2 \frac{x_{-1} x_0 - 2 r x_{-1} + r^2}{(r - \rho)^2}, \\ C_2 &:= C_2(x_{-1}, x_0) = r \frac{x_{-1} x_0 - (r + \rho) x_{-1} + r \rho}{r - \rho}, \\ C_3 &:= C_3(x_{-1}, x_0) = r \frac{(r - 2\rho) x_{-1} x_0 + 2\rho^2 x_{-1} - r \rho^2}{(r - \rho)^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

4) Eğer $\Delta > 0$ ise (4.4) karakteristik denkleminin ρ ile gösterilen bir ayrık reel kökü ve $re^{\pm i\theta}$ ile gösterilen iki tane kompleks eşlenik kökü vardır ve $n \geq 0$ şartını sağlayan tüm n ler için

$$y_n = C_1 \rho^n + [C_2 \cos(n\theta) + C_3 \sin(n\theta)] r^n$$

olur. Burada θ bir sabittir ve C_i ($i=1,2,3$) katsayıları

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_1(x_{-1}, x_0) = \rho^2 \frac{x_{-1}x_0 - 2rx_{-1} \cos \theta + r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta}, \\ C_2 &:= C_2(x_{-1}, x_0) = r \frac{(r - 2\rho \cos \theta)x_{-1}x_0 + 2\rho^2 x_{-1} \cos \theta - \rho^2 r}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta}, \\ C_3 &:= C_3(x_{-1}, x_0) = r \frac{(r \cos \theta - \rho \cos 2\theta)x_{-1}x_0 + (\rho^2 \cos 2\theta - r^2)x_{-1} - r\rho(\rho \cos \theta - r)}{\sin \theta [\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta]} \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklindedir.

(4.2) değişken değiştirmesi ve Teorem 4.1.1. in sonuçları kullanılarak (4.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.1.2. $(x_n)_{n \geq -1}$ dizisi (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda,

1) Eğer $\Delta < 0$ ise bu durumda (4.1) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{C_1 \rho_1^n + C_2 \rho_2^n + C_3 \rho_3^n}{C_1 \rho_1^{n-1} + C_2 \rho_2^{n-1} + C_3 \rho_3^{n-1}}$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları (4.6) ile verilir.

2) Eğer $\Delta = 0$, $b = -a^2/3$ ve $c = a^3/27$ ise bu durumda (4.1) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{a}{3} \frac{C_1 n^2 + C_2 n + C_3}{C_1 (n-1)^2 + C_2 (n-1) + C_3}$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları (4.7) ile verilir.

3) Eğer $\Delta=0$ ve $(b+a^2/3)(c-a^3/27) \neq 0$ ise bu durumda (4.1) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{C_1 \rho^n + (C_2 n + C_3) r^n}{C_1 \rho^{n-1} + (C_2 (n-1) + C_3) r^{n-1}}$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları (4.8) ile verilir.

4) Eğer $\Delta > 0$ ise bu durumda (4.1) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{C_1 \rho^n + [C_2 \cos(n\theta) + C_3 \sin(n\theta)] r^n}{C_1 \rho^{n-1} + [C_2 \cos((n-1)\theta) + C_3 \sin((n-1)\theta)] r^{n-1}}$$

olur. Burada C_i ($i=1,2,3$) katsayıları (4.9) ile verilir.

4.2. Yasaklı Küme

(4.1) denkleminin yasaklı kümesi $F = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \{(x_{-1}, x_0) : y_n = 0\}$ şeklinde olmalıdır. Bu durumda Lemma 2.2.1. ve (4.3) denkleminin genel çözümü kullanılarak (4.1) denkleminin yasaklı kümesi aşağıdaki teoremden olduğu gibi belirlenir.

Teorem 4.2.1. (4.1) denkleminin yasaklı kümesi

$$F = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \{(x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 : \beta_{1n} x_0 x_{-1} + \beta_{2n} x_0 + \beta_{3n} = 0\}$$

şeklinde verilir. Burada (β_{in}) dizileri $i=1,2,3$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) Eğer $\Delta < 0$

$$\beta_{1n} = \rho_1^{n+2} (\rho_2 - \rho_3) + \rho_2^{n+2} (\rho_3 - \rho_1) + \rho_3^{n+2} (\rho_1 - \rho_2),$$

$$\beta_{2n} = \rho_1^{n+2} (\rho_3^2 - \rho_2^2) + \rho_2^{n+2} (\rho_1^2 - \rho_3^2) + \rho_3^{n+2} (\rho_2^2 - \rho_1^2),$$

$$\beta_{3n} = \rho_1^{n+2} \rho_2 \rho_3 (\rho_2 - \rho_3) + \rho_2^{n+2} \rho_1 \rho_3 (\rho_3 - \rho_1) + \rho_3^{n+2} \rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1).$$

2) Eğer $\Delta = 0$, $b = -a^2/3$ ve $c = a^3/27$

$$\begin{aligned}\beta_{1n} &= (n+1)(n+2), \\ \beta_{2n} &= \frac{-2an(n+2)}{3}, \\ \beta_{3n} &= \frac{a^2n(n+1)}{9}.\end{aligned}$$

3) Eğer $\Delta = 0$ ve $b \neq -a^2/3$ veya $\Delta = 0$ ve $c \neq a^3/27$

$$\begin{aligned}\beta_{1n} &= \rho^{n+2} + r^{n+1} [(n+1)r - (n+2)\rho], \\ \beta_{2n} &= -2r\rho^{n+2} + r^{n+1} [-nr^2 + (n+2)\rho^2], \\ \beta_{3n} &= r^2\rho^{n+2} + r^{n+2} [n\rho(r-\rho) - \rho^2].\end{aligned}$$

4) Eğer $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\beta_{1n} &= \rho^{n+2} \sin \theta + r^{n+1} [r \sin((n+1)\theta) - \rho \sin((n+2)\theta)], \\ \beta_{2n} &= -r\rho^{n+2} \sin 2\theta + r^{n+1} [\rho^2 \sin((n+2)\theta) - r^2 \sin n\theta], \\ \beta_{3n} &= r^2\rho^{n+2} \sin \theta - \rho r^{n+2} [\rho \sin((n+1)\theta) - r \sin n\theta].\end{aligned}$$

Teorem 4.2.1. e göre (4.1) denkleminin iyi tanımlı çözümleri, $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ kümesinden alınan başlangıç değerleri ile elde edilir.

4.3. Çözümlerin Asimptotik Davranışı

Bu kısımda (4.1) denkleminin iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışını çalışmak için (4.2) değişken değiştirmesini ve 4.1 alt bölümünde verilen temsil formüllerini, yani Teorem 4.1.1. in sonuçlarını kullanacağız. (4.1) denkleminin hemen hemen tüm çözümleri a, b, c parametrelerinin bazı değerleri için bir tek sabit noktaya yakınsamaktadır. Bunu ispatlamak için aşağıdaki üç farklı durum incelenecektir.

4.3.1. $\Delta < 0$ Durumu

Lemma 4.3.1.1. $\Delta < 0$ ve $\alpha = \max_{1 \leq i \leq 3} |\rho_i|$ olsun. Bu durumda (4.4) denkleminin bir çözümü $\pm\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $ab+c=0$ ve $b > a^2$ olmasıdır.

İspat. Eğer $\Delta < 0$ ve $ab+c=0$ ise bu durumda $b \neq a^2$ dir. Farz edelim ki $\pm\alpha$ (4.4) denkleminin çözümleridir. Bu durumda,

$$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha - c = 0 \quad \text{ve} \quad -\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0$$

olur. Bu yüzden, $a\alpha^2 + c = 0$ ve $\alpha^3 - b\alpha = 0$ olur. $c \neq 0$ olduğundan $\alpha \neq 0$ ve böylece $b = \alpha^2 > 0$ ve $ab+c=0$ olur. Dahası, $P(a) = -ab - c = 0$ olduğundan $\alpha = \sqrt{b} > |a|$ olur. Tersine $ab+c=0$ ve $b > a^2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda açıkça $\pm\sqrt{b}$ ve a (4.4) denkleminin kökleridir ve $\alpha = \max\{|a|, \sqrt{b}\} = \sqrt{b}$ 'dir. Bu yüzden $\pm\alpha$ (4.4) denkleminin çözümleridir.

Lemma 4.3.1.2. $\Delta < 0$, $ab+c=0$ ve $b > a^2$ olsun. Bu durumda başlangıç değerlerinin hemen hemen hepsi için (4.1) denkleminin $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümleri ya iki periyotludur ya da denklemin iki periyotlu bir çözümüne yakınsar.

İspat. Bu durumda Lemma 4.3.1.1. ile verilen (4.4) denkleminin çözümleri $\pm\sqrt{b}$ ve a dir. Bu yüzden (4.1) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \sqrt{b} \frac{C_1 + (-1)^n C_2 + \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^n C_3}{C_1 + (-1)^{n-1} C_2 + \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^{n-1} C_3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\forall (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(F \cup \{(a, a), \pm\sqrt{b}(1, 1)\}\right)$ için aşağıdakiler elde edilir:

- 1) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 = 0\}$ ise her $n \geq -1$ için $x_{n+2} = x_n$ olur. Yani, $(x_n)_{n \geq -1}$ iki periyotludur.
- 2) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 \neq 0\} \cap \{C_1 = 0\}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{b}$ olur.
- 3) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 \neq 0\} \cap \{C_2 = 0\}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{b}$ olur.

4) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 \neq 0\} \cap \{C_1 C_2 \neq 0\} \cap \{(C_1 + C_2)(C_1 - C_2) \neq 0\}$ ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \sqrt{b} \frac{(C_1 + C_2)}{(C_1 - C_2)}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \sqrt{b} \frac{(C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2)}$ olur. Bundan dolayı, $(x_n)_{n \geq 1}$ iki

periyotlu bir çözüme yakınsar.

5) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 \neq 0\} \cap \{C_1 C_2 \neq 0\} \cap \{C_1 - C_2 = 0\}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 0$

olur.

6) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_3 \neq 0\} \cap \{C_1 C_2 \neq 0\} \cap \{C_1 + C_2 = 0\}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 0$ ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.1.3. $\Delta < 0$ olsun. Eğer $(ab + c \neq 0$ veya $b \leq a^2)$ ise (4.1) denkleminin $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümleri $M := F \cup \{(u, v) : C_{i_0}(u, v) = 0\}$ kümesinin dışında bir ρ_{i_0} noktasına yakınsar. Burada i_0 , $|\rho_{i_0}| = \alpha$ olacak şekildedir.

