T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİK İZDÜŞÜM KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER

Yasemin ALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

NİSAN-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Yasemin ALP tarafından hazırlanan "DİK İZDÜŞÜM KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER" adlı tez çalışması 25/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN	
Danışman Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman Savaş Durduran
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yasemin ALP
05/04/2019

ÖZET

DİK İZDÜŞÜM KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER

Yasemin ALP

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

2019, 31 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

İkinci dereceden rekürans bağıntıları ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmaların bazılarında Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir.

Biz çalışmamızda ikinci dereceden rekürans bağıntılarının uzayında ortonormal bazları ele aldık. Bu ortonormal bazları kullanarak dik izdüşüm matrisi elde ettik. Elde edilen dik izdüşüm matrisi, elemanları Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan Hankel matrisidir. Son olarak da dik izdüşüm matrisinden faydalanıp $\{G_n\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve tanımlamış olduğumuz $\{u_n\}$ ile $\{v_n\}$ dizilerinin elemanları arasında bazı özdeşlikler elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Dik İzdüşüm,Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları, Ortogonal baz

ABSTRACT

MS THESIS

THE IDENTITIES FOR GENERALIZED FIBONACCI NUMBERS VIA ORTHOGONAL PROJECTION

Yasemin ALP

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATIC

Advisor: Prof.Dr. Emine Gokcen KOCER

2019, 31 Pages

Jury
Advisor: Prof.Dr. Emine Gokcen KOCER
Prof. Dr. Ayse Dilek MADEN
Asst. Prof. Dr. Melek ERDOGDU

Many researches have been carried out on the second order recurrence relation. In some of these studies, identities have been obtained with Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas and Modified Pell numbers.

We have studied orthonormal bases in the space of recurrence relations in the second degree. By using orthonormal bases have been obtained orthogonal projection matrix. The resulting orthogonal projection matrix is the Hankel matrix with the Generalized Fibonacci numbers. Finally, using the orthogonal projection matrix, we obtain identities between elements of $\{G_n\}$ Generalized Fibonacci sequence, $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ sequences.

Keywords: Orthogonal Projection, Generalized Fibonacci Numbers, Orthogonal Base

ÖN SÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim üyesi, Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER' in yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur .

Çalışmalarım boyunca bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, fikirleriyle bakış açımı genişletip zenginleştiren ve çalışmam süresince sabırla desteğini sürdüren değerli hocam Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER' e saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yasemin ALP
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fibonacci sayı dizisi ve Fibonacci sayılarının rekürans bağıntılarına benzer rekürans bağıntısına sahip birçok sayı dizisi araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Bu sayı dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Rekürans dizileri ile ilgili geniş bilgiye Koshy' nin " Fibonacci and Lucas Numbers with Applications" isimli kitabından ulaşabiliriz. Bu çalışmamızda $\{G_n\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerini göz önüne alacağız. Bu diziler ile ilgili geniş bilgi üçüncü bölümde verilecektir. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ in $R(p,1)$ alt uzayındaki bazlar yardımıyla dik izdüşüm matrisi elde edilecektir.

Dupree ve Mathes tarafından 2012 yılında "Singular values of $k-$Fibonacci and $k-$Lucas Hankel matrices" adlı çalışmada $\mathbb{R}^n$ nin $R(k,1)$ alt uzayı ele alınmış ve bu uzaydaki elemanlar dikkate alınarak dik izdüşüm matrisi

$$\frac{k}{f_n}\begin{pmatrix} f_{-n+1} & f_{-n+2} & \cdots & f_0 \\ f_{-n+2} & f_{-n+3} & \cdots & f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilmiştir. Bu matrisin $k-$Fibonacci sayıları ile tanımlı Hankel matrisi olduğu ifade edilmiştir.

Daha sonra 2015 yılında Hawkins, Johnson ve Mathes tarafından tekrar aynı $R(k,1)$ uzayı ele alınarak $\frac{k}{f_n}H_f$ Hankel matrisinin dik izdüşüm matrisi olduğunun yeni bir ispatı verilmiştir. $R(k,1)$ uzayında ortonormal bazlar ile dik izdüşüm matrisi ilişkilendirilerek Fibonacci ve Lucas sayıları arasında çeşitli özdeşlikler bulunmuştur.

Alp ve Koçer, Modified Pell dizisinin ait olduğu $R(2,1)$ uzayında dik izdüşüm matrisini Pell sayıları ile tanımlı Hankel matrisi

$$\frac{2}{P_n}\begin{pmatrix} P_{-n+1} & P_{-n+2} & \cdots & P_0 \\ P_{-n+2} & P_{-n+3} & \cdots & P_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

olarak elde etmiştir. Bu matris kullanılarak Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir.

Yukarıdaki makalelerde $k-$Fibonacci dizisi ve Modified Pell dizisi kullanılmıştır. Bu rekürans dizilerinin bir genelleştirmesi olan $\{G_n\}$ dizisine çalışmamızın üçüncü bölümünde yer verdik. $R(p,1)$ uzayındaki ortonormal bazları göz önüne alarak dik izdüşüm matrisini

$$\frac{p}{u_n}\begin{pmatrix} u_{-n+1} & u_{-n+2} & \cdots & u_0 \\ u_{-n+2} & u_{-n+3} & \cdots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde ettik. Bu matrisin Hankel matrisi olduğu açıktır. Bu matris kullanılarak $\{G_n\},\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin elemanları ile ilgili bazı özdeşlikler elde ettik. Elde edilen tüm bu sonuçları çalışmamızın dördüncü bölümünde görebiliriz. Dolayısıyla elde ettiğimiz tüm sonuçlar yukarıdaki üç çalışmada elde edilen sonuçların genel bir halidir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Birçok yazar ikinci dereceden rekürans bağıntılarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Bu bölümde özellikle Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve Horadam sayıları ile ilgili olanları ele alacağız. Ayrıca matrislerin normları ile ilgili çalışmaları da inceleyeceğiz.

Alp ve Koçer, $R(2,1)$ uzayındaki ortonormal bazları göz önüne alarak Pell sayıları ile tanımlı Hankel matrisini elde etmiştir. Elde edilen bu matrisi ve ortonormal bazları kullanarak Pell, Modified Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında özdeşlikler elde etmişlerdir (Alp ve Koçer, 2018).

Dupree ve Mathes, $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları ile tanımlı Hankel matrislerini göz önüne almıştır. Ayrıca $R(k,1)$ $k-$Fibonacci dizilerinin iki boyutlu uzayında dik izdüşüm matrisi elde etmişler ve bu matrisin $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları ile tanımlı Hankel matrisi olduğunu göstermişlerdir (Dupree ve Mathes, 2012).

Hawkins, Johnson ve Mathes, Dupree ve Mathes tarafından tanımlanan $R(k,1)$ uzayındaki ortonormal bazları göz önüne alarak dik izdüşüm matrisini elde etmişlerdir. Elde edilen bu matris, elemanları $k-$Fibonacci sayıları olan Hankel matrisidir (Hawkins, Hebert-Johnson ve Mathes, 2015).

