



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**ÜÇ BOYUTLU LİNEER OLMAYAN BİR
FARK DENKLEM SİSTEMİNİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ**

Fatih Furkan GÜLEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

05-2026
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatih Furkan GÜLEN tarafından hazırlanan “Üç Boyutlu Lineer Olmayan Bir Fark Denklem Sisteminin Çözülebilirliği” adlı tez çalışması 15/05/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

.....

Danışman

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

.....

Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fatih Furkan GÜLEN

Tarih:15.05.2026

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU LİNEER OLMAYAN BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Fatih Furkan GÜLEN

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2026, 42 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, fark denklemlerinin önemi hakkında genel bilgilere yer verilmektedir.

İkinci bölümde, çeşitli tipteki fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin çözümleri ile ilgili yapılmış çalışmalar kapsamında bir literatür araştırması sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremlere yer verilmekte ve bilineer fark denkleminin çözümü ele alınmaktadır.

Dördüncü bölümde, çalışmanın ana kısmını oluşturan

$$x_{n+1} = x_n \frac{a_1 y_n + b_1 y_{n-1}}{c_1 y_n + d_1 y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = y_n \frac{a_2 z_n + b_2 z_{n-1}}{c_2 z_n + d_2 z_{n-1}}, \quad z_{n+1} = z_n \frac{a_3 x_n + b_3 x_{n-1}}{c_3 x_n + d_3 x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliği ele alınmakta ve çözüm için formüller verilmektedir.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde ele alınan fark denklem sistemi ile ilgili bazı sonuçlar ve öneriler sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bilineer fark denklemi, çözülebilirlik, fark denklem sistemi, fark denklemi, lineer fark denklemi, periyodik çözüm.

ABSTRACT

MS THESIS

SOLVABILITY OF A THREE-DIMENSIONAL SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Fatih Furkan GÜLEN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc.Prof.Dr.Durhasan Turgut TOLLU

2026, 42 Pages

Jury

Assoc. Prof. Durhasan Turgut TOLLU

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter provides general information on the importance of difference equations.

The second chapter presents a comprehensive literature review on the solutions of various types of difference equations and systems of difference equations.

In the third chapter, fundamental definitions and theorems concerning difference equations are introduced, and the solution of the bilinear difference equation is analyzed.

In the fourth section, which constitutes the main part of the study, the solvability of the difference equation system

$$x_{n+1} = x_n \frac{a_1 y_n + b_1 y_{n-1}}{c_1 y_n + d_1 y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = y_n \frac{a_2 z_n + b_2 z_{n-1}}{c_2 z_n + d_2 z_{n-1}}, \quad z_{n+1} = z_n \frac{a_3 x_n + b_3 x_{n-1}}{c_3 x_n + d_3 x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

was discussed, and the formulas of the solution were given.

In the fifth chapter, the results and recommendations related to the difference equation system discussed in the fourth chapter are presented.

Keywords: Bilinear difference equation, linear difference equation, periodic solution, solvability, system of difference equations, difference equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen, çalışma sürecinde karşılaştığım zorluklarda desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak akademik bakış açımı geliştirmeme katkı sağlayan ve tezimi sabır ile özenle yönlendiren kıymetli hocam Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU'ya; yaşamımın her döneminde yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini daima hissettiğim değerli aileme en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Fatih Furkan GÜLEN
KONYA-2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. ÖN BİLGİLER.....	10
3.1. Bazı Tanımlar ve Teoremler	10
3.2. Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Çözümleri	14
3.2.1. Birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin çözümleri	14
3.2.2. Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinin çözümleri	16
3.3. Bilineer Fark Denklemi ve Çözümü	17
4. ÜÇ BOYUTLU BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	21
4.1. $(a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)(a_3d_3 - b_3c_3) = 0$ Özel Durumu	21
4.2. Genel Durum.....	23
4.3. $ A_1 + D_1 + A_2 + D_2 + A_3 + D_3 = 0$ Özel Durumu.....	33
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	38
5.1 Sonuçlar	38
5.2 Öneriler	38
KAYNAKLAR	39
EKLER	42

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
Δ	:	İleri Fark Operatörü
Δ^{-1}	:	Ters Fark Operatörü
E	:	Kaydırma Operatörü
h	:	Fark Aralığı
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	En Az Bir
$\in$	:	Elemandır
$<$	:	Küçük
$>$	:	Büyük
$\leq$	:	Küçük Eşit
$\geq$	:	Büyük Eşit
$\Rightarrow$	:	Gerek Şart
$\Leftarrow$	:	Yeter Şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve Yeter Şart
$\sum$	:	Belirsiz Toplam

1. GİRİŞ

Merak duygusu, insanı bilinmeyi anlamaya yönlendirirken, ihtiyaçlar ise onu çözümler üretmeye ve yaşamını kolaylaştırmaya itmiştir. Bu iki temel unsur, insanoğlunun doğayı, evreni ve kendi varlığını daha iyi kavrayabilmesini sağlamış, bilimin ve bilim dallarının ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Tarihsel süreçte bilim dalları arasında matematiğin önemi büyüktür. Matematik, ilk olarak sayma ve ölçme gibi temel ihtiyaçlar doğrultusunda şekillendiği hâlde; daha sonra karmaşık yapıların analiz edilmesine yönelik analitik araçlar geliştirilmiştir. Günümüzde matematik hem teorik hem de uygulamalı düzeyde; mühendislik, biyoloji, tıp, astronomi ve ekonomi gibi pek çok alanda yeni yöntem ve modellerin oluşturulmasında kullanılmaktadır.

Matematiğin önemli bir alt dalı olan uygulamalı matematik, matematiğin gerçek yaşam problemlerine uygulanmasından ortaya çıkan bir disiplindir. Bu disiplinde araç olarak genellikle matematiksel denklemler kullanılır. Problemin türüne göre adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, fark denklemleri vb. denklemler kullanılabilir. Örneğin, eğer problem sürekli değişkenlerle modelleniyorsa diferansiyel denklemler, kesikli değişkenlerle modelleniyorsa fark denklemleri kullanılır. Özellikle, bağımlı değişkenin önceki değerlerinin sonraki değerlerini etkilediği durumlarda fark denklemleri oldukça güçlü araçlar olarak karşımıza çıkar. Bu durumun en bilinen örneklerinden birisi Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı olan

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1)$$

fark denklemdir. Fibonacci dizisi, her bir elemanın kendisinden önce gelen iki elemanın toplamı olduğu bir dizidir. Bu dizinin elemanları olan sayılara ise Fibonacci sayıları denir. Fibonacci sayıları (1.1) denkleminin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ile başlaması sonucu ortaya çıkar (Koshy 2001).

Diğer önemli bir örneğe lojistik fark denklemi olarak bilinen

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (1.2)$$

fark denklemdir. Lojistik fark denklemi; ekonomi, mühendislik, biyoloji gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkar. Nüfus dinamiği ve sistemleri modellemelerinde sıklıkla kullanılır. (1.2) denklemindeki x_n değişkeni, n . zaman aralığındaki nüfus büyüklüğünü veya sistemin durumunu ifade eder. μ ise artış oranını belirten bir parametredir. Lojistik fark

denklemleri, birçok alanda ortaya çıktığı için üzerinde birçok araştırma yürütülmüştür (Elaydi 1999).

Fark denklemleri birçok alanda kullanılabildiği için sadece matematikçilerin değil, diğer bilim dallarındaki araştırmacıların da çalışma alanı haline gelmiştir. Literatürde bulunan çözüme kavuşmamış problemler sayesinde fark denklemleri güncelliğini koruyacak ve bilim insanlarının kullandığı önemli araçlardan birisi olacaktır.

Bu çalışmanın ana yapısı şu şekildedir. İkinci bölümde, konuya ilişkin mevcut literatür ve temel kaynaklar kapsamlı bir şekilde incelenmiş; Üçüncü bölümde, fark denklemleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilmiş, bilinear fark denklemi (Riccati tipi fark denklemi) ile ilgili bazı bilgiler verilmiş ve bu denklemin çözümü ile ilgili bilgiler sunulmuştur. Dördüncü bölüm, tezin odak noktasını oluşturan üçüncü mertebeden bir fark denklem sisteminin çözümüne ayrılmıştır; bu kısımda incelenen denklemin çözümü ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Araştırmanın amacı

Bu araştırmanın temel amacı, belirli bir fark denklem sisteminin çözüm davranışını ortaya koymak ve özellikle bilinear fark denklemi çerçevesinde bu sistemin çözümünü sistematik biçimde elde etmektir. Fark denklemlerinin sürekli olmayan sistemlerde yaygın kullanım alanına sahip olması, bu sistemlerin davranışlarının ayrıntılı olarak incelenmesini gerekli kılmaktadır. Bu çalışma kapsamında, önce fark denklemlerine ilişkin temel kavramlar ve çözüm yöntemleri ele alınmış, ardından literatürde önemli bir yere sahip olan bilinear fark denklemleri üzerinde durulmuştur. Son olarak, çalışmanın odağını oluşturan özel bir fark denklem sisteminin çözümü bazı özel durumlar göz önünde bulundurularak sistemin çözümü incelenmiştir. Böylece hem teorik hem de uygulamaya dönük yönleriyle fark denklemlerinin analizi için bütüncül bir yaklaşım sunulması amaçlanmıştır.

Araştırmanın önemi

Bu çalışmanın önemi, fark denklemlerinin hem teorik hem de pratik yönlerine katkı sağlayarak belirli bir fark denklem sisteminin çözümünü kapsamlı biçimde ortaya koymasıdır. Araştırma, ilgili literatürde yer alan yöntemleri bütüncül bir bakış açısıyla bir araya getirirken, bilinear tipi fark denklemlerine ilişkin çözüm tekniklerinin uygulanabilirliğini örneklendirmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Elsayed ve arkadaşları (2014), yaptıkları çalışmada a, b, c, d, e parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{b + cx_{n-1}}{d + ex_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin global yakınsaklığını, sınırlılığını ve periyodik çözümlerinin varlığını incelemişlerdir.

El-Metwally ve arkadaşları (2001), yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden fark denkleminin global kararlılığını, sınırlılık yapısını ve pozitif çözümlerinin periyodik karakterini incelemişlerdir. Yazarlar bu denklemin bir nüfus modeli olarak düşünülebileceğini belirtmişlerdir.

Ozturk ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada α, β, γ pozitif sayılar ve başlangıç koşulları y_{-1}, y_0 negatif olmayan keyfî reel sayılar olmak üzere,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin yakınsaklığını, sınırlılığını ve denklemin periyodik karakterini incelemişlerdir.

Bozkurt (2013), yaptığı çalışmada

$$\gamma_{n+1} = \frac{\alpha \cdot e^{-y_n} + \beta \cdot e^{-y_{n-1}}}{\gamma + \alpha \cdot y_n + \beta \cdot y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin lokal ve global davranışını ve kararlılık karakterini katsayıların durumlarına bağlı olarak incelemiş ve pozitif çözümlerin yarı döngüsü ile ilgili durumlardan bahsetmiştir.