İspat. Lemma 4.3.1.1.'den, $\alpha = |\rho_{i_0}|$ olacak şekilde bir tek $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ vardır. $\alpha = |\rho_1|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\forall (x_{-1}, x_0) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus M$ için,

$$x_n = \rho_1 \frac{C_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n C_2 + \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^n C_3}{C_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n-1} C_2 + \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{n-1} C_3}$$

ifadesini elde ederiz. $|\rho_2| < |\rho_1| = \alpha$ ve $|\rho_3| < |\rho_1| = \alpha$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho_1$$

olduğunu görüyoruz.

Uyarı 4.3.1.1.

1) Eğer $|\rho_2| > |\rho_3|$ ise $\forall (x_{-1}, x_0) \in G_1 := (\mathbb{R}^2 \setminus F) \cap \{C_1 = 0\} \cap \{C_2 \neq 0\}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho_2$ elde edilir.

Eğer $|\rho_3| > |\rho_2|$ ise $\forall (x_{-1}, x_0) \in G_2 := (\mathbb{R}^2 \setminus F) \cap \{C_1 = 0\} \cap \{C_3 \neq 0\}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho_3$ elde edilir.

2) Eğer $|\rho_1| = |\rho_3|$ ise $\forall (x_{-1}, x_0) \in (\mathbb{R}^2 \setminus F) \cap \{C_1 = 0\}$ için $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümü iki periyotludur.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.3.1.1. $\Delta < 0$ ise, (4.1) denkleminin çözümlerinin ρ_i ayrı köklerinden birine yakınsaması için gerek ve yeter şart $ab + c \neq 0$ veya $b \leq a^2$ olmasıdır.

4.3.2. $\Delta = 0$ Durumu

Teorem 4.3.2.1. $\Delta = 0$ ise, (4.1) denkleminin çözümleri ρ ya da r köklerinden birine yakınsar.

İspat. Burada aşağıdaki iki durum ortaya çıkar:

1) $b = -a^2/3$ ve $c = a^3/27$: Eğer $\forall (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ ise (4.1) denkleminin genel çözümünden $n \rightarrow \infty$ için limit olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{3} \frac{C_1 n^2 + C_2 n + C_3}{C_1 (n-1)^2 + C_2 (n-1) + C_3} = \frac{a}{3}$$

elde edilir.

2) $b \neq -a^2/3$ veya $c \neq a^3/27$: Eğer $\forall (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ ise (4.1) denkleminin genel çözümünden yine $n \rightarrow \infty$ için limit alınır. Fakat yine iki alt durum ortaya çıkar:

i) Eğer $|\rho| > |r|$ ise $\forall (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (F \cup \{C_1 = 0\})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \frac{C_1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^n (nC_2 + C_3)}{C_1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} ((n-1)C_2 + C_3)} = \rho$$

olur.

ii) Eğer $|r| \geq |\rho|$ ise $\forall (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (F \cup \{C_2 = 0\})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r \frac{\left(\frac{r}{\rho}\right)^n + nC_2 + C_3}{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} + (n-1)C_2 + C_3} = r$$

olur.

Uyarı 4.3.2.1.

Eğer $r = |\rho|$ ise herhangi bir $(x_{-1}, x_0) \in (\mathbb{R}^2 \setminus F) \cap \{C_2 = 0\} \cap \{C_1 C_3 \neq 0\}$ için $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümleri iki periyotludur.

4.3.3. $\Delta > 0$ Durumu

Lemma 4.3.3.1. Eğer $|\rho| > r$ ise (4.1) denkleminin çözümleri $M := F \cup \{(x_{-1}, x_0) : C_1 = 0\}$ kümesine ait olmayan başlangıç değerleri için ρ 'ya yakınsar.

İspat. Eğer $|\rho| > r$ ise $(x_{-1}, x_0) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus M$ şartını sağlayan tüm başlangıç değerleri için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \frac{C_1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^n [C_2 \cos(n\theta) + C_3 \sin(n\theta)]}{C_1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} [C_2 \cos((n-1)\theta) + C_3 \sin((n-1)\theta)]} = \rho$$

elde edilir.

Lemma 4.3.3.2. Eğer $|\rho| \leq r$ ise (4.1) denkleminin $(x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (F \cup \{(\rho, \rho)\})$ başlangıç değerlerine karşılık gelen her $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümü ya periyodiktir ya periyodik olmayacak şekilde salınımlıdır ya da kapalı bir aralıkta yoğundur.

İspat. $(x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (F \cup \{(\rho, \rho)\})$ şartını sağlayan tüm başlangıç değerleri için,

$$x_n = \frac{C_1 \rho^n + A r^n \sin(n\theta + \phi)}{C_1 \rho^{n-1} + A r^{n-1} \sin((n-1)\theta + \phi)}$$

elde edilir. Burada

$$A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \quad \sin \phi = \frac{C_2}{A} \quad \text{ve} \quad \cos \phi = \frac{C_3}{A}$$

dır.

1) Eğer $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ve p, q aralarında asal olmak üzere $\theta \in \pi\mathbb{Q}$, $\theta = (p/q)\pi$ ise bu durumda,

a) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_1 = 0\}$ ise $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümü q periyotludur,

b) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_1 \neq 0\}$ ve $|\rho| = r$ ise $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümü p çift olduğunda q periyotludur, p tek olduğunda $2q$ periyotludur.

c) Eğer $(x_{-1}, x_0) \in \{C_1 \neq 0\}$ ve $|\rho| < r$ ise her $0 \leq s \leq q-1$ için,

$$x_{kq+s} = r \frac{(-1)^{kp} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{kq+s} C_1 + A \sin(s\theta + \phi)}{(-1)^{kp} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{kq+s-1} C_1 + A \sin((s-1)\theta + \phi)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kq+s} = \begin{cases} \frac{r \sin(s\theta + \phi)}{\sin((s-1)\theta + \phi)}, & \sin((s-1)\theta + \phi) \neq 0 \text{ ise,} \\ \infty, & \sin((s-1)\theta + \phi) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur ki bu $(x_n)_{n \geq -1}$ çözümünün salınımlı ve periyodik olmadığı anlamına gelir.

2) $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ durumu aşağıdaki dört durumda incelenir:

a) $r > |\rho|$: Kronecker teoreminin bir boyutlu versiyonunu hatırlayalım.

Teorem: (Kronecker Teoremi) Eğer x bir pozitif irrasyonel sayı ise $\{kx - s : k, s \in \mathbb{N}\}$ dizisi \mathbb{R} de yoğundur.

$\theta/2\pi$ pozitif irrasyonel sayı olduğundan tüm $x \in \mathbb{R}$ 'ler için Kronecker teoreminden bir $y_k = \theta n_k - 2\pi m_k + \phi$ dizisi vardır öyle ki, bu dizi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$$

olur. Burada $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$, $(m_k)_k \subset \mathbb{N}$. Bu durumda, $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \theta)$ için

$$x_{n_k} = r \frac{C_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n_k} + A \sin(y_k)}{C_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n_k-1} + A \sin(y_k - \theta)}$$

olduğunu görülür. Böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \frac{r \sin x}{\sin(x - \theta)}$$

olur ve bundan

$$\{\overline{x_n : n \geq -1}\} \supset \left\{ \frac{r \sin x}{\sin(x-\theta)} : x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \theta) \right\}$$

olduğu sonucu çıkar.

$x \mapsto (r \sin x)/\sin(x-\theta)$, $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \theta)$ fonksiyonunu göz önünde

bulundurarak $\{(r \sin x)/\sin(x-\theta) : x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \theta)\} = \mathbb{R}$ olduğunu görürüz ve

bu nedenle $\{\overline{x_n : n \geq -1}\} = \mathbb{R}$ olur.

b) $r = |\rho|$ ve $(u, v) \in C_1^2 > C_2^2 + C_3^2$: Bu durumda,

$$\begin{aligned} \{\overline{x_n : n \geq -1}\} &= \left\{ r \frac{C_1 + A \sin x}{C_1 + A \sin(x-\theta)} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ r \frac{C_1 + A \sin x}{C_1 + A \sin(x-\theta)} : x \in [0, 2\pi] \right\} \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\{\overline{x_n : n \geq -1}\}$$

kümesi \mathbb{R}_+ kümesinin sınırlı, kapalı bir aralığıdır.

c) $r = |\rho|$ ve $(x_{-1}, x_0) \in \{C_1^2 = C_2^2 + C_3^2\}$ olsun. Bu durumda,

$$\{\overline{x_n : n \geq -1}\} = \left\{ r \frac{1 + \sin x}{1 + \sin(x-\theta)} : x \in \mathbb{R}, 1 + \sin(x-\theta) \neq 0 \right\} = [0, \infty)$$

olur.

d) $r = |\rho|$ ve $(x_{-1}, x_0) \in C_1^2 < C_2^2 + C_3^2$ olsun. Bu durumda,

$$\{\overline{x_n : n \geq -1}\} = \mathbb{R}$$

olduğunu görürüz.

Uyarı 4.3.3.1.

Eğer x_{-1}, x_0 başlangıç değerleri ve c sıfırdan farklı ise

$$x_{n+1} = \frac{c}{x_n x_{n-1}} \tag{4.10}$$

denkleminin sabit olmayan her çözümü üç periyotludur.

Yani, (4.10) denklemini (4.1) denklemindeki $a=b=0$ durumuna karşılık gelir. Bundan $\rho = \sqrt[3]{c}$, $r = |\sqrt[3]{c}|$ ve $\theta = (2/3)\pi$ olduğunu görürüz. Bu durumda, Lemma 4.3.3.2. nin ispatının 1) şikkından (4.1) denkleminin herhangi bir $(x_n)_{n \geq 1}$ çözümü üç periyotludur.

Lemma 4.3.3.3. $|\rho| > r$ olması için gerek ve yeter şart $a^3c + b^3 > 0$ olur.