Horadam, bu makalesinde $W_n(a,b;p,q)$ ile gösterilen Horadam sayılarını $n \geq 2$ için

$$W_n(a,b;p,q) = pW_{n-1} - qW_{n-2} \ ; \ W_0 = a, W_1 = b$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç koşullar ile tanımlamıştır. Ayrıca Horadam sayılarının özelliklerini ve diğer sayılar ile arasındaki ilişki incelenmiştir (Horadam, 1965).

Horzum ve Koçer, $h_n(x;a,b;p,q)$ Horadam polinomunu $n \geq 3$ için

$$h_n(x) = pxh_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ve

$$h_1(x) = a, \ h_2(x) = bx$$

başlangıç koşulları ile tanımlamışlardır. Ayrıca bu makalede Horadam polinomlarının sağladığı bazı özdeşlikler elde edilmiştir (Horzum ve Koçer, 2009).

Kalman ve Mena, A_0 ve A_1 başlangıç şartları ve

$$A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı $\{A_n\}$ dizisini göz önüne almıştır. Tüm bu dizilerin kümesini ise $R(a,b)$ ile göstermişler ve bu uzay içinde $\{A_n\}$ dizisinin özelliklerini elde etmişlerdir (Kalman ve Mena, 2003).

Mansour, Horadam dizisinin elemanlarını göz önüne almıştır. Horadam sayılarının kuvvetlerinin toplamı ile ilgili sonuçları vermiştir (Mansour, 2003).

Shen, $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları ile tanımlı Toeplitz matrisini göz önüne almıştır. Bu matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmiştir. Ayrıca bu matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımları sonucunda elde edilen matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmiştir (Shen, 2012).

Solak, Fibonacci ve Lucas sayıları ile Circulant matrisleri tanımlamış ve normlarını incelemiştir (Solak, 2005).

Solak ve Bahşi, Fibonacci ve Lucas sayıları ile tanımlı Hankel matrislerini tanımlayarak, normlarını elde etmişlerdir (Solak ve Bahşi, 2011).

Solak ve Bahşi, Fibonacci ve Lucas sayıları ile tanımlı Toeplitz matrislerini tanımlayarak, normlarını elde etmişlerdir (Solak ve Bahşi, 2013).

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde $\{G_n\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci ,$\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerini tanıtarak, bu dizilerle ilgili yapılan çalışmalardan bahsedeceğiz. Ayrıca Hankel matrisi, dik izdüşüm, ortogonal baz ile ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1 $n \geq 1$ için

$$G_{n+1} = pG_n + G_{n-1} \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ve $G_0 = a, G_1 = b$ başlangıç koşulları ile tanımlanan diziye Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir.

(3.1) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde olup (3.2) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimini aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n	$G_n(a,b;p,1)$
0	a
1	b
2	$pb+a$
3	$p^2b+pa+b$
4	$p^3b+p^2a+2pb+a$
5	$p^4b+p^3a+3p^2b+2pa+b$
6	$p^5b+p^4a+4p^3b+3p^2a+3pb+a$
$\vdots$	$\vdots$

a,b ve p nin alacağı farklı değerler için $\{G_n(a,b;p,1)\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

1) $a=0,b=1;p=1$ için $\{F_n\}$ *Fibonacci* dizisini elde ederiz.

2) $a=2,b=1;p=1$ için $\{L_n\}$ *Lucas* dizisini elde ederiz.

3) $a=0,b=1;p=2$ için $\{P_n\}$ *Pell* dizisini elde ederiz.

4) $a=2,b=2;p=2$ için $\{Q_n\}$ *Pell-Lucas* dizisini elde ederiz.

5) $p=1$ için $\{T_n\}$ *Tagiuri* dizisini elde ederiz.

6) $a=1,b=1;p=1$ için $\{q_n\}$ *Modified Pell* dizisini elde ederiz.

Yukarıda verilen dizilerin ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	...
F_n	0	1	1	2	3	...
L_n	2	1	3	4	7	...
P_n	0	1	2	5	12	...
Q_n	2	2	6	14	34	...
T_n	a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	...
q_n	1	1	3	7	17	...

(3.1) rekürans bağıntısını sağlayan G_n için Binet formülü,

$$G_n = A\alpha^n - B\beta^n$$

dir. Burada $A=\dfrac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$ ve $B=\dfrac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}$ şeklindedir. α ve β ise (3.2)'deki karakteristik denklemin kökleridir.

Tanım 3.2 $n\geq 1$ için

$$u_{n+1} = pu_n + u_{n-1} \tag{3.3}$$

rekürans bağıntısı ve

$$u_0 = 0, u_1 = b$$

başlangıç koşulları ile tanımlanan diziye $\{u_n\}$ dizisi denir.

(3.3) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde olup (3.4) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$$

dir. u_n için Binet formülü,

$$u_n = b\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$u_{-i} = (-1)^{i+1} u_i$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 3.3 $n \geq 1$ için

$$v_{n+1} = pv_n + v_{n-1} \tag{3.5}$$

rekürans bağıntısı ve

$$v_0 = 2b, v_1 = pb$$

başlangıç koşulları ile tanımlanmış diziye $\{v_n\}$ dizisi denir.

(3.5) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0 \tag{3.6}$$

şeklinde olup (3.6) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$$

dir. Ayrıca (3.5) rekürans bağıntısının Binet formülü,

$$v_n = \frac{(pb-2b\beta)\alpha^n - (pb-2b\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. $\{v_n\}$ dizisinin elemanlarının negatif indisleri için

$$v_{-i} = (-1)^i v_i$$

eşitliği mevcuttur.

$\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin elemanları arasında aşağıdaki özdeşlikler vardır.

$$u_{2m} = \frac{1}{b} u_m v_m \tag{3.7}$$

$$v_m v_{m+1} - u_m u_{m+1}\left(p^2+4\right) = 2(-1)^m b^2 p \tag{3.8}$$

$$u_m u_{m+1}(p^2+4) + pb^2(-1)^m = bv_{2m+1} \tag{3.9}$$

$$u_m v_{m+1} = bu_{2m+1} + (-1)^{m+1} b^2 \tag{3.10}$$

$$u_{m+1} v_m = bu_{2m+1} + (-1)^m b^2 \tag{3.11}$$

$$pv_{n-2} = u_n - u_{n-4} \tag{3.12}$$

$$u_n u_{n+k} = \frac{b}{p^2+4}(v_{2n+k} + (-1)^{n+1} v_k) \tag{3.13}$$

n nin pozitif ve negatif ilk birkaç değeri için $\{G_n\},\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin elemanlarını aşağıdaki tabloda görebiliriz.

n	G_n	u_n	v_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-3	$-p^3a+p^2b-2ap+b$	p^2b+b	$-p^3b-3pb$
-2	$p^2a-pb+a$	$-pb$	p^2b+2b
-1	$b-pa$	b	$-pb$
0	a	0	$2b$
1	b	b	pb
2	$pb+a$	pb	p^2b+2b
3	$p^2b+pa+b$	p^2b+b	p^3b+3pb
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tanım 3.4 $H_n = (h_{ij})$ Hankel matrisinin, ij -inci elemanı $i, j = 0,1,\ldots,n-1$ için

$$h_{ij} = h_{i+j}$$

olarak tanımlanır. Yani $n \times n$ Hankel matrisi

$$H_n = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-1} & \cdots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & h_n & \cdots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Hogben, 2006).