Elsayed (2009), yaptığı çalışmada a, b, c, d pozitif sabitler olup x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{bx_n^2}{cx_n + dx_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Stević (2004), yaptığı çalışmada x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin çözülebilirliği ve çözümlerinin davranışları ile ilgili bazı teorik açıklamalar vermiştir.

Stević (2011), yaptığı çalışmada, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ve $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ iki periyotlu periyodik diziler ve x_{-2}, x_{-1} başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini ele almıştır ve bu fark denkleminin çözülebilir olduğunu gösterip elde edilen bazı formüllerin çözümlerin davranışlarını belirlemedeki uygulamalarına yer vermiştir.

Stević (2013), yaptığı çalışmasında α ve β parametreleri ve x_0, y_0 başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{\alpha}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta}{x_n} + \frac{1}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminden elde ettiği formülleri kullanarak sistemin her çözümünün iki periyotlu çözüme yakınsadığını göstermiştir.

Mcgrath ve Teixeira (2006), yaptıkları çalışmada, a, b, c, d parametreleri ile x_{-1} ve x_0 başlangıç değerleri keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1} + bx_n}{cx_{n-1} + dx_n} x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerinin varlığını ve davranışını incelemişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2017), yaptıkları çalışmada

$$y_{n+1} = \frac{ay_{n-1}}{by_n y_{n-1} + cy_{n-1} y_{n-2} + d}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir. Burada a, b, c, d katsayıları pozitif reel sayılar ve y_{-2}, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılardır. Yazarlar denklemin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, çözümlerin periyodikliğini, sınırlılığını ve salınımını incelemişlerdir.

Sedaghat (2009), yaptığı çalışmada

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{x_n x_{n-1} + b}, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-1}}{x_n + bx_{n-2}}, \quad a, b > 0$$

fark denklemlerinin çözümlerinin global davranışlarına dair sonuçlar elde etmiştir. Bu rasyonel fark denklemlerinin yasaklı kümesini açıkça belirtilmiş ve yasaklı kümelerin dışındaki başlangıç değerleri için çözümlerin 0 veya pozitif bir sabit noktaya yakınsayabileceğini ve çözümlerin 2 periyotlu ya da sınırsız olabileceğini göstermiştir.

Abo-Zeid (2014), yaptığı çalışmada A, B negatif olmayan reel sayılar, $C, D > 0$ ve l, k negatif olmayan tam sayılar, $l \leq k$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D \prod_{i=l}^k x_{n-2i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve periyodik karakterini incelemiştir.

Raouf (2012), yaptığı çalışmada $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, birinci mertebeden Riccati tipi fark denkleminin bir genelleştirmesi olan

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını ve kararlılık özelliklerini incelemiştir.

Amleh ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada negatif olmayan parametreler ve paydayı her zaman pozitif yapan başlangıç koşulları için,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n x_{n-1} + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n x_{n-1} Cx_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denkleminin global kararlılık karakterini, periyodikliğini ve çözümlerin negatif olmayan parametreler ile negatif olmayan başlangıç koşullarına bağlılığını incelemişler.

Stević ve arkadaşları (2018), yaptıkları çalışmada a, b, c parametreleri, x_{-1}, x_0 başlangıç değerleri kompleks sayılar ve $c \neq 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden fark denkleminin çözümünün üçüncü mertebeden lineer homojen bir fark denkleminin karakteristik denkleminin kökleri ile temsil edilebileceğini göstermiştir.

Brand (1955), yaptığı çalışmada

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

Riccati tipi fark denkleminin çözümünü karakteristik denkleminin köklerine göre formüle edip çözümlerin parametrelere göre davranışını incelemiştir.

Tollu ve Yazlık (2024), yaptıkları çalışmada $a \in [0, \infty)$ ve x_{-2}, x_{-1} başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2} - a}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden fark denkleminin kapalı biçimde çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Burada çözümleri Fibonacci sayıları ile ilişkilendirerek ayrıntılı olarak analiz etmişlerdir.

Stević ve Tollu (2023), yaptıkları çalışmada $n \in \mathbb{N}_0$, k ve j iki doğal sayı, x_{-j}, y_{-j} , $1 \leq k+l$, başlangıç değerleri ve $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametreleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = x_{n-k} \frac{ay_{n-1} + by_{n-(k+l)}}{cy_{n-1} + dy_{n-(k+l)}}, \quad y_n = y_{n-k} \frac{\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-(k+l)}}{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-(k+l)}}$$

fark denklem sisteminin genel çözümünü ayrıntılı olarak elde edebilmek için yeni bir yöntem sunarak çözülebilir olduğunu göstermişlerdir.

Şahinkaya ve arkadaşları (2021), yaptıkları çalışmada $a \in [0, \infty)$ ve x_0, y_0, z_0 başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu göstermişler ve buna ek olarak iyi tanımlı çözümlerin asimptotik davranışını incelemiştir.

Kara ve arkadaşları (2020), yaptıkları çalışmada $n \in \mathbb{N}_0$, k ve l pozitif tam sayılar, $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametreleri ve x_{-j}, y_{-j} , $j = \overline{1, k+l}$, başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = ay_{n-k} + \frac{dy_{n-k}x_{n-(k+l)}}{bx_{n-(k+l)} + cy_{n-l}}, \quad y_n = \alpha x_{n-k} + \frac{\delta x_{n-k}y_{n-(k+l)}}{\beta y_{n-(k+l)} + \gamma x_{n-l}}$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliğini ve çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir.

Tollu ve arkadaşları (2021), yaptıkları çalışmada a, b parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç değerleri keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözümleri için formüller vermişlerdir. Bunun için pratik bir yöntem vererek sistemin genel çözümünü elde etmişler ve sistemin iyi tanımlı çözümlerini karakterize etmişlerdir. Son olarak iyi tanımlanmış çözümlerin davranışlarını incelemişlerdir.

Yalçinkaya ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada b, c, d, e ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç değerleri pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{by_n + c}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{dx_n + e}{y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözümünün davranışlarını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011), yaptıkları çalışmada $y_0, y_{-1}, x_0, x_{-1} \in [0, +\infty)$ başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemişlerdir.

Kara ve Yazlık (2019), yaptıkları çalışmada $k, l \in \mathbb{N}$, $x_{-i}, y_{-i}, = \overline{1, l+1}$ ve $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-k} y_{n-k-l}}{y_{n-l} (a_n + b_n x_{n-k} y_{n-k-l})}, \quad y_n = \frac{y_{n-k} x_{n-k-l}}{x_{n-l} (\alpha_n + \beta_n y_{n-k} x_{n-k-l})}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını ve çözümün periyodikliğini incelemişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2013), yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemiş ve çözümlerin padovan sayıları ile ilişkili olduğunu açıklamışlardır.

Karatas ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada başlangıç değerleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2}x_{n-5}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin pozitif çözümlerini ve çekimliliğini incelemişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2013), yaptıkları çalışmada, birbiriyle ilişkili olan

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$$

ve

$$y_{n+1} = \frac{1}{-1 + y_n}$$

Riccati tipi fark denklemlerinin genel çözümlerini verip bu çözümlerin Fibonacci sayılarıyla temsil edilebildiğini göstermişler ve çözümlerin limit durumundaki davranışlarını incelemişlerdir.

Halim ve arkadaşları (2015), yaptıkları çalışmada x_0, x_{-1} başlangıç değerleri ve a, b, c, A, B, C parametreleri pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k + b \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + B \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k}, \quad k \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ikinci mertebeden lineer olmayan fark denkleminin pozitif çözümlerinin global çekimliliğini, çözümlerin asimptotik davranışını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Yazlık ve kara (2019), yaptıkları çalışmada $n \in \mathbb{N}_0$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dizileri iki periyotlu ve $x_{-i}, y_{-i} \quad i \in \{0, 1, \dots, k\}$ başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Denklem sisteminde $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ olduğu durumda da çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Taşkara ve arkadaşları (2020), yaptıkları çalışmada $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}$ başlangıç değerleri ve $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta, p$ parametreleri reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = \frac{ay_{n-1}^p + b(x_{n-2}y_{n-1})^{p-1}}{cy_{n-1} + dx_{n-2}^{p-1}}, \quad y_n = \frac{\alpha x_{n-1}^p + \beta(y_{n-2}x_{n-1})^{p-1}}{\gamma x_{n-1} + \delta y_{n-2}^{p-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu ve elde edilen formüller kullanılarak iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Elsayed ve arkadaşları (2013) yaptıkları çalışmada başlangıç değerleri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{y_{n-1} \pm y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n x_{n-1}}{x_{n-1} \pm x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.



3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak olan temel kavramlar, verilecektir.

3.1. Bazı Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1. f verilen bir fonksiyon ve h bir reel sayı olsun.

$$Ef(x) = f(x+h)$$

işlemine f in ötelenmesi, E ye ise öteleme *operatörü* denir.

Tanım 3.2. f verilen bir fonksiyon ve h bir reel sayı olsun.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

işlemine f 'in ileri farkı, Δ ya ise *ileri fark operatörü* denir. Ayrıca h reel sayısına fark aralığı denir.

Tanım 3.3. f verilen bir fonksiyon olsun.

$$If(x) = f(x)$$

şeklinde tanımlanan I operatörüne *birim operatör* veya *özdeşlik operatörü* denir.

Burada basitçe görülür ki; I birim operatör olmak üzere, Δ ve E operatörleri arasında $\Delta = E - I$ bağıntısı vardır.

Tanım 3.4. f verilen bir fonksiyon olsun. Δ^{-1} ile gösterilen ve

$$\Delta^{-1}\Delta f(x) = \Delta\Delta^{-1}f(x) = f(x)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ters fark operatörü* denir.

Şimdi, tezin sonraki kısımlarında kullanılacak olan alt indis gösterimini tanıtalım. Alt indis gösteriminin kullanımı işlemlerde kolaylık sağlamakla kalmayıp sade bir görünüm için sıklıkla tercih edilmektedir.

Bir f fonksiyonu $y = f(x)$ kuralıyla verilmiş olsun. a bir reel sayı, n bir değişken ve h fark aralığı olmak üzere, $x = a + nh$ bağımsız değişken değiştirmesi kullanılarak, $y = f(x)$ değeri $y_n = f(a + nh)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $f(a + nh)$ gösterimi yerine y_n gösterimi kullanılabilir. Eğer $a = 0$ ve $h = 1$ alınırsa, $f(x) = f(n)$ olur ki, bu n değişkeninin sadece tam sayı olmak zorunda olmadığını

göstermektedir. Fakat tezin ilerleyen kısımlarında n , bir tamsayı değişkeni olarak düşünülecektir.