İspat. ρ ve $re^{\pm i\theta}$ kökleri arasındaki bağıntılardan ve P polinomunun katsayılarından

$$a = \rho + 2r \cos \theta, \quad b = -(r^2 + 2r\rho \cos \theta), \quad c = \rho r^2$$

elde ederiz.

$$a^3c + b^3 = r^2(\rho^2 - r^2)(\rho^2 + r^2 + 2r\rho \cos \theta(3 - 4\cos^2 \theta))$$

olur.

$$\varphi(x) := x(3 - 4x^2), \quad x \in [-1, 1]$$

fonksiyonunu göz önünde bulundurarak her $x \in [-1, 1]$ için $|\varphi(x)| \leq 1$ eşitsizliğini elde ederiz ve böylece

$$\rho^2 + r^2 + 2r\rho \cos \theta(3 - 4\cos^2 \theta) \geq \rho^2 + r^2 - 2r|\rho| = (|\rho| - r)^2 \geq 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.3.3.1. Eğer $\Delta > 0$ ise (4.1) denkleminin iyi tanımlı çözümlerinin ρ gerçek köküne yakınsaması için gerek ve yeter şart $a^3c + b^3 > 0$ olmasıdır.

5. İKİNCİ MERTEBEDEN ÇÖZÜLEBİLİR BİR FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + by_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{c + dx_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.1)$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenecektir. Burada verilen a, b, c, d parametreleri ve x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} başlangıç değerleri reel sayılardır. Bu incelemeye çalışmamızın temelini teşkil eden klasik bir çözülebilir fark denklem örneği vererek başlayalım. Bu denklem

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_n}{C + Dx_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.2)$$

fark denklemdir. Burada A, B, C, D parametreleri ve x_0 başlangıç değeri reel sayılardır. (5.2) denkleme “bilineer fark denklemi” veya “lineer fraksiyonel fark denklemi” denir. Fakat bazı kaynaklarda bu denklem, sabit katsayılı Riccati diferansiyel denkleminde elde edilebilmesi sebebiyle “Riccati Fark Denklemi” olarak da isimlendirilmektedir.

Farz edelim ki (5.2) denkleminde $A=1, B=0$ olsun. Böylece

$$x_{n+1} = \frac{1}{C + Dx_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.3)$$

denklemini elde edilir. (5.3) denklemine

$$x_n = \frac{y_{n-1}}{y_n} \quad (5.4)$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa, bu denklem

$$y_{n+1} = Cy_n + Dy_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.5)$$

ikinci mertebeden lineer fark denklemine dönüşür. Burada y_0, y_{-1} başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılardır. Başlangıç şartlarını $y_0 = x_0$ ve $y_{-1} = 1$ olarak seçersek, bu durumda (5.3) ve (5.5) denklemlerinin çözümleri arasında bire-bir bir bağıntı elde edilir. Bu nedenle, (5.5) denklemini çözerek (5.3) denkleminin genel çözümü elde edebiliriz. Oldukça ilginç bir şekilde, (5.3) denklemi

$$x_{n+1} = \frac{1}{C + Dx_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.6)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada x_0, x_{-1} başlangıç değerleri reel sayılardır. Bu ilginçliğin sebebi, (5.6) denkleminin yine (5.4) değişken değiştirmesi ile yine lineer olan üçüncü mertebeden

$$y_{n+1} = Cy_n + Dy_{n-2}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.7)$$

denklemine dönüşmesidir. Burada y_0, y_{-1}, y_{-2} başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılardır. Eğer bu başlangıç değerlerini $y_0 = 1, y_{-1} = x_0, y_{-2} = x_0 x_{-1}$ seçersek, bu durumda (5.6) ve (5.7) denklemlerinin çözümleri arasında bire-bir bir bağıntı elde edilir. Benzer şekilde, (5.7) lineer denkleminin genel çözümü kullanılarak (5.6) denkleminin genel çözümü elde edilebilir. Böylece, (5.6) genelleştirmesi (5.3) denkleminin önemli bir özellik olan çözülebilirliği korur. Ancak, biz (5.6) ile ilgilenmeyip (5.6) denkleminin daha kapsamlı bir genelleştirmesi olan (5.1) fark denklem sistemi ile ilgileneceğiz. (5.1) sistemi, (5.6) denkleminin 2-boyutlu bir genelleştirmesidir. Gerçekten; eğer (5.1) sisteminde $a = c = C, b = d = D$ ve $x_0 = y_0, x_{-1} = y_{-1}$ alınırsa, (5.1) sisteminin her bir çözümü tam olarak (5.6) denkleminin bir çözümünü verir. Bu çalışmada, bazı özel yöntemler kullanarak (5.1) sisteminin genel çözümünü elde edip, bu genel çözüm yardımıyla iyi tanımlı çözümlerin asimptotik davranışlarını araştıracağız.

Uyarı 5.1. (5.1) sistemi (5.6) denkleminin 2-boyutlu simetrik bir genelleştirmesidir. Bunun gibi simetrik olan üç genelleştirme daha vardır. Bu genelleştirmeler aşağıda verilmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + bx_n x_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{1}{c + dy_n y_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + bx_n y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{1}{c + dy_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + by_n y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{1}{c + dx_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Bu sistemlerden birincisi ayrık iki denklem olup, sistemin her iki denklemi de (5.6) denklemi ile aynı forma sahiptir. Dolayısıyla, bu sistemi incelemek (5.6) denklemini incelemek anlamına gelir. İkinci ve üçüncü sistemler (5.6) denklemi gibi çözülebilirlik özelliğine sahip değildir.

5.1. Genel Çözüm

Bu kısımda (5.1) sisteminin çözüm formüllerini elde edeceğiz. Çözüm için (5.6) için verilen değişken değiştirme yöntemini genelleştirerek

$$x_n = \frac{v_{n-1}}{u_n}, y_n = \frac{u_{n-1}}{v_n} \quad (5.8)$$

ya da

$$x_n = \frac{u_{n-1}}{v_n}, y_n = \frac{v_{n-1}}{u_n} \quad (5.9)$$

değişken değiştirmelerini elde ederiz. (5.8) ve (5.9) değişken değiştirmelerinin her ikisini de (5.1) sistemini bir lineer sisteme dönüştürmek için kullanabiliriz. Hangi değişken değiştirmeyi seçtiğimiz önemli değildir, çünkü bu seçimin sonuç üzerinde hiçbir etkisi olmayacaktır. (5.9) değişken değiştirmesini uygulayarak, (5.1) sisteminden

$$v_{n+1} = au_n + bu_{n-2}, \quad u_{n+1} = cv_n + dv_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.10)$$

lineer sistemini elde ederiz. Burada $n \geq -1$ için $u_n v_n \neq 0$ dır. Bu lineer sistem tek bir lineer denkleme indirgenmesi için birbirleri içine yazılarak, $n \geq 0$ için altıncı mertebeden

$$v_{n+4} = acv_{n+2} + (ad + bc)v_n + bdv_{n-2} \quad (5.11)$$

ve

$$u_{n+4} = acu_{n+2} + (ad + bc)u_n + bdu_{n-2} \quad (5.12)$$

denklemleri elde edilir. (5.11) ve (5.12) lineer denklemleri u_n ve v_n değişkenlerine göre ayırık olup, aynı formdadırlar. Bu nedenle, bunlardan sadece birisini kullanabiliriz. (5.12) denklemini ele alalım. (5.12) denkleminin karakteristik denklemi altıncı dereceden

$$P(x) = x^6 - acx^4 - (ad + bc)x^2 - bd = 0 \quad (5.13)$$

denklemdir. Bu denklem $x^2 = y$ alınarak

$$P(\sqrt{y}) = Q(y) = y^3 - acy^2 - (ad + bc)y - bd = 0 \quad (5.14)$$

kübik denkleme indirgenir. (5.14) denkleminin bir kökü y ise (5.13) denkleminin buna karşılık gelen iki kökü \sqrt{y} ve $-\sqrt{y}$ dir. Bu durumda, Q polinomunun diskriminantı Lemma 2.2.1.'den

$$\Delta = (ac)^2 (ad + bc)^2 - 4(ad + bc)^3 + (ac)^3 bd + 27(bd)^2 + 18abcd(ad + bc)$$

olarak elde edilir. (5.14) denkleminin kökleri Δ 'nın işaretine bağlı olduğundan (5.12) lineer fark denkleminin genel çözümü de Δ 'nın işaretine bağlıdır. Ayrıca, yukarıda belirtildiği gibi (5.1) sisteminin genel çözümü (5.12) denkleminin genel çözümü ve (5.9) değişken değiştirmesi yardımıyla yazılabilir. Burada yine Lemma 2.2.1. i

kullanarak aşağıdaki üç durumu inceleyeceğiz. Bunun için $u_0 = 1$, $u_{-1} = x_0$, $u_{-2} = y_0x_{-1}$, $v_0 = 1$, $v_{-1} = y_0$, $v_{-2} = x_0y_{-1}$ başlangıç şartları ile verilen (5.10) lineer sisteminin iyi tanımlı bir çözümünü $\{(u_n, v_n)\}_{n \geq -2}$ ile göstereceğiz.

5.1.1. $\Delta < 0$ durumu

Eğer $\Delta < 0$ ise (5.10) lineer sisteminin genel çözümünün birinci bileşeni için

$$u_n = C_1(\sqrt{\rho_1})^n + C_2(\sqrt{\rho_2})^n + C_3(\sqrt{\rho_3})^n + C_4(-\sqrt{\rho_1})^n + C_5(-\sqrt{\rho_2})^n + C_6(-\sqrt{\rho_3})^n$$

verilir. Burada $i = \overline{1, 6}$ için C_i 'ler keyfi sabitler olup, bu sabitler için

$$C_1 + C_4 = \frac{(d + \rho_1 c)by_0x_{-1} + (\sqrt{\rho_1}ac + ac^2 + d)\sqrt{\rho_1}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)},$$

$$C_1 - C_4 = \frac{-\left((\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3)\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} - \sqrt{\rho_1}ac\right)dx_0y_{-1} + \left(\frac{d}{\sqrt{\rho_1}} + \sqrt{\rho_1}c\right)x_0 + \rho_1dy_0 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{\rho_2}}\right)(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)},$$

$$C_2 + C_5 = \frac{-(d + \rho_2 c)by_0x_{-1} + (\sqrt{\rho_2}ac + ac^2 + d)\sqrt{\rho_2}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)},$$

$$C_2 - C_5 = \frac{\left((\rho_2\rho_1 + \rho_2\rho_3)\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} - \sqrt{\rho_2}ac\right)dx_0y_{-1} - \left(\frac{d}{\sqrt{\rho_2}} + \sqrt{\rho_2}bc\right)x_0 + \rho_2dy_0 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{\rho_1}}\right)(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)},$$