Teorem 3.1 H_n Hankel matrisi simetrik bir matristir (Hogben, 2006).

Tanım 3.5 A $n \times n$ bir matris olsun. Eğer $A^2 = A$ oluyorsa A matrisine idempotent matris denir (Fraleigh, 1995).

Tanım 3.6 $\mathbb{R}^n$ de u ve w iki vektör olsun. Eğer

$$\langle u, w \rangle = 0$$

ise u ve w vektörlerine ortogonal vektörler denir (Fraleigh, 1995).

Tanım 3.7. $\mathbb{R}^n$ de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sıfırdan farklı vektörler olsun. Eğer bu vektörler içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de ortogonaldir denir. Yani $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ortogonal küme ise

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \;\; i \neq j \;\; i, j = 1,2,\ldots,k$$

dir (Fraleigh, 1995).

Teorem 3.2 $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı ortogonal vektörlerin kümesi $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ olsun. O zaman $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ kümesi lineer bağımsızdır ve bu kümenin gerdiği alt uzay için bir bazdır (Fraleigh, 1995).

İspat $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ kümesi ortogonal olduğundan

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \;\; i \neq j \;\; i, j = 1,2,\ldots,k \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ortogonal kümesinin lineer bağımsız olduğunu göstermek için aşağdaki ifadeyi göz önüne alalım.

$$v_j = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_{j-1} v_{j-1}$$

Bu denklemin her iki tarafını v_j ile çarptığımızda

$$\begin{aligned} \langle v_j, v_j \rangle &= \langle s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_{j-1} v_{j-1}, v_j \rangle \\ &= \langle s_1 v_1, v_j \rangle + \langle s_2 v_2, v_j \rangle + \ldots \langle s_{j-1} v_{j-1}, v_j \rangle \end{aligned}$$

bulunur. (3.14) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\langle v_j, v_j \rangle = 0$$

elde edilir ki $v_j \neq 0$ ifadesi ile çelişir. Bu nedenle v_j diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılamadığından $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ kümesi lineer bağımsızdır ve $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ kümesinin gerdiği uzay için bir bazdır.

Tanım 3.8 W, $\mathbb{R}^n$ in bir alt uzayı olsun. W alt uzayının bir bazını $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ şeklinde alalım. Eğer

$$i) \langle q_i q_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

$$ii) \|q_i\| = 1$$

ise $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ vektörleri ortonormaldir (Fraleigh, 1995).

Tanım 3.9 A, $n \times n$ bir matris olsun. Eğer $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı v sütun vektörü için

$$Av = \lambda v$$

eşitliği sağlanıyorsa λ sayılarına A matrisinin özdeğerleri denir. v vektörlerine de A matrisinin λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir (Fraleigh, 1995).

Teorem 3.3 A, $n \times n$ bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skaler, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sıfırdan farklı vektörler olsun. C matrisi $j-$inci sütun vektörü olarak v_j ye sahip $n \times n$ matris olsun. D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. $AC = CD$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skaler ifadelerinin A matrisinin özdeğerleri olması ve v_j lerin A matrisinde λ_j özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler olmasıdır (Fraleigh, 1995).

İspat CD matrisi

$$CD = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \ldots & \lambda_n v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan AC matrisi

$$AC = A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ Av_1 & Av_2 & \ldots & Av_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}.$$

olarak elde edilir. $AC = CD$ olması için gerek ve yeter şart $Av_j = \lambda_j v_j$ olduğu görülür.

Tanım 3.10 A, $n \times n$ bir matris olsun. Eğer $C^{-1}AC = D$ matrisini sağlayan tersinir bir C matrisi varsa ve $C^{-1}AC = D$ matrisi köşegen bir matris ise A matrisi köşegenleştirilebilirdir denir (Fraleigh, 1995).

Teorem 3.4 A $n \times n$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler $b_1, b_2, ..., b_n$ olsun. Bu takdirde

$$A = \lambda_1 b_1 b_1^T + \lambda_2 b_2 b_2^T + \ldots + \lambda_n b_n b_n^T$$

dir (Fraleigh, 1995).

Teorem 3.5 V, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt uzayı ve $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu takdirde

$$\vec{x} = \vec{x}^{\parallel} + \vec{x}^{\perp}$$

dir. $\vec{x}$ vektörünün V uzayı üzerine dik izdüşümü $\mathbb{R}^n$' den $\mathbb{R}^n$' e lineer dönüşümdür ve $T(\vec{x}) = proj_v(\vec{x}) = \vec{x}^{\parallel}$ ile gösterilir (Bretscher, 2015).

Teorem 3.6 V, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt uzayı ve $u_1, u_2, \ldots, u_m$ V' nin ortonormal bazları olsun. O zaman

$$proj_v(x) = \langle u_1, x \rangle u_1 + \cdots + \langle u_m, x \rangle u_m$$

dir (Bretscher, 2015).

Teorem 3.7 V, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt uzayı ve $u_1, u_2, \ldots, u_m$ V' nin ortonormal bazları olsun. x vektörünün V uzayı üzerine dik izdüşüm matrisi

$$P = u_1 u_1^T + u_2 u_2^T + \cdots + u_m u_m^T$$

dir (Bretscher, 2015).

Teorem 3.8 $\mathbb{R}^n$ uzayının V alt uzayı için izdüşüm matrisi hem idempotent hem de simetrik bir matristir. Aksine hem idempotent hem de simetrik olan her $n \times n$ matris izdüşüm matrisidir (Fraleigh, 1995).

Tanım 3.11 A matrisi kare matris ve A^* matrisi A matrisinin eşlenik transpozu olmak üzere A^*A matrisinin özdeğerlerinin kareköküne A matrisinin singüler değerleri denir ve σ_n ile gösterilir (Fraleigh, 1995).

Tanım 3.12 A matrisinin maksimum singüler değerine A matrisinin spektral normu denir ve $\|A\|_2$ ile gösterilir. Yani

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \le i \le n} \lambda_i \left(A^* A \right)}$$

dır (Fraleigh, 1995).

4. DİK İZDÜŞÜM KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$ in $R(p,1)$ alt uzayı göz önüne alınarak dik izdüşüm matrisi elde edilecektir. Bu matris kullanılarak G_n, u_n ve v_n sayıları ile ilgili özdeşlikler verilecektir.