Yukarıdaki düşüncelerden

$$Ey_n = y_{n+1}$$

ve

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

olduğu görülebilir.

Aşağıdaki teoremin ispatına verilen kaynaktan ulaşılabilir.

Teorem 3.1. Δ^{-1} ters fark operatörü

$$\Delta^{-1}y_n = z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlar. Yani Δ^{-1} aslında bir toplam operatörüdür. Burada z_0 bir keyfi sabittir (Bereketoğlu, Kutay, 2012).

Tanım 3.5. Bağımsız değişken n , bağımlı değişken y ve k bir pozitif tamsayı olmak üzere, bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin farklarını içeren

$$F(n, y_{n+1}, y_n, \dots, y_{n-k}) = 0 \quad (3.2)$$

şeklindeki bağıntılara *fark denklemi* denir. Eğer (3.2) denklemi

$$y_{n+1} = f(n, y_n, \dots, y_{n-k}) \quad (3.3)$$

şeklinde ise ona *normal fark denklemi* denir. Eğer (3.3) denklemi

$$y_{n+1} = f(y_n, \dots, y_{n-k}) \quad (3.4)$$

şeklinde ise, yani denklemde n bağımsız değişkeni açıkça görünmüyorsa bu denkleme *skaler fark denklemi* denir (Bereketoğlu, Kutay, 2012).

Bağımsız değişken $n \in \mathbb{N}_0$ ve bağımlı değişken y olmak üzere

$$y_n + y_{n-1} = n \quad (3.5)$$

$$y_{n+2} - y_{n+1}y_n + \frac{1}{y_n} = 0 \quad (3.6)$$

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-4}}{y_n + y_{n-1} + y_{n-2}} \quad (3.7)$$

birer fark denklemdir.

Fark denklemlerinde önemli bir kavram mertebedir. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemde görülen en büyük indis ile en küçük indis arasındaki farka eşittir.

Yukarıdaki örneklerde (3.5) fark denklemi birinci mertebeden, (3.6) denklemi ikinci mertebeden ve (3.7) denklemi ise beşinci mertebeden bir fark denklemdir. Buna göre (3.2)-(3.4) denklemlerinin mertebeleri $k+1$ dir.

Uyarı 3.1. Eğer fark denklemi alt indis gösterimi ile değil de klasik fonksiyon tarzında verilmişse, bu durumda mertebe argümentler arasındaki farka eşittir.

Tanım 3.6. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir x_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için (3.3) denklemini sağlıyorsa, o zaman x_n fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde (3.3) denkleminin bir çözümü denir. (3.3) fark denkleminin,

$$\psi(n, c_1, c_2, \dots, c_{k+1}) = 0$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_{k+1})$$

şeklinde $k+1$ tane $c_1, c_2, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{R}$ keyfi sabitlerini içeren çözüme genel çözüm adı verilir. Genel çözümden, keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Bereketoğlu, Kutay, 2012).

Tanım 3.7 k . basamaktan bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ilişkin

$$x_{n_0+i} = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (3.8)$$

ya da

$$\Delta^i x_{n_0} = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (3.9)$$

biçiminde ilk k tane ardışık değer belirtilmesi gereklidir. Burada $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ reel sabitler, (3.8) ya da (3.9) koşullarına *başlangıç koşulları* adı verilir. k . basamaktan bir fark denklemi ve (3.8) ya da (3.9) başlangıç koşullarından meydana gelen probleme bir *başlangıç değer problemi* denir.

Teorem 3.2. k . basamaktan

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.10)$$

skaler normal fark denklemi ve

$$x_0 = \alpha_0, \quad x_1 = \alpha_1, \dots, x_{k-1} = \alpha_{k-1} \quad (3.11)$$

başlangıç koşulları verilsin. f fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise, o zaman (3.10)-(3.11) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır.

Örnek 3.1 $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$, $x_0 = 5$ başlangıç değer probleminin çözümünün $x_n = \frac{5}{5n+1}$

olduğunu gösterelim.

Verilen denklemin genel çözümü

$$x_n = \frac{1}{c+n}$$

dizisidir çünkü denklemini sağlar ve denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit içerir.

Burada $n=0$ alınırsa

$$x_0 = \frac{1}{c} = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

elde edilir. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü

$$x_n = \frac{5}{5n+1}$$

elde edilen bu ifade, denklemin bir özel çözümüdür.

Tanım 3.8. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi (3.4) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına da asal periyod denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 3.9. $a_{k+1}(n)$, $a_k(n)$, ..., $a_0(n)$ ve $g(n)$, n nin reel fonksiyonları olmak üzere,

$$a_0(n)y_{n+1} + a_1(n)y_n + \dots + a_{k+1}(n)y_{n-k} = g(n) \quad (3.12)$$

şeklindeki bir fark denklemine $(k+1)$. mertebeden *lineer fark denklemi* denir. Aksi halde (3.12) fark denklemine *lineer olmayan fark denklemi* veya *nonlinear fark denklemi* denir.

Burada her n için $a_{k+1}(n) \neq 0$ dır.

Lineer fark denklemleri, (3.12) denklemindeki $g(n)$ fonksiyonu ve $a_i(n)$, $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ katsayı fonksiyonlarının durumlarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılırlar:

- i) Eğer $g(n)=0$ ise, yani g fonksiyonu özdeş olarak sıfır ise denkleme *lineer homojen fark denklemi*, aksi halde *homojen olmayan* veya *nonhomojen lineer fark denklemi*,
- ii) a_i katsayıları sabit ise denkleme *sabit katsayılı lineer fark denklemi*,
- iii) a_i katsayılarından en az biri bağımsız değişkenin fonksiyonu ise denkleme *değişken katsayılı lineer fark denklemi* denir.

Örnek 3.2. Aşağıdaki verilen denklemleri mertebe, homojenlik ve lineerlik bakımından inceleyelim.

$$x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad (3.13)$$

$$x_{n+5} + 3 \sin \alpha x_{n+3} - x_{n+1} + x_n = 0 \quad (3.14)$$

$$x_{n+1} + 7x_n - 2n = 0 \quad (3.15)$$

$$x_{n+3} x_{n+2}^3 = e^n x_n^2 \quad (3.16)$$

$$x_{n+2} = \tan n \quad (3.17)$$

Çözüm (3.13) denklemi 2. mertebeden, homojen lineer fark denklemidir.

(3.14) denklemi 5. mertebeden, homojen lineer fark denklemidir.

(3.15) denklemi 1. mertebeden, homojen olmayan lineer fark denklemidir.

(3.16) denklemi 3. mertebeden lineer olmayan bir fark denklemidir.

(3.17) denklemi fark denklemi değil, bir fonksiyondur.

3.2. Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Çözümleri

Burada bazı özel durumlar incelenecektir. Önce birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin çözümlerinin nasıl elde edildiği, sonra da yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinin çözümlerinin nasıl elde edildiği ele alınacaktır.

3.2.1. Birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin çözümleri

Bu kısımda ilk olarak daha kolay anlaşılabilen durumu vereceğiz. a bir sabit olmak üzere,

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.18)$$

denklemini düşünelim. Bu denklemin genel çözümü iterasyon yapılarak bulunabilir. Burada iki durum ortaya çıkar $a \neq 1$ olsun. Bu durumda, çözüme başlayabilmek için verilen x_0 başlangıç değerini, $n = 0$ için (3.18) denkleminde kullanarak

$$x_1 = ax_0$$

$$x_2 = ax_1 = a^2x_0$$

$$x_3 = ax_2 = a^2x_1 = a^3x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = ax_{n-1} = a^2x_{n-2} = \dots = a^n x_0$$

yazılabilir. Böylece (3.18) denkleminin genel çözümünün

$$x_n = a^n x_0$$

olduğu görülür.

Eğer $a = 1$ ise doğrudan

$$x_{n+1} = x_n = \dots = x_0 \text{ olduğundan çözüm } x_n = x_0 \text{ olur.}$$

Örnek 3.3. $x_{n+1} = -x_n$, $x_0 = 4$ homojen başlangıç değer probleminin çözümü

$$x_n = 4(-1)^n$$

şeklindedir.

Şimdi daha genel bir durum olan

$$x_{n+1} = ax_n + g, \quad g \neq 0 \tag{3.19}$$

denklemini ele alalım. (3.19) un genel çözümü yine iterasyonla,

$$x_n = a^n x_0 + g \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n x_0 + g \frac{1-a^n}{1-a}$$

şeklinde bulunabilir.

Örnek 3.4. $x_{n+1} = -x_n + 4$, $x_0 = 3$ homojen olmayan başlangıç değer probleminin çözümü

$$x_n = (-1)^n + 2$$

şeklindedir.

Son olarak birinci mertebeden lineer homojen olmayan en genel denklemi, yani

$$x_{n+1} = a_n x_n + g_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.20}$$

fark denklemini düşünelim. Burada a_n ve g_n reel sayı dizileridir ve tüm $n \in \mathbb{N}_0$ değerleri için $a_n \neq 0$ dır. Bu durumda, (3.20) nin genel çözümü

$$x_n = \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} a(k) \right) x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} a(j) \right) g(k) \tag{3.21}$$

şeklindedir.

(3.20) denkleminin tüm özel durumlarının çözümleri (3.21) formülünden elde edilebilir. Aşağıdaki örnek bunun için verilmiştir

Örnek 3.5. $a_n = 1$ ve $g_n = n$ alınırsa (3.20) denklemi

$$x_{n+1} = x_n + n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

denklemi elde edilir. Bunun genel çözümü (3.21) den

$$x_n = x_0 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

olarak bulunur. Burada $n_0 = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

3.2.2. Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinin çözümleri

Sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri genel olarak çözülebilen denklemlerdir. Eğer (3.12) denkleminin katsayıları reel sabitler ve $g(n) \equiv 0$ ise, denklem

$$a_0 y_{n+1} + a_1 y_n + \dots + a_{k+1} y_{n-k} = 0, \quad a_{k+1} \neq 0 \quad (3.22)$$

olur. Bir dizinin bu denklemin çözümü olabilmesi için kendisi ile ötelemeleri arasında sadece katsayı farkı olmalıdır. Bu şartı sağlayan ancak üstel bir dizi olan λ^n dizisidir.