$$C_3 + C_6 = \frac{(d + \rho_3 c)by_0x_{-1} + (\sqrt{\rho_3}ac + ac^2 + d)\sqrt{\rho_3}}{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)},$$

$$C_3 - C_6 = \frac{-\left((\rho_3\rho_1 + \rho_3\rho_2)\frac{1}{\sqrt{\rho_3}} - \sqrt{\rho_3}ac\right)dx_0y_{-1} + \left(\frac{d}{\sqrt{\rho_3}} + \sqrt{\rho_3}bc\right)x_0 + \rho_3dy_0 - \left(1 + \frac{c}{\sqrt{\rho_1}}\right)(\rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3)}{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)}$$

eşitlikleri verilir. Buradan

$$u_{2n} = (C_1 + C_4)\rho_1^n + (C_2 + C_5)\rho_2^n + (C_3 + C_6)\rho_3^n,$$

$$u_{2n+1} = (C_1 - C_4)\rho_1^{\frac{2n+1}{2}} + (C_2 - C_5)\rho_2^{\frac{2n+1}{2}} + (C_3 - C_6)\rho_3^{\frac{2n+1}{2}} \quad (5.15)$$

formülleri elde edilir. Bu formüller (5.10) lineer sisteminin birinci denkleminde kullanılırsa

$$v_{2n} = (a\rho_1 + b)(C_1 - C_4)\rho_1^{\frac{2n-3}{2}} + (a\rho_2 + b)(C_2 - C_5)\rho_2^{\frac{2n-3}{2}} + (a\rho_3 + b)(C_3 - C_6)\rho_3^{\frac{2n-3}{2}}, \quad (5.16)$$

$$v_{2n+1} = (a\rho_1 + b)(C_1 + C_4)\rho_1^{n-1} + (a\rho_2 + b)(C_2 + C_5)\rho_2^{n-1} + (a\rho_3 + b)(C_3 + C_6)\rho_3^{n-1}$$

formülleri bulunur. Ayrıca, (5.14) denkleminin kökleri ρ_1 , ρ_2 ve ρ_3 olduğundan

$$a\rho_1 + b = \frac{\rho_1^3}{c\rho_1 + d}, \quad a\rho_2 + b = \frac{\rho_2^3}{c\rho_2 + d}, \quad a\rho_3 + b = \frac{\rho_3^3}{c\rho_3 + d} \quad (5.17)$$

bağıntıları sağlanır. Bu sayede (5.16) formülleri

$$v_{2n} = \frac{\rho_1(C_1 - C_4)}{c\rho_1 + d}\rho_1^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_2(C_2 - C_5)}{c\rho_2 + d}\rho_2^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_3(C_3 - C_6)}{c\rho_3 + d}\rho_3^{\frac{2n+1}{2}}, \quad (5.18)$$

$$v_{2n+1} = \frac{\rho_1(C_1 + C_4)}{c\rho_1 + d}\rho_1^{n+1} + \frac{\rho_2(C_2 + C_5)}{c\rho_2 + d}\rho_2^{n+1} + \frac{\rho_3(C_3 + C_6)}{c\rho_3 + d}\rho_3^{n+1}.$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (5.15)-(5.18) formülleri ve (5.9) değişken değiştirmeleri yardımıyla (5.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{2n} = \frac{(C_1 - C_4)\rho_1^{\frac{2n-1}{2}} + (C_2 - C_5)\rho_2^{\frac{2n-1}{2}} + (C_3 - C_6)\rho_3^{\frac{2n-1}{2}}}{\frac{\rho_1(C_1 - C_4)}{c\rho_1 + d}\rho_1^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_2(C_2 - C_5)}{c\rho_2 + d}\rho_2^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_3(C_3 - C_6)}{c\rho_3 + d}\rho_3^{\frac{2n+1}{2}}}, \quad (5.19)$$

$$x_{2n+1} = \frac{(C_1 + C_4)\rho_1^n + (C_2 + C_5)\rho_2^n + (C_3 + C_6)\rho_3^n}{\frac{\rho_1(C_1 + C_4)}{c\rho_1 + d}\rho_1^{n+1} + \frac{\rho_2(C_2 + C_5)}{c\rho_2 + d}\rho_2^{n+1} + \frac{\rho_3(C_3 + C_6)}{c\rho_3 + d}\rho_3^{n+1}}, \quad (5.20)$$

$$y_{2n} = \frac{\frac{\rho_1(C_1 + C_4)}{c\rho_1 + d}\rho_1^n + \frac{\rho_2(C_2 + C_5)}{c\rho_2 + d}\rho_2^n + \frac{\rho_3(C_3 + C_6)}{c\rho_3 + d}\rho_3^n}{(C_1 + C_4)\rho_1^n + (C_2 + C_5)\rho_2^n + (C_3 + C_6)\rho_3^n}, \quad (5.21)$$

$$y_{2n+1} = \frac{\frac{\rho_1(C_1 - C_4)}{c\rho_1 + d} \rho_1^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_2(C_2 - C_5)}{c\rho_2 + d} \rho_2^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_3(C_3 - C_6)}{c\rho_3 + d} \rho_3^{\frac{2n+1}{2}}}{(C_1 - C_4)\rho_1^{\frac{2n+1}{2}} + (C_2 - C_5)\rho_2^{\frac{2n+1}{2}} + (C_3 - C_6)\rho_3^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (5.22)$$

olarak elde edilir.

5.1.2. $\Delta = 0$ durumu

Bu kısım iki alt durumda incelenecektir.

i) $ad + bc = -(ac)^2/3, bd = (ac)^3/27$ durumu

Eğer $ad + bc = -(ac)^2/3$ ve $bd = (ac)^3/27$ ise (5.10) lineer sisteminin genel çözümünün birinci bileşeni için

$$u_n = \left(\frac{ac}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \left[(C_1 n^2 + C_2 n + C_3) + (-1)^n (C_4 n^2 + C_5 n + C_6) \right]$$

verilir. Burada $i = \overline{1, 6}$ için C_i 'ler keyfi sabitler olup, bu sabitler için

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= \frac{1}{32} \left[\left(\left(\frac{ac}{3} \right)^2 + bc \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} \right) y_0 x_{-1} + d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} y_0 + ac \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} - 2 \right], \\ C_1 - C_4 &= \frac{1}{8} \left[d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} x_0 y_{-1} + \left(\left(\frac{ac}{3} \right)^{\frac{1}{2}} + bc \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) x_0 + c \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} + d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right], \\ C_2 + C_5 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{ac}{3} \right)^2 + bc \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} \right) y_0 x_{-1} + d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} y_0 + ac \left(\frac{ac}{3} \right)^{-2} - \frac{3}{2} \right], \\ C_2 - C_5 &= \frac{1}{2} \left[d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} x_0 y_{-1} - \left(\frac{ac}{3} \right)^{\frac{1}{2}} x_0 + c \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} \right], \\ C_3 + C_6 &= 1, \\ C_3 - C_6 &= \frac{1}{8} \left[3d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} x_0 y_{-1} + \left(3 \left(\frac{ac}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - bc \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) x_0 + 3c \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} - d \left(\frac{ac}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

eşitlikleri verilir. Bu formül tek ve çift indisli terimlere ayrılarak

$$u_{2n} = \left(\frac{ac}{3}\right)^n \left[(C_1 + C_4)4n^2 + (C_2 + C_5)2n + C_3 + C_6 \right], \quad (5.24)$$

$$u_{2n+1} = \left(\frac{ac}{3}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \left[(C_1 - C_4)(2n+1)^2 + (C_2 - C_5)(2n+1) + C_3 - C_6 \right]$$

şeklinde yazılabilir. (5.24) formülleri (5.10) lineer sisteminin birinci denkleminde yerine konularak

$$v_{2n} = \left(\frac{ac}{3}\right)^{\frac{2n-3}{2}} \left[\left(\frac{a^2c}{3}(2n-1)^2 + b(2n-3)^2\right)(C_1 - C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}(2n-1) + b(2n-3)\right)(C_2 - C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 - C_6) \right], \quad (5.25)$$

$$v_{2n+1} = \left(\frac{ac}{3}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{a^2c}{3}4n^2 + b4(n-1)^2\right)(C_1 + C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}2n + b2(n-1)\right)(C_2 + C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 + C_6) \right]$$

formülleri elde edilir. Böylece, (5.24)-(5.25) formülleri ve (5.9) değişken değiştirmeleri yardımıyla (5.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{2n} = \frac{ac \left[(C_1 - C_4)(2n-1)^2 + (C_2 - C_5)(2n-1) + C_3 - C_6 \right]}{3 \left[\left(\frac{a^2c}{3}(2n-1)^2 + b(2n-3)^2\right)(C_1 - C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}(2n-1) + b(2n-3)\right)(C_2 - C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 - C_6) \right]}, \quad (5.26)$$

$$x_{2n+1} = \frac{ac \left[(C_1 + C_4)4n^2 + (C_2 + C_5)2n + C_3 + C_6 \right]}{3 \left[\left(\frac{a^2c}{3}4n^2 + b4(n-1)^2\right)(C_1 + C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}2n + b2(n-1)\right)(C_2 + C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 + C_6) \right]}, \quad (5.27)$$

$$y_{2n} = \frac{9 \left[\left(\frac{a^2c}{3}4(n-1)^2 + b4(n-2)^2\right)(C_1 + C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}2(n-1) + b2(n-2)\right)(C_2 + C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 + C_6) \right]}{(ac)^2 \left[(C_1 + C_4)4n^2 + (C_2 + C_5)2n + C_3 + C_6 \right]}, \quad (5.28)$$

$$y_{2n+1} = \frac{9 \left[\left(\frac{a^2c}{3}(2n-1)^2 + b(2n-3)^2\right)(C_1 - C_4) + \left(\frac{a^2c}{3}(2n-1) + b(2n-3)\right)(C_2 - C_5) + \left(\frac{a^2c}{3} + b\right)(C_3 - C_6) \right]}{(ac)^2 \left[(C_1 - C_4)(2n+1)^2 + (C_2 - C_5)(2n+1) + C_3 - C_6 \right]}, \quad (5.29)$$

şeklinde elde edilir.