$\mathbb{R}^n$ uzayının Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarından oluşan $R(p,1)$ alt uzayını ele alalım. $\mathbb{R}^n$ deki vektörlerin bu iki boyutlu uzay üzerine dik izdüşüm matrisi n nin çift değerleri için

$$\frac{p}{u_n}\begin{pmatrix} u_{-n+1} & u_{-n+2} & \cdots & u_0 \\ u_{-n+2} & u_{-n+3} & \cdots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada

$$H_u = \begin{pmatrix} u_{-n+1} & u_{-n+2} & \cdots & u_0 \\ u_{-n+2} & u_{-n+3} & \cdots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrisi $\{u_n\}$ dizisinin elemanları ile tanımlı Hankel matrisidir. $\{u_n\}$ dizisinin elemanları yerine $\{v_n\}$ dizisinin elemanlarını kullanırsak

$$H_v = \begin{pmatrix} v_{-n+1} & v_{-n+2} & \cdots & v_0 \\ v_{-n+2} & v_{-n+3} & \cdots & v_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde $\{v_n\}$ dizisinin elemanları ile tanımlı olan Hankel matrisini elde ederiz. H_v Hankel matrisini n nin tek değerleri için ilerleyen bölümlerde $R(p,1)$ uzayı üzerine dik izdüşüm matrisi ile ilişkilendireceğiz.

Teorem 4.1 n çift iken; $\frac{p}{u_n}H_u$ Hankel matrisinin spektral normu;

$$\left\|\frac{p}{u_n}H_u\right\|_2 = 1$$

dir.

İspat $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin simetrik matris olduğu açıktır. $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin özdeğerlerini bulmalıyız. $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin karakteristik polinomu;

$$\left|\lambda I-\frac{p}{u_n}H_u\right|=\lambda^{n-2}(\lambda-1)^2$$

şeklindedir. $\left|\lambda I-\frac{p}{u_n}H_u\right|=0$ denkleminin kökleri $\lambda_{1,2}=1$ ve $k=3,4,\dots,n$ için $\lambda_k=0$ dır. Simetrik bir matrisin spektral normu maksimum özdeğerine eşit olduğundan $\left\|\frac{p}{u_n}H_u\right\|_2=1$ olduğu açıktır.

Teorem 4.2 $n=2m+1$ için; H_v Hankel matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1=\frac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb} \text{ ve } \lambda_2=\frac{v_m v_{m+1}}{pb}$$

dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$u=(u_{-m},\dots,u_0,\dots,u_m)^T \text{ ve } v=(v_{-m},\dots,v_0,\dots,v_m)^T$$

şeklindedir.

İspat H_v matrisinin karakteristik polinomu;

$$|\lambda I-H_v|=\lambda^{n-2}\left(\lambda^2-\frac{2v_{2m+1}}{p}\lambda+\frac{(p^2+4)(u_{2m+1}^2-b^2)}{p^2}\right)$$

şeklindedir. $|\lambda I-H_v|=0$ denkleminin kökleri

$$\lambda_1=\frac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb}, \quad \lambda_2=\frac{v_m v_{m+1}}{pb}$$

ve $k=3,4,\dots,n$ için $\lambda_k=0$ dır.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$u=(u_{-m},\dots,u_0,\dots,u_m)^T \text{ ve } v=(v_{-m},\dots,v_0,\dots,v_m)^T$$

dir.

Teorem 4.3 $n(n=2m+1)$ için; H_v matrisinin spektral normu;

$$\|H_v\|_2 = \begin{cases} \dfrac{v_m v_{m+1}}{pb} &, \ m \text{ çift} \\ \dfrac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb}, & m \text{ tek} \end{cases}$$

dir.

İspat H_v matris simetrik matris olduğu için H_v matrisinin maksimum özdeğeri spektral normu verir. Dolayısıyla Teorem 4.2 den

$$\|H_v\|_2 = \begin{cases} \dfrac{v_m v_{m+1}}{pb} &, \ m \text{ çift} \\ \dfrac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb}, & m \text{ tek} \end{cases}$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\dfrac{p}{u_n} H_u$ Hankel matrisinin dik izdüşüm matrisi olduğunu gösterirken kullanacağımız 2×2 tipindeki E matrisini tanımlayalım.

Tanım 4.1 E 2×2 matrisi,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & pb \end{pmatrix}$$

$\{u_n\}$ dizisinin elemanlarını üreten matristir.

Sonuç 4.1 $m \in \mathbb{Z}$ için,

$$E^m = b^{m-1}\begin{pmatrix} u_{m-1} & u_m \\ u_m & u_{m+1} \end{pmatrix}$$

dir.

İspat Matrislerin çarpma işlemi göz önüne alındığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında ispat açıktır.

Teorem 4.4 $t \in \mathbb{Z}$ ve $s \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{b^{t+4i-1}} E^{t+4i} = \frac{u_{2(s+1)}}{pb^{t+2s}} E^{t+2s}$$

dir.

İspat Sonuç 4.1 kullanılırsa katsayıların eşitliğinden

$$\sum_{i=0}^{s} u_{t+4i} = \frac{u_{2(s+1)}}{pb} u_{t+2s}$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $\{u_n\}$ dizisinin Binet formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s} u_{t+4i} &= \sum_{i=0}^{s} b\left(\frac{\alpha^{t+4i}-\beta^{t+4i}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= b\frac{\alpha^{t}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{s}\alpha^{4i} - b\frac{\beta^{t}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{s}\beta^{4i} \\
&= b\frac{\alpha^{t}}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{4s+4}-1}{\alpha^{4}-1}\right) - b\frac{\beta^{t}}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta^{4s+4}-1}{\beta^{4}-1}\right) \\
&= \frac{b}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{4s+t+4}-\alpha^{t}}{\alpha^{4}-1} - \frac{\beta^{4s+t+4}-\beta^{t}}{\beta^{4}-1}\right) \\
&= \frac{b}{\alpha-\beta}\left(\frac{\left(\alpha^{4s+t}-\beta^{4s+t}\right)-\left(\alpha^{4s+t+4}-\beta^{4s+t+4}\right)-\left(\alpha^{t-4}-\beta^{t-4}\right)+\left(\alpha^{t}-\beta^{t}\right)}{\left(\alpha^{4}-1\right)\left(\beta^{4}-1\right)}\right) \\
&= \frac{u_{4s+t}-u_{4s+t+4}-u_{t-4}+u_{t}}{-p^{4}-4p^{2}}
\end{aligned}$$

olur. (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s} u_{t+4i} &= \frac{-pv_{4s+t+2}+pv_{t-2}}{-p^{4}-4p^{2}} \\
&= \frac{v_{4s+t+2}-v_{t-2}}{p^{3}+4p}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinde $n=2s+2$ ve $k=t-2$ alınırsa

$$\sum_{i=0}^{s} u_{t+4i} = \frac{u_{2(s+1)}}{pb} u_{t+2s}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.5 n çift iken; $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisi $R(p,1)$ uzayı üzerine dik izdüşüm matrisidir.