λ^n , (3.22) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü, yani $\lambda \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$E\lambda^n = \lambda^{n+1}, \quad E^0 \lambda^n = \lambda^n, \quad E^{-1} \lambda^n = \lambda^{n-1}, \quad \dots, \quad E^{-k} \lambda^n = \lambda^{n-k}$$

olup bunlar (3.22) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\lambda^{n-k} (a_0 \lambda^{k+1} + a_1 \lambda^k + \dots + a_{k+1}) = 0$$

eşitliği bulunur. λ^{n-k} sıfıra eşit olamayacağından

$$a_0 \lambda^{k+1} + a_1 \lambda^k + \dots + a_{k+1} = 0 \quad (3.23)$$

olur. (3.23) denkleminin (3.22) denkleminin “karakteristik denklemi” denir. (3.23) denkleminin köklerine ise “karakteristik kökler” denir. Bilindiği gibi bu denklemin $k+1$ tane reel veya kompleks kökleri vardır. (3.22) denkleminin genel çözümü bu kökler yardımıyla yazılır. Burada anlatımı kolaylaştırmak için (3.22) denkleminde $k=1$ seçerek mertebeyi 2 alacağız. Böylece (3.22) denklemi

$$a_0 y_{n+1} + a_1 y_n + a_2 y_{n-1} = 0, \quad a_2 \neq 0 \quad (3.24)$$

denkleminin indirgenir. (3.24) denkleminin karakteristik denklemi

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (3.25)$$

olup karakteristik kökler

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

olur. Bu durumda (3.24) denkleminin genel çözümü için üç durum ortaya çıkar. Şimdi bu durumları inceleyelim. $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$ olsun.

$\Delta > 0$ **durumu:** Karakteristik köklerin reel ve farklı olması durumudur. Bu durumda $y_n = \lambda_1^n$ ve $y_n = \lambda_2^n$ ifadeleri (3.24) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. Bu çözümler yardımıyla genel çözüm

$$y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad (3.26)$$

şeklinde verilir. Bu şekilde bir çözümün varlığı üzerine teorik detaylar için (Bereketoğlu, Kutay, 2012) kaynağına bakılabilir.

$\Delta = 0$ **durumu:** Karakteristik köklerin reel ve eşit olması durumudur. Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_1 / 2a_0$ olup $y_n = \lambda_1^n$ ve $y_n = \lambda_2^n$ ifadeleri (3.24) denkleminin lineer bağımlı iki çözümüdür. Bu çözümler yardımıyla genel çözüm

$$y_n = (c_1 + c_2 n) \left(\frac{-a_1}{2a_0} \right)^n \quad (3.27)$$

şeklinde verilir.

$\Delta < 0$ **durumu:** Karakteristik köklerin kompleks ve farklı olması durumudur. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ olmak üzere $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olup $y_n = \lambda_1^n$, $y_n = \lambda_2^n$ ifadeleri (3.24) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. Bu çözümler yardımıyla genel çözüm

$$y_n = r^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \quad (3.28)$$

şeklinde verilir.

3.3. Bilineer Fark Denklemi ve Çözümü

Bu kısımda “bilineer fark denklemi” olarak bilinen

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n + B}{Cx_n + D}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.29)$$

birinci mertebeden rasyonel fark denklemi ele alınacaktır. (3.29) denklemi bazı kaynaklarda “Riccati fark denklemi” ismiyle de anılır. Bunun nedeni bu denklemin sabit

katsayılı Riccati diferansiyel denkleminde uygun bir ayırıklaştırmayla elde edilebilmesidir (Kulenović ve Merino 2002).

(3.29) denklemi çözülebilen bir denklemdir. Çözülebilirlikten kastımız, (3.29) denklemini sağlayan ve n bağımsız değişkenine bağlı sonlu sayıda formülün bulunabilmesidir. Şimdi (3.29) denklemini incelememizi kolaylaştıran bazı özel durumları ele alalım.

Eğer $C = 0$ ise (3.29) denklemi lineer homojen olmayan bir fark denklemdir. Bu durumda çözüm önceki kısımda ifade edildiği gibi elde edilir.

Eğer $AD - BC = 0$ ise bu denklem, tüm n değerleri için,

$$x_{n+1} = \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \quad (3.30)$$

halini alır. Bu aşık bir durumdur.

Eğer $A + D = 0$ ise (3.29) fark denkleminin her çözümü iki periyotludur. Aslında bu eşitlik her çözümünün iki periyotlu olması için gerek ve yeter şarttır. Bu durumda (3.29) denkleminin genel çözümü, bir $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{A/C\}$ başlangıç değeri için

$$\{x_n\}_{n \geq 0} = \left\{ x_0, \frac{Ax_0 + B}{Cx_0 - A}, x_0, \frac{Ax_0 + B}{Cx_0 - A}, \dots \right\} \quad (3.31)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki değerlendirmelerden şu sonuca varırız ki; (3.29) denkleminin düzgün bir şekilde incelenmesi için

$$C \neq 0, \quad AD - BC \neq 0, \quad A + D \neq 0 \quad (3.32)$$

koşulları sağlanmalıdır.

(3.29) denklemi için (3.32) şartları sağlansın. Bu şartlar altında (3.29) denkleminin genel çözümünü bulalım.

(3.29) denkleminin her iki tarafı C ile çarpılıp yine her iki tarafına D eklenirse

$$Cx_{n+1} + D = (A + D)x_n + \frac{BC - AD}{Cx_n + D} \quad (3.33)$$

bulunur. (3.33) nin her iki tarafı

$$t_n = \prod_{k=0}^n (Cx_k + D) \quad (3.34)$$

ifadesiyle çarpılırsa

$$\prod_{k=0}^{n+1} (Cx_k + D) = (A + D) \prod_{k=0}^n (Cx_k + D) + (BC - AD) \prod_{k=0}^{n-1} (Cx_k + D)$$

veya

$$t_{n+1} = (A + D)t_n + (BC - AD)t_{n-1} \quad (3.35)$$

ikinci mertebeden homojen lineer fark denklemi elde edilir. (3.35) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda - (BC - AD) = 0 \quad (3.36)$$

denklemdir ve onun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D \pm \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}}{2}$$

şeklinde verilir. Çözümün yapısı bu köklere göre belirlenir. Bu yüzden çözümün yapısını etkileyecek olan iki durumu inceleyelim.

Eğer $(A + D)^2 + 4(BC - AD) \neq 0$ ise, (3.35) denkleminin genel çözümü

$$t_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad (3.37)$$

şeklindedir.

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D \pm \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}}{2}$$

(3.35) denkleminin karakteristik kökleridir. Ayrıca (3.34) den

$$Cs_k^{(i)} + D = \frac{\prod_{j=0}^k (Cs_j^{(i)} + D)}{\prod_{j=0}^{k-1} (Cs_j^{(i)} + D)} = \frac{t_k^{(i)}}{t_{k-1}^{(i)}} \quad (3.38)$$

olduğu görülür. Bu durumda, (3.34) ve (3.37) den (3.29) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{1}{C} \left(\frac{c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n}{c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}} - D \right) \quad (3.39)$$

olarak bulunur. Burada $c_1 = c_1(x_0)$, $c_2 = c_2(x_0)$ keyfi sabitler ve λ_1, λ_2 yukarıda verildiği gibidir.

Eğer $(A + D)^2 + 4(BC - AD) = 0$ ise, (3.36) karakteristik denkleminin kökleri çakışık olup

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D}{2}$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.35) denkleminin genel çözümü

$$t_n = (c_3 + c_4 n) \left(\frac{A+D}{2} \right)^n \quad (3.40)$$

dir. Böylece (3.34) ve (3.40) dan (3.29) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \frac{1}{C} \left(\frac{c_3 + c_4 n}{c_3 + c_4 (n-1)} \frac{A+D}{2} - D \right) \quad (3.41)$$

olarak bulunur. Burada $c_3 = c_3(x_0)$, $c_4 = c_4(x_0)$ keyfi sabitlerdir.

4. ÜÇ BOYUTLU BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde

$$x_{n+1} = x_n \frac{a_1 y_n + b_1 y_{n-1}}{c_1 y_n + d_1 y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = y_n \frac{a_2 z_n + b_2 z_{n-1}}{c_2 z_n + d_2 z_{n-1}}, \quad z_{n+1} = z_n \frac{a_3 x_n + b_3 x_{n-1}}{c_3 x_n + d_3 x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.1)$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğu gösterilecektir. Burada a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1,2,3$) parametreleri ve x_{-j}, y_{-j}, z_{-j} ($j=0,1$) başlangıç değerleri çözümü iyi tanımlı yapan reel sayılardır. (4.1) sistemi uygun bir değişken değiştirmeyeyle bilineer fark denkleminde dönüşür. Bu yüzden bu bölümdeki bazı sonuçları elde etmek için önceki bölümde tanımlı ve özellikleri verilen bilineer fark denkleminin çözümünden yararlanılacaktır. Bu bölümdeki bazı parametre kısıtlamaları önceki bölümdeki bilineer fark denkleminin incelenmesinde ortaya çıkan kısıtlamalara dayanır.

Buna bağlı olarak burada, yine önceki bölümde çözümleri verilen bazı lineer fark denklemlerinin çözümlerinden de yararlanılacaktır.

4.1. $(a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_3 d_3 - b_3 c_3) = 0$ Özel Durumu

Burada (4.1) sisteminin çözümlerini elde etmek için bazı kısıtlamalar ele alınacaktır. Bu kısıtlamalar sistemin parametrelerinin bazı koşulları sağlamasını gerektirmektedir. Söz konusu koşulları elde etmek için

$$(a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_3 d_3 - b_3 c_3) = 0 \quad (4.2)$$

eşitliğinde ortaya çıkan alt durumları inceleyelim.

İlk olarak, (4.2) nin birinci çarpanını ele alalım. Yani $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$ olsun. Bu durumda (4.1) sisteminin birinci denkleminde $d_1 = b_1 c_1 / a_1$ eşitliği kullanılırsa

$$x_{n+1} = \frac{a_1}{c_1} x_n \quad (4.3)$$

birinci mertebeden fark denklemini elde ederiz. (4.3) ün genel çözümü

$$x_n = \left(\frac{a_1}{c_1} \right)^n x_0 \quad (4.4)$$

olup bu çözüm (4.1) sisteminin üçüncü denkleminde kullanılırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_1 a_3 + b_3 c_1}{a_1 c_3 + c_1 d_3} z_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$z_n = \left(\frac{a_1 a_3 + b_3 c_1}{a_1 c_3 + c_1 d_3} \right)^n z_0 \quad (4.5)$$

olur. (4.5) ifadesi (4.1) sisteminin ikinci denkleminde kullanılırsa

$$y_{n+1} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 + a_1 b_2 c_3 + b_2 c_1 d_3}{a_1 a_2 c_3 + b_3 c_1 c_2 + a_1 c_3 d_2 + c_1 d_2 d_3} y_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$y_n = \left(\frac{a_1 a_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 + a_1 b_2 c_3 + b_2 c_1 d_3}{a_1 a_2 c_3 + b_3 c_1 c_2 + a_1 c_3 d_2 + c_1 d_2 d_3} \right)^n y_0 \quad (4.6)$$

olur. Bu durumda (4.1) sisteminin genel çözümü (4.4) (4.5) ve (4.6) ile verilir.