ii) $ad+bc+(ac)^2/3 \neq 0$ veya $bd \neq (ac)^3/27$ durumu

Eğer $ad+bc+(ac)^2/3 \neq 0$ veya $bd \neq (ac)^3/27$ ise, (5.10) sisteminin genel çözümünün birinci bileşeni için

$$u_n = C_1 (\sqrt{\rho})^n + (\sqrt{r})^n [C_2 n + C_3] + C_4 (-\sqrt{\rho})^n + (-\sqrt{r})^n [C_5 n + C_6]$$

veya

$$u_n = (\sqrt{\rho})^n (C_1 + C_4 (-1)^n) + (\sqrt{r})^n [(C_2 + C_5 (-1)^n)n + (C_3 + C_6 (-1)^n)]$$

şeklinde verilir. Burada, $i = \overline{1,6}$ için C_i 'ler keyfi sabitler olup, bu sabitler için

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= \rho \frac{(bc+r^2)y_0 x_{-1} + dy_0 + ac - 2r}{(r-\rho)^2}, \\ C_1 - C_4 &= \sqrt{\rho} \frac{(acd - 2dr)x_0 y_{-1} + (bc+r^2)x_0 + ac^2 - 2cr + d}{(r-\rho)^2}, \\ C_2 + C_5 &= \frac{(bc+r\rho)y_0 x_{-1} + dy_0 + ac - (r+\rho)}{2(r-\rho)}, \\ C_2 - C_5 &= \frac{(acd - dr - d\rho)x_0 y_{-1} + (bc+r\rho)x_0 + c(ac-r-\rho) + d}{2\sqrt{r}(r-\rho)}, \\ C_3 + C_6 &= \frac{(bc+r^2)\rho y_0 x_{-1} + d\rho y_0 + ac\rho - r^2 - \rho^2}{(r-\rho)^2}, \\ C_3 - C_6 &= \frac{(ac(r+\rho) - (3r^2 + \rho^2))dx_0 y_{-1} + (bc(r+\rho) + r\rho(3r-\rho))x_0 + (ac^2 + d)(r+\rho) - c(3r^2 + \rho^2)}{-2\sqrt{r}(r-\rho)^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

eşitlikleri verilir. Bu formül tek ve çift indisli terimlere ayrılarak

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \rho^n (C_1 + C_4) + r^n [(C_2 + C_5)2n + (C_3 + C_6)] \\
u_{2n+1} &= \rho^{\frac{2n+1}{2}} (C_1 - C_4) + r^{\frac{2n+1}{2}} [(C_2 - C_5)(2n+1) + (C_3 - C_6)]
\end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde yazılabilir. (5.31) formülleri (5.10) lineer sisteminin birinci denkleminde yerine konularak

$$v_{2n} = (a\rho + b)(C_1 - C_4) \rho^{\frac{2n-3}{2}} + r^{\frac{2n-3}{2}} [(ar(2n-1) + b(2n-3))(C_2 - C_5) + (ar+b)(C_3 - C_6)], \tag{5.32}$$

$$v_{2n+1} = (a\rho + b)(C_1 + C_4) \rho^{n-1} + r^{n-1} [2(arn + b(n-1))(C_2 + C_5) + (ar+b)(C_3 + C_6)]$$

formülleri elde edilir. Böylece, (5.31)-(5.32) formülleri ve (5.9) değişken değiştirmeleri yardımıyla (5.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{2n} = \frac{(C_1 - C_4) \rho^{\frac{2n-1}{2}} + r^{\frac{2n-1}{2}} [(C_2 - C_5)(2n-1) + (C_3 - C_6)]}{(a\rho + b)(C_1 - C_4) \rho^{\frac{2n-3}{2}} + r^{\frac{2n-3}{2}} [(ar(2n-1) + b(2n-3))(C_2 - C_5) + (ar+b)(C_3 - C_6)]}, \tag{5.33}$$

$$x_{2n+1} = \frac{(C_1 + C_4) \rho^n + r^n [(C_2 + C_5)2n + (C_3 + C_6)]}{(a\rho + b)(C_1 + C_4) \rho^{n-1} + r^{n-1} [2(arn + b(n-1))(C_2 + C_5) + (ar+b)(C_3 + C_6)]}, \tag{5.34}$$

$$y_{2n} = \frac{(a\rho + b)(C_1 + C_4) \rho^{n-2} + r^{n-2} [2(ar(n-1) + b(n-2))(C_2 + C_5) + (ar+b)(C_3 + C_6)]}{(C_1 + C_4) \rho^n + r^n [(C_2 + C_5)2n + (C_3 + C_6)]}, \tag{5.35}$$

$$y_{2n+1} = \frac{(a\rho + b)(C_1 - C_4) \rho^{\frac{2n-3}{2}} + r^{\frac{2n-3}{2}} [(ar(2n-1) + b(2n-3))(C_2 - C_5) + (ar+b)(C_3 - C_6)]}{(C_1 - C_4) \rho^{\frac{2n+1}{2}} + r^{\frac{2n+1}{2}} [(C_2 - C_5)(2n+1) + (C_3 - C_6)]}, \tag{5.36}$$

şeklinde elde edilir.

5.1.3. $\Delta > 0$ durumu

Eğer $\Delta > 0$ ise P polinomu ρ ile göstereceğimiz bir reel köke ve $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere $re^{\pm i\theta}$ ile göstereceğimiz iki kompleks eşlenik köke sahiptir. Böylece, (5.10) sisteminin genel çözümü

$$u_n = C_1(\sqrt{\rho})^n + (\sqrt{r})^n \left[C_2 \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + C_3 \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right] + C_4(-\sqrt{\rho})^n + (-\sqrt{r})^n \left[C_5 \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + C_6 \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right]$$

veya

$$u_n = (\sqrt{\rho})^n (C_1 + C_4(-1)^n) + (\sqrt{r})^n \left[(C_2 + C_5(-1)^n) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + (C_3 + C_6(-1)^n) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right]$$

verilir. Bu formül tek ve çift indisli terimlere ayrılarak

$$\begin{aligned} u_{2n} &= (C_1 + C_4)\rho^n + r^n \left[(C_2 + C_5) \cos(n\theta) + (C_3 + C_6) \sin(n\theta) \right] \\ u_{2n+1} &= (C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n+1}{2}} + r^{\frac{2n+1}{2}} \left[(C_2 - C_5) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + (C_3 - C_6) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

şeklinde yazılabilir. (5.37) formülleri (5.10) lineer sisteminin birinci denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} v_{2n} &= (a\rho + b)(C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n-3}{2}} \\ &+ r^{\frac{2n-3}{2}} \left[(C_2 - C_5) \left(ar \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) + (C_3 - C_6) \left(ar \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} v_{2n+1} &= (a\rho + b)(C_1 + C_4)\rho^{n-1} \\ &+ r^{n-1} \left[(C_2 + C_5) \left(ar \cos(n\theta) + b \cos((n-1)\theta) \right) + (C_3 + C_6) \left(ar \sin(n\theta) + b \sin((n-1)\theta) \right) \right] \end{aligned}$$

formülleri elde edilir. Böylece, (5.37)-(5.38) formülleri ve (5.9) değişken değiştirmeleri yardımıyla (5.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{2n} = \frac{(C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n-1}{2}} + r^{\frac{2n-1}{2}} \left[(C_2 - C_5)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + (C_3 - C_6)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \right]}{(a\rho + b)(C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n-3}{2}} + r^{\frac{2n-3}{2}} \left[(C_2 - C_5)\left(\ar\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b\cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right)\right) + (C_3 - C_6)\left(\ar\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b\sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right)\right) \right]}, \quad (5.39)$$

$$x_{2n+1} = \frac{(C_1 + C_4)\rho^n + r^n \left[(C_2 + C_5)\cos(n\theta) + (C_3 + C_6)\sin(n\theta) \right]}{(a\rho + b)(C_1 + C_4)\rho^{n-1} + r^{n-1} \left[(C_2 + C_5)(\ar\cos(n\theta) + b\cos((n-1)\theta)) + (C_3 + C_6)(\ar\sin(n\theta) + b\sin((n-1)\theta)) \right]}, \quad (5.40)$$

$$y_{2n} = \frac{(a\rho + b)(C_1 + C_4)\rho^{n-2} + r^{n-2} \left[(C_2 + C_5)(\ar\cos((n-1)\theta) + b\cos((n-2)\theta)) + (C_3 + C_6)(\ar\sin((n-1)\theta) + b\sin((n-2)\theta)) \right]}{(C_1 + C_4)\rho^n + r^n \left[(C_2 + C_5)\cos(n\theta) + (C_3 + C_6)\sin(n\theta) \right]}, \quad (5.41)$$

$$y_{2n+1} = \frac{(a\rho + b)(C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n-3}{2}} + r^{\frac{2n-3}{2}} \left[(C_2 - C_5)\left(\ar\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b\cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right)\right) + (C_3 - C_6)\left(\ar\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b\sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right)\right) \right]}{(C_1 - C_4)\rho^{\frac{2n+1}{2}} + r^{\frac{2n+1}{2}} \left[(C_2 - C_5)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + (C_3 - C_6)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \right]}, \quad (5.42)$$

şeklinde verilir.

5.2. Çözümlerin Asimptotik Davranışı

Bu kısımda, (5.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ve $\Delta > 0$ durumlarında ayrı ayrı ele alınacaktır.

5.2.1. $\Delta < 0$ durumu

Bu kısımda, (5.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışını $\Delta < 0$ olması durumunda inceleyeceğiz. Bunun için önce Lemma 4.3.1.1. in (5.1) sistemine uygulaması olan aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 5.2.1.1. $\Delta < 0$, $ac(ad + bc) + bd = 0$ ve $ad + bc > (ac)^2$ olsun. Bu durumda başlangıç değerlerinin hemen hemen hepsi için (5.1) sisteminin $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ çözümleri ya iki periyotludur ya da denklemin iki periyotlu bir çözümüne yakınsar.