İspat Teorem 3.8 den dik izdüşüm matrisi hem idempotent hem de simetrik bir matris olmalıdır. $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin simetrik matris olduğu açıktır. O halde $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin idempotent olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$H_u^2 = \frac{u_n}{p}H_u$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. H_u matrisini E matrisi ile

$$H_u = \begin{pmatrix} \overbrace{u_{-n+1} \quad u_{-n+2}}^{\frac{1}{b^{-n+1}}E^{-n+2}} & \cdots & \overbrace{u_{-1} \quad u_0}^{\frac{1}{b^{-1}}E^{0}} \\ u_{-n+2} \quad u_{-n+3} & \cdots & u_0 \quad u_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \ddots & \vdots \qquad \vdots \\ u_{-1} \qquad u_0 & \cdots & u_{n-3} \quad u_{n-2} \\ \underbrace{u_0 \qquad u_1}_{\frac{1}{b^{-1}}E^{0}} & \cdots & \underbrace{u_{n-2} \quad u_{n-1}}_{\frac{1}{b^{n-3}}E^{n-2}} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $n = 2m$ alırsak

$$H_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^{-n+1}}E^{-n+2} & \frac{1}{b^{-n+3}}E^{-n+4} & \cdots & \frac{1}{b^{-3}}E^{-2} & \frac{1}{b^{-1}}E^{0} \\ \frac{1}{b^{-n+3}}E^{-n+4} & \frac{1}{b^{-n+5}}E^{-n+6} & \cdots & \frac{1}{b^{-1}}E^{0} & \frac{1}{b}E^{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{b^{-3}}E^{-2} & \frac{1}{b^{-1}}E^{0} & \cdots & \frac{1}{b^{n-7}}E^{n-6} & \frac{1}{b^{n-5}}E^{n-4} \\ \frac{1}{b^{-1}}E^{0} & \frac{1}{b}E^{2} & \cdots & \frac{1}{b^{n-5}}E^{n-4} & \frac{1}{b^{n-3}}E^{n-2} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{b^{2(i+j)-2(m+1)-1}} E^{2(i+j)-2(m+1)} \right]_{i,j=1}^{m}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H_u^2 &= \left[\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{b^{2(i+r)-2(m+1)-1}} E^{2(i+r)-2(m+1)} \frac{1}{b^{2(r+j)-2(m+1)-1}} E^{2(r+j)-2(m+1)} \right]_{i,j=1}^{m} \\ &= \left[\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{b^{2(i+j)-4m+4(r-1)-2}} E^{2(i+j)-4m+4(r-1)} \right]_{i,j=1}^{m} \end{aligned}$$

olup Teorem 4.4 den

$$\begin{aligned} H_u^2 &= \left[\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{b^{2(i+j)-4m+4s-2}} E^{2(i+j)-4m+4s} \right]_{i,j=1}^{m} \\ &= \frac{u_{2m}}{pbb^{-1}} \left[\frac{1}{b^{2(i+j)-4m+2(m-1)-1}} E^{2(i+j)-4m+2(m-1)} \right]_{i,j=1}^{m} \\ &= \frac{u_{2m}}{p} \left[\frac{1}{b^{2(i+j)-2(m+1)-1}} E^{2(i+j)-2(m+1)} \right]_{i,j=1}^{m} \\ &= \frac{u_n}{p} H_u \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisi idempotent matristir.

Sonuç 4.2 n çift ve $-n+1 \le i,j \le n-1$ için

$$\frac{p}{u_n}u_{i+j-n+1} = \frac{p^2}{u_n^2}\sum_{k=0}^{n-1} u_{i+k-n+1}u_{k+j-n+1}$$

elde edilir.

İspat $\frac{p}{u_n}H_u$ matrisinin idempotentliği ile matrislerin çarpma işlemi göz önüne alındığında ispat açıktır.

Sonuç 4.3 n çift ve $-n+1 \le i,j \le n-1$ iken

$$p\sum_{t=0}^{n-1} u_{i-t}u_{j-t} = u_n u_{i+j-n+1}$$

dir.

İspat Sonuç 4.2 de $n-k-1=t$ şeklinde aldığımızda ve gerekli işlemleri yaptığımız takdirde verilen ifadeyi elde ederiz.

Örnek 4.1 Sonuç 4.3 de $\{u_n\}$ dizisinde $b=1$ ve $p=2$ aldığımızda Pell sayısı dizisini elde edeceğimiz açıktır. Buradan

$$2\sum_{t=0}^{n-1} P_{i-t}P_{j-t} = P_n P_{i+j-n+1}$$

bulunur (Alp ve Koçer 2018).

Şimdi, $R(p,1)$ uzayında $\{G_n\}$ dizisinin elemanlarından oluşan bazları kullanarak dik izdüşüm matrisi olan $\frac{p}{u_n}H_u$ Hankel matrisini elde edelim.

n çift ve $s=(G_0,G_1,\ldots,G_{n-2},G_{n-1})^T=(G_i)_{i=0}^{n-1} \in R(p,1)$ şeklinde sütun vektörünü ele alalım. Ayrıca

$$s^{\perp}=(-G_{n-1},G_{n-2},\ldots,-G_1,G_0)^T=\left((-1)^{i+1}G_{n-i-1}\right)_{i=0}^{n-1}$$

sütun vektörünü tanımlayalım.

$$\{s,s^{\perp}\}$$

kümesi $R(p,1)$ de ortogonal bir bazdır. $\|s\|^2 = \|s^{\perp}\|^2 = \sum_{k=o}^{n-1} G_k^2 = \dfrac{G_n G_{n-1} + (pa^2 - ab)}{p}$ olup

$u = \dfrac{s}{\|s\|}$ ve $v = \dfrac{s^{\perp}}{\|s^{\perp}\|}$ şeklinde tanımlanan $\{u, v\}$ ortonormal bir bazdır.

Teorem 3.7 den dik izdüşüm matrisi

$$P = uu^T + vv^T \tag{4.2}$$

dir. Bu dik izdüşüm matrisi $\dfrac{p}{u_n} H_u$ dir.

Örnek 4.2 $n = 6$ için

$$s = \begin{pmatrix} a \\ b \\ pb + a \\ p^2b + pa + b \\ p^3b + p^2a + 2pb + a \\ p^4b + p^3a + 3p^2b + 2pa + b \end{pmatrix} \text{ ve } s^{\perp} = \begin{pmatrix} -p^4b - p^3a - 3p^2b - 2pa - b \\ p^3b + p^2a + 2pb + a \\ -p^2b - pa - b \\ pb + a \\ -b \\ a \end{pmatrix}.$$

dır. Buradan

$$\|s\|^2 = \|s^{\perp}\|^2 = p^8b^2 + 2p^7ab + 7p^6b^2 + p^6a^2 + 12p^5ab + 16p^4b^2 + 5p^4a^2$$
$$+ 22p^3ab + 13p^2b^2 + 7p^2a^2 + 12abp + 3b^2 + 3a^2$$

olup kısaca $\|s\|^2 = \|s^{\perp}\|^2 = X$ ile gösterelim. Dolayısıyla u ve v vektörleri

$$u = \frac{1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ pb + a \\ p^2b + pa + b \\ p^3b + p^2a + 2pb + a \\ p^4b + p^3a + 3p^2b + 2pa + b \end{pmatrix}$$

ve

$$v = \frac{1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} -p^4b - p^3a - 3p^2b - 2pa - b \\ p^3b + p^2a + 2pb + a \\ -p^2b - pa - b \\ pb + a \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. (4.2) ifadesinden dik izdüşüm matrisi $P=\frac{1}{X}(ss^T+s^{\perp}(s^{\perp})^T)$ olup

$$P=\frac{p}{p^5b+4p^3b+3pb}\begin{pmatrix} p^4b+3p^2b+b & -p^3b-2pb & p^2b+b & -pb & b & 0 \\ -p^3b-2pb & p^2b+b & -pb & b & 0 & b \\ p^2b+b & -pb & b & 0 & b & pb \\ -pb & b & 0 & b & pb & p^2b+b \\ b & 0 & b & pb & p^2b+b & p^3b+2pb \\ 0 & b & pb & p^2b+b & p^3b+2pb & p^4b+3p^2b+b \end{pmatrix}$$

dır.