İkinci olarak (4.1) sisteminin ikinci denkleminde $d_2 = b_2 c_2 / a_2$ eşitliği kullanılırsa

$$y_{n+1} = \frac{a_2}{c_2} y_n$$

birinci mertebeden fark denklemini elde ederiz. Bu denklemin genel çözümü

$$y_n = \left(\frac{a_2}{c_2} \right)^n y_0 \quad (4.7)$$

olup bu çözüm (4.1) sisteminin birinci denkleminde kullanılırsa

$$x_{n+1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 c_2}{a_2 c_1 + c_2 d_1} x_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$x_n = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 c_2}{a_2 c_1 + c_2 d_1} \right)^n x_0 \quad (4.8)$$

olur. (4.8) ifadesi (4.1) sisteminin üçüncü denkleminde kullanılırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 + b_3 c_2 d_1}{a_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 + a_2 c_1 d_3 + c_2 d_1 d_3} z_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$z_n = \left(\frac{a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 + b_3 c_2 d_1}{a_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 + a_2 c_1 d_3 + c_2 d_1 d_3} \right)^n z_0 \quad (4.9)$$

olur. Bu durumda (4.1) sisteminin genel çözümü, (4.7) , (4.8) ve (4.9) ile verilir.

Üçüncü ve son olarak, (4.1) sisteminin üçüncü denkleminde $d_3 = b_3 c_3 / a_3$ eşitliği kullanılırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_3}{c_3} z_n$$

birinci mertebeden fark denklemini elde ederiz. Bu denklemin genel çözümü

$$z_n = \left(\frac{a_3}{c_3} \right)^n z_0 \quad (4.10)$$

olup bu çözüm (4.1) sisteminin ikinci denkleminde kullanılırsa

$$y_{n+1} = \frac{a_2 a_3 + b_2 c_3}{a_3 c_2 + c_3 d_2} y_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$y_n = \left(\frac{a_2 a_3 + b_2 c_3}{a_3 c_2 + c_3 d_2} \right)^n y_0 \quad (4.11)$$

olur. (4.11) ifadesi (4.1) sisteminin birinci denkleminde kullanılırsa

$$x_{n+1} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + b_1 c_3 d_2}{a_2 a_3 c_1 + b_2 c_1 c_3 + a_3 c_2 d_1 + c_3 d_1 d_2} x_n$$

denklemini elde edilir ki bunun genel çözümü de

$$x_n = \left(\frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + b_1 c_3 d_2}{a_2 a_3 c_1 + b_2 c_1 c_3 + a_3 c_2 d_1 + c_3 d_1 d_2} \right)^n x_0 \quad (4.12)$$

olur. Bu durumda (4.1) sisteminin genel çözümü, (4.10), (4.11) ve (4.12) ile verilir.

4.2. Genel Durum

Bu durum, genel olarak parametrelerin tamamının sıfırdan farklı olduğu durumdur. Fakat sistemin önceki özel durumlara indirgenmemesi şartıyla bazı parametrelerden bazıları sıfır olabilir.

Bu durumda (4.1) sistemi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a_1 \frac{y_n}{y_{n-1}} + b_1}{c_1 \frac{y_n}{y_{n-1}} + d_1}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a_2 \frac{z_n}{z_{n-1}} + b_2}{c_2 \frac{z_n}{z_{n-1}} + d_2}, \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{a_3 \frac{x_n}{x_{n-1}} + b_3}{c_3 \frac{x_n}{x_{n-1}} + d_3}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılıştan görülebilir ki

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = u_n, \quad \frac{y_n}{y_{n-1}} = v_n, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = w_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.13)$$

değişken değiştirmeleri yapılabilir. (4.13) değişken değiştirmelerinin uygulanmasıyla (4.1) sistemi

$$u_{n+1} = \frac{a_1 v_n + b_1}{c_1 v_n + d_1}, \quad v_{n+1} = \frac{a_2 w_n + b_2}{c_2 w_n + d_2}, \quad w_{n+1} = \frac{a_3 u_n + b_3}{c_3 u_n + d_3}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.14)$$

sistemine indirgenir. (4.14) sistemi bilineer fark denklemlerinin üç boyutlu bir sistemidir.

Bu sistemin denklemleri birbiri içinde kullanılarak, birbirinden bağımsız olan

$$u_{n+3} = \frac{A_1 u_n + B_1}{C_1 u_n + D_1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.15)$$

$$v_{n+3} = \frac{A_2 v_n + B_2}{C_2 v_n + D_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.16)$$

$$w_{n+3} = \frac{A_3 w_n + B_3}{C_3 w_n + D_3}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.17)$$

denklemleri elde edilir. Burada katsayılar

$$A_1 = (a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + b_1 c_3 d_2)$$

$$B_1 = (a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 d_3 + b_1 b_3 c_2 + b_1 d_2 d_3)$$

$$C_1 = (a_2 a_3 c_1 + b_2 c_1 c_3 + a_3 c_2 d_1 + c_3 d_1 d_2)$$

$$D_1 = (a_2 b_3 c_1 + b_2 c_1 d_3 + b_3 c_2 d_1 + d_1 d_2 d_3)$$

$$A_2 = (a_1 a_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 + a_1 b_2 c_3 + b_2 c_1 d_3)$$

$$B_2 = (a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3 d_1 + b_1 b_2 c_3 + b_2 d_1 d_3)$$

$$C_2 = (a_1 a_3 c_2 + b_3 c_1 c_2 + a_1 c_3 d_2 + c_1 d_2 d_3)$$

$$D_2 = (a_3 b_1 c_2 + b_3 c_2 d_1 + b_1 c_3 d_2 + d_1 d_2 d_3)$$

$$A_3 = (a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 + b_3 c_2 d_1)$$

$$B_3 = (a_1 a_3 b_2 + a_3 b_1 d_2 + b_2 b_3 c_1 + b_3 d_1 d_2)$$

$$C_3 = (a_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 + a_2 c_1 d_3 + c_2 d_1 d_3)$$

$$D_3 = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_3 d_2 + b_2 c_1 d_3 + d_1 d_2 d_3)$$

olarak verilir. (4.15)-(4.17) denklemleri (3.29) formunda olup bunların hepsi

$$s_{n+3} = \frac{A s_n + B}{C s_n + D}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.18)$$

denklemleri ile temsil edilebilir. Yani bu denklem üzerinde yapılan tüm işlemler, katsayılar düzenlenerek (4.15)-(4.17) denklemlerine uygulanabilir. Şimdi bu denklemin çözümünü elde edelim. Öncelikle (4.18) denklemini yine birbirinden bağımsız üç denklem olarak yazalım. Bunun için, $i = 0, 1, 2$ olmak üzere,

$$n = 3k + i, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.19)$$

indis ayrışımını yapalım. Böylece $s_{3k+i} = s_k^{(i)}$ şeklinde ifade edeceğimiz alt dizileri elde ederiz ve (4.18) denklemini

$$s_{3k+i+3} = \frac{As_{3k+i} + B}{Cs_{3k+i} + D}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.20)$$

veya

$$s_{k+1}^{(i)} = \frac{As_k^{(i)} + B}{Cs_k^{(i)} + D}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.21)$$

şeklinde üç bağımsız denklem olarak ifade edebiliriz. Şimdi bu denklemlerin aynı anda genel çözümlerini bulalım. (4.21) in her iki tarafı C ile çarpılıp yine her iki tarafına D eklenirse

$$Cs_{k+1}^{(i)} + D = (A + D) + \frac{BC - AD}{Cs_k^{(i)} + D} \quad (4.22)$$

bulunur. $A + D \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.22) denkleminin her iki tarafı

$$t_k^{(i)} = \prod_{j=0}^k (Cs_j^{(i)} + D) \quad (4.23)$$

ifadesiyle çarpılırsa

$$\prod_{j=0}^{k+1} (Cs_j^{(i)} + D) = (A + D) \prod_{j=0}^k (Cs_j^{(i)} + D) + (BC - AD) \prod_{j=0}^{k-1} (Cs_j^{(i)} + D)$$

veya

$$t_{k+1}^{(i)} = (A + D)t_k^{(i)} + (BC - AD)t_{k-1}^{(i)} \quad (4.24)$$

ikinci mertebeden homojen lineer fark denklemi elde edilir. Bu denkleme ait karakteristik denklem

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda - (BC - AD) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{A + D + \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A + D - \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}}{2}$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta = (A + D)^2 + 4(BC - AD)$ olarak tanımlanır.

Elde edilen (4.24) denklemi çözülebilir olup, Δ 'nın durumlarına bağlı olarak toplam sekiz farklı çözüm durumu ortaya çıkmaktadır. Bu tez kapsamında, $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$ ve $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ durumları ayrıntılı biçimde incelenecek; geri kalan altı durum ise ekler bölümünde tablo hâlinde sunulacaktır.

(4.24) denkleminin, $(A + D)^2 + 4(BC - AD) \neq 0$ durumundaki genel çözümü

$$t_k^{(i)} = c_1^{(i)} \lambda_1^k + c_2^{(i)} \lambda_2^k \quad (4.25)$$

şeklindedir. Burada $c_1^{(i)}$ ve $c_2^{(i)}$ keyfi sabitler ve

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D \pm \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}}{2}$$

olup (4.24) denkleminin karakteristik denkleminin kökleridir. (4.23) den

$$CS_k^{(i)} + D = \frac{\prod_{j=0}^k (CS_j^{(i)} + D)}{\prod_{j=0}^{k-1} (CS_j^{(i)} + D)} = \frac{t_k^{(i)}}{t_{k-1}^{(i)}} \quad (4.26)$$

olduğu görülür. O halde (4.18) denkleminin genel çözümü

$$s_{3k+i} = \frac{1}{C} \left(\frac{c_1^{(i)} \lambda_1^k + c_2^{(i)} \lambda_2^k}{c_1^{(i)} \lambda_1^{k-1} + c_2^{(i)} \lambda_2^{k-1}} - D \right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.27)$$

olarak bulunur.

Bu durumda (4.15) denkleminin genel çözümü

$$u_{3k+i} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} \lambda_1^k + c_2^{(i)} \lambda_2^k}{c_1^{(i)} \lambda_1^{k-1} + c_2^{(i)} \lambda_2^{k-1}} - D_1 \right) \quad (4.28)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(u_0, u_1, u_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(u_0, u_1, u_2)$ ve

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_1 + D_1 \pm \sqrt{(A_1 + D_1)^2 + 4(B_1 C_1 - A_1 D_1)}}{2}$$

olarak verilir.

Yukarıda elde edilen sonuca göre (4.16) denkleminin genel çözümü

$$v_{3k+i} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} \lambda_1^k + c_2^{(i)} \lambda_2^k}{c_1^{(i)} \lambda_1^{k-1} + c_2^{(i)} \lambda_2^{k-1}} - D_2 \right) \quad (4.29)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(v_0, v_1, v_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(v_0, v_1, v_2)$ ve

$$\lambda_{3,4} = \frac{A_2 + D_2 \pm \sqrt{(A_2 + D_2)^2 + 4(B_2 C_2 - A_2 D_2)}}{2}$$

olarak verilir.