İspat. Bu durumda Lemma 4.3.1.1. e göre (5.14) ile verilen $Q(y)=0$ denkleminin çözümleri $\pm\sqrt{ad+bc}$ ve ac 'dir. Bu yüzden (5.13) ile verilen $P(x)=0$ denkleminin çözümleri $\pm\sqrt[4]{ad+bc}$, $\mp i\sqrt[4]{ad+bc}$ ve $\pm ac$ 'dir. Burada i sanal birimdir. Buna göre (5.19)-(5.22) formüllerinden (5.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{2n} = \frac{[C_1 - C_4 - (C_2 - C_5)i](ad+bc)^{\frac{2n-1}{4}} + (C_3 - C_6)(ac)^{\frac{2n-1}{2}}}{(a\sqrt{ad+bc} + b)[C_1 - C_4 - (C_2 - C_5)i](ad+bc)^{\frac{2n-1}{4}} + (a^2c + b)(C_3 - C_6)(ac)^{\frac{2n-1}{2}}}, \quad (5.43)$$

$$x_{2n+1} = \frac{[C_1 + C_4 - C_2 - C_5](ad+bc)^{\frac{n}{2}} + (C_3 + C_6)(ac)^n}{(a\sqrt{ad+bc} + b)[C_1 + C_4 - C_2 - C_5](ad+bc)^{\frac{n-1}{2}} + (a^2c + b)(C_3 + C_6)(ac)^{n-1}}, \quad (5.44)$$

$$y_{2n} = \frac{(a\sqrt{ad+bc} + b)[C_1 + C_4 - C_2 - C_5](ad+bc)^{\frac{n-2}{2}} + (a^2c + b)(C_3 + C_6)(ac)^{n-2}}{[C_1 + C_4 - C_2 - C_5](ad+bc)^{\frac{n}{2}} + (C_3 + C_6)(ac)^n}, \quad (5.45)$$

$$y_{2n+1} = \frac{(a\sqrt{ad+bc} + b)[C_1 - C_4 - (C_2 - C_5)i](ad+bc)^{\frac{2n-1}{4}} + (a^2c + b)(C_3 - C_6)(ac)^{\frac{2n-1}{2}}}{[C_1 - C_4 - (C_2 - C_5)i](ad+bc)^{\frac{2n+1}{4}} + (C_3 - C_6)(ac)^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (5.46)$$

olarak elde edilir.

- 1) Eğer $(C_3 + C_6) = (C_3 - C_6) = 0$ ise $C_3 = C_6 = 0$ olur. Böylece, $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ çözümü iki periyotludur.
- 2) Eğer $C_3 + C_6 \neq 0$ veya $C_3 - C_6 \neq 0$ ise $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ sistemin çözümü iki periyotlu bir çözüme yakınsar. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{1}{a\sqrt{ad+bc} + b}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \frac{\sqrt{ad+bc}}{a\sqrt{ad+bc} + b},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = \frac{a\sqrt{ad+bc} + b}{ad+bc}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = \frac{a\sqrt{ad+bc} + b}{\sqrt{ad+bc}},$$

olur.

Teorem 5.2.1.2. Eğer $\Delta < 0$ ve $ac(ad+bc)+bd \neq 0$ veya $ad+bc \leq (ac)^2$ ise (5.1)

sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ çözümü bir tek limit noktasına sahiptir.

İspat. İspat için (5.19)-(5.22) formüllerini kullanacağız. Bunun için $\rho = \max\{|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, eğer

$(C_j - C_{j+3})(C_j + C_{j+3}) \neq 0$, ($j=1, 2, 3$), ise $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n} \rightarrow \frac{\rho}{a\rho+b}, x_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho}{a\rho+b}, y_{2n} \rightarrow \frac{\rho}{c\rho+d}, y_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho}{c\rho+d},$$

olur. Gerçekten, genelliği bozmadan $|\rho_1| = \max\{|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|\}$ olmak üzere, (5.19)-(5.22) formüllerinin $n \rightarrow \infty$ iken limitleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= \frac{\rho_1^{\frac{2n-1}{2}}}{\rho_1^{\frac{2n-1}{2}}} \frac{C_1 - C_4 + (C_2 - C_5)(\rho_2/\rho_1)^{\frac{2n-1}{2}} + (C_3 - C_6)(\rho_3/\rho_1)^{\frac{2n-1}{2}}}{\frac{\rho_1(C_1 - C_4)}{c\rho_1 + d} + \frac{\rho_2(C_2 - C_5)}{c\rho_2 + d}(\rho_2/\rho_1)^{\frac{2n-1}{2}} + \frac{\rho_3(C_3 - C_6)}{c\rho_3 + d}(\rho_3/\rho_1)^{\frac{2n-1}{2}}} \\ &= \frac{c\rho_1 + d}{\rho_1^2} \\ &= \frac{\rho_1}{a\rho_1 + b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} &= \frac{\rho_1^n}{\rho_1^{n+1}} \frac{C_1 + C_4 + (C_2 + C_5)(\rho_2/\rho_1)^n + (C_3 + C_6)(\rho_3/\rho_1)^n}{\frac{\rho_1(C_1 + C_4)}{c\rho_1 + d} + \frac{\rho_2(C_2 + C_5)}{c\rho_2 + d}(\rho_2/\rho_1)^n + \frac{\rho_3(C_3 + C_6)}{c\rho_3 + d}(\rho_3/\rho_1)^n} \\ &= \frac{c\rho_1 + d}{\rho_1^2} \\ &= \frac{\rho_1}{a\rho_1 + b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} &= \frac{\rho_1^n}{\rho_1^n} \frac{\frac{\rho_1(C_1 + C_4)}{c\rho_1 + d} + \frac{\rho_2(C_2 + C_5)}{c\rho_2 + d}(\rho_2/\rho_1)^n + \frac{\rho_3(C_3 + C_6)}{c\rho_3 + d}(\rho_3/\rho_1)^n}{C_1 + C_4 + (C_2 + C_5)(\rho_2/\rho_1)^n + (C_3 + C_6)(\rho_3/\rho_1)^n} \\ &= \frac{\rho_1}{c\rho_1 + d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} &= \frac{\rho_1^{\frac{2n+1}{2}}}{\rho_1^{\frac{2n+1}{2}}} \frac{\frac{\rho_1(C_1 - C_4)}{c\rho_1 + d} + \frac{\rho_2(C_2 - C_5)}{c\rho_2 + d}(\rho_2/\rho_1)^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{\rho_3(C_3 - C_6)}{c\rho_3 + d}(\rho_3/\rho_1)^{\frac{2n+1}{2}}}{\rho_1^{\frac{2n+1}{2}} \left((C_1 - C_4) + (C_2 - C_5)(\rho_2/\rho_1)^{\frac{2n+1}{2}} + (C_3 - C_6)(\rho_3/\rho_1)^{\frac{2n+1}{2}} \right)} \\ &= \frac{\rho_1}{c\rho_1 + d} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Yine genelliği bozmadan $|\rho_1| = \max\{|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|\}$ ve $|\rho_2| > |\rho_3|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, eğer $C_1 - C_4 = 0$ ve $(C_2 - C_5)(C_3 - C_6) \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n} \rightarrow \frac{\rho_2}{a\rho_2 + b}, \quad y_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho_2}{c\rho_2 + d},$$

olur. Eğer $C_1 + C_4 = 0$ ve $(C_2 + C_5)(C_3 + C_6) \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho_2}{a\rho_2 + b}, \quad y_{2n} \rightarrow \frac{\rho_2}{c\rho_2 + d},$$

olur. Diğer durumlar benzer şekilde gösterilebilir.

5.2.2. $\Delta = 0$ durumu

Bu kısımda (5.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışını $\Delta = 0$ olması durumunda inceleyeceğiz. Bu kısım iki alt durumda incelenecektir.

Teorem 5.2.2.1. $\Delta = 0$ olsun. Eğer $ad + bc = -(ac)^2/3$ ve $bd = (ac)^3/27$ ise, (5.1) sisteminin her çözümü bir tek limit noktasına sahiptir.

İspat. (5.1) sisteminin bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ olsun. İstenen sonuç, (5.26)-(5.29) formüllerinden doğrudan limiti alınarak elde edilir. Yani, $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n} \rightarrow \frac{ac}{a^2c + 3b}, \quad x_{2n+1} \rightarrow \frac{ac}{a^2c + 3b}, \quad y_{2n} \rightarrow \frac{ac}{ac^2 + 3d}, \quad y_{2n+1} \rightarrow \frac{ac}{ac^2 + 3d}$$

olur.

Teorem 5.2.2.2. $\Delta = 0$ olsun. Eğer $ad + bc + (ac)^2/3 \neq 0$ veya $bd \neq (ac)^3/27$ ise, (5.1) sisteminin her çözümü bir tek limit noktasına sahiptir.

İspat. (5.1) sisteminin bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ olsun. İspat için (5.33)-(5.36) formüllerini kullanacağız. Öncelikle $r < \rho$ olduğunu kabul edelim. Eğer $C_1 - C_4 \neq 0$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n} \rightarrow \frac{\rho}{a\rho + b}, \quad y_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho}{c\rho + d}$$

olur. Eğer $C_1 + C_4 \neq 0$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n+1} \rightarrow \frac{\rho}{a\rho+b}, \quad y_{2n} \rightarrow \frac{\rho}{c\rho+d}$$

olur. Şimdi $r \geq \rho$ olduğunu kabul edelim. Eğer $C_2 - C_5 \neq 0$ ise, (5.33)-(5.36) formüllerinden $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n} \rightarrow \frac{r}{ar+b}, \quad y_{2n+1} \rightarrow \frac{r}{cr+d}$$

olur. Eğer $C_2 + C_5 \neq 0$ ise, (5.33)-(5.36) formüllerinden $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_{2n+1} \rightarrow \frac{r}{ar+b}, \quad y_{2n} \rightarrow \frac{r}{cr+d}$$

olur. Burada ρ ve r (5.14) ile verilen Q karakteristik denkleminin sıfırları olduğundan

$$\frac{a\rho+b}{\rho^2} = \frac{\rho}{c\rho+d}$$

ve

$$\frac{ar+b}{r^2} = \frac{r}{cr+d}$$

bağıntılarından yararlanıldı.

5.2.3. $\Delta > 0$ durumu

Bu kısımda, (5.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışını $\Delta > 0$ olması durumunda inceleyeceğiz.

Teorem 5.2.3.1. $\Delta > 0$ olsun. Eğer $|\rho| > r$ ise bu durumda, (5.1) sisteminin çözümleri, karakteristik denklemin ρ köküne yakınsar.