Örnek 4.3 Örnek 4.2 de $a=1, b=1$ ve $p=2$ aldığımızda

$$P=\frac{1}{2030}(ss^T+s^{\perp}(s^{\perp})^T)$$
$$=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 29 & -12 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ -12 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 12 & 29 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris Modified Pell dizisinin uzayında elde edilen dik izdüşüm matrisidir (Alp ve Koçer, 2018).

Örnek 4.4 Örnek 4.2 de $a=0, b=1$ ve $p=k$ aldığımızda

$$P=\frac{k}{k^5+4k^3+3k}(ss^T+s^{\perp}(s^{\perp})^T)$$
$$=\frac{k}{k^5+4k^3+3k}\begin{pmatrix} k^4+3k^2+1 & -k^3-2k & k^2+1 & -k & 1 & 0 \\ -k^3-2k & k^2+1 & -k & 1 & 0 & 1 \\ k^2+1 & -k & 1 & 0 & 1 & k \\ -k & 1 & 0 & 1 & k & k^2+1 \\ 1 & 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k \\ 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k & k^4+3k^2+1 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris $k-$Fibonacci sayılarının uzayı $R(k,1)$ de elde edilen dik izdüşüm matrisidir (Dupree ve Mathes, 2014). Bu matriste $k=1$ alınırsa klasik Fibonacci dizisinin elemanları ile tanımlı matris

$$P=\frac{1}{40}(ss^T+s^{\perp}(s^{\perp})^T)$$
$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.6 n çift ve $-n+1\le i,j\le n-1$ iken

$$u_{i+j-n+1}\left(G_nG_{n-1}+\left(pa^2-ab\right)\right)=u_n\left(G_iG_j+(-1)^{i+j}G_{n-i-1}G_{n-j-1}\right) \tag{4.3}$$

dir.

İspat (4.1) ve (4.2) de verilen matrislerin $ij-$inci elemanlarının eşitliğinden,

$$\frac{p}{u_n}u_{i+j-n+1}=\frac{p}{G_nG_{n-1}-G_0G_{-1}}\left(G_iG_j+(-1)^{i+j}G_{n-i-1}G_{n-j-1}\right)$$
$$\left(G_nG_{n-1}-G_0G_{-1}\right)u_{i+j-n+1}=u_n\left(G_iG_j+(-1)^{i+j}G_{n-i-1}G_{n-j-1}\right)$$

dir. Burada $G_0=a$ ve $G_{-1}=b-pa$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u_{i+j-n+1}\left(G_nG_{n-1}+\left(pa^2-ab\right)\right)=u_n\left(G_iG_j+(-1)^{i+j}G_{n-i-1}G_{n-j-1}\right)$$

elde edilir.

(4.3) ifadesinde i ve j yerine özel değerler vererek Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve $\{u_n\}$ dizisinin elemanları arasında bazı özdeşlikler elde edilebilir.

1) (4.3) ifadesinde $i=j=0$ alırsak;

$$\left(G_nG_{n-1}-ab+pa^2\right)u_{-n+1}=u_n(a^2+G_{n-1}^2)$$
$$\frac{u_n}{u_{-n+1}}=\frac{G_nG_{n-1}-ab+pa^2}{a^2+G_{n-1}^2}$$

olur. Burada $u_{-i}=(-1)^{i+1}u_i$ ve $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{pu_{n-1}+u_{n-2}}{u_{n-1}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}=\frac{G_nG_{n-1}-pG_{n-1}^2-ab}{a^2+G_{n-1}^2}$$

elde edilir.

2) (4.3) ifadesinde $i=0, j=-1$ alıdığımızda

$$\left(G_nG_{n-1}-G_0G_{-1}\right)u_{-n}=u_n\left(G_0G_{-1}-G_nG_{n-1}\right)$$

$$u_{-n}=-u_n$$

dir.

3) (4.3) ifadesinde $i=j=\frac{n}{2}$ alırsak

$$(G_nG_{n-1}-G_0G_{-1})u_1=u_n\left(G_{\frac{n}{2}}^2+G_{\frac{n}{2}-1}^2\right)$$

$$G_{\frac{n}{2}}^2+G_{\frac{n}{2}-1}^2=\frac{(G_nG_{n-1}+\left(pa^2-ab\right))b}{u_n}$$

elde edilir.

4) (4.3) ifadesinde $i=n-1, j=1$ alınırsa

$$\left(G_nG_{n-1}-G_0G_{-1}\right)u_1=u_n(G_{n-1}G_1+G_0G_{n-2})$$

$$\left(G_nG_{n-1}-G_0G_{-1}\right)b=u_n(bG_{n-1}+aG_{n-2})$$

$$b\left(G_nG_{n-1}+\left(pa^2-ab\right)\right)=u_n(bG_{n-1}+aG_{n-2})$$

olarak bulunur.

Şimdi de $R(p,1)$ uzayında başka bir ortogonal baz kullanarak n in çift olma durumunda $\frac{p}{u_n}H_u$ dik izdüşüm matrisini elde edelim.

(3.2) deki Genelleştirilmiş Fibonacci sayısının karakteristik denkleminin pozitif kökü α ve negatif kökü β olsun. $\alpha\beta=-1$ olduğu açıktır. α ve β değerlerini kullanarak

$$s=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^{n-1}\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad t=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \beta^2\\ \vdots\\ \beta^{n-1}\end{pmatrix}$$

sütun vektörlerini ele alalım. $\{s,t\}$ $R(p,1)$ de ortogonal bazdır. Dolayısıyla

$$P=\frac{1}{\|s\|^2}ss^T+\frac{1}{\|t\|^2}tt^T \tag{4.4}$$

matrisi $R(p,1)$ uzayı üzerine dik izdüşüm matrisidir. Bu dik izdüşüm matrisi, $\frac{p}{u_n}H_u$ şeklindedir.