Son olarak, (4.17) denkleminin genel çözümü

$$w_{3k+i} = \frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} \lambda_1^k + c_2^{(i)} \lambda_2^k}{c_1^{(i)} \lambda_1^{k-1} + c_2^{(i)} \lambda_2^{k-1}} - D_3 \right) \quad (4.30)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(w_0, w_1, w_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(w_0, w_1, w_2)$ ve

$$\lambda_{5,6} = \frac{A_3 + D_3 \pm \sqrt{(A_3 + D_3)^2 + 4(B_3 C_3 - A_3 D_3)}}{2}$$

şeklinde elde edilir.

(4.24) denkleminin, $(A + D)^2 + 4(BC - AD) = 0$ durumundaki genel çözümü

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D}{2}$$

şeklinde dir. Bu durumda, (4.24) denkleminin karakteristik denklemi çakışık köklere sahiptir.

Buna göre (4.18) denkleminin genel çözümü,

$$s_{3k+i} = \frac{1}{C} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A + D}{2} - D \right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (4.31)$$

olarak elde edilir.

Bu durumda (4.15) denkleminin genel çözümü

$$u_{3k+i} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \quad (4.32)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(u_0, u_1, u_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(u_0, u_1, u_2)$ ve

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_1 + D_1}{2}$$

olarak verilir.

Yukarıda elde edilen sonuca göre (4.16) denkleminin genel çözümü

$$v_{3k+i} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \quad (4.33)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(v_0, v_1, v_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(v_0, v_1, v_2)$ ve

$$\lambda_{3,4} = \frac{A_2 + D_2}{2}$$

olarak verilir.

Son olarak, (4.17) denkleminin genel çözümü

$$w_{3k+i} = \frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \quad (4.34)$$

olur. Burada $c_1^{(i)} = c_1^{(i)}(w_0, w_1, w_2)$, $c_2^{(i)} = c_2^{(i)}(w_0, w_1, w_2)$ ve

$$\lambda_{5,6} = \frac{A_3 + D_3}{2}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan (4.13) değişken değiştirmelerinden

$$x_n = u_n x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.35)$$

$$y_n = v_n y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.36)$$

$$z_n = w_n z_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.37)$$

denklemleri elde edilir. Amacımız bu denklemlerin genel çözümlerinde önceden bulduğumuz (u_n) , (v_n) ve (w_n) dizilerini kullanarak (4.1) sisteminin genel çözümünü oluşturan (x_n) , (y_n) ve (z_n) dizilerini bulmaktır. (u_n) , (v_n) ve (w_n) dizileri alt dizilerine ayırılmış halde formüle edilmiştir. Bu yüzden (4.35)-(4.37) denklemleri de aynı indisli alt dizileri bulunacak şekilde ayrıştırılmalıdır. Bu amaçla, (4.19) indis ayrışımını yine kullanarak, (4.35) denklemden, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{3k} = u_{3k} x_{3k-1}, \quad x_{3k+1} = u_{3k+1} x_{3k}, \quad x_{3k+2} = u_{3k+2} x_{3k+1}$$

denklemlerini ve bunlar yardımıyla da (x_n) dizisinin aynı alt dizilerini çözüm kabul eden ve birbirinden bağımsız olan

$$x_{3k+2} = u_{3k+2} u_{3k+1} u_{3k} x_{3k-1} \quad (4.38)$$

$$x_{3k+3} = u_{3k+3} u_{3k+2} u_{3k+1} u_{3k} x_{3k} \quad (4.39)$$

$$x_{3k+4} = u_{3k+4} u_{3k+3} u_{3k+2} u_{3k+1} u_{3k} x_{3k} \quad (4.40)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$x_{3k-1} = x_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} u_{3j+2} u_{3j+1} u_{3j} \quad (4.41)$$

$$x_{3k} = x_0 \prod_{j=0}^{k-1} u_{3j+3} u_{3j+2} u_{3j+1} \quad (4.42)$$

$$x_{3k+1} = u_1 x_0 \prod_{j=0}^{k-1} u_{3j+4} u_{3j+3} u_{3j+2} \quad (4.43)$$

formülleri ile ifade edilir. Burada $x_1 = u_1 x_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$x_{3k-1} = x_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right) \right) \quad (4.44)$$

$$x_{3k} = x_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \right) \quad (4.45)$$

$$x_{3k+1} = u_1 x_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right) \quad (4.46)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde (4.36) denkleminde, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$y_{3k} = v_{3k} y_{3k-1}, \quad y_{3k+1} = v_{3k+1} y_{3k}, \quad y_{3k+2} = v_{3k+2} y_{3k+1}$$

denklemleri ve bu denklemler yardımıyla

$$y_{3k+2} = v_{3k+2} v_{3k+1} v_{3k} y_{3k-1} \quad (4.47)$$

$$y_{3k+3} = v_{3k+3} v_{3k+2} v_{3k+1} y_{3k} \quad (4.48)$$

$$y_{3k+4} = v_{3k+4} v_{3k+3} v_{3k+2} y_{3k+1} \quad (4.49)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$y_{3k-1} = y_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} v_{3j+2} v_{3j+1} v_{3j} \quad (4.50)$$

$$y_{3k} = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} v_{3j+3} v_{3j+2} v_{3j+1} \quad (4.51)$$

$$y_{3k+1} = y_1 y_0 \prod_{j=0}^{k-1} v_{3j+4} v_{3j+3} v_{3j+2} \quad (4.52)$$

formülleri ile ifade edilir. Burada $y_1 = v_1 y_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$y_{3k-1} = y_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right) \right) \quad (4.53)$$

$$y_{3k} = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \right) \quad (4.54)$$

$$y_{3k+1} = v_1 y_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right) \quad (4.55)$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak, (4.37) denkleminde, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$z_{3k} = w_{3k} z_{3k-1}, \quad z_{3k+1} = w_{3k+1} z_{3k}, \quad z_{3k+2} = w_{3k+2} z_{3k+1}$$

denklemlerini ve bunlar yardımıyla da

$$z_{3k+2} = w_{3k+2} w_{3k+1} w_{3k} z_{3k-1} \quad (4.56)$$

$$z_{3k+3} = w_{3k+3} w_{3k+2} w_{3k+1} z_{3k} \quad (4.57)$$

$$z_{3k+4} = w_{3k+4} w_{3k+3} w_{3k+2} z_{3k+1} \quad (4.58)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$z_{3k-1} = z_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} w_{3j+2} w_{3j+1} w_{3j} \quad (4.59)$$

$$z_{3k} = z_0 \prod_{j=0}^{k-1} w_{3j+3} w_{3j+2} w_{3j+1} \quad (4.60)$$

$$z_{3k+1} = w_1 z_0 \prod_{j=0}^{k-1} w_{3j+4} w_{3j+3} w_{3j+2} \quad (4.61)$$

formülleri ile ifade edilir. Burada $z_1 = w_1 z_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$z_{3k-1} = z_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right) \right) \quad (4.62)$$

$$z_{3k} = z_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right) \right) \quad (4.63)$$

$$z_{3k+1} = w_1 z_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right) \right) \quad (4.64)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, $(A_i + D_i)^2 + 4(B_i C_i - A_i D_i) \neq 0$ durumunda (4.1) sisteminin genel çözümü (4.44)-(4.46), (4.53)-(4.55) ve (4.62)-(4.64) formülleri ile temsil edilir.

(4.24) ikinci mertebeden homojen lineer fark denkleminde $(A + D)^2 + 4(BC - AD) = 0$ olduğu durumda genel çözüm

$$t_k^{(i)} = (c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k) \left(\frac{A + D}{2} \right)^k \quad (4.65)$$

şeklinde elde edilir. Burada $c_1^{(i)}$ ve $c_2^{(i)}$ keyfi sabitlerdir.

(4.19) indis ayrışımını yine kullanarak, (4.35) denkleminde, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{3k} = u_{3k} x_{3k-1}, \quad x_{3k+1} = u_{3k+1} x_{3k}, \quad x_{3k+2} = u_{3k+2} x_{3k+1}$$

denklemlerini ve bunlar yardımıyla da (x_n) dizisinin aynı alt dizilerini çözüm kabul eden ve birbirinden bağımsız olan (4.38)-(4.40) denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla (4.41)-(4.43) formülleri ile ifade edilir.

Burada $x_1 = u_1 x_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$x_{3k-1} = x_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right) \quad (4.66)$$

$$x_{3k} = x_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right) \quad (4.67)$$

$$x_{3k+1} = u_1 x_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right) \quad (4.68)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde (4.36) denkleminde, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$y_{3k} = v_{3k} y_{3k-1}, \quad y_{3k+1} = v_{3k+1} y_{3k}, \quad y_{3k+2} = v_{3k+2} y_{3k+1}$$

denklemleri ve bu denklemler yardımıyla (4.47)-(4.49) denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla (4.50)-(4.52) formülleri ile ifade edilir. Burada

$y_1 = v_1 y_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$y_{3k-1} = y_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right) \quad (4.69)$$

$$y_{3k} = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right) \quad (4.70)$$

$$y_{3k+1} = v_1 y_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right) \quad (4.71)$$

Son olarak, (4.37) denkleminde, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$z_{3k} = w_{3k} z_{3k-1}, \quad z_{3k+1} = w_{3k+1} z_{3k}, \quad z_{3k+2} = w_{3k+2} z_{3k+1}$$

denklemlerini ve bunlar yardımıyla da (4.56)-(4.58) denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla (4.59)-(4.61) formülleri ile ifade edilir. Burada $z_1 = w_1 z_0$ eşitliği kullanıldı. Bu formüller daha açık olarak

$$z_{3k-1} = z_{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right) \quad (4.72)$$

$$z_{3k} = z_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right) \quad (4.73)$$

$$z_{3k+1} = w_1 z_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right) \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right) \right) \quad (4.74)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, $(A_i + D_i)^2 + 4(B_i C_i - A_i D_i) \neq 0$ durumunda (4.1) sisteminin genel çözümü (4.66)-(4.68), (4.69)-(4.71) ve (4.72)-(4.74) formülleri ile temsil edilir.

4.3. $|A_1 + D_1| + |A_2 + D_2| + |A_3 + D_3| = 0$ Özel Durumu

Burada (4.1) sisteminin çözümlerini elde etmek için (4.15)-(4.17) denklemlerinin her çözümünün 6 periyotlu olduğu duruma karşılık gelen

$$|A_1 + D_1| + |A_2 + D_2| + |A_3 + D_3| = 0$$

durumu ele alınacak ve bu durumda çözümler kapalı formda ifade edilecektir.