İspat. (5.1) sisteminin bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ olsun. (5.39)-(5.42) formüllerinden doğrudan limit alınarak, eğer $C_1 - C_4 \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho \left((C_1 - C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \left[(C_2 - C_5) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + (C_3 - C_6) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \right] \right)}{(a\rho + b)(C_1 - C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{2n-3}{2}} \left[(C_2 - C_5) \left(a \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) + (C_3 - C_6) \left(a \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) \right]} \\ &= \frac{\rho}{a\rho + b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a\rho + b)(C_1 - C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{2n-3}{2}} \left[(C_2 - C_5) \left(a \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) + (C_3 - C_6) \left(a \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) + b \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right) \right) \right]}{\rho^2 \left((C_1 - C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \left[(C_2 - C_5) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + (C_3 - C_6) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) \right] \right)} \\ &= \frac{a\rho + b}{\rho^2} = \frac{\rho}{c\rho + d} \end{aligned}$$

limitleri elde edilir. Eğer $C_1 + C_4 \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho \left((C_1 + C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \left[(C_2 + C_5) \cos(n\theta) + (C_3 + C_6) \sin(n\theta) \right] \right)}{(a\rho + b)(C_1 + C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{n-1} \left[(C_2 + C_5) \left(a \cos(n\theta) + b \cos((n-1)\theta) \right) + (C_3 + C_6) \left(a \sin(n\theta) + b \sin((n-1)\theta) \right) \right]} \\ &= \frac{\rho}{a\rho + b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a\rho + b)(C_1 + C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{n-2} \left[(C_2 + C_5) \left(a \cos((n-1)\theta) + b \cos((n-2)\theta) \right) + (C_3 + C_6) \left(a \sin((n-1)\theta) + b \sin((n-2)\theta) \right) \right]}{\rho^2 \left((C_1 + C_4) + \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \left[(C_2 + C_5) \cos(n\theta) + (C_3 + C_6) \sin(n\theta) \right] \right)} \\ &= \frac{a\rho + b}{\rho^2} = \frac{\rho}{c\rho + d} \end{aligned}$$

limitleri elde edilir.

Teorem 5.2.3.2. $\Delta > 0$ olsun. Eğer $|\rho| \leq r$ ise (5.1) sisteminin her çözümü ya periyodiktir ya periyodik olmayacak şekilde salınımlıdır ya da kapalı bir aralıkta yoğundur.

İspat. $|\rho| \leq r$ olsun. Ayrıca

$$C_2 - C_5 = A \sin \omega_1, \quad C_3 - C_6 = A \cos \omega_1, \quad A = \sqrt{(C_2 - C_5)^2 + (C_3 - C_6)^2}$$

ve

$$C_2 + C_5 = B \sin \omega_2, \quad C_3 + C_6 = B \cos \omega_2, \quad B = \sqrt{(C_2 + C_5)^2 + (C_3 + C_6)^2}$$

olsun. Burada ω_1 , ω_2 , A ve B keyfi sabitler olup, C_i ($i = 2, 3, 5, 6$) keyfi sabitlerinin yerini tutar. Bu durumda (5.39)-(5.42) formüllerinden

$$x_{2n} = \frac{r(C_1 - C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{2n-1}{2}} + rA \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta + \omega_1\right)}{(a\rho + b)(C_1 - C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{2n-3}{2}} + arA \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta + \omega_1\right) + bA \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta + \omega_1\right)} \quad (5.47)$$

$$y_{2n+1} = \frac{(a\rho + b)(C_1 - C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{2n-3}{2}} + arA \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta + \omega_1\right) + bA \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta + \omega_1\right)}{r^2(C_1 - C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{2n+1}{2}} + r^2A \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta + \omega_1\right)} \quad (5.48)$$

formülleri, (5.40)-(5.41) formüllerinden

$$x_{2n+1} = \frac{r(C_1 + C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + rB \sin(n\theta + \omega_2)}{(a\rho + b)(C_1 + C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} + arB \sin(n\theta + \omega_2) + bB \sin((n-1)\theta + \omega_2)} \quad (5.49)$$

$$y_{2n} = \frac{(a\rho + b)(C_1 + C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-2} + arB \sin((n-1)\theta + \omega_2) + bB \sin((n-2)\theta + \omega_2)}{r^2 (C_1 + C_4) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + r^2 B \sin(n\theta + \omega_2)} \quad (5.50)$$

formülleri elde edilir. Burada bazı durumlar ortaya çıkar.

1) $\theta \in \{x : x = (p/q)\pi, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, (p,q) = 1\}$ olsun. Bu durumda θ , π nin bir rasyonel katıdır.

a) $C_1 - C_4 = 0$ ise (5.47) ve (5.48) formüllerinden görülür ki $\{x_{2n}\}$ ve $\{y_{2n+1}\}$ dizileri q periyotludur,

b) $C_1 + C_4 = 0$ ise (5.49) ve (5.50) formüllerinden görülür ki $\{x_{2n+1}\}$ ve $\{y_{2n}\}$ dizileri q periyotludur,

c) $C_1 - C_4 \neq 0$, $|\rho| = r$ ise (5.47) ve (5.48) formüllerinden görülür ki $\{x_{2n}\}$ ve $\{y_{2n+1}\}$ dizileri p çift olduğunda q periyotludur, p tek olduğunda $2q$ periyotludur,

d) $C_1 + C_4 \neq 0$, $|\rho| = r$ ise (5.49) ve (5.50) formüllerinden görülür ki $\{x_{2n+1}\}$ ve $\{y_{2n}\}$ dizileri p çift olduğunda q periyotludur, p tek olduğunda $2q$ periyotludur,

e) $(C_1 - C_4)(C_1 + C_4) \neq 0$ ve $|\rho| < r$ ise (5.47)-(5.50) formüllerinden görülür ki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri periyodik olmayacak şekilde sınımlıdır. Daha somut olarak, $0 \leq t_i \leq q-1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2nq+t_1} = \begin{cases} \frac{r \sin\left(\frac{2t_1-1}{2}\theta + \omega_1\right)}{ar \sin\left(\frac{2t_1-1}{2}\theta + \omega_1\right) + b \sin\left(\frac{2t_1-3}{2}\theta + \omega_1\right)}, & ar \sin\left(\frac{2t_1-1}{2}\theta + \omega_1\right) + b \sin\left(\frac{2t_1-3}{2}\theta + \omega_1\right) \neq 0, \\ \pm \infty, & ar \sin\left(\frac{2t_1-1}{2}\theta + \omega_1\right) + b \sin\left(\frac{2t_1-3}{2}\theta + \omega_1\right) = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2nq+t_2+1} = \begin{cases} \frac{r \sin(t_2\theta + \omega_2)}{ar \sin(t_2\theta + \omega_2) + b \sin((t_2-1)\theta + \omega_2)}, & ar \sin(t_2\theta + \omega_2) + b \sin((t_2-1)\theta + \omega_2) \neq 0, \\ \pm \infty, & ar \sin(t_2\theta + \omega_2) + b \sin((t_2-1)\theta + \omega_2) = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2nq+t_3} = \begin{cases} \frac{ar \sin((t_3-1)\theta + \omega_2) + b \sin((t_3-2)\theta + \omega_2)}{r^2 \sin(t_3\theta + \omega_2)}, & \sin(t_3\theta + \omega_2) \neq 0, \\ \pm \infty, & \sin(t_3\theta + \omega_2) = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2nq+t_4+1} = \begin{cases} \frac{ar \sin\left(\frac{2t_4-1}{2}\theta + \omega_1\right) + b \sin\left(\frac{2t_4-3}{2}\theta + \omega_1\right)}{r^2 \sin\left(\frac{2t_4+1}{2}\theta + \omega_1\right)}, & \sin\left(\frac{2t_4+1}{2}\theta + \omega_1\right) \neq 0, \\ \pm \infty, & \sin\left(\frac{2t_4+1}{2}\theta + \omega_1\right) = 0. \end{cases}$$

Bu demektir ki çözüm q periyotlu ya da $2q$ periyotlu bir çözüme yakınsar.

2) $\theta \notin \{x : x = (p/q)\pi, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, (p,q)=1\}$ olsun. Bu durumda θ , π nin rasyonel olmayan bir katıdır. Kronecker Teoremi'nden ve θ 'nin bir irrasyonel sayı olduğundan $k \in \mathbb{N}$, $i=1,2$ ve $\theta \in (0,\pi)$ için $k\theta + \omega_j \in (0,+\infty)$ olur. Böylece $0 < \sin(k\theta + \omega_j) < 1$ ve $0 < \sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta + \omega_j\right) < 1$ olur. Yani $\left\{\sin(k\theta + \omega_j)\right\}_k$ ve $\left\{\sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta + \omega_j\right)\right\}_k$ dizileri $(0,1)$ aralığında yoğundur. Bu yüzden eğer $|\rho| < r$ ise (5.47)-(5.50) formüllerinden görülür ki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri reel sayılar kümesinde yoğundur.

$|\rho| = r$ olsun. Bu durumda eğer $(C_1 - C_4)^2 > A^2$ ise $\{x_{2n}\}$ ve $\{y_{2n+1}\}$ dizileri kapalı bir aralıkta yoğundur. Eğer $(C_1 + C_4)^2 > B^2$ ise $\{x_{2n+1}\}$ ve $\{y_{2n}\}$ dizileri kapalı bir aralıkta yoğundur. Yani bu dört alt dizi sınırlıdır. Fakat monoton olmadıkları için tek bir limit noktaları yoktur. Bu da çözümün kapalı bir aralıkta yoğun olduğunu, yani bu kapalı aralığın her noktasının çözüm için bir limit noktası olduğunu gösterir.

Eğer $(C_1 - C_4)^2 = A^2$ ise (5.47)-(5.48) formüllerinden

$$x_{2n} = \frac{r \left(1 + \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta + \omega_1\right)\right)}{ar \left(1 + \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta + \omega_1\right)\right) + b \left(1 + \sin\left(\frac{2n-3}{2}\theta + \omega_1\right)\right)},$$

$$y_{2n+1} = \frac{ar \left(1 + \sin \left(\frac{2n-1}{2} \theta + \omega_1 \right) \right) + b \left(1 + \sin \left(\frac{2n-3}{2} \theta + \omega_1 \right) \right)}{r^2 \left(1 + \sin \left(\frac{2n+1}{2} \theta + \omega_1 \right) \right)}$$

ifadelerini, eğer $(C_1 + C_4)^2 = B^2$ ise (5.49)-(5.50) formüllerinden

$$x_{2n+1} = \frac{r \left(1 + \sin(n\theta + \omega_2) \right)}{ar \left(1 + \sin(n\theta + \omega_2) \right) + b \left(1 + \sin((n-1)\theta + \omega_2) \right)},$$

$$y_{2n} = \frac{ar \left(1 + \sin((n-1)\theta + \omega_2) \right) + b \left(1 + \sin((n-2)\theta + \omega_2) \right)}{r^2 \left(1 + \sin(n\theta + \omega_2) \right)}$$

ifadelerini elde ederiz. Açıkça eğer bu ifadelerin paydaları sıfır değilse $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri $(0, +\infty)$ aralığında yoğundur.