Örnek 4.5 $n=6$ aldığımızda $s=\left(1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^5\right)^T$ ve $t=\left(1,\beta,\beta^2,\ldots,\beta^5\right)^T$ olup α ve β nın değerleri yerine yazılırsa

$$s=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \\ \frac{p^2+p\sqrt{p^2+4}+2}{2} \\ \frac{p^3+p^2\sqrt{p^2+4}+3p+\sqrt{p^2+4}}{2} \\ \frac{p^4+p^3\sqrt{p^2+4}+4p^2+2p\sqrt{p^2+4}+2}{2} \\ \frac{p^5+p^4\sqrt{p^2+4}+5p^3+3p^2\sqrt{p^2+4}+5p+\sqrt{p^2+4}}{2} \end{pmatrix}$$

ve

$$t=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2} \\ \frac{p^2-p\sqrt{p^2+4}+2}{2} \\ \frac{p^3-p^2\sqrt{p^2+4}+3p-\sqrt{p^2+4}}{2} \\ \frac{p^4-p^3\sqrt{p^2+4}+4p^2-2p\sqrt{p^2+4}+2}{2} \\ \frac{p^5-p^4\sqrt{p^2+4}+5p^3-3p^2\sqrt{p^2+4}+5p-\sqrt{p^2+4}}{2} \end{pmatrix}$$

vektörleri bulunur. Ayrıca

$$\|s\|^2=\frac{2\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{12}-2}{p^2+p\sqrt{p^2+4}} \quad \text{ve} \quad \|t\|^2=\frac{2\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{12}-2}{p^2-p\sqrt{p^2+4}}$$

olup bulunan değerler dik izdüşüm matrisinde yazılırsa;

$$P=\frac{p^2+p\sqrt{p^2+4}}{2\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{12}-2}ss^T+\frac{p^2-p\sqrt{p^2+4}}{2\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{12}-2}tt^T$$

dir. Elde edilen P dik izdüşüm matrisi

$$P=\frac{p}{p^5b+4p^3b+3pb}\begin{pmatrix} p^4b+3p^2b+b & -p^3b-2pb & p^2b+b & -pb & b & 0 \\ -p^3b-2pb & p^2b+b & -pb & b & 0 & b \\ p^2b+b & -pb & b & 0 & b & pb \\ -pb & b & 0 & b & pb & p^2b+b \\ b & 0 & b & pb & p^2b+b & p^3b+2pb \\ 0 & b & pb & p^2b+b & p^3b+2pb & p^4b+3p^2b+b \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 4.6 Örnek 4.5 te $a=1$, $b=1$ ve $p=2$ aldığımızda;

$$P=\frac{1}{4060+2870\sqrt{2}}ss^T+\frac{1}{4060-2870\sqrt{2}}tt^T$$

$$=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 29 & -12 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ -12 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 12 & 29 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris Modified Pell dizisinin uzayı üzerine dik izdüşüm matrisidir (Alp ve Koçer, 2018).

Örnek 4.7 Örnek 4.5 te $a=0$, $b=1$ ve $p=1$ aldığımızda

$$P=\frac{1}{100+44\sqrt{5}}ss^T+\frac{1}{100-44\sqrt{5}}tt^T$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris klasik Fibonacci dizisinin uzayı üzerine dik izdüşüm matrisidir.

Teorem 4.7 n çift ve $0 \le i, j \le n-1$ iken

$$\frac{\alpha^{i+j+1}}{\alpha^{2n}-1}+\frac{\beta^{i+j+1}}{\beta^{2n}-1}=\frac{1}{u_n}u_{i+j-n+1} \tag{4.5}$$

dir.

İspat (4.1) ve (4.4) de verilen matrislerin ij – inci elemanlarının eşitliğinden

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}\alpha^{i+j}+\frac{\beta^2-1}{\beta^{2n}-1}\beta^{i+j}=\frac{p}{u_n}u_{i+j-n+1}$$

elde edilir. $\alpha^2-1=p\alpha$ ve $\beta^2-1=p\beta$ eşitlikleri dikkate alınırsa sonuç açıktır.

Örnek 4.8 (4.5) ifadesinde $i=1, j=n-1$ olarak alınırsa

$$\frac{b}{u_n}=\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^{2n}-1}+\frac{\beta^{n+1}}{\beta^{2n}-1}$$

$$\frac{b}{u_n}=-\frac{(\beta-\alpha)(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)^2}$$

$$u_n=b\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

bulunur. Bu da $\{u_n\}$ dizisinin Binet formülüdür.

Şu ana kadar elde edilen dik izdüşüm matrisi n nin çift değerleri içindi. Şimdi n nin tek değerleri için dik izdüşüm matrisini elde edelim. $n=2m+1$ için

$$u=\begin{pmatrix} u_{-m} \\ \vdots \\ u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad v=\begin{pmatrix} v_{-m} \\ \vdots \\ v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

sütun vektörlerini ele alalım. Teorem 4.2 den bu vektörlerin H_v Hankel matrisinin özvektörleri olduğu görülür.

$$\|u\|^2 = \frac{2u_m u_{m+1}}{p} \text{ ve } \|v\|^2 = \frac{2v_m v_{m+1}}{p}$$

dir. $u_{-i} = (-1)^{i+1} u_i$ ve $v_{-i} = (-1)^i v_i$ ifadeleri dikkate alınırsa;

$$\sum_{i=-m}^{m} u_i v_i = -\sum_{i=1}^{m} u_i v_i + u_0 v_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i v_i = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlikten $\{u, v\}$, $R(p,1)$ uzayında ortogonal bir bazdır. Teorem 3.7 den bazlar kullanılarak $R(p,1)$ uzayı üzerine dik izdüşüm matrisi

$$P = \frac{p}{2u_m u_{m+1}} uu^T + \frac{p}{2v_m v_{m+1}} vv^T \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.8 H_v, $\{v_n\}$ dizisinin elemanlarıyla tanımlı Hankel matrisi olmak üzere (4.6) ifadesinde verilen dik izdüşüm matrisi

$$P = \frac{pb}{u_m u_{m+1}(p^2+4)} H_v + \frac{(-1)^{m+1} p^2}{u_{2m} u_{2m+2}(p^2+4)} vv^T \tag{4.7}$$

dir.

İspat $\{v_n\}$ dizisinin elemanları ile tanımlı H_v Hankel matrisinin özdeğerleri Teorem 4.2 den $\lambda_1 = \frac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb}$ ve $\lambda_2 = \frac{v_m v_{m+1}}{pb}$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise; $u = (u_{-m}, \ldots, u_0, \ldots u_m)^T$ ve $v = (v_{-m}, \ldots, v_0, \ldots v_m)^T$ dir. Teorem 3.4 den

$$H_v = \frac{u_m u_{m+1}(p^2+4)}{pb} \frac{1}{\|u\|^2} uu^T + \frac{v_m v_{m+1}}{pb} \frac{1}{\|v\|^2} vv^T$$

dır. $\|u\|^2$ ve $\|v\|^2$ nin değerleri yerine yazılırsa

$$H_v = \frac{p^2+4}{2b} uu^T + \frac{1}{2b} vv^T$$

elde edilir. Buradan

$$uu^T = \frac{2b}{p^2+4}\left(H_v - \frac{1}{2b} vv^T\right)$$

olup (4.6) da yerine yazılırsa

$$P=\frac{p}{2u_m u_{m+1}}uu^T+\frac{p}{2v_m v_{m+1}}vv^T$$

$$P=\frac{p}{2u_m u_{m+1}}\frac{2b}{p^2+4}(H_v-\frac{1}{2b}vv^T)+\frac{p}{2v_m v_{m+1}}vv^T$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) ifadelerinden

$$P=\frac{pb}{u_m u_{m+1}(p^2+4)}H_v+(\frac{p}{2v_m v_{m+1}}-\frac{p}{2u_m u_{m+1}(p^2+4)})vv^T$$

olup gerekli işlemler yapılırsa

$$P=\frac{pb}{u_m u_{m+1}(p^2+4)}H_v+\frac{(-1)^{m+1}p^2}{u_{2m}u_{2m+2}(p^2+4)}vv^T$$

bulunur.