(4.22) denkleminde $A + D = 0$ olsun. Bu durumda (4.22) denklemi

$$C s_{k+1}^{(i)} - A = \frac{BC + A^2}{C s_k^{(i)} - A} \quad (4.75)$$

halini alır. Bu denklemin her çözümü 6 periyotludur ve

$$\left\{ s_0, s_1, s_2, \frac{A s_0 + B}{C s_0 - A}, \frac{A s_1 + B}{C s_1 - A}, \frac{A s_2 + B}{C s_2 - A}, \dots \right\} \quad (4.76)$$

şeklinde verilir.

Bu durumda (4.15)-(4.17) denklemlerinin genel çözümleri, sırasıyla

$$\left\{ u_0, u_1, u_2, \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1}, \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1}, \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1}, \dots \right\} \quad (4.77)$$

$$\left\{ v_0, v_1, v_2, \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2}, \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2}, \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2}, \dots \right\} \quad (4.78)$$

$$\left\{ w_0, w_1, w_2, \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3}, \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3}, \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3}, \dots \right\} \quad (4.79)$$

şeklinde dir. Burada

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{x_0}{x_{-1}}, \\ u_1 &= \frac{x_1}{x_0} = \frac{a_1 y_0 + b_1 y_{-1}}{c_1 y_0 + d_1 y_{-1}}, \\ u_2 &= \frac{x_2}{x_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z_0 + (a_1 b_2 + b_1 d_2) z_{-1}}{(a_2 c_1 + c_2 d_1) z_0 + (b_2 c_1 + d_1 d_2) z_{-1}}, \\ u_3 &= \frac{x_3}{x_2} = \frac{A_1 x_0 + B_1 x_{-1}}{C_1 x_0 - A_1 x_{-1}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{x_4}{x_3} = \frac{(A_1 a_1 + B_1 c_1) y_0 + (A_1 b_1 + B_1 d_1) y_{-1}}{(C_1 a_1 - A_1 c_1) y_0 + (C_1 b_1 - A_1 d_1) y_{-1}}, \\ u_5 &= \frac{(A_1 (a_1 a_2 + b_1 c_2) + B_1 (a_2 c_1 + c_2 d_1)) z_0 + (A_1 (a_1 b_2 + b_1 d_2) + B_1 (b_2 c_1 + d_1 d_2)) z_{-1}}{(C_1 (a_1 a_2 + b_1 c_2) - A_1 (a_2 c_1 + c_2 d_1)) z_0 + (C_1 (a_1 b_2 + b_1 d_2) - A_1 (b_2 c_1 + d_1 d_2)) z_{-1}}, \\ v_0 &= \frac{y_0}{y_{-1}}, \\ v_1 &= \frac{y_1}{y_0} = \frac{a_2 z_0 + b_2 z_{-1}}{c_2 z_0 + d_2 z_{-1}}, \\ v_2 &= \frac{y_2}{y_1} = \frac{(a_2 a_3 + b_2 c_3) x_0 + (a_2 b_3 + b_2 d_3) x_{-1}}{(a_3 c_2 + c_3 d_2) x_0 + (b_3 c_2 + d_2 d_3) x_{-1}}, \\ v_3 &= \frac{y_3}{y_2} = \frac{A_2 y_0 + B_2 y_{-1}}{C_2 y_0 - A_2 y_{-1}}, \\ v_4 &= \frac{y_4}{y_3} = \frac{(A_2 a_2 + B_2 c_2) z_0 + (A_2 b_2 + B_2 d_2) z_{-1}}{(C_2 a_2 - A_2 c_2) z_0 + (C_2 b_2 - A_2 d_2) z_{-1}}, \\ v_5 &= \frac{(A_2 (a_2 a_3 + b_2 c_3) + B_2 (a_3 c_2 + c_3 d_2)) x_0 + (A_2 (a_2 b_3 + b_2 d_3) + B_2 (b_3 c_2 + d_2 d_3)) x_{-1}}{(C_2 (a_2 a_3 + b_2 c_3) - A_2 (a_3 c_2 + c_3 d_2)) x_0 + (C_2 (a_2 b_3 + b_2 d_3) - A_2 (b_3 c_2 + d_2 d_3)) x_{-1}}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{z_0}{z_{-1}}, \\
w_1 &= \frac{z_1}{z_0} = \frac{a_3x_0 + b_3x_{-1}}{c_3x_0 + d_3x_{-1}}, \\
w_2 &= \frac{z_2}{z_1} = \frac{(a_1a_3 + b_3c_1)y_0 + (a_3b_1 + b_3d_1)y_{-1}}{(a_1c_3 + c_1d_3)y_0 + (b_1c_3 + d_1d_3)y_{-1}}, \\
w_3 &= \frac{z_3}{z_2} = \frac{A_3z_0 + B_3z_{-1}}{C_3z_0 - A_3z_{-1}}, \\
w_4 &= \frac{z_4}{z_3} = \frac{(A_3a_3 + B_3c_3)x_0 + (A_3b_3 + B_3d_3)x_{-1}}{(C_3a_3 - A_3c_3)x_0 + (C_3b_3 - A_3d_3)x_{-1}}, \\
w_5 &= \frac{(A_3(a_1a_3 + b_3c_1) + B_3(a_1c_3 + c_1d_3))y_0 + (A_3(a_3b_1 + b_3d_1) + B_3(b_1c_3 + d_1d_3))y_{-1}}{(C_3(a_1a_3 + b_3c_1) - A_3(a_1c_3 + c_1d_3))y_0 + (C_3(a_3b_1 + b_3d_1) - A_3(b_1c_3 + d_1d_3))y_{-1}}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

şeklinde. Bu eşitlikler (4.1) sistemi ve (4.13) değişken değiştirmeleri kullanılarak elde edildi.

(u_n) , (v_n) ve (w_n) dizileri alt dizilerine ayırılmış halde formüle edilmiştir. Bu yüzden (4.35)-(4.37) denklemleri de aynı indisli alt dizileri bulunacak şekilde ayrıştırılmalıdır. Bu amaçla, $q = 0, \dots, 5$ olmak üzere,

$$n = 6p + q, \quad p \in \mathbb{N}_0, \tag{4.83}$$

indis ayrışımını yapalım. Bu durumda (4.35)-(4.37) denklemleri

$$x_{6p+q} = u_{6p+q} x_{6p+q-1}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \tag{4.84}$$

$$y_{6p+q} = v_{6p+q} y_{6p+q-1}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \tag{4.85}$$

$$z_{6p+q} = w_{6p+q} z_{6p+q-1}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \tag{4.86}$$

olur. (4.84)-(4.86) denklemlerinin çözümleri, sırasıyla

$$x_{6p+q-1} = x_{q-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} \left(\prod_{\alpha=0}^5 u_{6\theta+q+\alpha} \right)$$

$$y_{6p+q-1} = y_{q-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} \left(\prod_{\alpha=0}^5 v_{6\theta+q+\alpha} \right)$$

$$z_{6p+q-1} = z_{q-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} \left(\prod_{\alpha=0}^5 w_{6\theta+q+\alpha} \right)$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.77)-(4.79) çözümlerinden görülür ki

$$u_{6p} = u_0, \quad u_{6p+1} = u_1, \quad u_{6p+2} = u_2, \quad u_{6p+3} = u_3, \quad u_{6p+4} = u_4, \quad u_{6p+5} = u_5,$$

$$v_{6p} = v_0, \quad v_{6p+1} = v_1, \quad v_{6p+2} = v_2, \quad v_{6p+3} = v_3, \quad v_{6p+4} = v_4, \quad v_{6p+5} = v_5,$$

$$w_{6p} = w_0, \quad w_{6p+1} = w_1, \quad w_{6p+2} = w_2, \quad w_{6p+3} = w_3, \quad w_{6p+4} = w_4, \quad w_{6p+5} = w_5,$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitliklerden aşağıdaki formüller elde edilir.

$$x_{6p-1} = x_{-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta} u_{6\theta+1} u_{6\theta+2} u_{6\theta+3} u_{6\theta+4} u_{6\theta+5}) = x_{-1} \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$x_{6p} = x_0 \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta+1} u_{6\theta+2} u_{6\theta+3} u_{6\theta+4} u_{6\theta+5} u_{6\theta+6}) = x_0 \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$x_{6p+1} = x_1 \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta+2} u_{6\theta+3} u_{6\theta+4} u_{6\theta+5} u_{6\theta+6} u_{6\theta+7}) = x_1 \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$x_{6p+2} = x_2 \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta+3} u_{6\theta+4} u_{6\theta+5} u_{6\theta+6} u_{6\theta+7} u_{6\theta+8}) = x_2 \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$x_{6p+3} = x_3 \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta+4} u_{6\theta+5} u_{6\theta+6} u_{6\theta+7} u_{6\theta+8} u_{6\theta+9}) = x_3 \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$x_{6p+4} = x_4 \prod_{\theta=0}^{p-1} (u_{6\theta+5} u_{6\theta+6} u_{6\theta+7} u_{6\theta+8} u_{6\theta+9} u_{6\theta+10}) = x_4 \left(u_0 u_1 u_2 \frac{A_1 u_0 + B_1}{C_1 u_0 - A_1} \frac{A_1 u_1 + B_1}{C_1 u_1 - A_1} \frac{A_1 u_2 + B_1}{C_1 u_2 - A_1} \right)^p$$

$$y_{6p-1} = y_{-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta} v_{6\theta+1} v_{6\theta+2} v_{6\theta+3} v_{6\theta+4} v_{6\theta+5}) = y_{-1} \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$y_{6p} = y_0 \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta+1} v_{6\theta+2} v_{6\theta+3} v_{6\theta+4} v_{6\theta+5} v_{6\theta+6}) = y_0 \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$y_{6p+1} = y_1 \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta+2} v_{6\theta+3} v_{6\theta+4} v_{6\theta+5} v_{6\theta+6} v_{6\theta+7}) = y_1 \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$y_{6p+2} = y_2 \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta+3} v_{6\theta+4} v_{6\theta+5} v_{6\theta+6} v_{6\theta+7} v_{6\theta+8}) = y_2 \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$y_{6p+3} = y_3 \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta+4} v_{6\theta+5} v_{6\theta+6} v_{6\theta+7} v_{6\theta+8} v_{6\theta+9}) = y_3 \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$y_{6p+4} = y_4 \prod_{\theta=0}^{p-1} (v_{6\theta+5} v_{6\theta+6} v_{6\theta+7} v_{6\theta+8} v_{6\theta+9} v_{6\theta+10}) = y_4 \left(v_0 v_1 v_2 \frac{A_2 v_0 + B_2}{C_2 v_0 - A_2} \frac{A_2 v_1 + B_2}{C_2 v_1 - A_2} \frac{A_2 v_2 + B_2}{C_2 v_2 - A_2} \right)^p$$

$$\begin{aligned}
z_{6p-1} &= z_{-1} \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta} w_{6\theta+1} w_{6\theta+2} w_{6\theta+3} w_{6\theta+4} w_{6\theta+5}) = z_{-1} \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p \\
z_{6p} &= z_0 \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta+1} w_{6\theta+2} w_{6\theta+3} w_{6\theta+4} w_{6\theta+5} w_{6\theta+6}) = z_0 \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p \\
z_{6p+1} &= z_1 \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta+2} w_{6\theta+3} w_{6\theta+4} w_{6\theta+5} w_{6\theta+6} w_{6\theta+7}) = z_1 \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p \\
z_{6p+2} &= z_2 \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta+3} w_{6\theta+4} w_{6\theta+5} w_{6\theta+6} w_{6\theta+7} w_{6\theta+8}) = z_2 \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p \\
z_{6p+3} &= z_3 \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta+4} w_{6\theta+5} w_{6\theta+6} w_{6\theta+7} w_{6\theta+8} w_{6\theta+9}) = z_3 \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p \\
z_{6p+4} &= z_4 \prod_{\theta=0}^{p-1} (w_{6\theta+5} w_{6\theta+6} w_{6\theta+7} w_{6\theta+8} w_{6\theta+9} w_{6\theta+10}) = z_4 \left(w_0 w_1 w_2 \frac{A_3 w_0 + B_3}{C_3 w_0 - A_3} \frac{A_3 w_1 + B_3}{C_3 w_1 - A_3} \frac{A_3 w_2 + B_3}{C_3 w_2 - A_3} \right)^p
\end{aligned}$$