Eğer $(C_1 - C_4)^2 < A^2$ ise yeterince büyük n ler için $\{x_{2n}\}$ ve $\{y_{2n+1}\}$ dizileri \mathbb{R} de yoğundur.

Eğer $(C_1 + C_4)^2 < B^2$ ise yeterince büyük n ler için $\{x_{2n+1}\}$ ve $\{y_{2n}\}$ dizileri \mathbb{R} de yoğundur.

Uyarı 5.2.3.1. $|\rho| > r$ olduğu durumları belirlemek için Lemma 4.3.3.3. (5.14) kübik denkleminde uygulanmalıdır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin çözülebilirliği ve çözümlerinin davranışlarının incelenmesinden hareketle ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada, x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} başlangıç şartları ve a, b, c, d parametreleri reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + by_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{c + dx_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemi ele alındı. Bazı değişken değiştirmeler kullanılarak ele alınan sistem lineer bir sisteme dönüştürülüp çözülebilir olduğu gösterildi. Ayrıca, elde edilen genel çözüm yardımıyla çözümlerin davranışı incelendi.

Yukarıdaki sistemde a, b, c, d katsayıları, elemanları reel sayılar olan $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ periyodik dizileri olarak alınıp, ortaya çıkan fark denklem sisteminin çözülebilirliği araştırılabilir. Elde edilen genel çözüm yardımıyla çözümlerin asimptotik davranışları araştırılabilir. Ayrıca, daha yüksek mertebeden çözülebilir sistemlerin varlığı araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

- Abo-Zeid, R., 2019, Behavior of solutions of a second order rational difference equation, *Mathematica Moravica*, 23(1), 11-25.
- Aboutaleb, M. T., El-Sayed, M. A., Hamza A. E., 2001. Stability of the recursive Sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n) / (\gamma + x_{n-1})$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 261: 126-133.
- Abu-Saris, R. M., DeVault, R., 2003. Global stability of $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics Letters*, 16(2): 173-178.
- Aloqeili, M., 2006a, Dynamics of a rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 176, 768-774.
- Aloqeili, M., 2006b, Dynamics of a k th order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1328-1335.
- Amleh, A. M., Grove E. A., Ladas, G. 1999. On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1} / x_n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233: 790-798.
- Amleh, A. M., Kirk, V. and Ladas, G. (2001). On the dynamics of $x_{n+1} = (a - bx_{n-1}) / (A + Bx_{n-2})$, *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, 5, 1-15.
- Anisimova, A. and Bula, I., 2014, Some problems of second-order rational difference equations with quadratic terms, *International Journal of Difference Equations*, 9(1), 11-21.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, Fark denklemleri, *Gazi Kitabevi*, Ankara.
- Berg, L., and Stević, S. (2011). On some systems of difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(5), 1713-1718.
- Camouzis, E., Ladas, G., Rodrigues, I. W. and Northshield, S., 1994, The rational recursive sequence, *Computers & Mathematics with Applications*, 28(1-3), 37-43.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Çatal, S., 2004. “Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü”, *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1): 129-138.
- Çınar, C., 2004a, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1} / (1 + x_n x_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 150(1), 21-24.

Çinar, C., 2004b, On the positive solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = ax_{n-1} / (1 + bx_n x_{n-1}), \text{ Applied Mathematics and Computation, 156(2), 587-590.}$$

Çinar, C., 2004c, On the positive solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = x_{n-1} / (1 + ax_n x_{n-1}), \text{ Applied Mathematics and Computation, 158(3), 809-812.}$$

Dehghan, M., Mazrooei-Sebdani, R. and Sedaghat, H., 2011, Global behavior of the riccati difference equation of order two, *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(04), 467-477.

DeVault R., Kosmala, R., Ladas, G. and Schultz S. W., 2001, Global Behavior of $y_{n+1} = (p + y_{n-k}) / (qy_n + y_{n-k})$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47: 4743-4751.

Elabbasy, E. M., and Elsayed, E. M., 2009, Dynamics of a rational difference equation, *Chinese Annals of Mathematics-Series B*, 30(2), 187-198.

Elaydi, S., 2005, An introduction to difference equations, 3rd ed., *Springer-Verlag*, New York.

El-Dessoky, M. M., 2016, Solution for rational systems of difference equations of order three, *Mathematics*, 4, 53, 1-12.

El-Metwally, H., 2013, Solutions Form for Some Rational Systems of Difference Equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 903593, 10 pages.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S. 2003. On the recursive Sequence $x_{n+1} = -\alpha x_{n-1} / (\beta \pm x_n)$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 145, 747-753.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M., Mousa M., S., 2004. On asimptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k} / x_n$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 163-167.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M. 2005. The dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha x_{n-1} / (\beta + \gamma x_{n-2}^p)$, *Applied Mathematics Letters*, 18, 1013-1018.

Elsayed, E. M., 2008a, On the solution of recursive sequence of order two, *Fasciculi Mathematici*, No. 40, 6-13.

Elsayed, E. M., 2008b, Qualitive behavior of a rational recursive sequence, *Indagationes Mathematica.*, 19(2), 189-201.

- Elsayed, E. M. and Ahmed, A. M., 2016a, Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1026-1038.
- Elsayed, E. M. and Alghamdi, A., 2016b, The form of the solutions of nonlinear difference equations systems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(5), 3179-3196.
- Elsayed, E. M., Alotaibi, A. and Almaylubi, A. H., 2017, On a solutions of fourth order rational systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 7(22), 1298-1308.
- Ersel, H., 1981. İktisatçılar için Matematik, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara; 435-459.
- Fan, Y., Wang, L., Li, W., 2004. Global behavior of a higher order nonlinear difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 299(1), 113-126.
- Gibbons, C., Kulenovic, M. and Ladas, G., 2000. On the recursive sequence $y_{n+1} = (\alpha + \beta y_{n-1}) / (\gamma + y_n)$, *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, 4 (2), 1-11.
- Goldberg, S., 1960. Introduction to difference equations, John Wiley & Sons, New York.
- Grove, E. A., Ladas, G., McGrath, L. C. and Teixeria, C. T., 2001, Existence and behavior of solutions of a rational system, *Communication Applied Nonlinear Anal.* 3(1), 1-25.
- He, W. S., and Li W. T., 2004. Attractivity in a nonlinear delay difference equation, *Applied Mathematics E-Notes*, 4, 48-53.
- Huckfeldt, R. R., Kohfeld C. W., and Likens T. W., 1982. Dynamic Modeling: An Introduction, Sage Publications Inc., 27,10-44., California.
- Kelly W., 2003. "Theory of difference equations numerical methods and applications, 2nd ed., by V. Lakshmikantham and Donato Trigiante, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, "Bulletin (New Series) of the american mathematical society, 40(2): 259-262.
- Khastan, A. and Alijani, Z., 2019, On the new solutions to the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B/x_n$, *Fuzzy Sets and Systems*, 358, 64-83.
- Kosmala, W. A., Kulenovic M. R. S., Ladas, G., Teixeria, C. T., 2000. On the recursive sequence $y_{n+1} = (p + y_{n-1}) / (qy_n + y_{n-1})$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251: 571-586.

Kulenovic, M. R. S., and Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, <http://hypatia.math.uri.edu/~kulenm/diffequaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm>.

Kurbanli, A. S., 2011, On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}$, $y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}$, $z_{n+1} = \frac{1}{y_n z_n}$, *Advances in Difference Equations*, 2011(1), 40.

Kurbanli, A. S., Çinar, C. and Yalçinkaya, I., 2011, On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}$, $y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$, *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5-6), 1261-1267.

Kurtulan S., Bir A., and Kayral M., 1995. 3. Ulaştırma Kongresi: Elektrikli bir otomobilin modellenmesi ve bilgisayarda simülasyon TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası, Maya Basım İstanbul; 145-153.

Levy, H., and Lessman, F. Finite difference equations. 1961.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J. 1998, On a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 219, 415-426.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2010, Asymptotic behavior of the solutions of a class of rational difference equations, *International Journal of Difference Equations*, 5(2), 233-249.

Sedaghat, H., 2009, Global behaviours of rational difference equations of order two and three with quadratic terms, *Journal of Difference Equations and Applications*, 15(3), 215-224.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer fark denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.

Spiegel, M. R., 1971, Theory and problems of calculus of finite differences and difference equations, Schaum's Outline Series, *McGraw-Hill Inc.*, New York.

Stević, S., 2002, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-1}/g(x_n)$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3), 405-414.

Stević, S., Iricanin, B., Kosmala, W. and Smarda, Z., 2018, Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second order, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, (95), 1-18.

Şahinkaya, A. F., Yalçinkaya, İ. and Tollu, D. T., 2020, A solvable system of nonlinear difference equations, *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(1), 10-20.

- Tasdemir, E. and Soykan, Y., 2016, On the periodicities of the difference equation $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + \alpha$, *Karaelmas Science and Engineering Journal*, 6(2), 329-333.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2013, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 174.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2017, On global behavior of a system of nonlinear difference equations of order two, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 27(3), 373-383.
- Tollu, D. T. and Yalçinkaya, I., 2018, Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 1-16.
- Yan X. X., Li W. T., and Sun H. R., 2002. Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation, *Applied Mathematics E-notes*, 2(1607-2510), 51-58.
- Yan X. X. and Li W. T., 2003. Global attractivity in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 145: 1-12.
- Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4(12), 15-20.
- Yılmazyıldırım, B. and Tollu D. T., 2018, Explicit solutions of a three-dimensional system of nonlinear difference equations, *Hittite Journal of Science and Engineering*, 5 (2) 119-123.
- Zeng, X. Y., Shi, B. and Zhang, D. C., 2005, Stability of solutions for the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n) / (\gamma + g(x_{n-k}))$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176(2), 283-291.
- Weisstein E., 1999. Math World, A Wolfram Web Resource, CRC Pres LLC, <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>.