Sonuç 4.4 n tek ve $-m\le i,j\le m$ için

$$\frac{p}{2u_m u_{m+1}}u_i u_j+\frac{p}{2v_m v_{m+1}}v_i v_j=\frac{(-1)^{m+1}p^2}{(p^2+4)u_{2m}u_{2m+2}}v_i v_j+\frac{pb}{(p^2+4)u_m u_{m+1}}v_{i+j} \qquad (4.8)$$

dir.

İspat (4.6) ve (4.7) deki dik izdüşüm matrislerinin ij – inci elemanlarının eşitliğinden sonuç açıktır.

(4.8) ifadesinde i ve j yerine özel değerler alırsak u_n ve v_n arasında sağlanan aşağıdaki özdeşlikleri elde edebiliriz.

1) (4.8) ifadesinde $i=j=0$ alırsak

$$\frac{p}{2v_m v_{m+1}}2b2b=\frac{p^2(-1)^{m+1}}{(p^2+4)u_{2m}u_{2m+2}}2b2b+\frac{pb}{u_m u_{m+1}(p^2+4)}2b$$

$$\frac{2u_m u_{m+1}(p^2+4)}{2b^2(p^2+4)u_{2m}u_{2m+2}}=\frac{4b^2p(-1)^{m+1}}{2b^2(p^2+4)u_{2m}u_{2m+2}}+\frac{2v_m v_{m+1}}{2b^2(p^2+4)u_{2m}u_{2m+2}}$$

olup gerekli işlemler yapıldığında

$$v_m v_{m+1}-(p^2+4)u_m u_{m+1}=2b^2p(-1)^m$$

elde edilir.

Burada $b=p=1$ olarak alınırsa Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bilinen

$$L_m L_{m+1}-5F_m F_{m+1}=2(-1)^m$$

eşitliği elde edilir.

Aynı zamanda $p=2$ ve $b=1$ için; Pell ve Pell –Lucas sayıları arasında

$$Q_m Q_{m+1} - 8P_m P_{m+1} = 4(-1)^m$$

özdeşliği elde edilir.

2) (4.8) ifadesinde $i = j = m$ alırsak

$$\frac{p}{2u_m u_{m+1}} u_m u_m + \frac{p}{2v_m v_{m+1}} v_m v_m = \frac{p^2(-1)^{m+1} b}{(p^2+4)u_m v_m u_{2m+2}} v_m v_m + \frac{b}{u_m u_{m+1}(p^2+4)} v_{2m}$$

$$\frac{u_m v_{m+1} + v_m u_{m+1}}{2u_{m+1} v_{m+1}} = \frac{pb(-1)^{m+1}\left(bu_{2m+1} + b^2(-1)^m\right) + bv_{2m} u_{2m+2}}{(p^2+4)u_m u_{m+1} u_{2m+2}}$$

olur. Buradan

$$bu_{4m+2} = v_{2m} u_{2m+2} - pb^2$$

elde edilir.

Bu özdeşlikte $b = p = 1$ aldığımızda Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki

$$F_{4m+2} = L_{2m} F_{2m+2} - 1$$

özdeşliği bulunur.

$p = 2$ ve $b = 1$ için; Pell ve Pell –Lucas sayıları arasındaki

$$P_{4m+2} = Q_{2m} P_{2m+2} - 2$$

özdeşliği elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ikinci dereceden rekürans bağıntılarının uzayındaki $\{G_n\}$, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri ele alınmıştır. Bu uzaydaki ortonormal bazlar göz önüne alınarak elde edilen dik izdüşüm matrisi verilmiştir. Dik izdüşüm matrisinden yararlanılarak $\{G_n\}$, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin elemanları arasında bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Bu özdeşliklere özel değerler verilerek Fibonacci ve Lucas sayıları ile Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında özdeşlikler bulunmuştur.

Bu çalışmada $\{G_n\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi yerine Horadam dizisi kullanılarak, yapılan tüm çalışmaların genel hali ve Horadam sayıları için yeni özdeşlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alp, Y., Koçer, E.G., The Pell, Modified Pell Identitites via Orthogonal Projection, Journal of Applied Mathematics and Computation(JAMC), 2(3), 67-78, 2018.

Bretscher, O., Linear Algebra with Applications, Fifth Edition, Pearson Education, 2015.

Dupree, E., Mathes, B., Singular Values of $k-$Fibonacci and $k-$Lucas Hankel Matrices, Int. J. Contemp. Math Sciences, 47(7), 2327-2339, 2012.

Fraleigh, J.B., Beauregard, R.A., Linear Algebra, Addision-Wesley Publishing Company, 1995.

Hawkins, K., Hebert-Johnson, U., and Mathes B., The Fibonacci Identities of Orthogonality, Linear Algebra and Its Applications, 457, 80-89, 2015.

Hogben, L., Handbook of Linear Algebra, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, 2006.

Horadam, A.F., Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers, The Fibonacci Quarterly, 3(3), 161-176, 1965.

Horzum T., Koçer E.G., On Some Properties of Horadam Polynomials, International Mathematical Forum, 4(25), 1243-1255, 2009.

Kalman, D., Mena, R., The Fibonacci Numbers-exposed, Mathematics Magazine, 76(3), 2003.

Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, AWiley-Interscience Publication, 2001.

Mansour, T., A Note On Sums of $k-$th Power Of Horadam' s Sequence, Arxiv: Math/030215v1 (Math. Co), 2 February 2003.

Shen, S., On The Norms of Toeplitz Matrices Involving $k-$Fibonacci and $k-$Lucas Numbers, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(8), 363-368, 2012.

Solak, S., On The Norms of Circulant Matrices with The Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 160, 125-132, 2005.

Solak, S., Bahsi, M., On The Spectral Norms of Hankel Matrices with Fibónacci and Lucas Numbers, Selcuk Journal Appl. Math., 12(01), 71-76, 2011.

Solak, S., Bahsi, M., On The Spectral Norms of Toeplitz Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42(1), 15-19, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Yasemin Alp
Uyruğu	: T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	: Isparta-26/09/1994
Telefon	: 05064008380
e-mail	: yaseminalp66@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Konya Anadolu Lisesi, Meram, Konya	2012
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2016
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2017-	Muzaffer Tuğsavul Ortaokulu	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Alp, Y., Koçer, E.G., The Identities for Generalized Fibonacci Numbers via Orthogonal Projection, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 25(1), 167-177, 2019.