$u_0, u_1, \dots, u_5$, $v_0, v_1, \dots, v_5$ ve $w_0, w_1, \dots, w_5$ ifadelerinin $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0$ ve z_{-1} cinsinden ifadeleri (4.80)-(4.82) deki gibidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, çalışma ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilecektir.

5.1 Sonuçlar

Bu çalışma kapsamında, lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözülebilirliğine yönelik bir çalışma yürütülmüştür. a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1,2,3$) parametreleri birer reel sayı ve x_{-j}, y_{-j}, z_{-j} ($j=0,1$) başlangıç değerleri, çözümü iyi tanımlı yapan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n \frac{a_1 y_n + b_1 y_{n-1}}{c_1 y_n + d_1 y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = y_n \frac{a_2 z_n + b_2 z_{n-1}}{c_2 z_n + d_2 z_{n-1}}, \quad z_{n+1} = z_n \frac{a_3 x_n + b_3 x_{n-1}}{c_3 x_n + d_3 x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde tanımlanan üç boyutlu fark denklem sisteminin kapalı formda çözümleri elde edilmiştir. Sistem ele alınırken bilinear fark denkleminin genel çözümünden yararlanılmıştır. Bilinear fark denkleminin bazı özel durumları da çözüm formüllerinin elde edilmesinde dikkate alınmıştır. Kullanılan yöntemler fark denklemlerinin teorisinden bilinen, lineer fark denklemlerini çözmek için kullanılan yöntemlerdir. Ayrıca sistemi üçüncü mertebeden bir bilinear fark denklemine indirmek için kullanılan değişken değiştirme yöntemi de çalışmanın önemli bir parçasıdır.

5.2 Öneriler

İncelenen üç boyutlu fark denklem sisteminin daha yüksek boyutlara genellenmesi yeni bir çalışma konusu olabilir. Elde edilen daha genel sistemlerin aynı ya da benzer değişken değiştirmelerle bilinear fark denklemlerinin sistemlerine indirgenerek çözümlü çözülemeyeceği araştırılabilir. Bu çalışmada olduğu gibi, özel durumlar çözüm için verilecek olan formüllerin farklı olması durumlarını ortaya çıkarabileceğinden detaylı olarak incelenmesi düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- Abo-Zeid, R. (2014). Global behavior of a higher order difference equation, *Mathematica Slovaca*, 64(4), 931-940.
- Amleh, A. M., Camouzis, E., ve Ladas, G. (2008). On the dynamics of a rational difference equation, part I. *Int. J. Difference Equ*, 3(1), 1-35.
- Bereketoğlu, H., ve Kutay, V., (2011). *Fark Denklemleri*, Gazi Yayın Dağıtım. Ankara
- Bozkurt, F. (2013). Stability analysis of a nonlinear difference equation. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 2(1), 1-6.
- Brand, L. (1955). A sequence defined by a difference equation. *The American Mathematical Monthly*, 62(7), 489-492.
- Camouzis, E., ve Ladas, G. (2008). *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*. Chapman and Hall/CRC.
- Elaydi, S., An Introduction to Difference Equations, third edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1999.
- Elsayed, E. M., El-Dessoky, M. M., & Asiri, A. (2014). Dynamics and behavior of a second order rational difference equation. *J. Comput. Anal. Appl*, 16(4), 794-807.
- Elsayed, E. M., El-Dessoky, M. M., & Alghamdi, M. A. (2013). On the solutions of some systems of difference equations. *Archives Des Sciences*, 66(5), 369-378.
- Elsayed, E. M. (2009). Qualitative behavior of difference equation of order two. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(7-8), 1130-1141.
- El-Metwally, H., Grove, E. A., Ladas, G., Levins, R., ve Radin, M. (2001). On the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$ *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47(7), 4623-4634.
- Halim, Y., Touafek, N., ve Yazlik, Y. (2015). Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(6), 1004-1018.
- Kara, M., Yazlik, Y., ve Tollu, D. T. (2020). Solvability of a system of higher order nonlinear difference equations. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(5), 1566-1593.
- Kara, M., ve Yazlik, Y. (2019). Solvability of a system of nonlinear difference equations of higher order. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1533-1565.
- Karatas, R., Cinar, C., ve Simsek, D. (2006). On Positive Solutions of the Difference Equation $x_n = x_{n-5}$. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 1(10), 495-500.
- Kulenovic, M. R., ve Merino, O. (2002). *Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC.

- Kurbanlı, A. S., Çinar, C., ve Yalçinkaya, İ. (2011). On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} + 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} + 1)$ *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5-6), 1261-1267.
- McGrath, L. C., ve Teixeira, C. (2006). Existence and behavior of solutions of the rational equation $x_{n+1} = (ax_{n-1} + bx_n) / (cx_{n-1} + dx_n) \times x_n$, $n = 0, 1, \dots$ *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 649-674.
- Ozturk, I., Bozkurt, F., ve Ozen, S. (2006). On the difference equation $y_{n+1} = \alpha + \beta e^{-y_n} / \gamma + y_{n-1}$. *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1387-1393.
- Raouf, A. (2012). Global behaviour of the rational Riccati difference equation of order two: the general case. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(6), 947-961.
- Sedaghat, H. (2009). Global behaviours of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms. *Journal of Difference Equations and Applications*, 15(3), 215-224.
- Stević, S., ve Tollu, D. T. (2023). On a two-dimensional nonlinear system of difference equations close to the bilinear system.
- Stević, S., Iricanin, B., Kosmala, W., ve Smarda, Z. (2018). Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018(95), 1-18.
- Stević, S. (2013). On a system of difference equations which can be solved in closed form. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17), 9223-9228.
- Stević, S. (2011). On the difference equation $x_n = x_{n-2} / b_n + c_b x_{n-1} x_{n-2}$ *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), 4507-4513.
- Stević, S. (2004). More on a rational recurrence relation. *Appl. Math. E-Notes*, 4(1), 80-85.
- Şahinkaya, A., Yalçinkaya, İ., ve Tollu, D. T. (2020). A solvable system of nonlinear difference equations. *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(1), 10-20.
- Taskara, N., Tollu, D. T., Touafek, N., ve Yazlık, Y. (2020). A solvable system of difference equations.
- T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley, New York, 2001.
- Tollu, D. T., ve Yazlık, Y. (2024). Solvability and solution character of a hyperbolic cotangent-type difference equation of second-order. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 70(4), 3053-3099.

- Tollu, D. T., Yalcinkaya, I., Ahmad, H., ve Yao, S. W. (2021). A detailed study on a solvable system related to the linear fractional difference equation. *Math. Biosci. Eng*, 18(5), 5392-5408.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y., ve Taskara, N. (2017). Behavior of positive solutions of a difference equation. *Journal of applied mathematics & informatics*, 35(3_4), 217-230.
- Tollu, D. T., Yazlik, Y., ve Taskara, N. (2013). On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers. *Advances in Difference Equations*, 2013, 1-7.
- Yalçinkaya, I., Cinar, C., ve Atalay, M. (2008). On the solutions of systems of difference equations. *Advances in difference equations*, 2008, 1-9.
- Yazlik, Y., ve Kara, M. (2019). On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1675-1693.
- Yazlik, Y., Tollu, D. T., ve Taskara, N. (2013). On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers. *Applied Mathematics*, 4(12), 15-20.

EKLER

Aşağıdaki tabloda (4.24) denkleminin genel çözümleri verilmiştir.

Tablo 1:

	u_n	v_n	w_n
$\Delta_1 \neq 0,$ $\Delta_2 \neq 0,$ $\Delta_3 \neq 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right)$
$\Delta_1 = 0,$ $\Delta_2 \neq 0,$ $\Delta_3 \neq 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right)$
$\Delta_1 \neq 0,$ $\Delta_2 = 0,$ $\Delta_3 \neq 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right)$
$\Delta_1 \neq 0,$ $\Delta_2 \neq 0,$ $\Delta_3 = 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right)$
$\Delta_1 = 0,$ $\Delta_2 = 0,$ $\Delta_3 \neq 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(3)} \lambda_1^j + c_2^{(3)} \lambda_2^j}{c_1^{(3)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(3)} \lambda_2^{j-1}} - D_3 \right)$
$\Delta_1 = 0,$ $\Delta_2 \neq 0,$ $\Delta_3 = 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(2)} \lambda_1^j + c_2^{(2)} \lambda_2^j}{c_1^{(2)} \lambda_1^{j-1} + c_2^{(2)} \lambda_2^{j-1}} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right)$
$\Delta_1 \neq 0,$ $\Delta_2 = 0,$ $\Delta_3 = 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(1)} \lambda_1^{j+1} + c_2^{(1)} \lambda_2^{j+1}}{c_1^{(1)} \lambda_1^j + c_2^{(1)} \lambda_2^j} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right)$
$\Delta_1 = 0,$ $\Delta_2 = 0,$ $\Delta_3 = 0$	$\frac{1}{C_1} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_1 + D_1}{2} - D_1 \right)$	$\frac{1}{C_2} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_2 + D_2}{2} - D_2 \right)$	$\frac{1}{C_3} \left(\frac{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} k}{c_1^{(i)} + c_2^{(i)} (k-1)} \frac{A_3 + D_3}{2} - D_3 \right)$